Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 2, 2. Aufl. (Version 2010), Kapitel 5

12 Bilinear-und Sesquilinearformen

Abschnitt 12.A, Aufg. 1, p. 363 (1.6.2012):

Man bestimme die Ränge der Bilinearformen $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die durch die folgenden Fundamentalmatrizen bzgl. der Standardbasis gegeben werden, und entscheide, ob sie nicht-ausgeartet sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Für die Vektoren $x = (1, -1, 3)$, $y = (2, -1, 0)$ und $x = (0, -1, 3)$, $y = (3, 2, -1)$ bestimme man jeweils $\Phi(x, y)$.

Lösung: Die Determinante der ersten Matrix ist $-6 - 1 + 45 = -38 \neq 0$, sie hat also wie Φ den maximal möglichen Rang 3 und die zugehörige Bilinearform Φ ist eine vollständige Dualität, also erst recht nicht-ausgeartet. Für sie gilt:

$$\Phi\big((1, -1, 3), (2, -1, 0)\big) = (1, -1, 3) \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2, 0, 8) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4,$$

$$\Phi\big((0, -1, 3), (3, 2, -1)\big) = (0, -1, 3) \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-3, 5, 8) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -7.$$

Die dritte Zeile der zweiten Matrix ist die Summe der beiden ersten Zeilen, der Rang der Matrix ist also höchstens 2. Da die ersten beiden Zeilen der Matrix offensichtlich linear unabhängig sind, ist der Rang der Matrix und damit der Rang von Φ gleich 2. Daher ist Φ ausgeartet, d.h. nicht nicht-ausgeartet, und es gilt:

$$\Phi\big((1, -1, 3), (2, -1, 0)\big) = (1, -1, 3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (13, 9, 22) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 17,$$

$$\Phi\big((0, -1, 3), (3, 2, -1)\big) = (0, -1, 3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (10, 10, 20) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 30.$$ •

Abschnitt 12.A, Aufg. 2, p. 363 (1.6.2012):

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente eines n-dimensionalen Vektorraums und $f_1, \ldots, f_n$ Linearformen auf V. Genau dann sind $x_1, \ldots, x_n$ *und* $f_1, \ldots, f_n$ Basen von V bzw. V^*, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Beweis: Die angegebene Determinate ist die Gramsche Determinante $G_\Phi(x_1, \ldots, x_n; f_1, \ldots, f_n)$ der zugehörigen Gramschen Matrix bzgl. der natürlichen Dualität $\Phi : V \times V^* \to K$ mit $\Phi(x, f) := f(x)$. Die Aussage folgt daher unmittelbar aus dem Gramschen Kriterium 12.A.10. •

Abschnitt 12.A, Aufg. 3, p. 363 (1.6.2012):

Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $\Phi : V \times W \to K$ eine bilineare bzw. sesquilineare Funktion. Für Unterräume $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ sei Φ' die Beschränkung von Φ auf $V' \times W'$. Dann gilt $\operatorname{Rang} \Phi \geq \operatorname{Rang} \Phi'$. Insbesondere ist $\operatorname{Rang} \Phi \geq m$, falls Φ' nicht-ausgeartet und $m := \operatorname{Dim} V' = \operatorname{Dim} W'$ ist.

Beweis: Wir ergänzen eine Basis $v_1, \ldots, v_p$ von V' zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und eine Basis $w_1, \ldots, w_q$ von W' zu einer Basis $w_1, \ldots, w_n$ von W. Die Gramsche Matrix von Φ' ist also eine Teilmatrix der Gramschen Matrix von Φ. Daher ist Rang $\Phi \geq$ Rang Φ'. Ist Φ' nicht-ausgeartet und $m :=$ Dim $V' =$ Dim W', so besitzt die zugehörige Gramsche Matrix von Φ einen $m \times m$-Minor $\neq 0$. Nach dem Minorenkriterium 9.C.11 ist dann ihr Rang und damit Rang Φ mindestens m. •

Abschnitt 12.A, Aufg. 4, p. 363 (1.6.2012):

Sei V ein K-Vektorraum und $\Phi : V \times V^* \to K$ die natürliche Dualität. Dann ist die Abbildung $\Phi_1 : V^* \to V^*$ die Identität und die Abbildung $\Phi_2 : V \to (V^*)^* = V^{**}$ der kanonische injektive Homomorphismus σ_V von V in sein Bidual, vgl. Beispiel 5.G.14. Φ_2 ist genau dann ein Isomorphismus, wenn V endlichdimensional ist.

Beweis: Definitionsgemäß gilt $\Phi_1(f)(x) = \Phi(x, f) = f(x)$ für alle $x \in V$ und $f \in V^*$, also $\Phi_1(f) = f$ und somit $\Phi_1 = \mathrm{id}_{V^*}$, sowie $\Phi_2(x)(f) = \Phi(x, f) = f(x) = \big(\sigma_V(x)\big)(f)$, also $\Phi_2(x) = \sigma_V(x)$ und somit $\Phi_2 = \sigma_V$.

Ist V endlichdimensional, so ist Φ eine vollständige Dualität (z. B. weil $\Phi_1 = \mathrm{id}_{V^*}$ ist, vgl. auch Beispiel 12.A.6), also $\Phi_2 = \sigma_V$ ein Isomorphismus.

Ist umgekehrt V nicht endlichdimensional, so sei $v_i,\ i \in I$, eine Basis von V. Dann sind die Linearformen v_i^*, $i \in I$, mit $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ linear unabhängig. Aus $\sum_{i \in I} a_i v_i^* = 0$ mit $a_i \in K$ folgt nämlich $a_j = \sum_{i \in I} a_i v_i^*(v_j) = 0$ für alle $j \in J$. Die v_i^* erzeugen V^* aber nicht. Beispielsweise lässt sich die Linearform $g \in V^*$ mit $g\big(\sum_{i \in I} a_i v_i\big) := \sum_{i \in I} a_i$ nicht durch die v_i^* darstellen. In einer Darstellung $g = \sum_{i \in I} b_i v_i^*$ wäre nämlich $b_i \neq 0$ nur für endlich viele i. Ist also $i_0 \in I$ ein Index mit $b_{i_0} = 0$, so ergäbe sich der Widerspruch $1 = g(v_{i_0}) = \sum_{i \in I} b_i v_i^*(v_{i_0}) = b_{i_0} = 0$.

Nach Satz 3.A.16, der, wie im Anschluss an 3.A.19 erwähnt, auch bei beliebigem I gilt, lasssen sich die v_i^*, $i \in I$, durch weitere Elemente $e_j \in V^*$, $j \in J$, zu einer Basis von V^* ergänzen. Wir wählen dann ein $j_0 \in J$ und definieren eine Linearform $h \in V^{**}$ durch $h(v_i^*) := 0$ für alle i, $h(e_j) = 0$ für alle $j \neq j_0$ und $h(e_{j_0}) = 1$. Wäre nun $\sigma_V : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus, so gäbe es ein $x = \sum_{i \in I} a_i v_i \in V$ mit $h = \sigma_V(x) = \sigma_V\big(\sum_{i \in I} a_i v_i\big)$. Es folgte $a_i = \sum_{j \in I} a_j v_i^*(v_j) = \sigma_V\big(\sum_{j \in I} a_j v_j\big)(v_i^*) = h(v_i^*) = 0$ für alle i, somit $x = 0$ und schließlich $h = 0$ im Widerspruch zu $h(e_{j_0}) = 1$. •

Zu dieser Aufgabe vergleiche auch Bemerkung 5.G.6 und 5.G, Aufg. 2.

Abschnitt 12.A, Aufg. 5, p. 363 (1.6.2012):

Definiert $\Phi : V \times W \to K$ eine vollständige Dualität, so sind die Vektorräume V und W endlichdimensional mit Dim $V =$ Dim W.

Beweis: Definiert $\Phi : V \times W \to K$ eine vollständige Dualität, so sind die kanonischen Abbildungen $\Phi_1 : W \to V^*$ mit $\Phi_1(y) = \big(x \mapsto \Phi(x, y)\big)$ und $\Phi_2 : V \to W^*$ mit $\Phi_2(x) = \big(y \mapsto \overline{\Phi(x, y)}\big)$ bijektiv. Nach 5.G, Aufg. 12 ist dann auch die duale Abbildung $\Phi_1^* : V^{**} \to W^*$, die für $L \in V^{**}$ durch $\Phi_1^*(L)(y) := L\big(x \mapsto \Phi(x, y)\big)$ für alle $y \in W$ definiert ist, bijektiv. Da $\overline{\Phi}_2 : V \to W^*$ mit $\overline{\Phi}_2(x) = \big(y \mapsto \Phi(x, y)\big)$ ebenfalls bijektiv ist, ist auch $(\Phi_1^*)^{-1} \circ \overline{\Phi}_2 : V \to V^{**}$ bijektiv. Haben wir gezeigt, dass diese Abbildung gleich der kanonischen Abbildung σ_V ist, so liefert Aufg. 4, dass V und somit V^* endlichdimensional sind. Da Φ_1 bijektiv ist, muss auch W endlichdimensional sein. Dim $V =$ Dim W folgt nun aus Satz 12.A.9.

Um $(\Phi_1^*)^{-1} \circ \overline{\Phi}_2 = \sigma_V$, d.h. $\overline{\Phi}_2 = \Phi_1^* \circ \sigma_V$, zu zeigen, fixieren wir ein $x_0 \in V$. Dann gilt für alle $y \in W$

$$\Phi_1^*\big(\sigma_V(x_0)\big)(y) = \sigma_V(x_0)\big(x \mapsto \Phi(x, y)\big) = \Phi(x_0, y) = \overline{\Phi}_2(x_0)(y_0)\,.$$

Es folgt $\Phi_1^*\big(\sigma_V(x_0)\big) = \overline{\Phi}_2(x_0)$, also schließlich $\Phi_1^* \circ \sigma_V = \overline{\Phi}_2$. •

Abschnitt 12.A, Aufg. 7, p. 363 (1.6.2012):

Die Funktion $\Phi : V \times W \to K$ definiere eine vollständige Dualität. Zu jeder Basis $\mathfrak{v} = (v_i)_{i \in I}$ von V existiert dann genau eine Basis $\mathfrak{w} = (w_i)_{i \in I}$ von W mit $\Phi(v_i, w_j) = \delta_{ij}$, d.h. $\mathfrak{G}^{\mathfrak{v};\mathfrak{w}}(\Phi) = \mathfrak{E}_I$. Analog existiert zu jeder Basis $\mathfrak{w} = (w_i)_{i\in I}$ von W genau eine Basis $\mathfrak{v} = (v_i)_{i\in I}$ von V mit $\Phi(v_i, w_j) = \delta_{ij}$. (Die Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ heißen in dieser Situation duale Basen bzgl. Φ.) Man bestimme die duale Basis $\mathfrak{w} = (w_1, w_2, w_3)$ zur Standardbasis $\mathfrak{v} = (e_1, e_2, e_3)$ für die erste der Funktionen Φ aus Aufg. 1.

Beweis: Nach Aufg. 5 sind V und W endlichdimensional. Ist $v_i,\ i \in I$, eine Basis von V, $v_i^*,\ i \in I$, die dazu duale Basis von V^* und $\Phi_1 : W \to V^*$ mit $\Phi_1(y) = \big(x \mapsto \Phi(x, y)\big)$ der zugehörige kanonische Isomorphismus, so setzen wir $w_j := \Phi_1^{-1}(v_j^*),\ j \in I$. Dann ist $w_j,\ j \in I$, eine Basis von W, und es gilt

$$\Phi(v_i, w_j) = \Phi_1(w_j)(v_i) = \Phi_1\big(\Phi_1^{-1}(v_j^*)\big)(v_i) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}\ ,$$

d.h. $w_j,\ j \in I$, ist die gesuchte Φ-duale Basis zu $v_i,\ i \in I$. Analog findet man die Φ-duale Basis von V zur Basis $\mathfrak{w}$ von W.

Die erste Matrix in Aufg. 1 definiert eine vollständige Dualität. Sie ist nach Beispiel 12.A.6 die Matrix der zugehörigen kanonischen Abbildung $\Phi_1 : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ bzgl. der Basen e_1, e_2, e_3 bzw. e_1^*, e_2^*, e_3^*. Φ_1^{-1} wird dann bzgl. dieser Basen durch die dazu inverse Matrix

$$\frac{1}{38}\begin{pmatrix} -7 & 15 & -5 \\ -9 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Ihre Spalten liefern die gesuchte Dualbasis $w_1 := \frac{1}{38}(-7, -9, 3)$, $w_2 := \frac{1}{38}(15, 3, -1)$, $w_3 := \frac{1}{38}(-5, -1, 13)$ von $\mathbb{R}^3$ zu e_1, e_2, e_3 bzgl. Φ. •

Abschnitt 12.A, Aufg. 9, p. 364 (1.6.2012) :

Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Für zwei lineare Abbildungen $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ und $g \in \operatorname{Hom}_K(W, V)$ gilt stets $\operatorname{Sp} fg = \operatorname{Sp} gf$. Die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(W, V) \times \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow K \qquad \text{mit} \qquad (g, f) \longmapsto \operatorname{Sp} gf$$

ist bilinear und definiert eine vollständige Dualität. Im Fall $W = K$ ergibt sich die natürliche Dualität $V \times V^* \longrightarrow K$.

Beweis: Sei $m := \operatorname{Dim}_K V$ und $n := \operatorname{Dim}_K W$. Wrir dürfen annehmen, dass $m, n > 0$ gilt. Nach Übergang zu Basen von V bzw. W genügt es zu zeigen, dass die Abbildung

$$\mathrm{M}_{m,n}(K) \times \mathrm{M}_{n,m}(K) \to K \qquad \text{mit} \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mapsto \operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

für $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$, bilinear ist und eine vollständige Dualität definiert. Die Bilinearität folgt dabei sofort aus der Linearität der Spurabbildung.

In der Zeile zum Index (i, j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, der Fundamentalmatrix dieser Spurform bzgl. der Standardbasen $\mathfrak{E}_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, von $\mathrm{M}_{m,n}(K)$ bzw. $\mathfrak{E}_{rs}$, $1 \le r \le n$, $1 \le s \le m$, von $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ stehen dann die Elemente $\operatorname{Sp}(\mathfrak{E}_{ij}\mathfrak{E}_{rs}) = \operatorname{Sp}(\delta_{jr}\mathfrak{E}_{is}) = \delta_{jr}\operatorname{Sp}\mathfrak{E}_{is} = \delta_{jr}\delta_{is}$, vgl. die Produktformel für die $\mathfrak{E}_{ij}$ im Anschluss an Satz 8.A.9. Das einzige Element $\neq 0$ in dieser Zeile steht also in der Spalte mit dem Index (j, i) und ist überdies gleich 1. Daher hat die gesuchte Fundamentalmatrix den Maximalrang mn. Die zugehörige Bilinearform ist somit eine vollständige Dualität.

Im Fall $W = K$ identifiziert sich $\operatorname{Hom}_K(W, V)$ mit V und $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ ist der Dualraum V^*. Für $v = g \in V$ und $f \in V^*$ ist $gf : V \to V$ die lineare Abbildung $x \mapsto f(x)v$, deren Spur offensichtlich $f(v)$ ist. •

Abschnitt 12.B, Aufg. 7, p. 374 (1.6.2012) :

a) Die symmetrischen Bilinearformen auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum bilden einen K-Vektorraum der Dimension $\binom{n+1}{2}$.

b) Die komplex-hermiteschen Formen auf einem n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum bilden einen (nur) reellen Vektorraum der Dimension n^2.

Beweis: a) Ist $\mathfrak{v} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, so ist $\Phi \mapsto \mathfrak{G}^{\mathfrak{v},\mathfrak{v}}(\Phi)$ ein K-Isomorphismus des Raums der K-Bilinearformen auf V auf den Vektorraum $\mathrm{M}_n(K)$. Dem Unterraum der symmetrischen Bilinearformen entspricht dabei der Unterraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K. Eine symmetrische Matrix wird aber festgelegt durch die n Elemente in der Hauptdiagonalen und die $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1$ Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen, also durch insgesamt $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \binom{n+1}{2}$ Elemente.

Eine Basis des Raums der symmetrischen $n\times n$-Matrizen bilden die $\binom{n+1}{2}$ Matrizen $\mathfrak{E}_{ii}$, $1\le i\le n$; $\mathfrak{E}_{ij}+\mathfrak{E}_{ji}$, $1\le i<j\le n$.

b) Ist $\mathfrak{v}=(v_1,\dots,v_n)$ eine $\mathbb{C}$-Basis von V, so ist $\Phi\mapsto\mathfrak{G}^{\mathfrak{v},\mathfrak{v}}(\Phi)$ ein $\mathbb{R}$-Isomorphismus des Raums der Sesquilinearformen auf den ($\mathbb{R}$-Vektor-)Raum $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Dem Unterraum der komplex-hermiteschen Sesquilinearformen entsprecht dabei der Unterraum der komplex-hermiteschen $n\times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Eine komplex-hermitesche Matrix wird aber festgelegt durch die n reellen Zahlen in der Hauptdiagonalen und die $(n-1)+(n-2)+\cdots+1$ komplexen Zahlen oberhalb der Hauptdiagonalen, die ihrerseits über $\mathbb{R}$ durch Angabe von Real- und Imaginärteil bestimmt sind. Insgesamt werden sie also durch

$$n+2\big((n-1)+(n-2)+\cdots+1\big)=n+n(n-1)=n^2$$

reelle Zahlen bestimmt. Eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums der komplex-hermiteschen $n\times n$-Matrizen bilden die n^2 Matrizen $\mathfrak{E}_{ii}$, $1\le i\le n$; $\mathfrak{E}_{ij}+\mathfrak{E}_{ji}$, $\mathrm{i}\,(\mathfrak{E}_{ij}-\mathfrak{E}_{ji})$, $1\le i<j\le n$. •

Abschnitt 12.B, Beweis von **Satz 12.B.2** (2)und Variante zu **12.B, Aufg. 8**, p. 374 (1.6.2012):

Für jede Sesquilinearform Φ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V gilt

$$\Phi(v,w)=\frac{1}{4}\big(\Phi(v+w\,,v+w)-\Phi(v-w\,,v-w)\big)+\frac{\mathrm{i}}{4}\big(\Phi(v+\mathrm{i}\,w\,,v+\mathrm{i}\,w)-\Phi(v-\mathrm{i}\,w\,,v-\mathrm{i}\,w)\big).$$

Insbesondere ist Φ durch die Werte $\Phi(x,x)$, $x\in V$, auf der Diagonalen bestimmt. Φ ist genau dann komplex-hermitesch, wenn $\Phi(x,x)\in\mathbb{R}$ ist für alle $x\in V$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\big(\Phi(v+w\,,v+w)-\Phi(v-w\,,v-w)\big)+\frac{\mathrm{i}}{4}\big(\Phi(v+\mathrm{i}\,w\,,v+\mathrm{i}\,w)-\Phi(v-\mathrm{i}\,w\,,v-\mathrm{i}\,w)\big)\\
&=\frac{1}{4}\Big(\big(\Phi(v,v)+\Phi(v,w)+\Phi(w,v)+\Phi(w,w)\big)-\big(\Phi(v,v)-\Phi(v,w)-\Phi(w,v)+\Phi(w,w)\big)\Big)+\\
&\quad+\frac{\mathrm{i}}{4}\Big(\big(\Phi(v,v)+\bar{\mathrm{i}}\Phi(v,w)+\mathrm{i}\Phi(w,v)+\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}\Phi(w,w)\big)-\big(\Phi(v,v)-\bar{\mathrm{i}}\Phi(v,w)-\mathrm{i}\Phi(w,v)+\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}\Phi(w,w)\big)\Big)\\
&=\frac{1}{2}\big(\Phi(v,w)+\Phi(w,v)\big)+\frac{\mathrm{i}}{2}\big(\bar{\mathrm{i}}\Phi(v,w)+\mathrm{i}\Phi(w,v)\big)\\
&=\frac{1}{2}\big(\Phi(v,w)+\Phi(w,v)+\Phi(v,w)-\Phi(w,v)\big)=\Phi(v,w)\,.
\end{aligned}$$

Aus $\Phi(u,u)\in\mathbb{R}$ für alle $u\in V$ folgt mit dieser Formel sofort: $\Phi(w,v)=$

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}\big(\Phi(w+v\,,w+v)-\Phi(w-v\,,w-v)\big)+\frac{\mathrm{i}}{4}\big(\Phi(w+\mathrm{i}\,v\,,w+\mathrm{i}\,v)-\Phi(w-\mathrm{i}\,v\,,w-\mathrm{i}\,v)\big)\\
&=\frac{1}{4}\big(\Phi(v+w\,,v+w)-\Phi(v-w\,,v-w)\big)+\frac{\mathrm{i}}{4}\big(\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}\Phi(v-\mathrm{i}\,w\,,v-\mathrm{i}\,w)-\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}}\Phi(v+\mathrm{i}\,w\,,v+\mathrm{i}\,w)\big)\\
&=\frac{1}{4}\big(\Phi(v+w\,,v+w)-\Phi(v-w\,,v-w)\big)+\frac{\mathrm{i}}{4}\big(\Phi(v-\mathrm{i}\,w\,,v-\mathrm{i}\,w)-\Phi(v+\mathrm{i}\,w\,,v+\mathrm{i}\,w)\big)\\
&=\frac{1}{4}\big(\Phi(v+w\,,v+w)-\Phi(v-w\,,v-w)\big)-\frac{\mathrm{i}}{4}\big(\Phi(v+\mathrm{i}\,w\,,v+\mathrm{i}\,w)-\Phi(v-\mathrm{i}\,w\,,v-\mathrm{i}\,w)\big)\\
&=\overline{\Phi(v,w)}\,,
\end{aligned}$$

da $\Phi(v+w\,,v+w)-\Phi(v-w\,,v-w)$ und $\Phi(v+\mathrm{i}\,w\,,v+\mathrm{i}\,w)-\Phi(v-\mathrm{i}\,w\,,v-\mathrm{i}\,w)$ nach Voraussetzung über Φ reell sind.

Ist umgekehrt Φ komplex-hermitesch, so gilt $\Phi(x,x)=\overline{\Phi(x,x)}$, also $\Phi(x,x)\in\mathbb{R}$ für alle $x\in V$. •

Abschnitt 12.B, Aufg. 10, p. 374 (1.6.2012):

Sei K ein Körper mit Char $K\neq 2$. Für eine nicht-ausgeartete und nicht anisotrope symmetrische Form Φ auf einem K-Vektorraum V ist die zugehörige quadratische Form $Q:V\to K$ surjektiv.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es einen isotropen Vektor $x\in V$, d.h. einen Vektor x mit $x\neq 0$ und $\Phi(x,x)=0$. Da Φ nicht-ausgeartet ist, ist die Abbildung Φ_2 injektiv. Insbesondere ist die Linearform $z\mapsto\Phi(x,z)$ nicht 0, d.h. es gibt ein $z\in V$ mit $\Phi(x,z)=1$.

Zu $a \in K$ wählen wir nun $t := \frac{1}{2}\big(a - \Phi(z,z)\big)$. Da Φ symmetrisch ist, gilt dann für $y := z + tx \in V$:

$$Q(y) = \Phi(y,y) = \Phi(z+tx, z+tx) = \Phi(z,z) + 2t + t^2\Phi(x,x) = \Phi(z,z) + 2\tfrac{1}{2}\big(a - \Phi(z,z)\big) = a\,. \bullet$$

Abschnitt 12.B, Aufg. 10, p. 374 (1.6.2012):

Sei x_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis des K-Vektorraums V bzgl. der Form Φ. Für ein beliebiges $x \in V$ gilt dann $x = \sum_{i\in I} \Phi(x, x_i)\, x_i$.

Beweis: Da x_i, $i \in I$, eine Basis von V ist, gibt es $(a_i) \in K^{(I)}$ mit $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$. Wegen der Orthogonalität der x_i folgt $\Phi(x, x_j) = \Phi\big(x, \sum_{i\in I} a_i x_i\big) = \sum_{i\in I} a_i \Phi(x_i, x_j) = \sum_{i\in I} a_i \delta_{ij} = a_j$ für alle $j \in I$, also $x = \sum_{i\in I} \Phi(x, x_i)\, x_i$. •

Abschnitt 12.B, Aufg. 15, p. 374 (1.6.2012):

Seien Φ und Ψ zwei symmetrische oder zwei komplex-hermitesche Formen auf dem K-Vektorraum V. Die Orthogonalität möge für beide Formen übereinstimmen, d.h. es gelte für $x, y \in V$ genau dann $\Phi(x,y) = 0$, wenn $\Psi(x,y) = 0$ ist. Dann unterscheiden sich Φ und Ψ nur um einen Faktor $a \in K^\times$ (der im komplex-hermiteschen Fall sogar in $\mathbb{R}$ liegt).

Beweis: (1) Ist Φ und damit auch Ψ gleich 0, so kann man jedes $a \in K^\times$ wählen. Andernfalls gibt es $x_0, y_0 \in V$ mit $\Phi(x_0, y_0) \neq 0$. Dazu existiert ein $a \in K$ mit $\Psi(x_0, y_0) = a\,\Phi(x_0, y_0)$. Da nach Voraussetzung auch $\Psi(x_0, y_0) \neq 0$ ist, folgt $a \neq 0$. Zu einem beliebigen $x \in V$ wählen wir $t := -\Phi(x, y_0)\,\Phi(x_0, y_0)^{-1}$ und erhalten $\Phi(x + tx_0, y_0) = \Phi(x, y_0) + t\,\Phi(x_0, y_0) = \Phi(x, y_0) - \Phi(x, y_0) = 0$. Die Voraussetzung liefert dann $0 = \Psi(x + tx_0, y_0) = \Psi(x, y_0) + t\,\Psi(x_0, y_0) = \Psi(x, y_0) + ta\,\Phi(x_0, y_0) = \Psi(x, y_0) - a\,\Phi(x, y_0)$, also $\Psi(x, y_0) = a\,\Phi(x, y_0)$ für alle $x \in V$. Im komplex-hermiteschen Fall gilt $\Psi(y_0, y_0)$, $\Phi(y_0, y_0) \in \mathbb{R}$ und somit auch $a \in \mathbb{R}$.

Sind $x_1, y_1 \in V$ weitere Elemente mit $\Phi(x_1, y_1) \neq 0$, so gibt es analog ein $b \neq 0$ in K (das im komplex-hermiteschen Fall in $\mathbb{R}$ liegt) mit $\Psi(x, y_1) = b\,\Phi(x, y_1)$ für alle $x \in V$. Da Φ und Ψ hermitesch sind, gilt dann insbesondere $b\,\Phi(y_0, y_1) = \Psi(y_0, y_1) = \overline{\Psi(y_1, y_0)} = a\,\overline{\Phi(y_1, y_0)} = a\,\Phi(y_0, y_1)$. Bei $\Phi(y_0, y_1) \neq 0$ folgt $a = b$.

(2) Wendet man die Überlegungen aus (1) auf $x_0' := y_0$, $y_0' := x_0$, $x_1' := y_1$, $y_1' := x_1$ an, vertauscht also die Rollen der x_i und y_i, so erhält man ganz analog $b\,\Phi(y_0', y_1') = a\,\Phi(y_0', y_1')$, d.h. $b\,\Phi(x_0, x_1) = a\,\Phi(x_0, x_1)$. Bei $\Phi(x_0, x_1) \neq 0$ folgt ebenfalls $a = b$.

(3) Sei schließlich $\Phi(y_0, y_1) = \Phi(x_0, x_1) = 0$ und somit auch $\Psi(y_0, y_1) = \Psi(x_0, x_1) = 0$. Dann wenden wir die Überlegungen aus (1) mit $y_0'' := x_1 + y_0$ statt y_0 an. Dafür gilt $\Phi(x_0, y_0'') = \Phi(x_0, x_1) + \Phi(x_0, y_0) = \Phi(x_0, y_0)$ und ebenso $\Psi(x_0, y_0'') = \Psi(x_0, y_0)$. Wie in (1) folgt $b\,\Phi(y_0'', y_1) = a\,\Phi(y_0'', y_1)$. Diesmal ist $\Phi(y_0'', y_1) = \Phi(x_1, y_1) + \Phi(y_0, y_1) = \Phi(x_1, y_1) \neq 0$, und wir erhalten wie gewünscht $a = b$. •

Abschnitt 12.B, Aufg. 16, p. 374 (1.6.2012):

a) Sei Φ eine Bilinearform auf dem K-Vektorraum V. Aus $\Phi(x,y) = 0$ folge stets $\Phi(y,x) = 0$, $x, y \in V$. Dann ist Φ symmetrisch oder alternierend.

b) Sei Φ eine Sesquilinearform auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Aus $\Phi(x,y) = 0$ folge stets $\Phi(y,x) = 0$, $x, y \in V$. Dann ist $\Phi = a\Psi$ (konstantes) Vielfaches einer hermiteschen Sesquilinearform Ψ auf V. (Ist dabei $a \in \mathbb{R}\mathrm{i}$ rein-imaginär, so ist Φ (komplex-)schiefhermitesch, d.h. es gilt $\Phi(x,y) = -\overline{\Phi(y,x)}$ für alle $x, y \in V$.)

Beweis: a) Φ sei nicht alternierend. Dann gibt es ein $x_0 \in V$ mit $\Phi(x_0, x_0) \neq 0$. Wir zeigen $\Phi(x_0, y) = \Phi(y, x_0)$ für alle $y \in V$. Bei $\Phi(x_0, y) = 0$ gilt dies nach Voraussetzung. Sei also $\Phi(x_0, y) \neq 0$. Für $t := -\Phi(x_0, x_0)\,\Phi(x_0, y)^{-1}$ gilt dann $t \neq 0$ sowie $\Phi(x_0, x_0 + ty) = \Phi(x_0, x_0) + t\,\Phi(x_0, y) = 0$ und folglich nach Voraussetzung auch $0 = \Phi(x_0 + ty, x_0) = \Phi(x_0, x_0) + t\,\Phi(y, x_0)$. Es folgt $t\,\Phi(x_0, y) = -\Phi(x_0, x_0) = t\,\Phi(y, x_0)$ und somit $\Phi(x_0, y) = \Phi(y, x_0)$.

Seien nun $y, z \in V$ beliebig. Wir haben $\Phi(y,z) = \Phi(z,y)$ zu zeigen.

Bei $\Phi(x_0, y) \neq 0$ gilt für $s := -\Phi(z, y)\,\Phi(x_0, y)^{-1} \in K$ dann $\Phi(sx_0 + z, y) = s\,\Phi(x_0, y) + \Phi(z, y) = 0$ und folglich nach Voraussetzung auch $\Phi(y, sx_0 + z) = 0$, also $s\,\Phi(y, x_0) + \Phi(y, z) = 0$ und somit $\Phi(y, z) = -s\,\Phi(y, x_0) = -s\,\Phi(x_0, y) = \Phi(z, y)$, da $\Phi(x_0, y) = \Phi(y, x_0)$ bereits gezeigt wurde.

Bei $\Phi(x_0, y) = 0$, also auch $\Phi(y, x_0) = 0$, gilt für $r := -\Phi(z, x_0+y)\,\Phi(x_0, x_0)^{-1} \in K$ schließlich

$$\Phi(rx_0+z, x_0+y) = r\Phi(x_0, x_0) + r\Phi(x_0, y) + \Phi(z, x_0+y) = r\Phi(x_0, x_0) + \Phi(z, x_0+y) = 0\,.$$

Nach Voraussetzung folgt $\Phi(x_0+y, rx_0+z) = 0$, also $r\Phi(x_0, x_0) + \Phi(y, x_0) + \Phi(x_0+y, z) = r\Phi(x_0, x_0) + \Phi(x_0+y, z) = 0$, und somit

$$\Phi(y, z) = \Phi(x_0+y, z) - \Phi(x_0, z) = -r\Phi(x_0, x_0) - \Phi(x_0, z) = \Phi(z, x_0+y) - \Phi(z, x_0) = \Phi(z, y)\,,$$

da $\Phi(x_0, z) = \Phi(z, x_0)$ ebenfalls aus dem eingangs Gezeigten folgt.

b) Sei $\Phi \neq 0$. Wir zeigen zunächst, dass es ein $x \in V$ mit $\Phi(x, x) \neq 0$ gibt. Andernfalls wäre Φ schiefsymmetrisch, d.h. $\Phi(x, y) = -\Phi(y, x)$ für beliebige $x, y \in V$. Dann ist aber auch $\mathrm{i}\Phi(x, y) = \Phi(\mathrm{i}x, y) = -\Phi(y, \mathrm{i}x) = \mathrm{i}\Phi(x, y)$, also $\Phi(x, y) = \Phi(y, x) = -\Phi(x, y)$ und daher Φ die Nullform.

Es gibt also ein $x_0 \in V$ mit $a := \Phi(x_0, x_0) \neq 0$. Wir betrachten die Sesquilinearform $\Psi := a^{-1}\Phi$, für die $\Psi(x_0, x_0) = 1$ ist, und zeigen zunächst $\Psi(y, x_0) = \overline{\Psi(x_0, y)}$ für alle $y \in V$. Bei $\Psi(x_0, y) = 0$ gilt dies nach Voraussetzung über Φ. Sei also $\Psi(x_0, y) \neq 0$. Für $t := -\overline{\Psi(x_0, y)}^{\,-1}$ gilt dann $t \neq 0$ sowie $\Psi(x_0, x_0+ty) = 1 + \bar{t}\,\Psi(x_0, y) = 0$ und folglich nach Voraussetzung auch $0 = \overline{\Psi(x_0+ty\,, x_0)} = 1 + t\,\Psi(y, x_0)$. Es folgt $t\,\Psi(y, x_0) = -1$ und somit $\overline{\Psi(x_0, y)}^{\,-1}\,\Psi(y, x_0) = 1$, d.h. $\Psi(y, x_0) = \overline{\Psi(x_0, y)}$.

Seien nun $y, z \in V$ beliebig. Wir haben $\Psi(y, z) = \overline{\Psi(z, y)}$ zu zeigen.

Bei $\Psi(x_0, y) \neq 0$ gilt für $s := -\Psi(z, y)\,\Psi(x_0, y)^{-1} \in K$ dann $\Psi(sx_0+z, y) = s\Psi(x_0, y) + \Psi(z, y) = 0$ und folglich nach Voraussetzung auch $\Psi(y, sx_0+z) = 0$, also $\bar{s}\,\Psi(y, x_0) + \Psi(y, z) = 0$ und somit $\Psi(y, z) = -\bar{s}\,\Psi(y, x_0) = -\overline{s\Psi(x_0, y)} = \overline{\Psi(z, y)}$, da $\overline{\Psi(x_0, y)} = \Psi(y, x_0)$ bereits gezeigt wurde.

Bei $\Psi(x_0, y) = 0$, also auch $\Psi(y, x_0) = 0$, gilt für $r := -\Psi(z, x_0+y) \in K$ schließlich die Gleichung $\Psi(rx_0+z, x_0+y) = r + r\Psi(x_0, y) + \Psi(z, x_0+y) = r + \Psi(z, x_0+y) = 0$ und folglich nach Voraussetzung auch $\Psi(x_0+y, rx_0+z) = 0$, also $\bar{r} + \bar{r}\,\Psi(y, x_0) + \Psi(x_0+y, z) = \bar{r} + \Psi(x_0+y, z) = 0$. Somit erhält man $\Psi(y, z) = \Psi(x_0+y, z) - \Psi(x_0, z) = -\bar{r} - \Psi(x_0, z) = \overline{\Psi(z, x_0+y)} - \Psi(x_0, z) = \overline{\Psi(z, x_0+y)} - \overline{\Psi(z, x_0)} = \overline{\Psi(z, y)}$, da $\Psi(x_0, z) = \overline{\Psi(z, x_0)}$ ebenfalls aus dem eingangs Gezeigten folgt.

Ist allgemein $\Phi = a\Psi$ mit $a \in \mathbb{R}\mathrm{i}$ und einer hermiteschen Sesquilinearform Ψ, so gilt $\bar{a} = -a$ und folglich $\Phi(x, y) = a\Psi(x, y) = -\bar{a}\,\overline{\Psi(y, x)} = -\overline{a\Psi(y, x)} = -\overline{\Phi(y, x)}$ für alle $x, y \in V$. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 1, p. 383 (1.6.2012):

Der Typ einer reell-symmetrischen Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ändert sich nicht, wenn man sie als komplex-hermitesche Matrix auffasst.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus der Charakterisierung des Typs gemäß Satz 12.C.11, da das charakteristische Polynom einer reellen Matrix nicht davon abhängt, ob es über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ gebildet wird und sämtliche Nullstellen dieses Polynoms in $\mathbb{C}$ im hermiteschen Fall bereits reell sind. – Man kann aber auch direkt schließen: Ist $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^n$ bzgl. der durch $\mathfrak{A}$ auf $\mathbb{R}^n$ definierten reell-symmetrischen Bilinearform Φ, so ist $v_1, \ldots, v_n$ auch eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^n$ bzgl. der durch $\mathfrak{A}$ definierten komplex-hermiteschen Sesquilinearform Ψ, und die Werte $\Phi(v_i, v_i) = \Psi(v_i, v_i)$, $i = 1, \ldots, n$, aus denen der Typ von Φ bzw. Ψ ablesbar ist, stimmen überein. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 2, p. 383 (1.6.2012):

Man bestimme den Typ der folgenden hermiteschen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 5 \\ 1-\mathrm{i} & 2 & \mathrm{i} \\ 5 & -\mathrm{i} & 7 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \bar{a} \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{C};\quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R};\quad \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} & \bar{b} \\ a & 0 & \bar{c} \\ b & c & 0 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{C}\,.$$

Lösung: Die Hauptminoren der 1. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $D_3 = 2 - 8 - 4 = -10$. Diese Folge enthält einen Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(2, 1)$.

Die Hauptminoren der 2. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 3$, $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$, $D_3 = 60 - 12 - 20 = 28$. Diese Folge enthält keinen Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(3, 0)$.

Die Hauptminoren der 3. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$, $D_3 = 50+16+16-20-32-20 = 10$. Diese Folge enthält keinen Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(3, 0)$.

Die Hauptminoren der 4. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = -1$, $D_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$, $D_3 = -10 + 4 + 5 = -1$. Diese Folge enthält 3 Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(0, 3)$.

Die Hauptminoren der 5. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{vmatrix} = 0$, $D_3 = 14 - 5+5\mathrm{i} - 5- 5\mathrm{i} + 50 - 1 - 14 = 39$. Da einer der Hauptminoren gleich 0 ist, ist 12.C.4 nicht direkt anwendbar. Indem man aber wie in Beispiel 12.C.4 vorgeht, also die zu Grunde liegende Basis in umgekehrter Reihenfolge durchläuft und somit die Bildung der Haupminoren unten rechts statt oben links beginnt, bekommt man die Hauptminorenfolge $D'_0 = 1$, $D'_1 = 7$, $D'_2 = \begin{vmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 7 \end{vmatrix} = 13$, $D'_3 = 39$ ohne Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(3, 0)$.

Die Hauptminoren der 6. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 5$, $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 5$, $D_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80$, $D_4 = 240$. Diese Folge enthält keinen Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(4, 0)$.

Die Hauptminoren der 7. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ etc. Da einer der Hauptminoren gleich 0 ist, ist 12.C.4 nicht direkt anwendbar. Indem man aber wie in Beispiel 12.C.4 vorgeht, also die zu Grunde liegende Basis in umgekehrter Reihenfolge durchläuft und somit die Bildung der Haupminoren unten rechts statt oben links beginnt, bekommt man die Hauptminorenfolge $D'_0 = 1$, $D'_1 = 2$, $D'_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$,

$$D'_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4,\ D'_4 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Diese Folge enthält einen Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix also $(3, 1)$.

Die Hauptminoren der 8. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, $D_3 = 3+4\,\mathrm{Re}\,a-3-|a|^2-4 = -(\mathrm{Re}\,a - 2)^2 - (\mathrm{Im}\,a)^2$. Diese Folge enthält bei $a \neq 2$ einen Zeichenwechsel. Nach 12.C.4 ist der Typ der Matrix dann $(2, 1)$. Bei $a = 2$ ist $D_3 = 0$, also 12.C.4 nicht anwendbar. In diesem Fall ist der Rang der Matrix und damit der Rang der zugehörigen Form Φ gleich 2. Beschränkt auf den Raum, der von den ersten beiden Basisvektoren erzeugt wird, hat sie die Gramsche Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ vom Typ $(1, 1)$. Daher hat Φ auch insgesamt den Typ $(1, 1)$.

Die Hauptminoren der 9. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = 5$, $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $D_3 = 5a+2+2-1-5-4a = a-2$. Bei $a > 2$ enthält die Folge keinen Zeichenwechsel, der Typ ist dann $(3, 0)$. Bei $a < 2$ enthält die Folge einen Zeichenwechsel, der Typ ist dann $(2, 1)$. Bei $a = 2$ enthält die Folge keinen Zeichenwechsel, aber der Rang der Matrix ist nur 2. Ihr Typ ist dann $(2, 0)$.

Bei der 10. Matrix ist das Hurwitzsche Kriterium 12.C.4 nicht so wie oben anwendbar. Wir benutzen daher 12.C.11 und die Descartsche Vorzeichenregel, vgl. Aufg. 4. Das charakteristische Polynom der Matrix ist $X^3 - \big(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2\big)X - 2\,\mathrm{Re}\,(a\overline{b}c) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ mit $a_2 = 0$, $a_1 = -|a|^2 - |b|^2 - |c|^2$, $a_0 = -2\,\mathrm{Re}\,(a\overline{b}c)$. Im Fall $a = b = c = 0$ ist der Typ gleich $(0, 0)$. Andernfalls ist der Koeffizient a_1 von

X in diesem charakteristischen Polynom negativ. Bei $\mathrm{Re}(a\overline{b}c) > 0$ hat die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, 1$ einen Zeichenwechsel und die Folge $a_0, -a_1, a_2, -1$ zwei Zeichenwechsel, der Typ ist also $(1, 2)$. Bei $\mathrm{Re}(a\overline{b}c) < 0$ hat die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, 1$ zwei Zeichenwechsel und die Folge $a_0, -a_1, a_2, -1$ einen Zeichenwechsel, der Typ ist also $(2, 1)$. Bei $\mathrm{Re}(a\overline{b}c) = 0$, aber $abc \neq 0$, hat die Koeffizientenfolge $a_0, a_1, a_2, 1$ einen Zeichenwechsel und die Folge $a_0, -a_1, a_2, -1$ ebenfalls einen Zeichenwechsel, der Typ ist also $(1, 1)$. •

Abschnitt 12.C, Variante zu **Aufg. 2**, p. 383 (1.6.2012):

Man bestimme den Typ der folgenden hermiteschen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1-\mathrm{i} & 4 \\ 1+\mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 4 & \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Hauptminoren der 1. Matrix sind $D_0 = 1$, $D_1 = -2$, $D_2 = 0$, $D_3 = 6$. Da einer der Hauptminoren gleich 0 ist, ist 12.C.4 nicht direkt anwendbar. Indem man aber wie in Beispiel 12.C.4 vorgeht, also die zu Grunde liegende Basis in umgekehrter Reihenfolge durchläuft und somit die Bildung der Haupminoren unten rechts statt oben links beginnt, bekommt man die Hauptminorenfolge $D_0' = 1$, $D_1' = -2$, $D_2' = 3$, $D_3' = 6$, der Typ ist also $(1, 2)$.

Die Determinante der 2. Matrix ist 0, das Hurwitz-Kriterium ist also nicht anwendbar. Ihr charakteristisches Polynom ist $X^4 - 4X^2 = X^2(X-2)(X+2)$. Sie hat also nur einen positiven und einen negativen Eigenwert, ihr Typ ist daher nach dem Eigewertkriterium 12.C.11 gleich $(1, 1)$.

Die Determinante der 2. Matrix ist ebenfalls 0. Ihr charakteristisches Polynom $X^4 - 4X^3 - 7X^2 + 4X$ hat aber nach dem Zwischenwertsatz Nullstellen in $]-\infty, -1]$, in 0 und in den Intervallen $[1/4, 1]$, $[1, \infty]$. Der Typ der Matrix ist also nach dem Eigenwertkriterium 12.C.11 gleich $(2, 1)$. •

Abschnitt 12.C, Variante zu **Aufg. 2**, p. 383 (1.6.2012):

a) Man bestimme diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für die die symmetrische Form Φ auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) := -x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - 5x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + ax_3y_3$$

negativ definit ist.

b) Man bestimme diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für die die symmetrische Form Φ auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\Phi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + ax_3y_3$$

positiv definit ist.

c) Man bestimme diejenigen $a \in \mathbb{C}$, für die die komplex-hermitesche Form Φ auf $\mathbb{C}^2$ mit

$$\Phi\big((z_1, z_2), (w_1, w_2)\big) := z_1\overline{w}_1 + (2+\mathrm{i})\, z_1\overline{w}_2 + (2-\mathrm{i})\, z_2\overline{w}_1 + a\, z_2\overline{w}_2$$

positiv definit ist.

Lösung: a) Die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis ist $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ mit den Hauptminoren $D_0 = 1$, $D_1 = -1$, $D_2 = 1$, $D_3 = a+58$. Genau für $a < -58$ ist der Typ also $(0, 3)$, d.h. Φ negativ definit.

b) Die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$ mit den Hauptminoren $D_0 = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 2a-1$. Genau für $a > \frac{1}{2}$ ist der Typ also $(3, 0)$, d.h. Φ positiv definit.

c) Die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis ist $\begin{pmatrix} 1 & 2+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & a \end{pmatrix}$ mit den Hauptminoren $D_0 = 1$, $D_1 = 1$, $D_2 = b - (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) = a-5$. Genau für $a > 5$ ist der Typ also $(2, 0)$, d.h. Φ positiv definit. •

Abschnitt 12.C, Variante zu **Aufg. 2**, p. 383 (1.6.2012):

Die komplex-hermiteschen Sesquilinearformen $\Phi, \Psi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ seien gegeben durch

$$\Phi\big((z_1, z_2, z_3)\,,\ (w_1, w_2, w_3)\big) := z_1\overline{w}_1 + \mathrm{i}\, z_1\overline{w}_2 - \mathrm{i}\, z_2\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + z_2\overline{w}_3 + z_3\overline{w}_2\,,$$

$$\Psi\big((z_1, z_2, z_3)\,,\ (w_1, w_2, w_3)\big) := 2z_1\overline{w}_1 + \mathrm{i}\, z_1\overline{w}_2 - \mathrm{i}\, z_2\overline{w}_1 + (1{+}\mathrm{i})z_2\overline{w}_3 + (1{-}\mathrm{i})z_3\overline{w}_2\,.$$

Man gebe die Gramschen Matrizen von Φ bzgl. der Standardbasis und bezüglich der Basis $v_1 := (1, 0, 1)$, $v_2 := (\mathrm{i}, 0, 1)$, $v_3 := (0, 1, 0)$ von $\mathbb{C}^3$ an sowie die Gramschen Matrizen von Ψ bzgl. der Standardbasis und bezüglich der Basis $v_1 := (1, \mathrm{i}, 0)$, $v_2 := (1, 0, 1)$, $v_3 := (0, 1, \mathrm{i})$ von $\mathbb{C}^3$. Man bestimme auch die Typen von Φ bzw. Ψ.

Lösung: Die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{e}$ ist $\mathfrak{G}^{\mathfrak{e},\mathfrak{e}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, die Gramsche Matrix von Φ bzgl. der Basis $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ist

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{v},\mathfrak{v}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1-\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $\mathfrak{G}^{\mathfrak{e},\mathfrak{e}}(\Phi)$ ist $X^3 - 2X^2 - X + 1$. Nach dem Zwischenwertsatz hat es Nullstellen in den Intervallen $]-1, 0[\,,\ ]0, 1[\,,\ ]1, 3[$. Mit 12.C.11 sieht man, dass Φ den Typ $(2, 1)$ hat. Man könnte auch so schließen: Die Determinante von $\mathfrak{G}^{\mathfrak{e},\mathfrak{e}}(\Phi)$ ist -1, der Typ von Φ kann also nur $(0, 3)$ oder $(2, 1)$ sein. Der erste Fall wird schon dadurch ausgeschlossen, dass $\Phi(e_1, e_1) = 1$ ist.

Die Gramsche Matrix von Ψ bzgl. der Standardbasis ist $\mathfrak{G}^{\mathfrak{e},\mathfrak{e}}(\Psi) = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, die Gramsche Matrix von Ψ bzgl. der Basis $\mathfrak{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ist

$$\mathfrak{G}^{\mathfrak{v},\mathfrak{v}}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 2 & 1 \\ -2\mathrm{i}+1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $\mathfrak{G}^{\mathfrak{e},\mathfrak{e}}(\Psi)$ ist $X^3 - 2X^2 - 2X + 4 = (X-2)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ mit 2 positiven und einer negativen Nullstelle. Nach 12.C.11 hat daher Ψ den Typ $(2, 1)$. Da die Determinante von $\mathfrak{G}^{\mathfrak{e},\mathfrak{e}}(\Psi)$ gleich -4 ist, kann man auch wie oben bei Φ schließen. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 3, p. 383 (1.6.2012):

Sei $\mathfrak{A}$ eine hermitesche Matrix.

a) Genau dann ist $\mathfrak{A}$ positiv (bzw. negativ) definit, wenn alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ positiv (bzw. negativ) sind.

b) Genau dann ist $\mathfrak{A}$ positiv (bzw. negativ) semidefinit, wenn alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ nicht-negativ (bzw. nicht-positiv) sind.

Beweis: a) Genau dann ist $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ positiv (bzw. negativ) definit, wenn $\mathfrak{A}$ den Typ $(n, 0)$ (bzw. $(0, n)$) hat. Nach Satz 12.C.11 ist dies genau dann der Fall, wenn alle n Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ positiv (bzw. negativ) sind.

b) Genau dann ist $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ positiv (bzw. negativ) semidefinit, wenn $\mathfrak{A}$ den Typ $(n', 0)$ (bzw. $(0, n')$) hat mit $n' \le n$. Nach Satz 12.C.11 ist dies genau dann der Fall, wenn alle n Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ nicht-negativ (bzw. nicht-positiv) sind. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 4, p. 383 (1.6.2012):

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ eine hermitesche Matrix mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_{\mathfrak{A}} = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n\,.$$

Dann ist $\mathfrak{A}$ vom Typ (p, q), wobei p die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 1$ ist und q die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $a_0\,, -a_1\,, \ldots, (-1)^{n-1}a_{n-1}\,, (-1)^n$. (Descartessche Vorzeichenregel)

Beweis: Da $\mathfrak{A}$ hermitesch ist, besitzt $\mathfrak{A}$ nach Satz 12.C.11 n reelle (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte, d.h. $\chi_{\mathfrak{A}}$ zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren. Nach Band 1, 15.A, Aufg. 22 ist dann p die Anzahl der positiven Eigenwerte von $\mathfrak{A}$. Die positiven Nullstellen von $\chi_{\mathfrak{A}}(-X) = a_0 - a_1X + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}X^{n-1} + (-1)^nX^n$ sind die negativen Eigenwerte von $\mathfrak{A}$. Ihre Anzahl ist analog die Anzahl q der Vorzeichenwechsel in der Folge $a_0, -a_1, \ldots, (-1)^{n-1}a_{n-1}, (-1)^n$. Somit ist (p, q) der Typ von $\mathfrak{A}$. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 5, p. 383 (1.6.2012):

Seien $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ eine hermitesche Matrix vom Typ (p, q) und $m \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\mathfrak{A}^m$ vom Typ (p, q), falls m ungerade ist, und vom Typ $(p+q, 0)$, falls m gerade ist. Ist $\mathfrak{A}$ invertierbar, so gilt die entsprechende Aussage für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die (reellen) Eigenwerte der (diagonalisierbaren) Matrix $\mathfrak{A}$, so sind $\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m$ die Eigenwerte von $\mathfrak{A}^m$. Bei ungeradem m hat λ_i^m dasselbe Vorzeichen wie λ_i, bei geradem m und $\lambda_i \neq 0$ ist λ_i^m stets positiv. Daraus folgt die Behauptung mit Satz 12.C.11. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 6, p. 383 (1.6.2012):

a) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume. Auf W sei eine positiv definite hermitesche Form $\langle -, - \rangle$ gegeben. Die Form $(x, y) \mapsto \langle f(x), f(y) \rangle$ auf V ist dann hermitesch vom Typ $(\mathrm{Rang}\, f, 0)$.

b) Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige $m \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Dann ist ${}^t\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}$ hermitesch vom Typ $(\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A}, 0)$.

Beweis: a) Da $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist, gilt $\langle f(x), f(x) \rangle \geq 0$ für alle $x \in V$. Daher ist die Form $\langle f(-), f(-) \rangle$ positiv semidefinit, ihr Typ ist also von der Form $(p, 0)$.

Es gibt eine Basis $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ von V derart, dass die Elemente $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von $\mathrm{Kern}\, f$ bilden und $f(v_1), \ldots, f(v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}\, f$ ist (vgl. den Beweis des Rangsatzes 5.E.1). Insbesondere ist $r+s = n := \mathrm{Dim}_K V$ und $s = \mathrm{Rang}\, f$. Für ein beliebiges $x = \sum a_iv_i \in \mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_s$, $x \neq 0$, sind dann $a_1, \ldots, a_s$ nicht alle gleich 0, d.h. es ist auch $f(x) = \sum a_i f(v_i) \neq 0$ und somit $\langle f(x), f(x) \rangle > 0$, da $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist. Daher ist der Trägheitsindex $p \geq s$. Wegen $\langle f(x), f(x) \rangle = 0$ für alle $x \in \mathrm{Kern}\, f$ ist andererseits $p \leq n-r = s$. Es folgt $p = s = \mathrm{Rang}\, f$. – Übrigens ist $\mathrm{Kern}\, f$ das Radikal $V^\perp$ der Form $\langle f(-), f(-) \rangle$, vgl. auch Aufg. 7.

b) Wir versehen $\mathbb{K}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und wenden dann a) auf die durch $\mathfrak{A}$ definierte lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $f(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ an. Für die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{K}^n$ gilt $\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = {}^t(\mathfrak{A}e_i)\,\overline{\mathfrak{A}e_j} = {}^te_i\,{}^t\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}\,e_j$, d.h. die Form $\langle f(-), f(-) \rangle$ hat die Gramsche Matrix ${}^t\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}$ bzgl. der Standardbasis. Die Behauptung folgt nun aus a). •

Abschnitt 12.C, Aufg. 7, p. 383 (1.6.2012):

Sei $\Phi = \langle -, - \rangle$ eine positiv semidefinite hermitesche Form auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

a) Für beliebige Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in V$ ist $\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{vmatrix} \geq 0$.

b) Für beliebige Vektoren $x, y \in V$ ist $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung).

c) Für $x \in V$ gilt $x \in V^\perp$ genau dann, wenn $x \perp x$ ist. Das Radikal $V^\perp$ der Form Φ ist also gleich dem Lichtkegel $\{x \in V \mid \langle x, x \rangle = 0\}$ von Φ.

d) Auf $\overline{V} := V/V^\perp$ wird durch $\overline{\Phi}(\overline{x}, \overline{y}) := \Phi(x, y)$, $x, y \in V$, eine positiv definite hermitesche Form definiert.

e) Genau dann ist Φ positiv definit, wenn Φ nicht-ausgeartet ist.

Beweis: a) Sind die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig, so ist die angegebene Determinante nach Lemma 12.A.11 gleich 0. Wir können also annehmen, dass die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig und daher Basis eines Unterraums V' von V sind. Die zu betrachtende Determinante ist die Determinante der Fundamentalmatrix $\mathfrak{C}$ von $\Phi|V'$ bzgl. $x_1, \ldots, x_n$. Da $\Phi|V'$ nach Voraussetzung über Φ positiv semidefinit, also vom Typ $(p, 0)$, ist, gibt es nach Korollar 12.C.3 eine invertierbare Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ derart, dass $\mathfrak{C} = {}^t\mathfrak{A}\mathfrak{E}_n^{p,0}\overline{\mathfrak{A}}$ gilt mit der Diagonalmatrix $\mathfrak{E}_n^{p,0} = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. Mit den Rechenregeln für Determinanten folgt $\mathrm{Det}\,\mathfrak{C} = \mathrm{Det}\big({}^t\mathfrak{A}\mathfrak{E}_n^{p,0}\overline{\mathfrak{A}}\big) = \mathrm{Det}\,\mathfrak{A} \cdot \mathrm{Det}\,\overline{\mathfrak{A}} \cdot \mathrm{Det}\,\mathfrak{E}_n^{p,0} = |\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}|^2\,\delta_{n,p} \geq 0$.

b) Im Fall $n=2$, $x_1:=x$, $x_2:=y$, liefert a) $0\le\begin{vmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle\\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{vmatrix}=\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle-|\langle x,y\rangle|^2$, d.h. $\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\ge|\langle x,y\rangle|^2$.

c) Natürlich folgt aus $x\in V^\perp$ erst recht $x\perp x$. Umgekehrt folgt aus $x\perp x$, d.h. $\langle x,x\rangle=0$, mit b) für jedes $y\in V$ sofort $|\langle x,y\rangle|^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle=0$, also $\langle x,y\rangle=0$, und insgesamt $x\in V^\perp$. •

d) Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\Phi}$ wohldefiniert ist: Aus $\overline{x}=\overline{x'}$ und $\overline{y}=\overline{y'}$ folgt $x-x'\in V^\perp$, $y-y'\in V^\perp$ und daher $\Phi(x,y)-\Phi(x',y')=\Phi(x,y)-\Phi(x,y')+\Phi(x,y')-\Phi(x',y')=\Phi(x,y-y')+\Phi(x-x',y')=0$, also $\Phi(x,y)=\Phi(x',y')$.

$\overline{\Phi}$ ist wie Φ eine positiv semidefinite hermitesche Form. Aus $\overline{\Phi}(\overline{x},\overline{x})=0$, also $\Phi(x,x)=0$, folgt wegen c) bereits $x\in V^\perp$, d.h. $\overline{x}=0$. Daher ist $\overline{\Phi}$ positiv definit.

e) Wenn Φ positiv definit ist, so ist Φ erst recht nicht-ausgeartet. Sei umgekehrt Φ nicht-ausgeartet, also $\Phi_1:\big(y\mapsto(x\mapsto\langle x,y\rangle)\big)$ injektiv. Für $y\neq0$ ist dann $x\mapsto\langle x,y\rangle$ nicht die Nullabbildung, d.h. es gibt ein $x\in V$ mit $\langle x,y\rangle\neq0$. Daher ist $y\notin V^\perp$. Nach c) folgt $\langle y,y\rangle\neq0$, also $\langle y,y\rangle>0$, da Φ positiv semidefint ist. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 8, p. 384 (1.6.2012):

Seien Φ und Ψ positiv semidefinite Formen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Genau dann ist $\Phi+\Psi$ positiv definit, wenn die Radikale von Φ bzw. Ψ nur den Nullvektor gemeinsam haben.

Beweis: Mit Φ und Ψ ist trivialerweise auch $\Phi+\Psi$ positiv semidefinit. Für ein $x\neq0$ aus V gilt genau dann $(\Phi+\Psi)(x,x)=0$, wenn $\Phi(x,x)=0=\Psi(x,x)$ gilt. Nach Aufg. 7c) ist dies genau dann der Fall, wenn x im Radikal von Φ und im Radikal von Ψ liegt. Genau dann ist also $(\Phi+\Psi)(x,x)>0$ für alle $x\neq0$, wenn stets $\Phi(x,x)$ oder aber $\Psi(x,x)$ positiv ist, d.h. wenn die Radikale von Φ bzw. Ψ nur den Nullvektor gemeinsam haben. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 9, p. 384 (1.6.2012):

Sei $\Phi=\langle-,-\rangle$ eine hermitesche Form auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit der Basis $\mathfrak{v}=(v_1,\ldots,v_n)$. Dann sind äquivalent: (1) Φ ist positiv semidefinit.

(2) Für jedes r, $1\le r\le n$, und jede Folge $1\le i_1<\cdots<i_r\le n$ gilt $\begin{vmatrix}\langle v_{i_1},v_{i_1}\rangle & \cdots & \langle v_{i_1},v_{i_r}\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle v_{i_r},v_{i_1}\rangle & \cdots & \langle v_{i_r},v_{i_r}\rangle\end{vmatrix}\ge0$ (d.h. sämtliche Diagonalminoren der Gramschen Matrix $\mathfrak{G}^{\mathfrak{v},\mathfrak{v}}(\Phi)$ sind nicht-negativ).

1. Beweis: Sei (2) erfüllt und sei r ist die größte natürliche Zahl ρ, zu der es einen Diagonalminor $A_{\{i_1,\ldots,i_r\}}\neq0$ der Ordnung ρ von $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}^{\mathfrak{v},\mathfrak{v}}$ gibt. Dann gibt es nach dem verallgemeinerten Hurwitzschen Kriterium 12.C.8 eine Permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_r$ derart, dass in der Folge der Hauptminoren $1=D'_0,D'_1,\ldots,D'_r$ der Gramschen Matrix von Φ bezüglich $v_{i_{\sigma1}},\ldots,v_{i_{\sigma r}}$ niemals zwei benachbarte Glieder verschwinden. Da die D'_j durch Vertauschen von Zeilen und und von Spalten gemäß derselben Permutation aus den nach Voraussetzung positiven Determinanten hervorgehen, sind sie sämtlich ≥0. Der Morse-Index q von Φ ist daher 0, und Φ somit nach 12.C.8 positiv semidefinit. Die Umkehrung ergibt sich sofort aus Aufg. 7a). •

2. Beweis: Für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\chi_{\mathfrak{A}}=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$ gilt nach 11.A, Aufg. 48b) und der Voraussetzung (2) $(-1)^{n-r}a_r\ge0$. Die Folge

$$a_0,\,-a_1,\,\ldots,\,(-1)^{n-1}a_{n-1},\,(-1)^n$$

besitzt also keine Vorzeichenwechsel. Nach 12.C, Aufg. 4 ist $\mathfrak{A}$ daher positiv semidefinit. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 10, p. 384 (1.6.2012):

Seien Φ und Ψ hermitesche Formen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Es sei Ψ positiv definit. Folgende Aussagen sind äquivalent: (1) Φ ist positiv semidefinit. (2) Für alle $\varepsilon>0$ ist $\Phi+\varepsilon\Psi$ positiv definit. (3) Es gibt eine Nullfolge (ε_n) in $\mathbb{R}$ derart, dass $\Phi+\varepsilon_n\Psi$ für alle $n\in\mathbb{N}$ positiv semidefinit ist.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Für alle $x\neq0$ in V gilt nach Voraussetzung $\Phi(x,x)\ge0$ und $\Psi(x,x)>0$. Daraus folgt $(\Phi+\varepsilon\Psi)(x,x)=\Phi(x,x)+\varepsilon\Psi(x,x)>0$. (2) $\Rightarrow$ (3) ist trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1) Angenommen, es gebe ein $x\in V$ mit $\Phi(x,x)<0$. Dann ist $-\Phi(x,x)/\Psi(x,x)>0$, und wegen $\lim\varepsilon_n=0$ gibt es ein ε_n mit $\varepsilon_n<-\Phi(x,x)/\Psi(x,x)$, also mit $(\Phi+\varepsilon_n\Psi)(x,x)=\Phi(x,x)+\varepsilon_n\Psi(x,x)<0$ im Widerspruch zu (3). •

Abschnitt 12.C, Aufg. 11, p. 384 (1.6.2012) :

Sei Φ eine komplex-hermitesche Form auf dem komplexen Vektorraum V, den wir in natürlicher Weise auch als reellen Vektorraum auffassen.

a) $\operatorname{Re}\Phi$ ist eine reell-symmetrische Form auf V.

b) Genau dann ist $\operatorname{Re}\Phi$ positiv definit, negativ definit, positiv semidefinit, negativ semidefinit bzw. indefinit, wenn Entsprechendes für Φ gilt.

c) Ist V endlichdimensional und Φ vom Typ (p, q), so ist $\operatorname{Re}\Phi$ vom Typ $(2p, 2q)$.

Beweis: a) Für $x, y \in V$ gilt nach Voraussetzung $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$, also $\operatorname{Re}\Phi(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(y, x)$.

b) Da Φ komplex-hermitesch ist, also stets $\Phi(x, x) = \overline{\Phi(x, x)}$ gilt, ist $\Phi(x, x)$ stets reell und es gilt stets $\operatorname{Re}\Phi(x, x) = \Phi(x, x)$.

c) Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz 12.C.2 gibt es eine $\mathbb{C}$-Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V derart, dass die Gramsche Matrix von Φ bzgl. dieser Basis die Form $\mathfrak{E}_n^{p,q} = \operatorname{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots, 0)$ hat. Bzgl. der $\mathbb{R}$-Basis $v_1, \mathrm{i}v_1, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_n$ von V hat $\operatorname{Re}\Phi$ dann wegen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\Phi(v_j, v_k) &= \Phi(v_j, v_k) \in \{1, -1, 0\},\\
\operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}v_j, v_k) &= \operatorname{Re}\mathrm{i}\Phi(v_j, v_k) = -\operatorname{Im}\Phi(v_j, v_k) = 0,\\
\operatorname{Re}\Phi(v_j, \mathrm{i}v_k) &= -\operatorname{Re}\mathrm{i}\Phi(v_j, v_k) = \operatorname{Im}\Phi(v_j, v_k) = 0,\\
\operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}v_j, \mathrm{i}v_k) &= -\operatorname{Re}\mathrm{i}^2\Phi(v_j, v_k) = \operatorname{Re}\Phi(v_j, v_k) = \Phi(v_j, v_k) \in \{1, -1, 0\}
\end{aligned}$$

die Gramsche Matrix $\mathfrak{E}_{2n}^{2p,2q} = \operatorname{Diag}(1, 1, \ldots, 1, 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 12, p. 384 (1.6.2012) :

Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ eine hermitesche Matrix mit $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Dann ist $\mathfrak{A}$ vom Typ (p, q), wobei p die Anzahl der i mit $a_{ii} > 0$ ist und $q = n - p$ die Anzahl der i mit $a_{ii} < 0$.

Beweis: Für die Hauptminoren $D_k = \operatorname{Det}(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ von $\mathfrak{A}$ gilt erst recht $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{k} |a_{ij}|$. Mit 9.D, Aufg. 15 erhält man daher $a_{11}\cdots a_{kk}\, D_k > 0$ für alle k. Es folgt, dass $a_{kk}D_k$ stets dasselbe Vorzeichen hat wie D_{k-1}, d.h. dass an der Stelle $k-1$ in der Folge der Hauptminoren genau dann ein Vorzeichenwechsel vorliegt, wenn a_{kk} negativ ist. Das Hurwitz-Kriterium 12.C.4 liefert somit die Behauptung. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 15, p. 385 (1.6.2012) :

Seien V ein orientierter reeller Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}^*$ und Φ eine reell-symmetrische Form vom Typ (p, q) auf V. Dann gibt es eine die Orientierung von V repräsentierende Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, bzgl. der die Gramsche Matrix von Φ gleich $\mathfrak{E}_n^{p,q}$ ist.

Beweis: Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz 12.C.2 gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V derart, dass die Gramsche Matrix von Φ bzgl. dieser Basis die Form $\mathfrak{E}_n^{p,q} = \operatorname{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots, 0)$ hat. Repräsentiert diese Basis nicht die Orientierung von V, so ersetze man einen der Basisvektoren v_i durch $-v_i$. Dann repräsentiert die so erhaltene Basis von V die Orientierung, und die Gramsche Matrix hat sich dabei nicht geändert. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 16, p. 385 (1.6.2012) :

Eine hermitesche Form auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist genau dann anisotrop, wenn sie (positiv oder negativ) definit ist.

Beweis: Definite Formen sind natürlich anisotrop. Ist umgekehrt die hermitesche Form Φ anisotrop, so gibt es (notwendigerweise linear unabhängige) Elemente $v, w \in V$ mit $\Phi(v, v) > 0$ und $\Phi(w, w) < 0$. Dann nimmt die (höchstens) quadratische Polynomfunktion $[0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $t \mapsto \Phi(tv + (1-t)w, tv + (1-t)w)$ nach dem Zwischenwertsatz den Wert 0 an im Widerspruch dazu, dass Φ anisotrop ist. (Man kann natürlich auch direkt zeigen, dass die Beschränkung von Φ auf den 2-dimensionalen Unterraum $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w$ von 0 verschiedene isotrope Vektoren besitzt.) •

Abschnitt 12.C, Aufg. 17, p. 385 (1.6.2012) :

Seien Φ und Ψ indefinite hermitesche Formen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit dem gleichen Lichtkegel. Dann unterscheiden sich Φ und Ψ nur um einen Faktor $a \in \mathbb{R}^\times$ (d.h. es ist $\Phi = a\Psi$ mit einem $a \in \mathbb{R}^\times$).

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es $v_0, w_0 \in V$ mit $\Psi(v_0, v_0) > 0$ und $\Psi(w_0, w_0) < 0$. Dann ist $\Phi(v_0, v_0) \neq 0$, und es gibt ein $a \in \mathbb{R}^\times$ mit $\Phi(v_0, v_0) = a\Psi(v_0, v_0)$. Es genügt nun zu zeigen, dass auch $\Phi(w_0, w_0) = a\Psi(w_0, w_0)$ ist. Dann gilt nämlich generell $\Phi = a\Psi$. Es genügt nach Satz 12.B.2 dies auf der Diagonalen von V zu beweisen.

Sei dazu $x \in V$. Ist $\Psi(x, x) = 0$, so ist auch $0 = \Phi(x, x) = a\Psi(x, x)$ nach Voraussetzung. Ist $\Psi(x, x) > 0$, so betrachten wir die Vektoren x, w_0 statt v_0, w_0 und erhalten $\Phi(x, x) = a\Psi(x, x)$. Ist $\Psi(x, x) < 0$, so betrachten wir die Vektoren v_0, x statt v_0, w_0 und erhalten wiederum $\Phi(x, x) = a\Psi(x, x)$.

Zum Beweis von $\Phi(w_0, w_0) = a\Psi(w_0, w_0)$ betrachten wir die reellen Polynome

$$F(t) := \Psi\big(tv_0 + (1-t)w_0\,, tv_0 + (1-t)w_0\big) \quad \text{und} \quad G(t) := a^{-1}\Phi\big(tv_0 + (1-t)w_0\,, tv_0 + (1-t)w_0\big)$$

vom Grad ≤ 2. Nach Wahl von a ist $F(1) = G(1) > 0$ und $F(0) = \Psi(w_0, w_0) < 0$. Daher besitzt F im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle t_1. Nach Voraussetzung ist dann auch $G(t_1) = 0$. Ist $\operatorname{Grad} F = 2$, so besitzt F eine weitere reelle Nullstelle t_2, die dann auch eine Nullstelle von G ist. Dann stimmen F und G an den 3 Stellen $1, t_1, t_2$ überein und sind daher identisch. Insbesondere ist dann auch $\Psi(w_0, w_0) = F(0) = G(0) = a^{-1}\Phi(w_0, w_0)$. Genau dann ist F ein Polynom vom Grad 1, wenn der Koeffizient $\Psi(v_0, v_0) + \Psi(w_0, w_0) - \Psi(v_0, w_0) - \Psi(w_0, v_0) = \Psi(v_0 - w_0, v_0 - w_0)$ verschwindet. Dann verschwindet aber nach Voraussetzung auch der Koeffizient von t^2 bei G, und G ist ebenfalls linear. Dann sind F und G aber schon gleich an den beiden Stellen $1, t_1$ übereinstimmen. Wiederum folgt das Gewünschte $\Psi(w_0, w_0) = F(0) = G(0) = a^{-1}\Phi(w_0, w_0)$. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 18, p. 385 (1.6.2012) :

Seien Φ und Ψ symmetrische Bilinearformen auf dem reellen Vektorraum V. Sind Φ und Ψ nicht negativ semidefinit und sind die Mengen $\{x \in V \mid \Phi(x, x) = 1\}$ und $\{x \in V \mid \Psi(x, x) = 1\}$ gleich, so sind Φ und Ψ identisch.

Beweis: Generell gilt: Genau dann ist $\Phi(x, x) = a > 0$, wenn $\Psi(x, x) > 0$ ist, und in diesem Fall ist $\Phi(x, x) = \Psi(x, x)$. Aus $\Phi(x, x) = a > 0$ folgt nämlich $\Phi(x/\sqrt{a}\,, x/\sqrt{a}\,) = 1 = \Psi(x/\sqrt{a}\,, x/\sqrt{a}\,)$ und somit $\Psi(x, x) = a$.

Sei $v_0 \in V$ mit $\Phi(v_0, v_0) = \Psi(v_0, v_0) > 0$. Sei nun $v \in V$ beliebig. Nach Satz 12.B.2 genügt es zu zeigen, dass $\Phi(v, v) = \Psi(v, v)$ ist. Dazu betrachten wir die qudratischen Formen $(s, t) \mapsto \Phi(sv_0 + tv, sv_0 + tv)$ und $(s, t) \mapsto \Psi(sv_0 + tv, sv_0 + tv)$. Sie sind im Punkt $(1, 0)$ beide positiv, stimmen also dort und damit aus Stetigkeitsgründen in einer ganzen Umgebung positiv und damit gleich. Dann sind sie aber überhaupt identisch, insbesondere sind die Werte $\Phi(v, v)$ bzw. $\Psi(v, v)$ an der Stelle $(0, 1)$ gleich. •

Bemerkung: Man könnte die Aussage auch auf das Ergebnis von Aufg. 17 zurückführen. Dazu betrachtet man die Formen Φ' und Ψ' auf dem Vektorraum $V \oplus \mathbb{R}$ mit $\Phi'\big((v, a), (w, b)\big) := \Phi(v, w) - ab$ und $\Psi'\big((v, a), (w, b)\big) := \Psi(v, w) - ab$. Diese erfüllen die Voraussetzungen von Aufg. 17. Man führe dies aus.

Abschnitt 12.C, Aufg. 19, p. 385 (1.6.2012) :

Sei Φ eine hermitesche Form vom Typ (p, q) auf einem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gibt es einen Unterraum der Dimension $m := \operatorname{Min}(p, q) + n - (p + q) = n - \operatorname{Max}(p, q)$, auf dem Φ die Nullform ist, und jeder Unterraum, auf dem Φ die Nullform induziert (ein solcher Unterraum heißt t o t a l i s o t r o p bzgl. Φ), hat eine Dimension $\leq m$.

Beweis: Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}, v_{p+q+1}, \ldots, v_n$ von V derart, dass die Gramsche Matrix von Φ bzgl. dieser Basis die Form $\mathfrak{E}_n^{p,q} = \operatorname{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots, 0)$ hat. Dies ist nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz 12.C.2 möglich. Sei $r := \operatorname{Min}(p, q)$. Dann ist Φ auf dem m-dimensionalen Unterraum von V mit der Basis $v_1 - v_{p+1}, \ldots, v_r - v_{p+r}, v_{p+q+1} \ldots, v_n$ offenbar die Nullform.

Sei nun U ein Unterraum von V mit $\Phi|U = 0$. Dann ist $U \cap (\mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_p) = 0$, also $\operatorname{Dim} U \leq n - p$, und $U \cap (\mathbb{K}v_{p+1} + \cdots + \mathbb{K}v_{p+q}) = 0$, also $\operatorname{Dim} U \leq n - q$. Es folgt $\operatorname{Dim} U \leq n - \operatorname{Max}(p, q)$. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 20, p. 386 (1.6.2012):

Die Funktion $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mapsto \operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{B}})$ ist eine positiv definite hermitesche Form auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Mit 8.A.18 erhält man $\overline{\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{B}})} = \operatorname{Sp}\big(\overline{\mathfrak{A}}\,{}^t\mathfrak{B}\big) = \operatorname{Sp}(\mathfrak{B}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}})$, d.h. die Form ist hermitesch. Für $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ gilt außerdem $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}}) = \operatorname{Sp}\big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{a}_{kj}\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{a}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 > 0$, falls nur einer der Koeffizienten a_{ij} von 0 verschieden ist. Die Form ist also positiv definit. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 21, p. 386 (1.6.2012):

a) Die Spurform $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mapsto \operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist symmetrisch vom Typ $\big(\binom{n+1}{2}, \binom{n}{2}\big)$. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ist die orthogonale Summe des Unterraums $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ der symmetrischen Matrizen, auf dem die Spurform positiv definit ist, und des Unterraums $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ der schiefsymmetrischen Matrizen $\mathfrak{A}$ (mit ${}^t\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}$), auf dem die Spurform negativ definit ist.

b) Der Realteil der Spurform $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longmapsto \operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ist eine reell-symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vom Typ (n^2, n^2).

c) Sei $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der komplex-schiefhermiteschen Matrizen $\mathfrak{A}$ (mit ${}^t\mathfrak{A} = -\overline{\mathfrak{A}}$). Dann ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \longmapsto \operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{B}})$ eine reell-symmetrische, negativ definite Bilinearform auf $\mathfrak{u}_n(\mathbb{C})$.

Beweis: a) Da Summen und skalare Vielfache von symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Matrizen offenbar wieder symmetrisch bzw schiefsymmetrisch sind, sind $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ und $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ Unterräume von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Wir zeigen zunächst $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$:

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Mit 8.A.18 erhält man ${}^t(\mathfrak{A} + {}^t\mathfrak{A}) = {}^t\mathfrak{A} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + {}^t\mathfrak{A}$, d.h. $\mathfrak{A} + {}^t\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ und ${}^t(\mathfrak{A} - {}^t\mathfrak{A}) = {}^t\mathfrak{A} - \mathfrak{A} = -(\mathfrak{A} - {}^t\mathfrak{A})$, d.h. $\mathfrak{A} - {}^t\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$. Wegen $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + {}^t\mathfrak{A}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - {}^t\mathfrak{A})$ gilt also $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) + \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$. Für $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ gilt $\mathfrak{A} = {}^t\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} = -{}^t\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}$ und somit $\mathfrak{A} = 0$. Es folgt $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$. Ist schließlich $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$, so gilt $\mathfrak{A} = {}^t\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} = -{}^t\mathfrak{B}$, also $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{Sp}(-{}^t\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{B}) = -\operatorname{Sp}\big({}^t(\mathfrak{B}\mathfrak{A})\big) = -\operatorname{Sp}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = -\operatorname{Sp}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und folglich $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0$. Die obige direkte Summe ist also eine orthogonale Summe.

Ist $\mathfrak{E}_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$, die Standardbasis von $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, so bilden die $n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$ Matrizen $\mathfrak{E}_{jj}$, $j = 1, \ldots, n$, sowie $\mathfrak{E}_{jk} + \mathfrak{E}_{kj}$, $1 \le j < k$, offenbar eine Basis von $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$. Ferner bilden die $\binom{n}{2}$ Matrizen $\mathfrak{E}_{jk} - \mathfrak{E}_{kj}$, $1 \le j < k \le n$, eine Basis von $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$. Es folgt $\operatorname{Dim}\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) = \binom{n+1}{2}$, $\operatorname{Dim}\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R}) = \binom{n}{2}$.

Auf $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ ist die Form positiv definit und auf $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ ist sie negativ definit. Für $\mathfrak{A} = (a_{jk}) \neq 0$ folgt aus $\mathfrak{A} = {}^t\mathfrak{A}$ nämlich $a_{jk} = a_{kj}$ für alle j, k und somit $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}a_{kj} = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}^2 > 0$. Aus $\mathfrak{A} = -{}^t\mathfrak{A}$ folgt $a_{jk} = -a_{kj}$ für alle j, k und somit $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}a_{kj} = -\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^2 < 0$. Insgesamt hat die betrachte Spurform also den Typ $\big(\binom{n+1}{2}, \binom{n}{2}\big)$.

b) Offenbar ist die Form $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mapsto \operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ auf $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ symmetrisch und daher $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \mapsto \operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ eine reell-symmetrische Bilinearform. Wie in a) bilden die Menge $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{C}) := \{\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathfrak{A} = {}^t\overline{\mathfrak{A}}\}$ der hermiteschen Matrizen und die Menge $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{C}) := \{\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \mathfrak{A} = -{}^t\overline{\mathfrak{A}}\}$ der schief-hermiteschen Matrizen $\mathbb{R}$-Unterräume von $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Für $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ gilt ${}^t\overline{(\mathfrak{A} + {}^t\overline{\mathfrak{A}})} = {}^t\overline{\mathfrak{A}} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + {}^t\overline{\mathfrak{A}}$, d.h. $\mathfrak{A} + {}^t\overline{\mathfrak{A}} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C})$ und $-{}^t\overline{(\mathfrak{A} - {}^t\overline{\mathfrak{A}})} = -{}^t\overline{\mathfrak{A}} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} - {}^t\overline{\mathfrak{A}}$, d.h. $\mathfrak{A} - {}^t\overline{\mathfrak{A}} \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$. Wegen $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + {}^t\overline{\mathfrak{A}}) + \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - {}^t\overline{\mathfrak{A}})$ folgt $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C}) + \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$. Für $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C}) \cap \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$ gilt $\mathfrak{A} = {}^t\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A} = -{}^t\overline{\mathfrak{A}}$, also $\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}$ und somit $\mathfrak{A} = 0$. Es folgt $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$. Ist schließlich $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$, so gilt $\mathfrak{A} = {}^t\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} = -{}^t\overline{\mathfrak{B}}$, also $\operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{Re}\operatorname{Sp}(-{}^t\overline{\mathfrak{A}}\,{}^t\overline{\mathfrak{B}}) = -\operatorname{Re}\operatorname{Sp}\big({}^t\overline{(\mathfrak{B}\mathfrak{A})}\big) = -\operatorname{Re}\overline{\operatorname{Sp}(\mathfrak{B}\mathfrak{A})} = -\operatorname{Re}\overline{\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})} = -\operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ und folglich $\operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0$. Wir erhalten also die orthogonale Summendarstellung

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{i}\mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})\,.$$

Mit den Bezeichnungen aus a) gilt ferner $\mathrm{M}_n^+(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}\mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$ und $\mathrm{M}_n^-(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{i}\mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$. Bildet man nämlich Real- und Imaginärteil der Matrizen koeffizientenweise, so gilt $\mathfrak{A} = {}^t\overline{\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C})$, also $\operatorname{Re}\mathfrak{A} + \mathrm{i}\operatorname{Im}\mathfrak{A} = \overline{{}^t\operatorname{Re}\mathfrak{A} - \mathrm{i}\,{}^t\operatorname{Im}\mathfrak{A}} = {}^t\operatorname{Re}\mathfrak{A} - \mathrm{i}\,{}^t\operatorname{Im}\mathfrak{A}$ und somit $\operatorname{Re}\mathfrak{A} = {}^t\operatorname{Re}\mathfrak{A}$, $\operatorname{Im}\mathfrak{A} = -{}^t\operatorname{Im}\mathfrak{A}$, d.h. $\operatorname{Re}\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{R})$ und $\operatorname{Im}\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{R})$. Offenbar ist die so gewonnene Summendarstellung direkt.

Entsprechend sieht man die zweite direkte Summendarstellung ein. Nach a) haben beide Summanden die reellen Dimensionen $\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$.

Für $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n^+(\mathbb{C})$ gilt $\mathfrak{A} = {}^t\overline{\mathfrak{A}}$ und somit $\operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}) = \operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}}) = \operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 > 0$, vgl. Aufg. 20. Für $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$ gilt $\mathfrak{A} = -{}^t\overline{\mathfrak{A}}$ und somit $\operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathrm{i}\mathfrak{A}\,\mathrm{i}\mathfrak{A}) = \operatorname{Re}\operatorname{Sp}\big(\mathrm{i}^2\,\mathfrak{A}\,(-{}^t\overline{\mathfrak{A}})\big) = \operatorname{Re}\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}})\big) = \operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 > 0$. Die betrachtete Form ist daher auf dem ersten dieser beiden Unterräume positiv definit. Ganz analog sieht man, dass sie auf dem zweiten Unterraum negativ definit ist. Insgesamt hat sie also den Typ (n^2, n^2).

c) Für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n^-(\mathbb{C})$ gilt $\overline{\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})} = \operatorname{Sp}(\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}) = \operatorname{Sp}\big((-{}^t\mathfrak{A})\,(-{}^t\mathfrak{B})\big) = \operatorname{Sp}{}^t(\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}) = \operatorname{Sp}(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, also $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \in \mathbb{R}$. Ist dabei $\mathfrak{A} \neq 0$, so gilt $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}) = -\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}}) < 0$, da $\operatorname{Sp}(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}})$ nach Aufg. 20 dann stets positiv ist. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 22, p. 386 (1.6.2012) :

Man bestimme den Typ der folgenden Matrix aus $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Beweis: Nach 11.A, Aufg. 9a) hat die Matrix das charakteristische Polynom $(X+b-a)^{n-1}(X-a-(n-1)b)$. Ihre n Eigenwerte sind daher $a+(n-1)b$ und der $n-1$-fache Eigenwert $a-b$. Wir verwenden nun Satz 12.C.11, um den Typ der Matrix zu bestimmen.

Sei zunächst $a=b$. Dann ist der Typ $(1, 0)$ bei $a>0$, $(0, 1)$ bei $a<0$ und $(0, 0)$ bei $a=0$.

Sei nun $a>b$. Dann ist der Typ $(n, 0)$ bei $a>-(n-1)b$, $(n-1, 1)$ bei $a<-(n-1)b$ und $(n-1, 0)$ bei $a=-(n-1)b$.

Sei schließlich $a<b$. Dann ist der Typ $(0, n)$ bei $a<-(n-1)b$, $(1, n-1)$ bei $a>-(n-1)b$ und $(0, n-1)$ bei $a=-(n-1)b$. •

Abschnitt 12.C, Aufg. 25, p. 386 (1.6.2012) :

Sei Φ eine komplex-*symmetrische* Bilinearform vom Rang r auf dem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum V. Dann ist $\operatorname{Re}\Phi$ eine reell-symmetrische Bilinearform auf V vom Typ (r, r). (Aufg. 21b) behandelt ein Beispiel hierzu.)

Beweis: Wir wählen eine Basis $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$, $r = \operatorname{Rang}\Phi$, von V derart, dass die Gramsche Matrix von Φ bzgl. dieser Basis die Form $\mathfrak{E}_n^r = \operatorname{Diag}(1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)$ hat, vgl. Satz 12.B.12. Dann ist $v_1, \ldots, v_r, \mathrm{i}v_1, \ldots, \mathrm{i}v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_{r+1}, \ldots, \mathrm{i}v_n$ eine $\mathbb{R}$-Basis von V. Die Gramsche Matrix von $\operatorname{Re}\Phi$ bzgl. dieser Basis ist offenbar $\mathfrak{E}_{2n}^{r,r}$. $\operatorname{Re}\Phi$ hat daher den Typ (r, r). •

13 Räume mit Skalarprodukt

Abschnitt 13.A, Aufg. 1, p. 398 (1.6.2012) :

Man zeige, dass die hermitesche Form mit der Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{C}^2$ ein Skalarprodukt ist, und orthonormalisiere die Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ bzgl. dieses Skalarprodukts mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren.

Beweis: Die Hauptminoren der Matrix sind $D_0 = D_1 = D_2 = 1 > 0$, die Form ist also nach dem Hurwitzschen Kriterium 12.C.4 positiv definit. Sie ist außerdem komplex-hermitesch, da die angegebene Matrix komplex-hermitesch ist. Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert:

$$v_1' = (1,0)\,, \quad \|v_1'\|^2 = (1\;\;0)\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,, \quad v_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = (1,0)\,,$$

$$v_2' = (0,1) - (0\;\;1)\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,0) = (0,1) - (-\mathrm{i}\;\;2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1,0) = (\,\mathrm{i},1)\,,$$

$$\|v_2'\|^2 = (\,\mathrm{i}\;\;1)\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = (0\;\;1)\begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = 1\,, \quad v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = (\,\mathrm{i},1)\,.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis ist also $v_1 = (1,0)\,,\; v_2 = (\,\mathrm{i}\,,1)\,.$ •

Abschnitt 13.A, Aufg. 2, p. 398 (1.6.2012) :

Man bestimme die Gramsche Matrix der Polynomfunktionen $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle x, y\rangle := \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt \qquad x, y \in \mathrm{C}^0_{\mathbb{R}}\big([0,1]\big)\,.$$

Man beweise direkt, dass diese Gramsche Matrix positiv definit ist.

Beweis: Setzen wir $v_i := t^{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$, so ist $\langle v_i, v_j\rangle = \int_0^1 t^{i+j-2}\, dt = \dfrac{1}{i+j-1}$. Die gesucht Gramsche Matrix ist also die Cauchy-Matrix $(1/(a_i+b_j))$ mit $a_i := i-1\,, b_j := j$ für $i, j = 1, \ldots, n$. Ihre Hauptminoren sind die Cauchyschen Doppelalternanten $D_k := \operatorname{Det}(1/(a_i+b_j)_{1\le i,j\le k}$. Nach 9.D, Aufg. 20 ist $D_k = \dfrac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\,\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1}^n(a_i+b_j)} = \dfrac{\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)\,\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)}{\prod_{i,j=1}^n(i+j-1)} > 0$, da alle Faktoren in Zähler und Nenner von D_k positiv sind. Mit dem Hurwitzschen Kriterium 12.C.4 sieht man, dass $\langle -, -\rangle$ positiv definit ist. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 3, p. 398 (1.6.2012) :

Man orthonormalisiere die Polynome $1, t, t^2, t^3, t^4$ mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren bzgl. des Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\,\overline{y}(t)\, dt\,,\; x, y \in \mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([0,1]\big)$, und bzgl. $\langle x, y\rangle = \int_{-1}^1 x(t)\,\overline{y}(t)\, dt\,,$ $x, y \in \mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([-1,1]\big)$. (Die so aus den Polynomen $1, t, t^2, \ldots$ gewonnenen Polynome heißen die Legendreschen Polynome für die Intervalle $[0\,,1]$ bzw. $[-1\,,1]$, vgl. Beispiel 19.A.14.)

Lösung: Wir behandeln zunächst das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\,\overline{y}(t)\, dt\,,\; x, y \in \mathrm{C}^0_{\mathbb{K}}\big([0,1]\big)\,.$

Mit $w_1 := 1$, $w_2 := t$, $w_3 := t^2$, $w_4 := t^3$, $w_5 := t^5$ erhält man die Orthonormalbasis $v_1, v_2, v_3.v_4, v_5$ aus

$$v_1' := w_1 = 1\,, \quad \|v_1'\|^2 = \int_0^1 1^2\, dt = t\,\Big|_0^1 = 1\,, \qquad v_1 := \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = 1\,.$$

$$v_2' := w_2 - \langle w_2, v_1\rangle v_1 = t - \int_0^1 t\, dt = t - \frac{1}{2}\,, \qquad \|v_2'\|^2 = \int_0^1 \Big(t-\frac{1}{2}\Big)^2 dt = \frac{1}{3}\Big(t-\frac{1}{2}\Big)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\,,$$

$$v_2 := \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \sqrt{3}\,(2t-1)\ .$$

$$v_3' := w_3 - \langle w_3, v_1\rangle v_1 - \langle w_3, v_2\rangle v_2 = t^2 - \int_0^1 t^2\,dt - \Big(\int_0^1 t^2\sqrt{3}\,(2t-1)\,dt\Big)\sqrt{3}\,(2t-1)$$

$$= t^2 - \frac{1}{3} - \big(\frac{3}{2} - 1\big)(2t-1) = t^2 - t + \frac{1}{6}\ ,$$

$$\|v_3'\|^2 = \int_0^1 \big(t^2 - t + \frac{1}{6}\big)^2\,dt = \int_0^1 \big(t^4 - 2t^3 + \frac{4}{3}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{36}\big)\,dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}\ ,$$

$$v_3 := \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \sqrt{5}\,\big(6t^2 - 6t + 1\big)\ .$$

$$v_4' := w_4 - \langle w_4, v_1\rangle v_1 - \langle w_4, v_2\rangle v_2 - \langle w_4, v_3\rangle v_3$$

$$= t^3 - \int_0^1 t^3\,dt - \Big(\int_0^1 t^3\sqrt{3}\,(2t-1)\,dt\Big)\sqrt{3}\,(2t-1) - \Big(\int_0^1 t^3\sqrt{5}\,\big(6t^2-6t+1\big)\,dt\Big)\sqrt{5}\,\big(6t^2-6t+1\big)$$

$$= t^3 - \frac{1}{4} - \big(\frac{6}{5} - \frac{3}{4}\big)(2t-1) - \big(5 - 6 + \frac{5}{4}\big)\,(6t^2 - 6t + 1) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\ ,$$

$$\|v_4'\|^2 = \int_0^1 \big(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\big)^2\,dt = \int_0^1 \big(t^6 - 3t^5 + \frac{69}{20}t^4 - \frac{19}{10}t^3 + \frac{51}{100}t^2 - \frac{3}{50}t + \frac{1}{400}\big)\,dt$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{69}{100} - \frac{19}{40} + \frac{51}{300} - \frac{3}{100} + \frac{1}{400} = \frac{1}{2800}\ ,$$

$$v_4 := \frac{v_4'}{\|v_4'\|} = \sqrt{7}\,\big(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1\big)\ .$$

$$v_5' := w_5 - \langle w_5, v_1\rangle v_1 - \langle w_5, v_2\rangle v_2 - \langle w_5, v_3\rangle v_3 - \langle w_5, v_4\rangle v_4$$

$$= t^4 - \int_0^1 t^4\,dt - \Big(\int_0^1 t^4\sqrt{3}\,\big(2t-1\big)\,dt\Big)\sqrt{3}\,\big(2t-1\big) - \Big(\int_0^1 t^4\sqrt{5}\,(6t^2-6t+1)\,dt\Big)\sqrt{5}\,\big(6t^2-6t+1\big)$$

$$- \Big(\int_0^1 t^4\sqrt{7}\,\big(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1\big)\,dt\Big)\sqrt{7}\,\big(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1\big)$$

$$= t^4 - \frac{1}{5} - \big(1 - \frac{3}{5}\big)(2t-1) - \big(\frac{30}{7} - 5 + 1\big)\,(6t^2 - 6t + 1) - \big(\frac{35}{2} - 30 + 14 - \frac{7}{5}\big)\,\big(20t^3 - 30t + 12t - 1\big)$$

$$= t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70}\ ,$$

$$\|v_5'\|^2 = \int_0^1 \big(t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70}\big)^2\,dt = \frac{1}{44100} = \frac{1}{210^2}\ ,$$

$$v_5 := \frac{v_5'}{\|v_5'\|} = \sqrt{9}\,\big(70t^4 - 140t^3 + 90t^2 - 20t + 1\big) = 210t^4 - 420t^3 + 270t^2 - 60t + 3\ .$$

Wir behandeln nun das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\,\overline{y}(t)\,dt\ ,\ x, y \in C^0_{\mathbb{K}}\big([0,1]\big)$. Mit $w_1 := 1$, $w_2 := t$, $w_3 := t^2$, $w_4 := t^3$, $w_5 := t^4$ erhält man unter Berücksichtigung der Tatsache, dass das Integral von -1 bis 1 über eine ungerade Funktion verschwindet, die Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 aus

$$v_1' := w_1 = 1\ , \quad \|v_1'\|^2 = \int_{-1}^1 1^2\,dt = t\,\Big|_{-1}^1 = 2\ , \qquad v_1 := \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

$$v_2' := w_2 - \langle w_2, v_1\rangle v_1 = t - \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{2}}\,dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = t\ , \qquad \|v_2'\|^2 = \int_{-1}^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\,\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}\ ,$$

$$v_2 := \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t\ .$$

$$v_3' := w_3 - \langle w_3, v_1\rangle v_1 - \langle w_3, v_2\rangle v_2 = t^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^1 t^2\,dt - \frac{3}{2}\,t\,\Big(\int_{-1}^1 t^3\,dt\Big) = t^2 - \frac{1}{3}\ ,$$

$$\|v_3'\|^2 = \int_{-1}^{1} \bigl(t^2 - \tfrac{1}{3}\bigr)^2\,dt = \int_{-1}^{1} \bigl(t^4 - \tfrac{2}{3}t^2 + \tfrac{1}{9}\bigr)\,dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45} = \frac{2\cdot 2^2}{5\cdot 3^2}\,,$$
$$v_3 := \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,\bigl(3t^2-1\bigr)\,.$$
$$v_4' := w_4 - \langle w_4, v_1\rangle v_1 - \langle w_4, v_2\rangle v_2 - \langle w_4, v_3\rangle v_3 =$$
$$= t^3 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^3\,dt - \frac{3}{2}\,t\,\Bigl(\int_{-1}^{1} t^4\,dt\Bigr) - \frac{5}{8}\,(3t^2-1)\Bigl(\int_{-1}^{1}(3t^5-t^3)\,dt\Bigr) = t^3 - \frac{3}{5}\,t\,,$$
$$\|v_4'\|^2 = \int_{-1}^{1} \bigl(t^3 - \tfrac{3}{5}\,t\bigr)^2\,dt = \int_{-1}^{1} \bigl(t^6 - \tfrac{6}{5}t^4 + \tfrac{9}{25}\,t^2\bigr)\,dt = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175} = \frac{2\cdot 2^2}{7\cdot 5^2}\,,$$
$$v_4 := \frac{v_4'}{\|v_4'\|} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\,\bigl(5t^3-3t\bigr)\,.$$
$$v_5' := w_5 - \langle w_5, v_1\rangle v_1 - \langle w_5, v_2\rangle v_2 - \langle w_5, v_3\rangle v_3 - \langle w_5, v_4\rangle v_4 =$$
$$= t^4 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^4\,dt - \frac{3}{2}\,t\,\Bigl(\int_{-1}^{1} t^5\,dt\Bigr) - \frac{5}{8}\,(3t^2-1)\int_{-1}^{1}(3t^6-t^4)\,dt - \frac{7}{8}\,(5t^3-3t)\int_{-1}^{1}(5t^7-3t^5)\,dt$$
$$= t^4 - \frac{1}{5} - \frac{2}{7}(3t^2-1) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}\,,$$
$$\|v_5'\|^2 = \int_{-1}^{1} \bigl(t^4 - \tfrac{6}{7}\,t^2 + \tfrac{3}{35}\bigr)^2\,dt = \int_{-1}^{1} \bigl(t^8 - \tfrac{12}{7}t^6 + \tfrac{222}{245}\,t^4 - \tfrac{36}{245}\,t^2 + \tfrac{9}{1225}\bigr)\,dt = \frac{128}{11025} = \frac{2\cdot 8^2}{105^2}\,,$$
$$v_5 := \frac{v_5'}{\|v_5'\|} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}\,\bigl(35t^4 - 30t^2 + 3\bigr)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 13.A, Aufg. 4, p. 399 (1.6.2012):

Im $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, wende man das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $(1,2,4)$, $(5,4,2)$, $(3,-1,3)$ an.

Lösung: Ausgehend von $w_1 := (1,2,4)$, $w_2 := (5,4,2)$, $w_3 := (3,-1,3)$ erhalten wir:

$$v_1' = (1,2,4)\,,\quad \|v_1'\| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}\,,\quad v_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)\,,$$
$$v_2' = w_2 - \langle w_2, v_1\rangle v_1 = (5,4,2) - \frac{1}{21}\langle (5,4,2), (1,2,4)\rangle (1,2,4) = (5,4,2) - (1,2,4) = (4,2,-2)\,,$$
$$\|v_2'\| = \sqrt{16+4+4} = 2\sqrt{6}\,,\qquad v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2,1,-1)\,,$$
$$v_3' = w_3 - \langle w_3, v_1\rangle v_1 - \langle w_3, v_2\rangle v_2 = (3,-1,3) - \frac{13}{21}\,(1,2,4) - \frac{1}{3}(2,1,-1) = \frac{1}{7}(12,-18,6)$$
$$\|v_3'\| = \frac{1}{7}\sqrt{144+324+36} = \frac{6}{7}\sqrt{14}\,,\qquad v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(2,-3,1)\,.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis ist also $v_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(2,1,-1)$, $v_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}\,(2,-3,1)$. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 5, p. 399 (1.6.2012):

In der Minkowskischen Ungleichung 13.A.4 gilt genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $x = ay$ oder $y = ax$ mit einem $a \in \mathbb{R}_+$ ist.

Beweis: Im Fall $y=0$ (oder $x=0$) ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also etwa $y \neq 0$.

Der Beweis von 13.A.4 zeigt, dass in der Minkowskischen Ungleichung genau dann das Gleichheitszeichen gilt, wenn bei beiden Abschätzungen in der Ungleichungskette

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = \bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2$$

das Gleichheitszeichen gilt. Nach 13.A.3 gilt in der zweiten Abschätzung genau dann das Gleicheitszeichen, wenn x und y linear abhängig sind, d.h. wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ gibt mit $x = ay$. In diesem Fall gilt in der ersten Abschätzung $a\|y\|^2 = a\,\mathrm{Re}\langle y, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le |\langle x, y\rangle| = |a||\langle y, y\rangle| = |a|\|y\|^2$ genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $a = |a|$, d.h. $a \in \mathbb{R}_+$ ist. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 6, p. 399 (1.6.2012) :

Die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ eines Vektorraums mit Skalarprodukt sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gramsche Determinante

$$\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}$$

ungleich 0 ist. (Sie ist dann nach 12.C.6 sogar positiv.) Allgemeiner gilt: Der Rang der Gramschen Matrix $\big(\langle x_i\,, x_j\rangle\big)_{1\le i,j\le n}$ ist gleich der Dimension von $\sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i$.

Beweis: Hat man eine Relation $\sum_{i=1}^n r_i\langle x_i, x_j\rangle = 0$ der Zeilen der angegebenen Determinante, so ergibt sich $\|\sum_{i=1}^n r_i x_i\|^2 = \sum_{j=1}^n \overline{r}_j \sum_{i=1}^n r_i\langle x_i, x_j\rangle = 0$ und somit $\sum_{i=1}^n r_i x_i = 0$, also $r_i = 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der x_i. Umgekehrt folgt aus $\sum_{i=1}^n r_i x_i = 0$ bereits $\sum_{i=1}^n r_i\langle x_i, x_j\rangle = 0$ für alle j und damit die entsprechende Relation der Zeilen.

Sei $r := \mathrm{Dim}\sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i$. Aus $x_1, \dots, x_n$ kann man eine Basis von $\sum_{i=1}^n \mathbb{K}x_i$ auswählen. O.E. sei dies $x_1, \dots, x_r$. Für $k > r$ ist dann $x_k = \sum\limits_{i=1}^r r_{ik}x_i$ und somit $\langle x_k, x_j\rangle = \sum\limits_{i=1}^r r_{ik}\langle x_i, x_j\rangle$ für alle j. Die unteren $n-r$ Zeilen der angegebenen Matrix sind also Linearkombinationen der oberen r Zeilen. Ihr Zeilenrang ist daher $\le r$. Der Minor aus den ersten r Spalten und Zeilen der Matrix ist aber nach dem Bewiesenen $\neq 0$. Das Minorenkriterium liefert daher, dass der Rang der Matrix $\ge r$ und damit insgesamt gleich r ist. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 7, p. 399 (1.6.2012) :

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt endlicher oder abzählbar unendlicher Dimension. Dann lässt sich jedes endliche Orthonormalsystem in V zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen.

Beweis: Sei $v_1, \dots, v_n$ das gegebene Orthonormalsystem in V. Aus $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$ mit $a_i \in \mathbb{K}$ folgt dann $0 = \langle\sum_{i=1}^n a_i v_i\,, v_j\rangle = \sum_{i=1}^n a_i\langle v_i, v_j\rangle = a_i\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = a_j$ für alle j, d.h. $v_1, \dots, v_n$ ist linear unabhängig, vgl. auch die Bemerkung nach Definition 12.B.3. Nach Satz 3.A.16 lässt sich $v_1, \dots, v_n$ zu einer abzählbaren Basis $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots$ von V ergänzen. Wendet man darauf das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an, so bekommt man die gewünschte Orthonormalbasis. •

Bemerkung: Ein unendliches Orthonormalsystem lässt sich nicht notwendigerweise zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Dies gilt beispielsweise für ein System, das einen von V verschiedenen dichten Unterraum U von V erzeugt. In diesem Fall gibt es außer 0 keinen Vektor, der zu U orthogonal ist, vgl. Abschnitt 19.A.

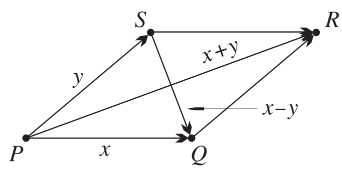
Abschnitt 13.A, Aufg. 8, p. 399 (1.6.2012) :

Für Vektoren x, y eines reellen Vektorraums mit Skalarprodukt zeige man:

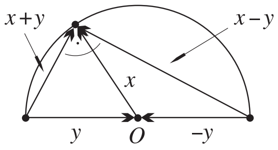
a) Genau dann ist $x = y$, wenn $\|x\| = \|y\|$ und $\langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle$ ist.

b) Genau dann ist $\|x\| = \|y\|$, wenn $x - y$ und $x + y$ orthogonal sind. Beispiele:

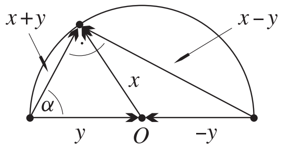
(1) Ein Parallelogramm ist genau dann eine Raute (oder ein Rhombus), wenn die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.



(2) Satz des Thales:



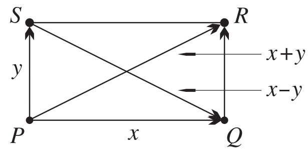
Überdies:



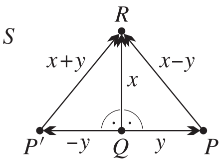
$\|x\| = \|y\| = r$
$\|x+y\| = 2r\cos\alpha$
$\|x-y\| = 2r\sin\alpha$

c) Genau dann ist $\|x-y\| = \|x+y\|$, wenn x und y orthogonal sind. Beispiele:

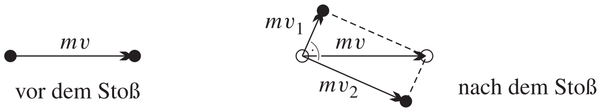
(1) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind.



(2) Definition des rechten Winkels nach Euklid (vgl. Beispiel 13.A.12):



b) Gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, so sind x und y orthogonal (Umkehrung des Satzes von Pythagoras). Beispiel: Stößt eine Kugel elastisch auf eine ruhende Kugel gleicher Masse, so entfernen sich nach dem Stoß die beiden Kugeln orthogonal voneinander. Der Impulssatz $mv_1 + mv_2 = mv$ besagt, dass v_1, v_2 und v die Kantenvektoren eines Dreiecks bilden, und der Energiesatz $\frac{1}{2}m\|v_1\|^2 + \frac{1}{2}m\|v_2\|^2 = \frac{1}{2}m\|v\|^2$ (seine Gültigkeit *definiert* den elastischen Stoß), dass v_1, v_2 überdies einen rechten Winkel bilden.



Beweis: a) Aus $\|x\| = \|y\|$, also $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle$, und $\langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle$ bekommt man

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = 0$$

und somit $x = y$. Die Umkehrung ist trivial.

b) Genau dann sind $x-y$ und $x+y$ orthogonal, wenn $0 = \langle x-y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$, d.h. $\|x\| = \|y\|$, gilt.

c) Genau dann gilt $\|x-y\| = \|x+y\|$, wenn $0 = \|x-y\|^2 - \|x+y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle - \langle x+y, x+y\rangle = \big(\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\big) - \big(\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\big) = -4\langle x, y\rangle$ ist, d.h. wenn x und y orthogonal sind.

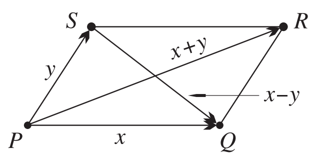
d) Aus $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, d.h. $\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$, folgt sofort $\langle x, y\rangle = 0$, d.h. die Orthogonalität von x und y. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 9, p. 400 (1.6.2012):

Für Vektoren x, y eines $\mathbb{K}$-Vektorraums mit Skalarprodukt gilt

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \qquad \text{(Parallelogrammregel)}.$$

(In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den vier Seiten.)



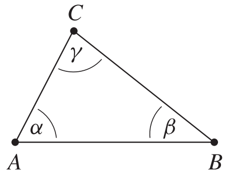
Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 &= \langle x+y,\, x-y\rangle + \langle x-y,\, x+y\rangle\\ &= \big(\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\big) + \big(\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\big)\\ &= 2(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle) = \|x\|^2+\|y\|^2.\end{aligned}$$

•

Abschnitt 13.A, Aufg. 10, p. 400 (1.6.2012):

(Winkelsumme im Dreieck) Sei (A, B, C) ein (nicht-ausgeartetes) Dreieck in einem euklidischen affinen Raum. Dann ist $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ für $\alpha := \measuredangle(C, A, B)$, $\beta := \measuredangle(A, B, C)$, $\gamma := \measuredangle(B, C, A)$.



Beweis: Setzen wir $x := \overrightarrow{AB}$, $y := \overrightarrow{BC}$, $z := \overrightarrow{CA}$, so gilt $x+y+z=0$ und $\alpha = \measuredangle(-z, x) = \measuredangle(x+y, x)$, $\beta = \measuredangle(-x, y)$ und und $\gamma = \measuredangle(-y, z) = \measuredangle(-y, -x-y) = \measuredangle(x+y, y)$. Daher gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\langle x+y, x\rangle}{\|x+y\|\,\|x\|}\,,\quad \cos\beta = \frac{\langle -x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\,,\quad \cos\gamma = \frac{\langle x+y, y\rangle}{\|x+y\|\,\|y\|}\,,$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{\langle x+y,x+y\rangle\langle x,x\rangle - \langle x+y,x\rangle\langle x+y,x\rangle}{\|x+y\|^2\,\|x\|^2}} = \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}}{\|x+y\|\,\|x\|}\,,$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{\frac{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2\,\|y\|^2}} = \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}}{\|x\|\,\|y\|}\,,$$

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{\frac{\langle x+y,x+y\rangle\langle y,y\rangle - \langle x+y,y\rangle\langle x+y,y\rangle}{\|x+y\|^2\,\|y\|^2}} = \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}}{\|x+y\|\,\|y\|}\,.$$

Mit den Additionstheoremen für Kosinus und Sinus erhalten wir daraus:

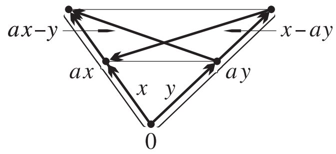
$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{\langle x+y,x\rangle}{\|x+y\|\,\|x\|}\cdot\frac{-\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} - \frac{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}{\|x+y\|\,\|x\|^2\,\|y\|}\\ &= \frac{-\langle x+y,x\rangle\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle^2}{\|x+y\|\,\|x\|^2\,\|y\|} = \frac{-\langle x,x\rangle\langle x,y\rangle - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}{\|x+y\|\,\|x\|^2\,\|y\|} =\\ &= -\frac{\langle x+y,y\rangle}{\|x+y\|\,\|y\|} = -\cos\gamma = \cos(\pi-\gamma)\,,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\\ &= \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}}{\|x+y\|\,\|x\|}\cdot\frac{\langle -x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} + \frac{\langle x+y,x\rangle}{\|x+y\|\,\|x\|}\cdot\frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}}{\|x\|\,\|y\|}\\ &= \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}\,\langle x,x\rangle}{\|x+y\|\,\|x\|^2\,\|y\|} = \frac{\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2}}{\|x+y\|\,\|y\|} = \sin\gamma = \sin(\pi-\gamma)\,.\end{aligned}$$

Da die Winkel α, β, γ zwischen 0 und π und somit $\alpha+\beta$ und $\pi-\gamma$ zwischen 0 und 2π liegen, erhält man $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, d.h. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. •

Bemerkung: Dies ist (verborgen) der klassische elementargeometrische Beweis durch Ziehen der Parallelen zu AB durch C. Was bewiesen wird ist, dass in einem Parallelogramm die Summe der Winkel, die eine Diagonale mit den benachbarten Seiten bildet, gleich dem Winkel zwischen diesen Seiten ist. Diese Eigenschaft macht den eingeführten Winkelbegriff überhaupt erst sinnvoll. Übersichtlicher lassen sich solche Aussagen über Winkel mit der Theorie der ebenen Drehungen aus Beispiel 14.A.10 behandeln.

Abschnitt 13.A, Aufg. 11, p. 400 (1.6.2012) :

Für Vektoren x, y eines $\mathbb{R}$-Vektorraums mit Skalarprodukt mit $\|x\| = \|y\|$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}$ gilt $\|x - ay\| = \|ax - y\|$.



Beweis: Die Voraussetzung $\langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle$ liefert

$$\begin{aligned}\|x-ay\|^2 &= \langle x-ay\,,\,x-ay\rangle = \langle x, x\rangle - 2a\langle x, y\rangle + a^2\langle y, y\rangle = \langle y, y\rangle - 2a\langle y, x\rangle + a^2\langle x, x\rangle \\ &= \langle ay-x\,,\,ay-x\rangle = \|ay-x\|^2\end{aligned}$$

•

Abschnitt 13.A, Zusatzaufgabe, p. 401 (1.6.2012) :

Für Vektoren x, y eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Skalarprodukt gilt $\big\| \|x\|^2 y - \|y\|^2 x \big\| = \|x\|\,\|y\|\,\|x-y\|$.

Beweis:
$$\begin{aligned}\big\| \|x\|^2 y - \|y\|^2 x \big\|^2 &= \langle \|x\|^2 y - \|y\|^2 x\,,\, \|x\|^2 y - \|y\|^2 x\rangle \\ &= \|x\|^4\langle y, y\rangle - \|x\|^2\|y\|^2\langle x, y\rangle - \|x\|^2\|y\|^2\langle y, x\rangle + \|y\|^4\langle x, x\rangle \\ &= \|x\|^2\|y\|^2\big(\langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\big) = \|x\|^2\|y\|^2\langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2\|y\|^2\|x-y\|^2 .\end{aligned}$$

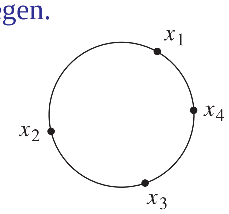
Daraus bekommt man durch Wurzelziehen die Behauptung. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 12, p. 401 (1.6.2012) :

Für Vektoren x_1, x_2, x_3, x_4 eines $\mathbb{R}$-Vektorraums mit Skalarprodukt gilt die Ungleichung des Ptolemäus:

$$\|x_1 - x_3\| \cdot \|x_2 - x_4\| \le \|x_1 - x_2\| \cdot \|x_3 - x_4\| + \|x_1 - x_4\| \cdot \|x_2 - x_3\| .$$

Genau dann gilt das Gleichheitszeichen, wenn die Punkte x_1, x_2, x_3, x_4 auf einem Kreis (der zu einer Geraden entarten darf) liegen und überdies so, dass die beiden Punkte x_1 und x_3 sowie die beiden Punkte x_2 und x_4 jeweils nicht unmittelbar nebeneinander liegen.



Man formuliere die resultierende Gleichung für die Diagonalen und Seiten eines Sehnenvierecks.

Beweis: Wenn x_4 gleich einem der anderen Punkte ist, so gilt in dieser Ungleichung trivialerweise das Gleichheitszeichen und die drei Punkte liegen auf dem Umkreis des resultierenden Dreiecks. Sei also x_4 von den drei anderen Punkten verschieden. Wir setzen $y_i := x_i - x_4 \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Die Dreiecksungleichung liefert:

$$\Big\| \frac{y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{y_3}{\|y_3\|^2} \Big\| \le \Big\| \frac{y_1}{\|y_1\|^2} - \frac{y_2}{\|y_2\|^2} \Big\| + \Big\| \frac{y_2}{\|y_2\|^2} - \frac{y_3}{\|y_3\|^2} \Big\| .$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit $\|y_1\|^2\|y_2\|^2\|y_3\|^2$

$$\big\| \|y_3\|^2 y_1 - \|y_1\|^2 y_3 \big\|\, \|y_2\|^2 \le \big\| \|y_2\|^2 y_1 - \|y_1\|^2 y_2 \big\|\, \|y_3\|^2 + \big\| \|y_1\|^2 y_2 - \|y_2\|^2 y_3 \big\|\, \|y_1\|^2 .$$

Mit der in der vorstehenden Zusatzaufgabe bewiesenen Identität bekommt man

$$\|y_1\|\,\|y_3\|\,\|y_1 - y_3\|\,\|y_2\|^2 \le \|y_1\|\,\|y_2\|\,\|y_1 - y_2\|\,\|y_3\|^2 + \|y_2\|\,\|y_3\|\,\|y_2 - y_3\|\,\|y_1\|^2$$

und dann nach Division durch $\|y_1\|\,\|y_2\|\,\|y_3\|$

$$\|y_1 - y_3\|\,\|y_2\| \le \|y_1 - y_2\|\,\|y_3\| + \|y_2 - y_3\|\,\|y_1\| .$$

Einsetzen von $x_i' := x_i - x_4$, $i = 1, \ldots, 4$, also $y_1 - y_2 = (x_1 - x_4) - (x_2 - x_4) = x_1 - x_2$ und analog $y_1 - y_3 = x_1 - x_3$, $y_2 - y_3 = x_2 - x_3$, ergibt schließlich die Behauptung:

$$\|x_1 - x_3\|\,\|x_2 - x_4\| \le \|x_1 - x_2\|\,\|x_3 - x_4\| + \|x_2 - x_3\|\,\|x_1 - x_4\|\,.$$

Nach Aufg. 5 gilt bei der benutzten Abschätzung genau dann das Gleichheitszeichen, wenn es ein $a \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $\dfrac{y_1}{\|y_1\|^2} - \dfrac{y_2}{\|y_2\|^2} = a\Big(\dfrac{y_2}{\|y_2\|^2} - \dfrac{y_3}{\|y_3\|^2}\Big)$ oder $a\Big(\dfrac{y_1}{\|y_1\|^2} - \dfrac{y_2}{\|y_2\|^2}\Big) = \dfrac{y_2}{\|y_2\|^2} - \dfrac{y_3}{\|y_3\|^2}$. Bezeichnet $I : V \cup \{\infty\} \to V \cup \{\infty\}$ die durch $I(y) := y/\|y\|^2$ für $y \neq 0$ und $I(\infty) = 0$, $I(0) = \infty$ definierte Inversion an der Einheitssphäre, so bedeutet dies, dass $I(y_1), I(y_2), I(y_3)$ auf einer Geraden liegen, und zwar $I(y_2)$ zwischen $I(y_1)$ und $I(y_3)$. Teil c) der nachfolgenden Zusatzaufgabe zeigt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn y_1, y_2, y_3 und $I(\infty) = 0$ auf einem Kreis liegen, und zwar so, dass y_1 und y_3 sowie y_2 und 0 nicht unmittelbar nebeneinander liegen. Addition von x_4 liefert dann die Behauptung.

Geometrisch bedeutet die bewiesene Ungleichung bzw. Gleichung: Das Produkt der Diagonalen eines Vierecks ist stets kleiner als die Summe aus den beiden Produkten gegenüberliegender Seiten, und Gleichheit gilt genau im Fall eines Sehnenvierecks. •

Abschnitt 13.A, Zusatzaufgabe, p. 401 (1.6.2012):

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $\infty \notin V$ ein weiteres Element, das wir als „unendlich fernen Punkt" betrachten, und $\overline{V} := V \uplus \{\infty\}$ (vgl. Band 3, Beispiel 2.B.18, dort wir der Punkt ∞ mit ω bezeichnet). Die Inversion an der Einheitssphäre oder Abbildung durch reziproke Radien $I : \overline{V} \to \overline{V}$ von V ist definiert durch $I(x) := x/\|x\|^2$ für $x \in V - \{0\}$ und $I(0) = \infty$, $I(\infty) = 0$. Die Einheitssphäre $\mathrm{S}(0\,;1) \subseteq V$ ist offenbar die Menge der Fixpunkte von I. Ferner sei W ein Unterraum von V und $\overline{W} = W \uplus \{\infty\}$. Dann gilt:

a) I ist eine winkeltreue Involution, d.h. es gilt $I \circ I = \mathrm{id}_{\overline{V}}$ und $\measuredangle\big(I(x), I(y)\big) = \measuredangle(x, y)$ für $x, y \in V - \{0\}$.

b) Es ist $I(\overline{W}) = \overline{W}$, und $I|\overline{W} : \overline{W} \to \overline{W}$ ist die Inversion an der Einheitssphäre von W.

c) W sei endlichdimensional, und $v_0 + U$ sei eine affine Hyperebene von W, die 0 nicht enthält. (Es ist also U ein 1-kodimensionaler Unterraum von W und $v_0 \in W - U$.) Dann ist $S := I\big((v_0 + U) \cup \{\infty\}\big)$ eine Sphäre in W mit $0 \in S$ und Mittelpunkt $w_0/2\|w_0\|^2$, wo $u_0 := v_0 - w_0$ der Fußpunkt des Lotes von v_0 auf U ist, d.h. es gilt $u_0 \in U$ und $w_0 \perp U$ (vgl. 13.B). – Ist umgekehrt $S \subseteq W$ eine Sphäre (der Dimension $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} W - 1$) mit $0 \in S$, so ist $I(S) - \{\infty\}$ eine Hyperebene in W mit $0 \notin I(S)$. – Insbesondere korrespondieren vermöge I Geraden in V, die 0 nicht enthalten, und Kreise, die 0 enthalten.

d) Ist $S = \mathrm{S}(m_0\,; r)$ eine Sphäre in V, die 0 nicht enthält, so ist $I(S)$ ebenfalls eine Sphäre in V, die 0 nicht enthält, und zwar ist

$$I(S) = \mathrm{S}\Big(\frac{m_0}{\|m_0\|^2 - r^2}\,;\,\frac{r}{|\|m_0\|^2 - r^2|}\Big).$$

Beweis: a) Für $x, y \neq 0$ aus V gilt $I(I(x) = I\Big(\dfrac{x}{\|x\|^2}\Big) = \dfrac{x}{\|x\|^2}\Big/\dfrac{\|x\|^2}{\|x\|^4} = x = \mathrm{id}_{\overline{V}}(x)$ und

$$\cos\measuredangle\big(I(x), I(y)\big) = \frac{\langle I(x)\,, I(y)\rangle}{\|I(x)\|\,\|I(y)\|} = \frac{\langle\, x/\|x\|^2\,, y/\|y\|^2\,\rangle}{(\|x\|/\|x\|^2)\,(\|y\|/\|y\|^2)} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \cos\measuredangle(x, y)\,,$$

also $\measuredangle\big(I(x), I(y)\big) = \measuredangle(x, y)$.

b) Es ist $I(W - \{0\}) = W - \{0\}$ zu zeigen. Für $x \in W$, $x \neq 0$, gilt aber $I(x) = x/\|x\|^2 \in W$ und daher auch $x = I\big(I(x)\big) \in I(W)$.

c) Nach 12.B.9 besitzt U ein orthogonales Komplement $U^\perp$ in W. Es gibt daher $u_0 \in U$ und $w_0 \in U^\perp \subseteq W$ mit $v_0 = u_0 + w_0$. Wegen $v_0 \notin U$ und $u_0 \in U$ ist $w_0 \neq 0$. Für $m_0 := w_0/2\|w_0\|^2 \in W$ und $r := 1/2\|w_0\|$ liegt dann $f(v_0 + U)$ in der Sphäre $\mathrm{S}(m_0\,; r) \subseteq W$ mit Mittelpunkt m_0 und Radius r. Für $u \in U$ gilt nämlich $\langle v_0 + u\,, w_0\rangle = \langle v_0, w_0\rangle + \langle u, w_0\rangle = \langle u_0, w_0\rangle + \langle w_0, w_0\rangle = \|w_0\|^2$ wegen $u, u_0 \in U$ und $w_0 \in U^\perp$, also

$$\begin{aligned}\|I(v_0 + u) - m_0\|^2 &= \Big\langle \frac{v_0 + u}{\|v_0 + u\|^2} - \frac{w_0}{2\|w_0\|^2}\,, \frac{v_0 + u}{\|v_0 + u\|^2} - \frac{w_0}{2\|w_0\|^2}\Big\rangle \\ &= \frac{1}{\|v_0 + u\|^2} - \frac{\langle v_0 + u\,, w_0\rangle}{\|v_0 + u\|^2\,\|w_0\|^2} + \frac{1}{4\|w_0\|^2} = \frac{1}{4\|w_0\|^2} = r^2\,,\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $S = \mathrm{S}(m_0\,;r)$ eine Sphäre in W mit Mittelpunkt m_0 und Radius r, und es gelte $0 \in S$. Dann ist $r = \|m_0\|$, und $I(S-\{0\})$ liegt in der Hyperebene $m_0/2\|m_0\|^2 + U$, wo $U := (\mathbb{R}m_0)^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathbb{R}m_0$ in W ist. Für $w \in S$, $w \neq 0$, gilt nämlich $\|w-m_0\|^2 = \|m_0\|^2$, also $\|w\|^2 = 2\langle w, m_0\rangle$, und folglich $\left\langle I(w) - \dfrac{m_0}{2\|m_0\|^2}\,, m_0 \right\rangle = \left\langle \dfrac{w}{\|w\|^2} - \dfrac{m_0}{2\|m_0\|^2}\,, m_0 \right\rangle = \dfrac{\langle w, m_0\rangle}{\|w\|^2} - \dfrac{\langle m_0, m_0\rangle}{2\|m_0\|^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$, d.h. es ist $I(w) - m_0/2\|m_0\|^2 \in U$ und somit $I(w) \in m_0/2\|m_0\|^2 + U$.

Insgesamt ergibt sich dann wegen $I\big(I(w)\big) = w$, dass w auch tatsächlich ein Urbild, nämlich $I(w)$, in dieser Hyperebene hat, und ebenso, dass die eingangs besprochene Abbildung von $(v_0 + U) \cup \{\infty\}$ in die Sphäre $\mathrm{S}(m_0\,;r)$ surjektiv ist.

d) Sei $S = \mathrm{S}(m_0\,;r) \subseteq V$ eine Sphäre mit $0 \notin S$, d.h. es sei $r \neq \|m_0\|$. Dann ist $I(S)$ die Sphäre mit Mittelpunkt $m_0/(\|m_0\|^2 - r^2)$ und Radius $r/|\|m_0\|^2 - r^2|$. Für $x \in S$ gilt nämlich $\|x - m_0\|^2 = r^2$, d.h. $\|x\|^2 - 2\langle m_0, x\rangle + \|m_0\|^2 = r^2$, und folglich

$$\begin{aligned}
\Big\| I(x) - \frac{m_0}{\|m_0\|^2 - r^2} \Big\|^2 &= \Big\langle \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{m_0}{\|m_0\|^2 - r^2}\,, \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{m_0}{\|m_0\|^2 - r^2} \Big\rangle \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{2\langle m_0, x\rangle}{(\|m_0\|^2 - r^2)\,\|x\|^2} + \frac{\|m_0\|^2}{(\,\|m_0\|^2 - r^2)^2} \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{\|x^2\| + \|m_0\|^2 - r^2}{(\|m_0\|^2 - r^2)\,\|x\|^2} + \frac{\|m_0\|^2}{(\,\|m_0\|^2 - r^2)^2} = \\
&= \frac{1}{\|x\|^2} - \frac{1}{\|m_0\|^2 - r^2} - \frac{1}{\|x\|^2} + \frac{\|m_0\|^2}{(\,\|m_0\|^2 - r^2)^2} = \frac{r^2}{(\,\|m_0\|^2 - r^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $I(S)$ in der angegebenen Sphäre liegt. Wegen $I^2 = \mathrm{id}$ folgt wie oben, dass $I(S)$ bereits die ganze Sphäre ist. •

Bemerkung: Inversionen sind wichtige Hilfsmittel, beispielsweise in der Potenzialtheorie, vgl. Band 4, Abschnitt 13.A, oder in der Theorie der konformen Abbildungen, vgl. in Band 4 den Satz 14.B.19 von Liouville. Als S p i e g e l u n g a n d e r S p h ä r e $\mathrm{S}(0\,;\rho)$, $\rho > 0$, bezeichnet man die Abbildung I_ρ mit $I_\rho(x) = \rho^2 x/\|x\|^2$ für $x \neq 0$. Sie hat $\mathrm{S}(0\,;\rho)$ als Menge der Fixpunkte und besitzt ähnliche Eigenschaften wie $I = I_1$.

Abschnitt 13.A, Aufg. 13, p. 401 (1.6.2012):

Sei P ein fester Punkt im affinen Raum E über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Ferner sei $\mathrm{S}(M; r) = \{Q \in E \mid d(M, Q) = r\}$ eine feste Sphäre in E. Für alle Geraden g durch P in E, die $\mathrm{S}(M; r)$ in zwei Punkten P_1 und P_2 schneiden (bei Tangenten ist $P_1 = P_2$) ist das Produkt $d(P_1, P)\,d(P_2, P)$ der Abstände von P_1 bzw. P_2 zu P konstant (und zwar gleich $|d(M, P)^2 - r^2|$). (S e k a n t e n s a t z)

Beweis: Sei $e := \overrightarrow{PP_1}/\|\overrightarrow{PP_1}\|$ eine Einheitsvektor in Richtung von P nach P_1, $x := \overrightarrow{MP}$ und $r_1 := d(P_1, P)$, $r_2 := d(P_2, P)$. Dann gilt $r = \|\overrightarrow{MP_1}\| = \|x + r_1 e\|$ und $r = \|\overrightarrow{MP_2}\| = \|x + r_2 e\|$ bzw. $r = \|\overrightarrow{MP_2}\| = \|x - r_2 e\|$, je nachdem ob P außerhalb oder im Inneren der Sphäre liegt. Es folgt

$$r^2 = \langle x + r_1 e\,, x + r_1 e\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, e\rangle r_1 + r_1^2 \quad \text{und} \quad r^2 = \langle x \pm r_2 e\,, x \pm r_2 e\rangle = \|x\|^2 \pm 2\langle x, e\rangle r_2 + r_2^2,$$

also $2\langle x, e\rangle(r_1 \mp r_2) + r_1^2 - r_2^2 = 0$ und folglich $2\langle x, e\rangle = -(r_1 \pm r_2)$ bei $P_1 \neq P_2$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert dann $r^2 = \|x\|^2 - (r_1 \pm r_2) r_1 + r_1^2 = \|x\|^2 \mp r_1 r_2$, d.h. $d(P_1, P)\,d(P_2, P) = r_1 r_2 = |\|x\|^2 - r^2| = |d(M, P)^2 - r^2|$. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 14, p. 401 (1.6.2012):

Sei Φ eine komplex-hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum V, den wir auch als reellen Vektorraum auffassen. Dann ist $\mathrm{Re}\,\Phi$ eine reell-symmetrische Form auf V.

a) Eine Familie x_i, $i \in I$, von Vektoren in V ist genau dann orthogonal bzw. orthonormal bzgl. Φ, wenn die Familie x_i, $\mathrm{i}x_j$, $i, j \in I$, orthogonal bzw. orthonormal bzgl. $\mathrm{Re}\,\Phi$ ist.

b) Für $x_1, \ldots, x_n \in V$ ist $|\mathrm{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_n)|^2 = \mathrm{G}_{\mathrm{Re}\,\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n)$.

Beweis: a) Genau dann gilt $\Phi(x_i, x_j) = 0$, wenn $\mathrm{Re}\,\Phi(x_i, x_j) = 0$ und $\mathrm{Im}\,\Phi(x_i, x_j) = 0$ ist. Dabei ist Letzteres äquivalent zu $\mathrm{Re}\,\Phi(x_i, \mathrm{i}x_j) = -\mathrm{Re}(\mathrm{i}\Phi(x_i, x_j)) = \mathrm{Im}\,\Phi(x_i, x_j) = 0$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt natürlich auch $\operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_i, x_j) = \operatorname{Re}(\mathrm{i}\Phi(x_i, x_j)) = -\operatorname{Im}\Phi(x_i, x_j) = 0$ und $\operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_i, \mathrm{i}x_j) = \operatorname{Re}\Phi(x_i, x_j) = 0$.

Wegen $\Phi(x_j, x_j \in \mathbb{R}$ gilt $\Phi(x_j, x_j) = 1$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}\Phi(x_j, x_j) = 1$ ist. In diesem Fall ist auch $\operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_j, \mathrm{i}x_j) = \operatorname{Re}\Phi(x_j, x_j) = 1$.

b) Sind $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig über $\mathbb{C}$, gibt es also $c_i \in \mathbb{C}$, die nicht alle 0 sind, mit $\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0$, so ist $\sum_{i=1}^n \operatorname{Re} c_i x_i + \operatorname{Im} c_i \mathrm{i}x_i = 0$ eine nichttriviale Relation von $x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n$ über $\mathbb{R}$, die verschwindet, d.h. $x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n$ sind über $\mathbb{R}$ linear abhängig. Dann sind nach Aufg. 6 sowohl $\mathrm{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ als auch $\mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n)$ gleich 0.

Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind und V der von ihnen erzeugte Unterraum. $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}, v_{p+q+1}, \ldots, v_n$ sei eine von V derart, dass $\mathfrak{E}_n^{p,q} = \operatorname{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0 \ldots, 0)$ die Gramsche Matrix von Φ bzgl. dieser Basis ist, was nach 12.C.2 möglich ist. Wie der Beweis von 12.C, Aufg. 11.C zeigt, hat $\operatorname{Re}\Phi$ bzgl. der Basis $x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n$ die Gramsche Matrix $\mathfrak{E}_{2n}^{2p,2q}$. Genau dann ist die Gramsche Determinante von $\Phi \neq 0$, wenn $n = p+q$, d.h. $2n = 2p+2q$ ist und somit die Gramsche Determinante von $\operatorname{Re}\Phi \neq 0$ ist. Wir können also von nun an annehmen, dass beide Determinanten $\neq 0$ sind.

Durch $f(v_j) := x_j$, $j = 1, \ldots, n$, wird eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f: V \to V$ gegeben. Ist $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ die Matrix von f bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$, d.h. ist $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, so gilt $\mathfrak{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_n) = {}^t\mathfrak{A}\, \mathfrak{G}_\Phi(v_1, \ldots, v_n)\, \overline{\mathfrak{A}} = {}^t\mathfrak{A}\, \mathfrak{E}_n^{p,q}\, \overline{\mathfrak{A}}$ nach Satz 12.A.4. Mit der Determinantenproduktformel 9.D.5 ergibt sich $\mathrm{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_n) = |\operatorname{Det}\mathfrak{A}|^2 \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{E}_n^{p,q} = |\operatorname{Det} f|^2 \cdot (-1)^q$.

Fassen wir V als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $v_1, \mathrm{i}v_1, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_n$ auf, so gilt auch $f(\mathrm{i}v_j = \mathrm{i}f(v_j) = \mathrm{i}x_j$ für alle j und für die Matrix $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ von f bzgl. dieser Basis erhält man $\mathfrak{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}v_1, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_n) = {}^t\mathfrak{B}\, \mathfrak{G}_\Phi(v_1, \mathrm{i}v_1, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_n)\, \mathfrak{B} = {}^t\mathfrak{B}\, \mathfrak{E}_{2n}^{2p,2q}\, \mathfrak{B}$, also $\mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n) = (\operatorname{Det}\mathfrak{B})^2 = (\operatorname{Det}_{\mathbb{R}} f)^2$. Nach 9.E, Aufg. 7 gilt $\operatorname{Det}_{\mathbb{R}} f = |\operatorname{Det} f|^2$, also

$$\mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n) = |\operatorname{Det} f|^4 = |\mathrm{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_n)|^2.$$

Beweisvariante: Für $i, j = 1, \ldots, n$ setzen wir $\alpha_{ij} := \operatorname{Re}\Phi(x_i, x_j) = \operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_i, \mathrm{i}x_j)$ und $\beta_{ij} := \operatorname{Im}\Phi(x_i, x_j) = -\operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_i, x_j) = \operatorname{Re}\Phi(x_i, \mathrm{i}x_j)$, d.h. es ist $\Phi(x_i, x_j) = \alpha_{ij} + \mathrm{i}\beta_{ij}$. Im Fall $n = 1$ gilt dann

$$G_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1) = \begin{vmatrix} \operatorname{Re}\Phi(x_1, x_1) & \operatorname{Re}\Phi(x_1, \mathrm{i}x_1) \\ \operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_1, x_1) & \operatorname{Re}\Phi(\mathrm{i}x_1, \mathrm{i}x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ -\beta_{11} & \alpha_{11} \end{vmatrix} = \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2 = |\Phi(x_1, x_1)|^2 = |G_\Phi(x_1)|^2.$$

Beim Schluss von $n-1$ auf n verwenden wir die eindeutige Darstellung $x_n = x + y$ mit $x \in \mathbb{C}x_1 + \cdots + \mathbb{C}x_{n-1}$ und y im orthogonalen Komplement von $\mathbb{C}x_1 + \cdots + \mathbb{C}x_{n-1}$, wie sie nach 12.B.9 existiert. Es gilt dann $x = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$ mit $c_i = a_i + \mathrm{i}b_i$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ sowie $\Phi(y, x_j) = 0$ für $j = 1, \ldots, n-1$ und folglich

$$\begin{aligned} \alpha_{nj} + \mathrm{i}\beta_{nj} = \Phi(x_n, x_j) &= \Phi(x, x_j) + \Phi(y, x_j) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \Phi(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \mathrm{i}b_i)(\alpha_{ij} + \mathrm{i}\beta_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (a_i\alpha_{ij} - b_i\beta_{ij}) + \mathrm{i}\sum_{i=1}^{n-1} (a_i\beta_{ij} + b_i\alpha_{ij}), \quad \text{also} \\ \alpha_{nj} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\alpha_{ij} &- \sum_{i=1}^{n-1} b_i\beta_{ij}, \quad \beta_{nj} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\beta_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\alpha_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \Phi(y, x_n) &= \Phi(x_n, x_n) - \Phi(x, x_n) = \alpha_{nn} + \mathrm{i}\beta_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} c_i \Phi(x_i, x_n) \\ &= \alpha_{nn} + \mathrm{i}\beta_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \mathrm{i}b_i)(\alpha_{in} + \mathrm{i}\beta_{in}) = \Big(\alpha_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i\alpha_{in} - b_i\beta_{in})\Big) + \mathrm{i}\Big(\beta_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i\beta_{in} + b_i\alpha_{in})\Big). \end{aligned}$$

Die Gramsche Determinante von $\operatorname{Re}\Phi$ bzgl. $x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n$ ist

$$\mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \beta_{1,n-1} & \alpha_{1n} & \beta_{1n} \\ -\beta_{11} & \alpha_{11} & \cdots & -\beta_{1,n-1} & \alpha_{1,n-1} & -\beta_{1n} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \beta_{n-1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} & \beta_{n-1,n} \\ -\beta_{n-1,1} & \alpha_{n-1,1} & \cdots & -\beta_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n-1} & -\beta_{n-1,n} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n1} & \beta_{n1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \beta_{n,n-1} & \alpha_{nn} & \beta_{nn} \\ -\beta_{n1} & \alpha_{n1} & \cdots & -\beta_{n,n-1} & \alpha_{n,n-1} & -\beta_{nn} & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

Für $i = 1, \ldots, n-1$ subtrahiert man nun das a_i-fache der $(2i-1)$-ten Zeile und das b_i-fache der $2i$-ten Zeile von der $(2n-1)$-ten Zeile dieser Determinante, ferner addiert man das b_i-fache der $(2i-1)$-ten Zeile und das $-a_i$-fache der $2i$-ten Zeile zur $2n$-ten Zeile. Mit den weiter oben bewiesenen Identitäten bekommt man so

$$\mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \beta_{1,n-1} & \alpha_{1n} & \beta_{1n} \\ -\beta_{11} & \alpha_{11} & \cdots & -\beta_{1,n-1} & \alpha_{1,n-1} & -\beta_{1n} & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \beta_{n-1,1} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & \beta_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} & \beta_{n-1,n} \\ -\beta_{n-1,1} & \alpha_{n-1,1} & \cdots & -\beta_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n-1} & -\beta_{n-1,n} & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{Re}\Phi(y, x_n) & \operatorname{Im}\Phi(y, x_n) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\operatorname{Im}\Phi(y, x_n) & \operatorname{Re}\Phi(y, x_n) \end{vmatrix}.$$

Mit dem Blockmatrizensatz 9.D.4 und der Induktionsvoraussetzung ergibt sich

$$\mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_n, \mathrm{i}x_n) = \mathrm{G}_{\operatorname{Re}\Phi}(x_1, \mathrm{i}x_1, \ldots, x_{n-1}, \mathrm{i}x_{n-1}) \cdot \begin{vmatrix} \operatorname{Re}\Phi(y, x_n) & \operatorname{Im}\Phi(y, x_n) \\ -\operatorname{Im}\Phi(y, x_n) & \operatorname{Re}\Phi(y, x_n) \end{vmatrix}$$

$$= |\mathrm{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})|^2 \cdot |\Phi(y, x_n)|^2 = \left|\begin{vmatrix} \Phi(x_1, x_1) & \cdots & \Phi(x_1, x_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(x_{n-1}, x_1) & \cdots & \Phi(x_{n-1}, x_{n-1}) \end{vmatrix}\right|^2 \cdot |\Phi(y, x_n)|^2$$

$$= \left|\begin{vmatrix} \Phi(x_1, x_1) & \cdots & \Phi(x_1, x_{n-1}) & \Phi(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi(x_{n-1}, x_1) & \cdots & \Phi(x_{n-1}, x_{n-1}) & \Phi(x_{n-1}, x_n) \\ 0 & \cdots & 0 & \Phi(y, x_n) \end{vmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\begin{vmatrix} \Phi(x_1, x_1) & \cdots & \Phi(x_1, x_{n-1}) & \Phi(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi(x_{n-1}, x_1) & \cdots & \Phi(x_{n-1}, x_{n-1}) & \Phi(x_{n-1}, x_n) \\ \Phi(x, x_1) & \cdots & \Phi(x, x_{n-1} & \Phi(y, x_n) + \Phi(x, x_n) \end{vmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\begin{vmatrix} \Phi(x_1, x_1) & \cdots & \Phi(x_1, x_{n-1}) & \Phi(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Phi(x_{n-1}, x_1) & \cdots & \Phi(x_{n-1}, x_{n-1}) & \Phi(x_{n-1}, x_n) \\ \Phi(x_n, x_1) & \cdots & \Phi(x_n, x_{n-1}) & \Phi(x_n, x_n) \end{vmatrix}\right|^2 = |\mathrm{G}_\Phi(x_1, \ldots, x_n)|^2 .$$

Dabei wurde für $i = 1, \ldots, n-1$ das c_i-fache der i-ten Zeile zur n-ten Zeile addiert und danach ausgenutzt, dass $y = x - x_n$ nach Wahl von y zu allen x_i, $i = 1, \ldots, n-1$, orthogonal, also $\Phi(x, x_i) = \Phi(x_n, x_i)$ ist. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 15, p. 401 (1.6.2012):

Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt. Für $x, y \in V$ und $\|y\|/\|x\| \to 0$ gilt dann

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \cos\measuredangle(x, y) + \|y\| O\big(\|y\|/\|x\|\big) .$$

Beweis: Mit Bd. 1, Beispiel 13.C.7 sieht man $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h + O(h^2)$ für $h \to 0$. Für $x, y \in V$ und $\|y\|/\|x\| \to 0$ folgt wegen $\|x\|\,\|y\| \cos\measuredangle(x, y) = \langle x, y\rangle$ und $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$:

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x+y\,, x+y\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2} = \|x\|\sqrt{1 + 2\langle x, y\rangle/\|x\|^2 + \|y\|^2/\|x\|^2}$$

$$= \|x\|\sqrt{1+2(\|y\|/\|x\|)\cos\measuredangle(x,y)+\|y\|^2/\|x\|^2}$$
$$= \|x\|\big(1+(\|y\|/\|x\|)\cos\measuredangle(x,y)+\tfrac{1}{2}\|y\|^2/\|x\|^2+O\big(\|y\|^2/\|x\|^2\big)\big)$$
$$= \|x\|+\|y\|\cos\measuredangle(x,y)+\|x\|O\big(\|y\|^2/\|x\|^2\big)=\|x\|+\|y\|\cos\measuredangle(x,y)+\|y\|O\big(\|y\|/\|x\|\big)\,. \quad \bullet$$

Abschnitt 13.B, Aufg. 1, p. 414 (1.6.2012):

Seien p_1 und p_2 orthogonale Projektionen des $\mathbb{K}$-Vektorraums V mit Skalarprodukt.

a) Genau dann ist p_1p_2 eine orthogonale Projektion von V, wenn p_1 und p_2 kommutieren. p_1p_2 ist dann die orthogonale Projektion auf $\operatorname{Bild} p_1 \cap \operatorname{Bild} p_2$.

b) Genau dann ist p_1+p_2 eine orthogonale Projektion, wenn $p_1p_2=0$ ist, d.h. wenn $\operatorname{Bild} p_2 \perp \operatorname{Bild} p_1$ ist.

c) Genau dann ist p_1-p_2 eine orthogonale Projektion von V, wenn $\operatorname{Bild} p_2 \subseteq \operatorname{Bild} p_1$ ist.

Beweis: a) Sei $p_1p_2=p_2p_1$. Dann ist $(p_1p_2)^2=p_1p_2p_1p_2=p_1p_1p_2p_2=p_1^2p_2^2=p_1p_2$, also p_1p_2 eine Projektion. Da $p_1,\,p_2$ orthogonal sind, gilt nach 13.B.2 für $x,y\in V$ ferner $\langle p_1p_2(x)\,,\,y\rangle=\langle p_2(x)\,,\,p_1(y)\rangle=\langle x\,,\,p_2p_1(y)\rangle=\langle x\,,\,p_1p_2(y)\rangle$, d.h. die Projektion p_1p_2 ist ebenfalls orthogonal. Zu $x\in\operatorname{Bild} p_1p_2$ gibt es ein $y\in V$ mit $x=p_1\big(p_2(y)\big)$, also $x\in\operatorname{Bild} p_1$, und außerdem $x=p_1p_2(y)=p_2\big(p_1(y)\big)\in\operatorname{Bild} p_2$. Ist umgekehrt $x=p_1(y)=p_2(z)$ aus $\operatorname{Bild} p_1\cap\operatorname{Bild} p_2$, so folgt $x=p_1(y)=p_1\big(p_1(y)\big)=p_1(x)=p_1\big(p_2(z)\big)\in\operatorname{Bild} p_1p_2$. Wir erhalten $\operatorname{Bild} p_1p_2=\operatorname{Bild} p_1\cap\operatorname{Bild} p_2$, d.h. p_1p_2 ist die orthogonale Projektion von V auf $\operatorname{Bild} p_1\cap\operatorname{Bild} p_2$.

Sei nun p_1p_2 eine orthogonale Projektion. Für alle $x,y\in V$ gilt dann nach Satz 13.B.2 die Beziehung $\langle p_1p_2(x)\,,\,y\rangle=\langle x\,,\,p_1p_2y\rangle=\langle p_1(x)\,,\,p_2(y)\rangle=\langle p_2p_1(x)\,,\,y\rangle$. Da $\langle -,-\rangle$ als Skalarprodukt nicht-ausgeartet ist, folgt $p_1p_2(x)=p_2p_1(x)$ für alle $x\in V$, d.h. $p_1p_2=p_2p_1$. Man kann hier auch so schließen: Aus $\langle p_1p_2(x)\,,\,y\rangle=\langle p_2p_1(x)\,,\,y\rangle$, also $\langle p_1p_2(x)-p_2p_1(x)\,,\,y\rangle=0$, für alle x,y folgt speziell $\|p_1p_2(x)-p_2p_1(x)\|^2=\langle p_1p_2(x)-p_2p_1(x)\,,\,p_1p_2(x)-p_2p_1(x)\rangle=0$, d.h. $p_1p_2(x)=p_2p_1(x)$ für alle $x\in V$ und somit $p_1p_2=p_2p_1$.

b) Nach 5.F, Aufg. 15a) ist p_1+p_2 genau dann eine Projektion, wenn $p_1p_2=p_2p_1=0$ ist, und in diesem Fall gilt $\operatorname{Bild}(p_1+p_2)=\operatorname{Bild} p_1\oplus\operatorname{Bild} p_2$, $\operatorname{Kern}(p_1+p_2)=\operatorname{Kern} p_1\cap\operatorname{Kern} p_2$. Ist also p_1+p_2 eine orthogonale Projektion, so gilt also $p_1p_2=0$ und somit $\langle p_2(x)\,,\,p_1(y)\rangle=\langle p_1p_2(x)\,,\,y\rangle=0$ für alle $x,y\in V$, d.h. $\operatorname{Bild} p_2\perp\operatorname{Bild} p_1$. Ist umgekehrt $p_1p_2=0$, so gilt $0=\langle p_1p_2(x)\,,\,y\rangle=\langle p_2(x)\,,\,p_1(y)\rangle=\langle x\,,\,p_2p_1(y)\rangle$ für alle $x,y\in V$. Für $x=p_2p_1(y)$ erhält man $p_2p_1(y)=0$, d.h. $p_2p_1=0$. Daher ist p_1+p_2 eine Projektion, die wegen $\langle(p_1+p_2)(x)\,,\,y\rangle=\langle p_1(x)\,,\,y\rangle+\langle p_2(x)\,,\,y\rangle=\langle x\,,\,p_1(y)\rangle+\langle x\,,\,p_2(y)\rangle=\langle x\,,\,(p_1+p_2)(y)\rangle$ auch orthogonal ist.

c) Ist p_1-p_2 eine Projektion, so gilt $p_1-p_2=(p_1-p_2)^2=p_1^2-p_1p_2-p_2p_1+p_2^2=p_1-p_1p_2-p_2p_1+p_2$ und folglich $p_1p_2+p_2p_1=2p_2$. Für ein $x\in\operatorname{Bild} p_2$ gilt $p_2(x)=x$ und somit $p_1(x)+p_2p_1(x)=2x$, also $2\|x\|=\|p_1(x)+p_2(p_1(x))\|\le\|p_1(x)\|+\|p_2(p_1(x))\|\le\|p_1(x)\|+\|p_1(x)\|=2\|p_1(x)\|$, da p_2 eine orthogonale Projektion ist, vgl. Satz 13.B.1. Da auch p_1 eine orthogonale Projektion ist, folgt $\|x\|\le\|p_1(x)\|\le\|x\|$, d.h. $\|p_1(x)\|=\|x\|$ und folglich $x\in\operatorname{Bild} p_1$, wieder mit Satz 13.B.1. Wir erhalten insgesamt $\operatorname{Bild} p_2\subseteq\operatorname{Bild} p_1$.

Sei umgekehrt $\operatorname{Bild} p_2\subseteq\operatorname{Bild} p_1$. Da p_1 und p_2 orthogonale Projektionen sind, erhält man sofort die Inklusion $\operatorname{Kern} p_2=(\operatorname{Bild} p_2)^\perp\supseteq(\operatorname{Bild} p_1)^\perp=\operatorname{Kern} p_1$.

Wir zeigen zunächst $\operatorname{Kern}(p_1-p_2)=\operatorname{Bild} p_2\oplus\operatorname{Kern} p_1$. Für $x\in\operatorname{Bild} p_2$ gilt $p_2(x)=x=p_1(x)$, da x auch in $\operatorname{Bild} p_1$ liegt, also $(p_1-p_2)(x)=x-x=0$. Für $x\in\operatorname{Kern} p_1$ gilt ebenfalls $x\in\operatorname{Kern} p_2$ und somit $(p_1-p_2)(x)=p_1(x)-p_2(x)=0$. Sei nun umgekehrt $x\in\operatorname{Kern}(p_1-p_2)$, d.h. $p_1(x)=p_2(x)$, und sei $x=y+z$ mit $y\in\operatorname{Bild} p_1$ und $z\in\operatorname{Kern} p_1$. Dann folgt $y=p_1(y)=p_1(y)+p_1(z)=p_1(x)=p_2(x)\in\operatorname{Bild} p_2$, also $x=y+z\in\operatorname{Bild} p_2+\operatorname{Kern} p_1$. Wegen $\operatorname{Kern} p_1\subseteq\operatorname{Kern} p_2=(\operatorname{Bild} p_2)^\perp$ ist die Summe sogar orthogonal.

Wir zeigen nun $\operatorname{Bild}(p_1-p_2)=\operatorname{Bild} p_1\cap\operatorname{Kern} p_2$. Für $x\in\operatorname{Bild} p_1\cap\operatorname{Kern} p_2$ gilt $p_1(x)=x$ und $p_2(x)=0$, also $x=(p_1-p_2)(x)\in\operatorname{Bild}(p_1-p_2)$. Sei umgekehrt $x\in\operatorname{Bild}(p_1-p_2)$ und sei $x=(p_1-p_2)(y)$. Dann gibt es ein $y\in V$ mit $x=p_1(y)-p_2(y)$. Schreiben wir y in der Form $y=z+w$ mit $z\in\operatorname{Bild} p_2\subseteq\operatorname{Bild} p_1$ und $w\in\operatorname{Kern} p_2\supseteq\operatorname{Kern} p_1$, so erhalten wir $x=p_1(z)-p_2(z)+p_1(w)-p_2(w)=z-z+p_1(w)=p_1(w)\in\operatorname{Bild} p_1$. Schreiben wir aber y in der Form $y=u+v$ mit $u\in\operatorname{Bild} p_1$ und $v\in\operatorname{Kern} p_1\subseteq\operatorname{Kern} p_2$, so erhalten wir $p_2(x)=p_2(p_1(u))-p_2(p_2(u))+p_2(p_1(v))-p_2(p_2(v))=p_2(u)-p_2(u)=0$, also $x\in\operatorname{Kern} p_2$.

Schließlich sehen wir $(p_1 - p_2)(x) = p_1(x) - p_2(x) = x - 0 = x$ wegen $x \in$ Bild $p_1 \cap$ Kern p_2, d.h. die Abbildung $p_1 - p_2$ ist, beschränkt auf ihr Bild, die Identität.

Da Bild p_1 zu Kern p_1 und Bild p_2 zu Kern p_2 orthogonal ist, ist auch Bild $(p_1 - p_2)$ zu Kern $(p_1 - p_2)$ orthogonal. Schreiben wir $x \in V$ in der Form $x = z + w$ mit $z \in$ Bild p_2 und $w \in$ Kern p_2 und w in der Form $w = u + v$ mit $u \in$ Bild p_1 und $v \in$ Kern p_1, so erhalten wir $x = (z+v) + u$ mit $z + v \in$ Bild $p_2 \oplus$ Kern $p_1 =$ Kern $(p_1 - p_2)$ und $u \in$ Bild $p_1 \cap$ Kern $p_2 =$ Bild $(p_1 - p_2)$ wegen $p_2(u) = p_2(w) - p_2(v) = 0 - 0 = 0$, d.h. V ist die (direkte) Summe der beiden Unteräume Bild$(p_1 - p_2)$ und Kern$(p_1 - p_2)$. Insgesamt haben wir gezeigt, das $p_1 - p_2$ eine orthogonale Projektion ist. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 2, p. 414 (1.6.2012):

Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $f \neq 0$ eine Linearform auf V mit $v := \operatorname{grad} f$.

a) Ist v_i, $i \in I$, eine Orthonormalbasis von V, so ist $v = \operatorname{grad} f = \sum_{i\in I} \overline{f(v_i)}\, v_i$.

b) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist $f(x) = \|x\|\,\|v\| \cos \measuredangle(x, v)$. – Insbesondere nimmt f auf der Einheitssphäre $\mathrm{S}(0\,;1)$ von V das Maximum $\|v\|$ im Punkt $v/\|v\|$ und das Minimum $-\|v\|$ im Punkt $-v/\|v\|$ an.

c) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so wird das Maximum $\|v\|$ von $|f|$ auf der Einheitssphäre $\mathrm{S}(0\,;1)$ von V genau in den Punkten $av/\|v\|$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, angenommen.

Beweis: a) Sei $v = \operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$, $a_j \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f(v_i) = \langle v_i, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \delta_{ij} = \overline{a}_i$, also $a_i = \overline{f(v_i)}$.

b) Sei $x \in \mathrm{S}(0\,;1)$, also $\|x\| = 1$. Mit den Bemerkungen im Anschluss an 13.A.8 sieht man $f(x) = \langle x, v\rangle = \|x\|\,\|v\| \cos \measuredangle(x, v) = \|v\| \cos \measuredangle(x, v)$. Wegen $-1 \le \cos \measuredangle(x, v) \le 1$ nimmt f also genau für $\cos \measuredangle(x, v) = 1$, d.h. $\measuredangle(x, v) = 0$ und somit in $x = v/\|v\|$ das Maximum und für $\cos \measuredangle(x, v) = -1$, d.h. $\measuredangle(x, v) = \pi$ und somit in $x = -v/\|v\|$ das Minimum auf $\mathrm{S}(0\,;1)$ an.

c) Sei $x \in \mathrm{S}(0\,;1)$, also $\|x\| = 1$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung 13.A.4 sieht man $|f(x)| = |\langle x, v\rangle| \le \|x\|\,\|v\| = \|v\|$, wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn x und v linear abhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $a' \in \mathbb{C}$ gibt mit $x = a'v$, d.h. mit $x = av/\|v\|$ für $a := a'\|v\|$. Dabei ist $1 = \|x\| = |a|\,\|v/\|v\|\,\| = |a|$. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 3, p. 414 (1.6.2012):

(H e s s e s c h e N o r m a l f o r m) Seien E ein endlichdimensionaler affiner Raum über dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und $F = H + O$ eine affine Hyperebene in E durch $O \in E$. Ferner sei $z \in V$ ein Einheitsnormalenvektor zu H in V. Für einen beliebigen Punkt $P \in E$ ist

$$\{Q \in E \mid \langle \overrightarrow{OQ}, z\rangle = d\}\,, \qquad d := \langle \overrightarrow{OP}, z\rangle\,,$$

die zu F parallele Hyperebene durch P. Ferner ist $|d|$ der Abstand von P zu F. Insbesondere ist

$$F = \{Q \in E \mid \langle \overrightarrow{OQ}, z\rangle = 0\}\,.$$

Beweis: Nach Wahl von z ist $\operatorname{Dim} \mathbb{K}z = 1$, also $\operatorname{Dim}(\mathbb{K}z)^\perp = \operatorname{Dim} V - 1$, und ferner $H \subseteq (\mathbb{K}z)^\perp$. Es folgt $H = \mathbb{K}z$. Ein Punkt $Q \in E$ liegt also genau dann in der zu F parallelen Hyperebene $H + P$ durch P, wenn $\overrightarrow{PQ}$ in H liegt, d.h. wenn $\langle \overrightarrow{PQ}, z\rangle = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $0 = \langle \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}, z\rangle = \langle \overrightarrow{PO}, z\rangle + \langle \overrightarrow{OQ}, z\rangle$ gilt, also wenn $\langle \overrightarrow{OQ}, z\rangle = -\langle \overrightarrow{PO}, z\rangle = \langle \overrightarrow{OP}, z\rangle = d$ gilt. Im Fall $P = O$ ist $\overrightarrow{OP} = 0$, also $d = \langle \overrightarrow{OP}, z\rangle = 0$. Dies liefert $F = \{Q \in E \mid \langle \overrightarrow{OQ}, z\rangle = 0\}$.

Der Abstand von P zu $F = H + O$ ist definitionsgemäß $\operatorname{Min}\{d(P, Q) \mid Q \in F\}$. Der Punkt $Q_0 = -dz + P$ liegt wegen $\langle \overrightarrow{OQ_0}, z\rangle = \langle \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ_0}, z\rangle = \langle \overrightarrow{OP}, z\rangle + \langle \overrightarrow{PQ_0}, z\rangle = d - d\langle z, z\rangle = 0$ in F, und es gilt $d(P, Q_0) = \|-dz\| = |d|$. Für einen beliebigen Punkt $Q \in F$ liegt $\overrightarrow{QQ_0}$ in $H = (\mathbb{K}z)^\perp$ und nach dem Satz 13.A.6 des Pythagoras gilt $|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\overrightarrow{QQ_0}\|^2 + |Q_0P|^2 \ge |Q_0P|^2 = \|dz\|^2 = |d|^2$, also $|\overrightarrow{PQ}\| \ge |d|$. Daher ist $|d|$ der Abstand von P zu F. •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 414 (1.6.2012) :

Man bestimme den Abstand des Punktes $P = (0,0,1)$ im $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, von der Ebene $F := \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2-x_3 = 2\}$.

Lösung: Es ist $F = H + (2,0,0)$ mit $H = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1+x_2-x_3 = 0\}$, und $z := (1,1,-1)/\sqrt{3}$ ist offenbar ein Einheitsnormalenvektor zu H. Der Abstand von F und $(0,0,1)$ ist nach der vorstehenden Aufgabe $|\langle (0,0,1)-(2,0,0)\,,\,(1,1,-1)/\sqrt{3}\,\rangle = |\langle(-2,0,1)\,,\,(1,1,-1)\sqrt{3}\,\rangle| = |-3/\sqrt{3}\,| = \sqrt{3}$. (Man vgl. auch die allgemeine Lösung in Aufg. 4.) •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 414 (1.6.2012) :

a) Seien $a,b,v,w \in \mathbb{R}^3$ mit $v,w \neq 0$. ($\mathbb{R}^3$ trage das Standardskalarprodukt und die Standardorientierung.) Der Abstand d der beiden Geraden $g_1 := \{a+rv \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $g_2 := \{b+sw \mid s \in \mathbb{R}\}$ kann folgendermaßen berechnet werden: $d := \Big|\langle\, b-a\,,\, \dfrac{v\times w}{\|v\times w\|}\,\rangle\Big|$.

b) Man berechne den Abstand der beiden Geraden $g_1 := \{(1,2,-1)+r(3,1,0) \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $g_2 := \{(0,2,-1)+t(1,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Beweis: a) Nach dem Satz des Pythagoras ist das gemeinsame Lot auf die beiden Geraden die kürzeste Verbindung zwischen Punkten der einen und der anderen Gerade. Seine Richtung ist $n := v\times w$. Für den Fußpunkt auf g_2 gilt also $a+r_0v+t_0\,n/\|n\| = b+s_0w$ mit $d = |t_0|$. Man bildet das Skalarprodukt beider Seiten mit n und bekommt wegen $v\times n = 0$ und $w\times n = 0$ sofort $\langle a,n\rangle + t_0\langle n,n\rangle/\|n\| = \langle b,n\rangle$. Es folgt $t_0 = \langle b-a\,,\,n/\|n\|\,\rangle$. Der gesuchte Abstand ist also $\big\|t_0\,n/\|n\|\,\big\| = |t_0| = |\langle b-a\,,\,n/\|n\|\,\rangle|$.

b) Es ist $b-a = (0,2,-1)-(1,2,-1) = (-1,0,0)$ und $n = (3,1,0)\times(1,0,1) = (1,-3,-1)$, $\|n\| = \sqrt{11}$. Der gesuchte Abstand ist $|\langle b-a\,,\,n/\|n\|\,\rangle| = |\langle(-1,0,0)\,,\,(1,-3,-1)\rangle|\big/\sqrt{11} = 1\big/\sqrt{11}$. (Man vgl. auch die allgemeine Lösung in Aufg. 8.) •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 414 (1.6.2012) :

Seien $a,b,v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0$. ($\mathbb{R}^3$ trage das Standardskalarprodukt und die Standardorientierung.) Der Abstand d des Punktes b von der Geraden $g := \{a+tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ kann folgendermaßen berechnet werden:

$$d := \Big\|(b-a)\times\frac{v}{\|v\|}\Big\|\,.$$

Beweis: a) Sei $c := a+t_0v$ der Fußpunkt des Lotes von b auf g. Dann ist $d = \|b-c\|$. Da $b-c$ und v zueinander orthogonal sind, ist $\|(b-c)\times v\| = \|b-c\|\,\|v\| = d\,\|v\|$. Andererseits ist $\|(b-c)\times v\| = \|(b-a-t_0v)\times v\| = \|(b-a)\times v\|$ wegen $v\times v = 0$. Es folgt $d := \|(b-a)\times v/\|v\|\,\|$.

Beweisvariante: Das Parallelogramm mit den Eckpunkten a,c,b und $b+(c-a)$ hat als Flächeninhalt das Produkt aus der Grundlinienlänge $\|c-a\|$ und der Höhe d, andererseits ist dieser Flächeninhalt gleich $\|(b-a)\times(c-a)\|$. Es folgt $\|(b-a)\times(c-a)/\|c-a\|\,\| = d$. Da a und c beide auf der Geraden g liegen, ist dabei (bis auf das Vorzeichen) $(c-a)/\|(c-a)\|$ der Richtungsvektor $v/\|v\|$ von g. (Man vgl. wiederum die folgende Aufg. 4.) •

Abschnitt 13.B, Aufg. 4, p. 414 (1.6.2012) :

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}$ Elemente von V, von denen $x_1,\ldots,x_n$ linear unabhängig seien. Dann ist der Abstand d von x_{n+1} zum Unterraum $\mathbb{K}x_1+\cdots+\mathbb{K}x_n$ von V gleich

$$d = \left(\frac{\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n\,,x_{n+1})}{\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)}\right)^{1/2}.$$

Beweis: Nach 12.C.6 ist $\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$. Sei $x := a_1x_1+\cdots+a_nx_n$ mit $a_i \in \mathbb{K}$ das Bild von x_{n+1} bei der orthogonalen Projektion von V auf $\mathbb{K}x_1+\cdots+\mathbb{K}x_n$. Dann gilt $\langle x_{n+1}-x\,,x_i\rangle = 0$ für $i = 1,\ldots,n$, also auch $\langle x_{n+1}-x,x\rangle = 0$, und es folgt $d^2 = \|x_{n+1}-x\|^2 = \langle x_{n+1}-x,x_{n+1}-x\rangle = \langle x_{n+1}-x,x_{n+1}\rangle$. Subtraktion des a_i-fachen der i-ten Zeile von der $n+1$-ten Zeile, $i = 1,\ldots,n$, liefert

$$\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n\,,x_{n+1}) = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_n\rangle & \langle x_1,x_{n+1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle & \langle x_n,x_{n+1}\rangle \\ \langle x_{n+1},x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n+1},x_n\rangle & \langle x_{n+1},x_{n+1}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, x_{n+1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, x_{n+1}\rangle \\ \langle x_{n+1}-x, x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n+1}-x, x_n\rangle & \langle x_{n+1}-x, x_{n+1}\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, x_{n+1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, x_{n+1}\rangle \\ 0 & \cdots & 0 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$= d^2\,\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n)\,, \quad \text{also} \quad d = \left(\frac{\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n\,, x_{n+1})}{\mathrm{G}(x_1, \dots, x_n)}\right)^{1/2}. \qquad \bullet$$

Abschnitt 13.B, Aufg. 5, p. 415 (1.6.2012):

Sei V ein orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 2$. Für Elemente $x_1, \dots, x_{n-1}$ und $y_1, \dots, y_{n-1}$ in V gilt die folgende auf Lagrange zurückgehende Formel:

$$\langle\, x_1\times\cdots\times x_{n-1},\, y_1\times\cdots\times y_{n-1}\,\rangle = \mathrm{G}(x_1, \dots, x_{n-1};\, y_1, \dots, y_{n-1}) = \begin{vmatrix} \langle x_1, y_1\rangle & \dots & \langle x_1, y_{n-1}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_{n-1}, y_1\rangle & \dots & \langle x_{n-1}, y_{n-1}\rangle \end{vmatrix}.$$

1. Beweis: Die Abbildungen f und g mit $f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}) := \langle\, x_1\times\cdots\times x_{n-1}, y_1\times\cdots\times y_{n-1}\,\rangle$ sowie $g(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}) := \mathrm{G}(x_1, \dots, x_{n-1};\, y_1, \dots, y_{n-1})$ von $V^{n-1}{\times}V^{n-1}$ nach $\mathbb{R}$ sind offenbar linear in allen Variablen x_i und y_i. Es genügt also zu zeigen, dass sie stets übereinstimmen, wenn man die x_i und y_i beliebig in $\{v_1, \dots, v_n\}$ wählt, wo v_i, $i = 1, \dots, n$, eine die Orientierung von V repräsentierende Orthonormalbasis von V ist. Setzt man für x_i und x_j bzw. für y_i und y_j mit $i \neq j$ dasselbe Basiselement ein, so verschwinden $x_1\times\cdots\times x_{n-1}$ bzw. $y_1\times\cdots\times y_{n-1}$ und damit f. Auch g verschwindet dann, da in der Determinante $\mathrm{G}(x_1, \dots, x_{n-1};\, y_1, \dots, y_{n-1})$ die i-te und die j-te Zeile bzw. die i-te und die j-te Spalte gleich sind. Wir können also annehmen, dass für die x_i paarweise verschiedene Elemente der Basis v_i, $i = 1, \dots, n$, eingesetzt werden und ebenso für die y_i.

Bezeichnet Δ die kanonische Determinantenfunktion von V, so gilt $\Delta(v_1, \dots, v_n) = 1$ und folglich hat man $v_1\times\cdots\times v_{n-1} = v_n$. Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine beliebige Permutation. Dann gilt $\Delta(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma n}) = \operatorname{Sign}\sigma\,\Delta(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{Sign}\sigma$ und somit $\Delta(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma(n-1)}, \operatorname{Sign}\sigma\, v_{\sigma n}) = 1$, d.h. $v_{\sigma 1}\times\cdots\times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{Sign}\sigma\, v_{\sigma n}$. Für eine weitere Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ gilt analog $v_{\tau 1}\times\cdots\times v_{\tau(n-1)} = \operatorname{Sign}\tau\, v_{\tau n}$.

Im Fall $\sigma n \neq \tau n$ gilt $f(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau(n-1)}) = \langle v_{\sigma 1}\times\cdots\times v_{\sigma(n-1)}\,, v_{\tau 1}\times\cdots\times v_{\tau(n-1)}\rangle = \operatorname{Sign}\sigma\operatorname{Sign}\tau\,\langle v_{\sigma n}, v_{\tau n}\rangle = 0$. Außerdem gibt es dann ein i_0 in $\{1, \dots, n-1\}$ mit $\sigma i_0 = \tau n$. Es folgt $\langle v_{\sigma i_0}\,, v_{\tau j}\rangle = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$. Die i_0-te Zeile von $\mathrm{G}(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau(n-1)})$ verschwindet also, und somit gilt auch $g(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau(n-1)}) = 0$.

Im Fall $\sigma n = \tau n$ gilt $f(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau(n-1)}) = \operatorname{Sign}\sigma\operatorname{Sign}\tau\,\langle v_{\sigma n}, v_{\tau n}\rangle = \operatorname{Sign}\sigma\operatorname{Sign}\tau$. Außerdem erhält man dann nach Vertauschen der Zeilen gemäß σ und der Spalten gemäß τ

$$g(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}, \dots, v_{\tau(n-1)}) = \begin{vmatrix} \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau(n-1)}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau(n-1)}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau(n-1)}\rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau(n-1)}\rangle & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau(n-1)}\rangle & \langle v_{\sigma 1}, v_{\tau n}\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau(n-1)}\rangle & \langle v_{\sigma(n-1)}, v_{\tau n}\rangle \\ \langle v_{\sigma n}, v_{\tau 1}\rangle & \dots & \langle v_{\sigma n}, v_{\tau(n-1)}\rangle & \langle v_{\sigma n}, v_{\tau n}\rangle \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{Sign}\sigma\operatorname{Sign}\tau \begin{vmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{vmatrix} = \operatorname{Sign}\sigma\operatorname{Sign}\tau\,. \qquad \bullet$$

2. Beweis: Sei v_i, $i = 1, \dots, n$, eine die Orientierung von V repräsentierende Orthonormalbasis von V. Dann gibt es Darstellungen $x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}v_k$ und $y_j = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell j}v_\ell$, $i, j = 1, \dots, n-1$, mit $a_{ki}, b_{\ell j} \in \mathbb{R}$. Mit den $n{\times}(n-1)$-Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{ki})$ und $\mathfrak{B} = (b_{\ell j})$ und der transponierten Matrix ${}^t\mathfrak{A} = (a'_{ik})$, $a'_{ik} := a_{ki}$, gilt dann wegen $\langle x_i, y_j\rangle = \langle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}v_k\,, \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell j}v_\ell\rangle = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{ki}b_{\ell j}\langle v_k, v_\ell\rangle = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{ki}b_{\ell j}\,\delta_{k\ell} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}b_{kj}$

$$\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1};\,y_1,\ldots,y_{n-1}) = \mathrm{Det}\,\big(\langle x_i\,,\,y_j\rangle\big) = \mathrm{Det}\,\Big(\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}b_{kj}\Big) = \mathrm{Det}\;{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,.$$

Ferner gilt $x_1\times\cdots\times x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$ und $y_1\times\cdots\times y_{n-1} = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell v_\ell$ mit Koeffizienten $a_k = (-1)^{k+n}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}_k$ und $b_\ell = (-1)^{\ell+n}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}_\ell$, wobei $\mathfrak{A}_k$ aus $\mathfrak{A}$ durch Streichen der k-ten Zeile und $\mathfrak{B}_\ell$ aus $\mathfrak{B}$ durch Streichen der ℓ-ten Zeile entsteht. Dies folgt aus den Ausführungen im Anschluss an Definition 13.B.6. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\langle\, x_1\times\cdots\times x_{n-1},\, y_1\times\cdots\times y_{n-1}\,\rangle &= \Big\langle \sum_{k=1}^{n} a_k v_k\,,\, \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell v_\ell \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}_k\,(-1)^{k+n}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}_k = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}_k\;\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}_k = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Det}\;{}^t(\mathfrak{A}_k)\;\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}_k\,.\end{aligned}$$

Die Allgemeine Produktformel für Determinanten aus Band 4, Beispiel 7.A.5 (2) liefert nun die Gleichheit $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Det}\;{}^t(\mathfrak{A}_k)\;\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}_k = \mathrm{Det}\;{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und damit die Behauptung. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 6, p. 415 (1.6.2012) :

Als den Winkel zwischen zwei Hyperebenen H_1 und H_2 eines euklidischen Vektorraums V bezeichnet man den Winkel zwischen den Geraden $H_1^\perp$ und $H_2^\perp$. Sei $n := \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} V \geq 1$. Ferner seien $x_1,\ldots,x_{n-1}$ bzw. $y_1,\ldots,y_{n-1}$ jeweils linear unabhängige Elemente in V. Der Winkel α zwischen den Hyperebenen $\mathbb{R}x_1+\cdots+\mathbb{R}x_{n-1}$ und $\mathbb{R}y_1+\cdots+\mathbb{R}y_{n-1}$ kann dann folgendermaßen mit Hilfe von Gramschen Determinanten berechnet werden:

$$\cos\alpha = \frac{|\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1}\,;\,y_1,\ldots,y_{n-1})|}{\big(\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1})\cdot\mathrm{G}(y_1,\ldots,y_{n-1})\big)^{1/2}}\,,\qquad 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\,.$$

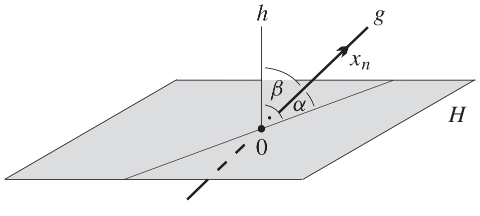
Beweis: Wir versehen V mit einer Orientierung. Wegen $(\mathbb{R}x_1+\cdots+\mathbb{R}x_{n-1})^\perp = \mathbb{R}x_1\times\cdots\times x_{n-1}$ und $(\mathbb{R}y_1+\cdots+\mathbb{R}y_{n-1})^\perp = \mathbb{R}y_1\times\cdots\times y_{n-1}$ gilt dann für den Winkel α, dass es sich um den Winkel α' zwischen den beiden angegebenen Richtungvektoren der orthogonalen Komplemente handelt, wenn $\alpha'\leq\pi/2$ ist, andernfalls um $\pi-\alpha'$. Wegen $\cos(\pi-\alpha') = -\cos\alpha'$ gilt in jedem Fall unter Verwendung der vorstehenden Aufgabe 5:

$$\cos\alpha = \frac{|\langle x_1\times\cdots\times x_{n-1}\,,\,y_1\times\cdots\times y_{n-1}\rangle|}{\|x_1\times\cdots\times x_{n-1}\|\;\|y_1\times\cdots\times y_{n-1}\|} = \frac{|\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1};\,y_1,\ldots,y_{n-1})|}{\sqrt{\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1})}\;\sqrt{\mathrm{G}(y_1,\ldots,y_{n-1})}}\,.$$ •

Abschnitt 13.B, Aufg. 7, p. 415 (1.6.2012) :

Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n\geq 1$. Der Winkel zwischen einer Hyperebene H und einer Geraden g in V ist definitionsgemäß $(\pi/2)-\beta$, wobei β der Winkel zwischen g und der zu H orthogonalen Geraden h ist. Seien nun $x_1,\ldots,x_{n-1}$ linear unabhängige Elemente in V und $x_n\in V$, $x_n\neq 0$. Der Winkel α zwischen der Hyperebene $\mathbb{R}x_1+\cdots+\mathbb{R}x_{n-1}$ und der Geraden $\mathbb{R}x_n$ kann ebenfalls mit Hilfe von Gramschen Determinanten berechnet werden:

$$\sin\alpha = \Big(\frac{\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)}{\langle x_n\,,\,x_n\rangle\,\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1})}\Big)^{1/2},\qquad 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\,.$$



Beweis: Ist $x = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i$, $a_i\in\mathbb{R}$, das Bild von x_n unter der orthogonalen Projektion von V auf die Hyperebene $\mathbb{R}x_1+\cdots+\mathbb{R}x_{n-1}$, so folgt $\langle x_n-x\,,\,x_i\rangle = 0$ für $i=1,\ldots,n-1$, also auch $\langle x_n-x\,,\,x\rangle = 0$ und somit $\langle x_n-x\,,\,x_n\rangle = \langle x_n-x\,,\,x_n-x\rangle = \|x_n-x\|^2$. Da $\mathbb{R}(x_n-x)$ das orthogonale Komplement zu $\mathbb{R}x_1+\cdots+\mathbb{R}x_{n-1}$ ist, gilt

$$\sin\alpha = \cos\Big(\frac{\pi}{2}-\alpha\Big) = \cos\beta = \frac{\langle x_n-x\,,\,x_n\rangle}{\|x_n-x\|\;\|x_n\|} = \frac{\|x_n-x\|^2}{\|x_n-x\|\;\|x_n\|} = \frac{\|x_n-x\|}{\|x_n\|}\,.$$

Subtrahiert man für $i=1,\ldots,n-1$ jeweils das a_i-fache der i-ten Zeile von der n-ten Zeile, so erhält man

$$\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_{n-1}\rangle & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle x_{n-1},x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n-1},x_{n-1}\rangle & \langle x_{n-1},x_n\rangle\\ \langle x_n,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n,x_{n-1}\rangle & \langle x_n,x_n\rangle\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_{n-1}\rangle & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle x_{n-1},x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n-1},x_{n-1}\rangle & \langle x_{n-1},x_n\rangle\\ \langle x_n-x,x_1\rangle & \cdots & \langle x_n-x,x_{n-1}\rangle & \langle x_n-x,x_n\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_{n-1}\rangle & \langle x_1,x_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \langle x_{n-1},x_1\rangle & \cdots & \langle x_{n-1},x_{n-1}\rangle & \langle x_{n-1},x_n\rangle\\ 0 & \cdots & 0 & \|x_n-x\|^2\end{vmatrix}$$

$$=\|x_n-x\|^2\,\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1})\,,\qquad\text{also}\qquad \|x_n-x\|=\left(\frac{\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathrm{G}(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right)^{1/2}.$$

Einsetzen in die obige Gleichung für $\sin\alpha$ liefert die Behauptung. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 8, p. 415 (1.6.2012):

Seien $F=U+P$ und $H=W+Q$ endlichdimensionale affine Unterräume des affinen Raumes E über dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt, wobei $P,Q\in E$; $U,W\subseteq V$ ist. Man zeige: Es gibt Punkte $P_0\in F$ und $Q_0\in H$ mit $d(P_0,Q_0)\le d(R,S)$ für alle $R\in F$ und alle $S\in H$. (Man nennt $d(P_0,Q_0)$ den Abstand $d(F,H)$ von F und H.) $d(F,H)$ ist gleich dem Abstand $d(\overrightarrow{PQ},U+W)$ von $\overrightarrow{PQ}$ und $U+W$. Ist die Summe $U+W$ direkt, also $U\cap W=0$, so sind die Punkte $P_0\in F$ und $Q_0\in H$ mit minimalem Abstand $d(F,H)$ eindeutig bestimmt. Für zwei Geraden $g=\mathbb{K}x+P$ und $h=\mathbb{K}y+Q$ mit $z:=\overrightarrow{PQ}$ ist

$$d(g,h)=\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{G}(x,y,z)}{\mathrm{G}(x,y)}\right)^{1/2}, & \text{falls } g \text{ und } h \text{ nicht parallel sind,}\\[2ex] \left(\dfrac{\mathrm{G}(y,z)}{\langle y,y\rangle}\right)^{1/2}, & \text{falls } g \text{ und } h \text{ parallel sind.}\end{cases}$$

Beweis: Ist $\overrightarrow{PQ}\in U+W$, so gibt es $u\in U$ und $w\in W$ mit $\overrightarrow{PQ}=u+w$. Für $P_0:=u+P\in F$ und $Q_0:=-w+Q\in H$ gilt dann $Q_0=-w+Q=-w+\overrightarrow{PQ}+P=u+P=P_0$. Folglich erhält man $d(F,H)=d(P_0,Q_0)=0=d(\overrightarrow{PQ},U+W)$.

Ist $\overrightarrow{PQ}\notin U+W$, so sei $(U+W)^\perp$ das orthogonale Komplement von $U+W$ in $U+W+\mathbb{R}\overrightarrow{PQ}$. Es gibt dann $u\in U$, $w\in W$ und $v\in(U+W)^\perp$ mit $\overrightarrow{PQ}=u+w+v$. Für $P_0:=u+P\in F$ und $Q_0:=-w+Q\in H$ gilt nun $\overrightarrow{P_0Q_0}=\overrightarrow{u+P,\,-w+Q}=-w+\overrightarrow{PQ}-u=v$, also $d(P_0,Q_0)=\|v\|=d(\overrightarrow{PQ},u+w)\ge d(\overrightarrow{PQ},U+W)$. Sind auch $u'\in U$ und $w'\in W$, so folgt wegen $v\in(U+W)^\perp$ und $u'+w'-(u+w)\in U+W$ mit Hilfe des Satzes 13.A.6 von Pythagoras $d(\overrightarrow{P_0Q_0},u'+w')^2=\|u'+w'-(u+w+v)\|^2=\|u'+w'-u-w\|^2+\|v\|^2\ge\|v\|^2$. Daher ist $d(\overrightarrow{PQ},U+W)=\|v\|=d(P_0,Q_0)$. Sind $P'=u'+P\in F$ und $Q'=w'+Q=w'+\overrightarrow{PQ}+P\in H$ weitere Punkte mit $u'\in U$ und $w'\in W$, so folgt $d(P',Q')=\|w'+\overrightarrow{PQ}-u'\|\ge d(\overrightarrow{PQ},U+W)=d(P_0,Q_0)$. Zunächst folgt also $d(F,H)=d(P_0,Q_0)$. Ist $d(P',Q')=d(P_0,Q_0)$, so gilt in den vorstehenden Abschätzungen das Gleichheitszeichen. Dann ist insbesondere $u'+w'-u-w=0$ und somit $u'-u=w'-w\in U\cap W$. Bei $U\cap W=0$ folgt daraus $u=u'$, $w=w'$, d.h. $P'=P_0$, $Q'=Q_0$.

Der Abstand der beiden Geraden g und h ist nach dem bereits Gezeigten gleich $d(z,\mathbb{K}x+\mathbb{K}y)$, wobei $\mathbb{K}x+\mathbb{K}y=\mathbb{K}y$ ist, falls g und h parallel sind. Die angegebenen Formeln folgen dann direkt aus Aufg. 4. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 10, p. 416 (1.6.2012):

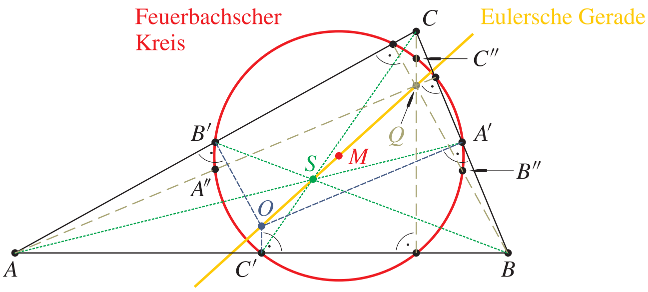
(Eulersche Gerade) Sei $\triangle=(A,B,C)$ ein (nicht-ausgeartetes) Dreieck in einer euklidischen affinen Ebene. Die Höhe von $\triangle$ durch A ist die Gerade, die A mit dem Fußpunkt des Lotes von A auf die Gegenseite BC verbindet. Entsprechend sind die Höhen durch B und C definiert. Eine Mittelsenkrechte von $\triangle$ ist die Senkrechte zu einer Dreiecksseite durch den Mittelpunkt der zugehörigen Eckpunkte.

a) Die Mittelsenkrechten von $\triangle$ schneiden sich in einem Punkt O. Es ist $d(O,A)=d(O,B)=d(O,C)$.

b) Sei $S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + O$ der Schwerpunkt von $\triangle$, d.h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\triangle$. Dann liegt der Punkt $Q := 3\,\overrightarrow{OS} + O = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + O$ auf jeder der Höhen von $\triangle$. (Insbesondere ist damit gezeigt: Die Höhen von $\triangle$ schneiden sich in einem Punkt Q, und die Punkte O, S und Q liegen auf einer Geraden. Bei nicht gleichseitigem $\triangle$ ist diese eindeutig bestimmt und heißt die Eulersche Gerade. In diesem Fall ist das Teilverhältnis $(O, Q) : (O, S) = 3$.)

Beweis: a) Seien O' irgendein Koordinatenursprung und $x = \overrightarrow{O'P}$, $a := \overrightarrow{O'A}$, $b := \overrightarrow{O'B}$ die Ortsvektoren der Punkte P, A, B. Genau dann liegt der Punkt P auf der Mittelsenkrechten zur Seite (A, B) mit dem Mittelpunkt $A' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (der den Ortsvektor $\frac{1}{2}(a+b)$ hat), wenn $\overrightarrow{A'P} = x - \frac{1}{2}(a+b)$ zu $\overrightarrow{AB} = b-a$ orthogonal ist, also $\langle x - \frac{1}{2}(a+b)\,,\, b-a\rangle = 0$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\langle x, b\rangle - \langle x, a\rangle - \frac{1}{2}(\langle b, b\rangle - \langle a, a\rangle) = 0$, d.h. zu $\|a-x\|^2 = \langle a-x\,,\, a-x\rangle = \langle a, a\rangle - 2\langle x, a\rangle + \langle x, x\rangle = \langle b, b\rangle - 2\langle x, b\rangle + \langle x, x\rangle = \langle b-x\,,\, b-x\rangle = \|b-x\|^2$. Der Punkt P liegt also genau dann auf der Mittelsenkrechten zu (A, B), wenn $d(P, A) = \|a-x\| = \|b-x\| = d(P, B)$ gilt. Der Schnittpunkt O der Mittelsenkrechten zu (A, B) und zu (B, C) ist dann ein Punkt mit $d(O, A) = d(O, B) = d(O, C)$. Wegen $d(O, A) = d(O, C)$ liegt er auch auf der Mittelsenkrechten zu (C, A) und ist damit der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten. Von nun an wählen wir $O = O'$, also O als Koordinatenursprung. Dann ist $r := \|a\| = \|b\| = \|c\|$ der Umkreisradius von $\triangle$.

b) Nach 4.B, Aufg. 3 ist $S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Der Punkt Q mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OQ} = a+b+c$ liegt auf der Höhe durch C, wenn $\overrightarrow{CQ} = (a+b+c) - c = a+b$ ortogonal zu $\overrightarrow{AB} = b-a$ ist. In der Tat gilt $\langle a+b\,,\, b-a\rangle = \langle b, b\rangle - \langle a, a\rangle = r^2 - r^2 = 0$. In analoger Weise sieht man, dass Q auch auf den beiden anderen Höhen von $\triangle$ liegt. – Bei $d(C, A) \neq d(B, C)$ ist die Mittelsenkrechte zu (A, B) nicht gleich der Höhe durch C, und es ist $Q \neq O$. Dann ist die Eulersche Gerade eindeutig bestimmt. •



Abschnitt 13.B, Aufg. 11, p. 417 (1.6.2012):

(Feuerbachscher Kreis) In der Situation von Aufg. 10 und mit den dort eingeführten Bezeichnungen gilt für den Punkt $M := \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + O$ (auf der Eulerschen Geraden) und $\rho := \frac{1}{2}\,d(O, A) = \frac{1}{2}\,d(O, B) = \frac{1}{2}\,d(O, C)$:

a) Jede der Seitenmitten A', B', C' von $\triangle$ hat den Abstand ρ von M.

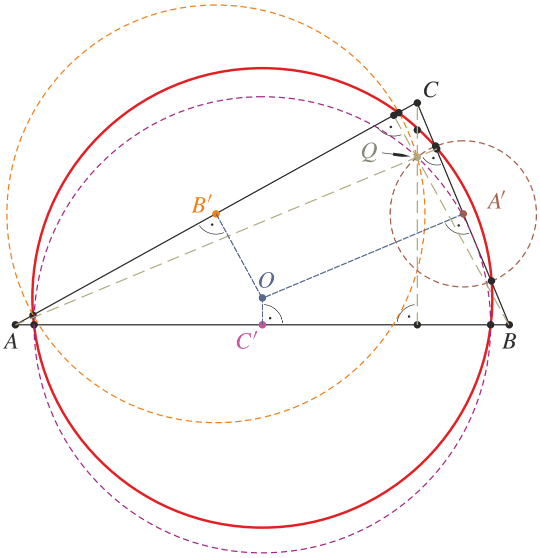
b) Jeder der Mittelpunkte A'', B'' bzw. C'' der Strecken von A, B bzw. C zum Höhenschnittpunkt Q hat den Abstand ρ von M.

c) M ist Mittelpunkt der Strecken von A'', B'' bzw. C'' zur jeweils gegenüberliegenden Seitenmitte von $\triangle$.

d) Jeder der Höhenfußpunkte liegt auf dem Kreis mit Radius ρ um M.

(Insgesamt ist damit gezeigt: Die Seitenmitten von $\triangle$, die Höhenfußpunkte von $\triangle$ und die Halbierungspunkte der Strecken, die den Höhenschnittpunkt Q von $\triangle$ mit den Ecken von $\triangle$ verbinden, liegen alle auf dem Kreis um M mit dem halben Umkreisradius als Radius. Dieser Kreis heißt der Feuerbachsche Kreis oder Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks. Sein Mittelpunkt M liegt auf der Eulerschen Geraden in der Mitte zwischen dem Mittelsenkrechtenschnittpunkt O und dem Höhenschnittpunkt Q.)

e) Die sechs Schnittpunkte der Kreise um die Mitten der Dreiecksseiten BC, CA und AB jeweils durch den Höhenschnittpunkt Q mit den Geraden BC, CA bzw. AB liegen auf einem Kreis (dessen Mittelpunkt notwendigerweise O ist). (Dies ist eine Aufgabe der Internationalen Mathematikolympiade 2008.)



Beweis: a) Wir verwenden weiterhin die bei Aufg. 10 eingeführten Bezeichnungen. Dann ist $\rho = \frac{1}{2}r$, und die Behauptung folgt aus $d(A', M) = \|\overrightarrow{A'M}\| = \|\frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{1}{2}(b+c)\| = \frac{1}{2}\|a\| = \rho$ und analog $d(B', M) = \rho$, $d(C', M) = \rho$.

b) Es ist $\overrightarrow{MC''} = \overrightarrow{OC''} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC''} - \overrightarrow{OM} = (a+b+c) + \frac{1}{2}\big(c-(a+b+c)\big) - \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}c$, also $d(M, C'') = \|\overrightarrow{MC''}\| = \frac{1}{2}\|c\| = \rho$ und analog $d(M, A'') = \rho$, $d(M, B'') = \rho$.

c) Der Mittelpunkt von (C', C'') ist $\frac{1}{2}C' + \frac{1}{2}C'' = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC''} + \overrightarrow{OC'}) + O = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{2}(a+b) + c + \frac{1}{2}(a+b)\big) + O = \frac{1}{2}(a+b+c) + O = M$. Analog zeigt man, dass M auch Mittelpunkt von (B', B'') und (A', A'') ist.

d) Nach b) und c) ist der Kreis um M mit Radius ρ der Thaleskreis für jeden der Höhenschnittpunkte. Die Behauptung folgt also aus dem Satz des Thales, vgl. 13.A, Aufg. 8b) (2).

e) Der Kreis um A' durch Q hat den Radius $d(A', Q) = \|\overrightarrow{A'Q}\| = \|a+b+c - \frac{1}{2}(b+c)\| = \|a + \frac{1}{2}(b+c)\|$. Er schneidet (B, C) in den Punkten $\pm\|a + \frac{1}{2}(b+c)\|\, e + A' = \pm\|a + \frac{1}{2}(b+c)\|\, e + \frac{1}{2}(b+c) + O$, wo $e := (c-b)/\|c-b\|$ ein zu $b+c$ orthogonaler Einheitsvektor (in Richtung von $\overrightarrow{BC}$) ist. Das Quadrat des Abstands R der beiden Schnittpunkte von O ist also

$$\begin{aligned} R^2 &:= \big\langle \pm\|a+\tfrac{1}{2}(b+c)\|\, e + \tfrac{1}{2}(b+c)\,, \pm\|a+\tfrac{1}{2}(b+c)\|\, e + \tfrac{1}{2}(b+c)\big\rangle \\ &= \big\langle a+\tfrac{1}{2}(b+c)\,, a+\tfrac{1}{2}(b+c)\big\rangle + \langle \tfrac{1}{2}(b+c)\,, \tfrac{1}{2}(b+c)\rangle = \big\langle a+\tfrac{1}{2}(b+c)\,, a\big\rangle + \langle a+b+c\,, \tfrac{1}{2}(b+c)\rangle \\ &= \|a\|^2 + \langle a\,, b+c\rangle + \tfrac{1}{2}\big(\|b\|^2 + 2\langle b, c\rangle + \|c\|^2\big) = 2r^2 + \langle a, b\rangle + \langle b, c\rangle + \langle c, a\rangle\,. \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck symmetrisch ist in a, b, c, ergibt sich derselbe Wert für die Abstände von Q zu den Schnittpunkten der beiden Kreise um B' bzw. C' mit den entsprechenden Dreiecksseiten. C' durch Q. Alle sechs Punkte liegen also auf dem Kreis um O mit dem Radius R. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 14, p. 418 (1.6.2012):

Für Vektoren x, y, z, u eines orientierten 3-dimensionalen euklidischen Raumes V gilt:

a) $\langle x \times y\,, z \times u\rangle = \langle x, z\rangle\,\langle y, u\rangle - \langle x, u\rangle\,\langle y, z\rangle\,.$ (Formel von Lagrange)

b) $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle\, y - \langle x, y\rangle\, z\,.$ (Formel von Graßmann)

c) $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$ (Jacobi-Identität)

d) $\langle x \times y\,, z \times u\rangle + \langle y \times z\,, x \times u\rangle + \langle z \times x\,, y \times u\rangle = 0\,.$

e) $x \times y + y \times z + z \times x = (x - z) \times (y - x)\,.$

Beweis: a) Die Aussage ist der Spezialfall $n=2$ von Aufg. 5. Man kann sie aber auch direkt nachrechnen: Ist v_1, v_2, v_3 eine die Orientierung repräsentierende Orthonormalbasis von V, so gilt mit $x = x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$, $y = y_1v_1+y_2v_2+y_3v_3$, $z = z_1v_1+z_2v_2+z_3v_3$, $u = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$, wo $x_i, y_i, z_i, u_i \in \mathbb{R}$ für $i=1,2,3$:

$$\begin{aligned}
x\times y &= (x_2y_3-x_3y_2)v_1 + (x_3y_1-x_1y_3)v_2 + (x_1y_2-x_2y_1)v_3\,,\\
z\times u &= (z_2u_3-z_3u_2)v_1 + (z_3u_1-z_1u_3)v_2 + (z_1u_2-z_2u_1)v_3\,,\\
\langle x\times y\,,\,z\times u\rangle &= (x_2y_3-x_3y_2)(z_2u_3-z_3u_2) + (x_3y_1-x_1y_3)(z_3u_1-z_1u_3) + (x_1y_2-x_2y_1)(z_1u_2-z_2u_1)\\
&= x_2y_3z_2u_3 - x_2y_3z_3u_2 - x_3y_2z_3u_2 + x_3y_2z_3u_2 + x_3y_1z_3u_1 - x_3y_1z_1u_3\\
&\quad - x_1y_3z_3u_1 + x_1y_3z_1u_3 + x_1y_2z_1u_2 - x_1y_2z_2u_1 - x_2y_1z_1u_2 + x_2y_1z_2u_1\,.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt $\langle x,z\rangle = x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3$, $\langle y,u\rangle = y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3$, $\langle x,u\rangle = x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$, $\langle y,z\rangle = y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3$ und folglich

$$\begin{aligned}
&\langle x,z\rangle\langle y,u\rangle - \langle x,u\rangle\,\langle y,z\rangle\\
&= (x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)(y_1u_1+y_2u_2+y_3u_3) - (x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3)(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)\\
&= x_1z_1y_1u_1+x_1z_1y_2u_2+x_1z_1y_3u_3+x_2z_2y_1u_1+x_2z_2y_2u_2+x_2z_2y_3u_3+x_3z_3y_1u_1+x_3z_3y_2u_2+x_3z_3y_3u_3\\
&\quad - x_1u_1y_1z_1-x_1z_2y_2u_1-x_1u_1y_3z_3-x_2u_2y_1z_1-x_2u_2y_2z_2-x_2u_2y_3z_3-x_3u_3y_1z_1-x_3u_3y_2z_2-x_3u_3y_3z_3\\
&= x_1z_1y_2u_2+x_1z_1y_3u_3+x_2z_2y_1u_1+x_2z_2y_3u_3+x_3z_3y_1u_1+x_3z_3y_2u_2\\
&\quad - x_1z_2y_2u_1-x_1u_1y_3z_3-x_2u_2y_1z_1-x_2u_2y_3z_3-x_3u_3y_1z_1-x_3u_3y_2z_2\,.
\end{aligned}$$

Man prüft sofort, dass beide Seiten gleich sind.

b) Sei zunächst $y\times z = 0$. Dann sind y und z linear abhängig, es gilt etwa $y = az$ mit $a\in\mathbb{R}$. Daraus folgt $\langle x,z\rangle\,y - \langle x,y\rangle\,z = \langle x,z\rangle\,az - \langle x,az\rangle\,z = 0$ und natürlich auch $x\times(y\times z) = x\times 0 = 0$.

Sei nun $y\times z \neq 0$. Dann sind $y, z, y\times z$ linear unabhängig, bilden also eine Basis von V, in der sich x darstellen lässt. Da beide Seiten der Gleichung linear in x sind, genügt es zu zeigen, dass die Gleichung richtig ist, wenn man für x die Elemente dieser Basis einsetzt.

Es ist $y\times(y\times z) = ay+bz+c(y\times z)$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$. Da $y\times z$ zu $y\times(y\times z)$, y und z orthogonal ist, folgt $0 = \langle y\times(y\times z)\,,\,y\times z\rangle = \langle ay+bz+c(y\times z)\,,\,y\times z\rangle = a\langle y, y\times z\rangle + b\langle z, y\times z\rangle + c\langle y\times z, y\times z\rangle = \|y\times z\|^2$, also $c=0$. Ist Δ die kanonische Determinantenfunktion von V, so gilt definitionsgemäß $\Delta\big(y, y\times z, y\times(y\times z)\big) = \langle y\times(y\times z)\,,\,y\times(y\times z)\rangle = \|y\times(y\times z)\|^2 = \|y\|^2\|y\times z\|^2\sin^2\measuredangle(y, y\times z) = \|y\|^2\|y\times z\|^2$. Andererseits gilt $\Delta\big(y, y\times z, y\times(y\times z)\big) = \Delta\big(y, y\times z, ay+bz\big) = \Delta\big(y, y\times z, bz\big) = -b\Delta\big(y, z, y\times z\big) = -b\langle y\times z\,,\,y\times z\rangle = -b\|y\times z\|^2$. Es folgt $-b = \|y\|^2$, d.h. $b = -\langle y,y\rangle$. Schließlich gilt $0 = \langle y\times(y\times z)\,,\,y\rangle = \langle ay - \langle y,y\rangle z\,,\,y\rangle = a\langle y,y\rangle - \langle y,y\rangle\langle z,y\rangle$, also $a = \langle z,y\rangle = \langle y,z\rangle$ und insgesamt $y\times(y\times z) = \langle y,z\rangle y - \langle y,y\rangle z$. Die Behauptung ist somit für $x=y$ richtig. Für $x=z$ wird sie ganz analog bewiesen. Für $x = y\times z$ gilt schließlich $(y\times z)\times(y\times z) = 0$ und $\langle y\times z, z\rangle y - \langle y\times z, y\rangle z = 0$.

Natürlich hätte man auch wie bei a) vorgehen und eine die Orientierung von V repräsentierende Orthonormalbasis von V wählen können. Wegen der Multilinearität beider Seiten der zu beweisenden Gleichung in x, y, z genügt es dann, für x, y, z Elemente dieser Basis einzusetzen oder aber x, y, z in der Basis darzustellen.

c) Die Behauptung folgt aus b). Wegen $x\times(y\times z) = \langle x,z\rangle y - \langle x,y\rangle z$, $y\times(z\times x) = \langle y,x\rangle z - \langle y,z\rangle x$, $z\times(x\times y) = \langle z,y\rangle x - \langle z,x\rangle y$ und $\langle x,z\rangle = \langle z,x\rangle$, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, $\langle y,z\rangle = \langle z,y\rangle$ erhält man nämlich

$$x\times(y\times z) + y\times(z\times x) + z\times(x\times y) = \langle x,z\rangle y - \langle x,y\rangle z + \langle y,x\rangle z - \langle y,z\rangle x + \langle z,y\rangle x - \langle z,x\rangle y = 0.$$

d) Die Behauptung folgt aus a). Wegen $\langle x,z\rangle = \langle z,x\rangle$, $\langle y,z\rangle = \langle z,y\rangle$ und $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
&\langle x\times y\,,\,z\times u\rangle + \langle y\times z\,,\,x\times u\rangle + \langle z\times x\,,\,y\times u\rangle =\\
&\quad = \langle x,z\rangle\langle y,u\rangle - \langle x,u\rangle\langle y,z\rangle + \langle y,x\rangle\langle z,u\rangle - \langle y,u\rangle\langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle\langle x,u\rangle - \langle z,u\rangle\langle x,y\rangle = 0\,.
\end{aligned}$$

e) Wegen $x\times x = 0$ gilt $(x-z)\times(y-x) = x\times y - x\times x - z\times y + z\times x = x\times y + y\times z + z\times x$. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 15, p. 418 (1.6.2012):

Sei V ein orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension $n\geq 2$. Dann ist die alternierende multilineare Abbildung $V^{n-1}\longrightarrow V$ mit $(x_1,\ldots,x_{n-1})\longmapsto x_1\times\cdots\times x_{n-1}$ surjektiv.

Beweis: Sei $x \in V - \{0\}$ vorgegeben. Indem man auf eine Basis von $(\mathbb{R}x)^\perp$ das Schmidtsche Orthonormailisierungsverfahren anwendet, erhält man eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ von $(\mathbb{R}x)^\perp$. Dann liegt $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ in $\mathbb{R}x$, ist also von der Form ax mit $a \in \mathbb{R}^\times$. Es folgt $a^{-1}v_1 \times \cdots \times v_{n-1} = x$. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 16, p. 418 (1.6.2012):

Seien V ein orientierter euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 2$ mit der kanonischen Determinantenfunktion Δ und $\mathrm{Alt}\,(V^{n-1}, \mathbb{R})$ der Raum der alternierenden $(n-1)$-Formen auf V. Dann ist

$$x \longmapsto \big((x_1, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto \langle x_1 \times \cdots \times x_{n-1}\,, x\rangle = \Delta(x_1, \ldots, x_{n-1}\,, x)\big)$$

ein Isomorphismus f von V auf $\mathrm{Alt}\,(V^{n-1}, \mathbb{R})$. Insbesondere liefert f im Fall $n = 3$ einen Isomorphismus von V auf den Raum der schiefsymmetrischen Bilinearformen auf V.

Beweis: Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine die Orientierung von V repräsentierende Orthonormalbasis von V. Eine alternierende multilineare Abbildung $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto f(x_1, \ldots, x_{n-1})$ verschwindet für $x_i = x_j$ für $i \neq j$ und wechselt das Vorzeichen bei Vertauschung von x_i und x_j. Sie ist also bereits bestimmt durch ihre Werte auf den n Argumentetupeln $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$, $i = 1, \ldots, n$. Daher hat $\mathrm{Alt}\,(V^{n-1}, \mathbb{R})$ eine Dimension $\leq n$. Wegen $\mathrm{Dim}\, V = n$ genügt es daher zu zeigen, dass die angegebene lineare Abbildung injektiv ist. Ist aber $\langle x_1 \times \cdots \times x_{n-1}\,, x\rangle = 0$ für jede Wahl von $x_1, \ldots, x_{n-1}$, so insbesondere für die nach der vorstehenden Aufgabe 15 existierenden $x_1, \ldots, x_{n-1}$ mit $x_1 \times \cdots \times x_{n-1} = x$. Man erhält $\langle x, x\rangle = 0$, d.h. $x = 0$, und damit die Injektivität der betrachteten Abbildung. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 20 p. 419 (1.6.2012):

a) Für jede stetige Funktion $x : [a, b] \to \mathbb{K}$ gilt $\|x\|_2 \leq \sqrt{|b-a|} \cdot \|x\|_{[a,b]}$. (Approximiert also eine Funktion y die Funktion x gleichmäßig gut, so auch im quadratischen Mittel:

$$\|y - x\|_2 \leq \sqrt{|b-a|} \cdot \|y - x\|_{[a,b]}\ .)$$

b) Für jede stetig differenzierbare Funktion $x : [a, b] \to \mathbb{K}$, $a < b$, die im Intervall $[a, b]$ eine Nullstelle t_0 hat, gilt

$$\|x\|_{[a,b]} \leq \mathrm{Max}\left(\sqrt{b - t_0}\ ,\ \sqrt{t_0 - a}\right) \cdot \|\dot{x}\|_2\,.$$

Approximiert also eine Funktion z die Ableitung $\dot{x}$ im quadratischen Mittel gut, so approximiert die Funktion $y(t) := x(t_0) + \int_{t_0}^t z(\tau)d\tau$ die Funktion $x(t)$ gleichmäßig gut:

$$\|y - x\|_{[a,b]} \leq \sqrt{\frac{b-a}{2}}\ \|z - \dot{x}\|_2\,, \qquad t_0 := \frac{b-a}{2}\ .)$$

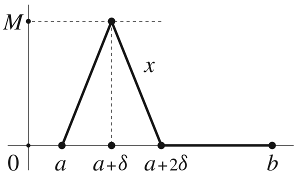
c) Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ und jedem (noch so großen) $M > 0$ gibt es eine stetige Funktion $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\|x\|_2 \leq \varepsilon$ und $\|x\|_{[a,b]} \geq M$. (Man kann x sogar als Polynomfunktion wählen.)

Beweis: a) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus Band 1, Satz 16.B.2 (3) gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2\,dt \leq |b-a| \cdot |x(c)|^2 \leq |b-a| \cdot \|x\|_{[a,b]}^2$. Wurzelziehen liefert dann die Behauptung.

b) Die stetige Funktion $|x(t)|$ nimmt in einem Punkt $t_1 \in [a, b]$ ihr Maximum an. Es ist $|t_1 - t_0| < t_0 - a$, falls $t_1 \in [a, t_0]$ ist, und $|t_1 - t_0| < b - t_0$ bei $t_1 \in [t_0, b]$; insgesamt folgt $|t_1 - t_0| \leq \mathrm{Max}\,(b - t_0\,, t_0 - a)$. Für das quadratische Mittel auf dem Intervall mit den Randpunkten t_0 und t_1 gilt $|\langle 1, \dot{x}\rangle_2| \leq \|1\|_2\|\dot{x}\|_2$ nach der Cauchy-Schwarzsche Ungleichung 13.A.3. Wegen $x(t_0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\|x\|_{[a,b]} &= |x(t_1)| = |x(t_1) - x(t_0)| = \Big|\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}(t)\,dt\Big| = \Big|\int_{t_0}^{t_1} 1 \cdot \dot{x}(t)\,dt\Big| = |\langle 1, \dot{x}\rangle_2| \leq \|1\|_2 \cdot \|\dot{x}\|_2 \\
&= \Big|\int_{t_0}^{t_1} 1^2\,dt\Big|^{1/2} \cdot \Big|\int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)|^2\,dt\Big|^{1/2} = \sqrt{|t_1 - t_0|} \cdot \Big|\int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)|^2\,dt\Big|^{1/2} \leq \sqrt{|t_1 - t_0|} \cdot \Big(\int_a^b |\dot{x}(t)|^2\,dt\Big)^{1/2} \\
&\leq \mathrm{Max}\left(\sqrt{b - t_0}\ ,\ \sqrt{t_0 - a}\right) \cdot \|\dot{x}\|_2\,.
\end{aligned}$$

c) Sei $\delta \in \mathbb{R}_+^\times$ mit $\delta \leq \mathrm{Min}\,(b - a\,, \varepsilon^2/M^2)$ und $c := M/\delta$. Die Funktion $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $x(t) := c(t - a)$ für $t \in [a\,, a + \delta]$, $x(t) := -c(t - a - \delta) + M$ für $t \in [a + \delta\,, a + 2\delta] \cap [a, b]$, und $x(t) := 0$ für $t \in [a, b] - [a\,, a + 2\delta]$. Dann hat x keine Sprungstellen, ist also stetig, und es gilt $x(a + \delta) = c\delta = M$, also $\|x\|_{[a,b]} \geq M$. Ferner erhält man $\|x\|_2^2 = \int_a^b |x(t)|^2\,dt \leq 2\int_a^{a+\delta} c^2(t-a)^2\,dt = (2/3)\,c^2\delta^3 < M^2\delta \leq \varepsilon^2$, also $\|x\|_2 \leq \varepsilon$.



Die stetige Funktion $x(t)$ lässt sich auf $[a,b]$ nach dem Weierstraßschen Approximationssatz 12.A.14 aus Band 1 gleichmäßig durch Polynomfunktionen approximieren. Daraus folgt die Zusatzbehauptung. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 27 p. 421 (1.6.2012):

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $V^n = V \oplus \cdots \oplus V$ für $n \in \mathbb{N}^*$ seine n-fache orthogonale Summe. Man bestimme die orthogonale Projektion p_n von V^n auf die Diagonale

$$\Delta_n(V) := \{\,(x,\ldots,x) \in V^n \mid x \in V\,\}\,.$$

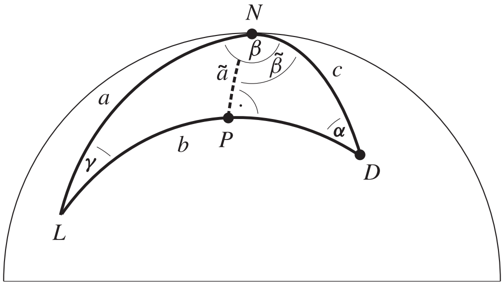
Beweis: Für die lineare Abbildung $p_n : V^n \to V^n$ mit $p_n(x_1,\ldots,x_n) := \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i,\ldots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)$ gilt $p_n^2 = p_n$. Da $p_n(x_1,\ldots,x_n)$ in Δ liegt und wegen $p_n(x,\ldots,x) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x,\ldots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x\Big) = (x,\ldots,x)$ gilt nämlich Bild $p_n = \Delta$ und $p_n|\Delta = \mathrm{id}_\Delta$. Offensichtlich ist Kern $p_n = \Big\{(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\Big\}$. Für $(x,\ldots,x) \in \Delta$ und $(x_1,\ldots,x_n) \in$ Kern p_n gilt $\big\langle (x,\ldots,x)\,,(x_1,\ldots,x_n)\big\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle = \Big\langle x\,,\sum_{i=1}^n x_i\Big\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$. Daher ist p_n eine Orthogonalprojektion. •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 421 (1.6.2012):

Ein Flugzeug fliegt von Düsseldorf (Breite: $+51{,}28°$, Länge: $+6{,}75°$) auf kürzestem Wege nach Los Angeles (Breite: $+33{,}93°$, Länge: $-118{,}42°$).

a) Wie groß ist die zurückgelegte Strecke? (Der Erdradius betrage $R = 6370$ km.)

b) Auf welchem Kurs sollte das Flugzeug abfliegen, und wo erreicht es seinen nördlichsten Punkt?



Lösung: a) Nach dem Seitenkosinussatz, angewandt auf das sphärische Dreieck aus Nordpol (N), Düsseldorf (D) und Los Angeles (L), ergibt sich für den Bogenabstand b zwischen D und L:

$$\cos b = \cos a\ \cos c + \sin a\ \sin c\ \cos\beta$$

Dabei ist $\beta = 6{,}75° - (-118{,}44°) = 125{,}19°$ die Differenz der geographischen Längen, und die Winkelabstände der beiden Städte von N sind $c = 90° - 51{,}28° = 38{,}72°$ bzw. $a = 90° - 33{,}93° = 57{,}07°$. Es ergibt sich $\cos b = 0{,}12157$, $b = 83{,}02°$. Die Flugstrecke beträgt also $2\pi Rb/360 = 9230$ km.

b) Der Abflugkurs $\alpha = \sphericalangle(N, D, L)$ berechnet sich nach dem sphärischen Sinussatz $\sin\beta/\sin b = \sin\alpha/\sin a$ zu $\sin\alpha = \sin a \sin\beta/\sin b = 0{,}6911$, $\alpha = 43{,}71°$.

Der nördlichste Punkt P des Flugs ist dadurch charakterisiert, dass der Längenkreis dort unter einem Winkel von $90°$ geschnitten wird. Wir betrachten das sphärische Dreieck mit den Ecken N, D, P. Für die geographische Breite $90° - \tilde{a}$ von P gilt nach dem Sinussatz $\sin\tilde{a} = \sin\alpha\ \sin c/\sin 90° = 0{,}4322$, also $\tilde{a} = 25{,}61°$.

Die gesuchte geographische Breite ist dann $90^\circ - \tilde{a} = 64{,}39^\circ$. Die zugehörige geographische Länge ist $6{,}75^\circ - \tilde{\beta} = 6{,}75^\circ - 53{,}28^\circ = -46{,}53^\circ$, wo $\tilde{\beta}$ nach dem Winkelkosinussatz

$$\cos\alpha = -\cos\tilde{\beta}\,\cos 90^\circ + \sin\tilde{\beta}\,\sin 90^\circ \cos\tilde{a} = \sin\tilde{\beta}\,\cos\tilde{a}\ ,$$

also $\sin\tilde{\beta} = \cos\alpha/\cos\tilde{a} = 0{,}8016$, $\tilde{\beta} = 53{,}28^\circ$ berechnet wird.

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 421 (1.6.2012):

Ein Flugzeug fliegt von Düsseldorf (Breite: $+51{,}28^\circ$, Länge: $+6{,}75^\circ$) auf kürzestem Wege nach Tokyo (Breite: $+35{,}76^\circ$, Länge: $140{,}38^\circ$).

a) Wie groß ist die zurückgelegte Strecke? (Der Erdradius betrage $R = 6370$ km.)

b) Auf welchem Kurs sollte das Flugzeug abfliegen, und wo wird der dreißigste Längengrad überflogen?

Lösung: a) Nach dem Seitenkosinussatz, angewandt auf das sphärische Dreieck aus Nordpol (N), Düsseldorf (D) und Tokyo (T), ergibt sich für den Bogenabstand b zwischen D und T:

$$\cos b = \cos a\ \cos c + \sin a\ \sin c\ \cos\beta$$

Dabei ist $\beta = 140{,}38^\circ - 6{,}75^\circ = 133,63^\circ$ die Differenz der geographischen Längen, und die Winkelabstände der beiden Städte von N sind $c = 90^\circ - 51{,}28^\circ = 38{,}72^\circ$ bzw. $a = 90^\circ - 35{,}76^\circ = 54{,}24^\circ$. Es ergibt sich $\cos b = 0{,}1057$, $b = 83{,}93^\circ$. Die Flugstrecke beträgt also $2\pi Rb/360 = 9331$ km.

b) Der Abflugkurs $\alpha = \sphericalangle(N, D, T)$ berechnet sich nach dem sphärischen Sinussatz $\sin\beta/\sin b = \sin\alpha/\sin a$ zu $\sin\alpha = \sin a \sin\beta/\sin b = 0{,}7283$, $\alpha = 46{,}37^\circ$.

Der dreißigste Längengrad wird an einem Punkt P erreicht, der mit dem Winkelkosinussatz berechnet werden kann. Mit $\tilde{\gamma} = \sphericalangle(D, P, N)$, $\tilde{\beta} := 30^\circ - 6{,}75^\circ = 23{,}25^\circ$ und der geographischen Breite $90^\circ - \tilde{a}$ von F ist

$$\cos\tilde{\gamma} = -\cos\alpha\ \cos\tilde{\beta} + \sin\alpha\ \sin\tilde{\beta}\ \cos c\ ,$$

also $\cos\tilde{\gamma} = -0{,}4110$ und $\tilde{\gamma} = 114{,}27^\circ$. Der Sinussatz liefert nun $\sin\tilde{\gamma}/\sin c = \sin\alpha/\sin\tilde{a}$, also $\sin\tilde{a} = \sin\alpha\ \sin c/\sin\tilde{\gamma} = 0{,}4997$, $\tilde{a} = 29{,}98^\circ$. Seine geographische Breite ist also $60{,}02^\circ$. •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 421 (1.6.2012):

Ein Flugzeug fliegt von Düsseldorf (Breite: $+51{,}28^\circ$, Länge: $+6{,}75^\circ$) auf kürzestem Wege nach Bangalore (Breite: $+12{,}95^\circ$, Länge: $77{,}67^\circ$).

a) Wie groß ist die zurückgelegte Strecke? (Der Erdradius betrage $R = 6370$ km.)

b) Auf welchem Kurs sollte das Flugzeug abfliegen, und wo wird der dreißigste Längengrad überflogen?

Lösung: a) Nach dem Seitenkosinussatz, angewandt auf das sphärische Dreieck aus Nordpol (N), Düsseldorf (D) und Bangalore (B), gilt für den Bogenabstand b

$$\cos b = \cos a\ \cos c + \sin a\ \sin c\ \cos\beta$$

mit $\beta = 77{,}67^\circ - 6{,}75^\circ = 70{,}92^\circ$, $c = 90^\circ - 51{,}28^\circ = 38{,}72^\circ$, $a = 90^\circ - 12{,}95^\circ = 77{,}05^\circ$. Es ergibt sich $\cos b = 0{,}37412$, $b = 68{,}03^\circ$. Die Flugstrecke beträgt also $2\pi Rb/360 = 7563{,}5$ km.

b) Der Abflugkurs ist der Winkel $\alpha = \sphericalangle(N, D, B)$. Er ergibt sich nach dem sphärischen Sinussatz $\sin\beta/\sin b = \sin\alpha/\sin a$ zu $\sin\alpha = \sin a \sin\beta/\sin b = 0{,}9931$, $\alpha = 83{,}29^\circ$. Der dreißigste Längengrad wird an einem Punkt F erreicht, der mit dem Winkelkosinussatz berechnet werden kann. Mit $\tilde{\gamma} = \sphericalangle(D, C, N)$, $\tilde{\beta} := 30^\circ - \beta = 23{,}25^\circ$ und der geographischen Breite $90^\circ - \tilde{a}$ von F ist

$$\cos\tilde{\gamma} = -\cos\alpha\ \cos\tilde{\beta} + \sin\alpha\ \sin\tilde{\beta}\ \cos c\ ,$$

also $\cos\tilde{\gamma} = 0{,}1385$ und $\tilde{\gamma} = 78{,}55$. Der Sinussatz liefert nun $\sin\tilde{\gamma}/\sin c = \sin\alpha/\sin a'$, also $\sin\tilde{a} = 0{,}6338$, $\tilde{a} = 39{,}33^\circ$. Seine geographische Breite ist also $50{,}67^\circ$. •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 421 (1.6.2012):

Ein Flugzeug fliegt von Düsseldorf (Breite: $+51{,}28^\circ$, Länge: $+6{,}75^\circ$) auf kürzestem Wege nach New York (Breite: $+40{,}64^\circ$, Länge: $-73{,}78^\circ$).

a) Wie groß ist die zurückgelegte Strecke? (Der Erdradius betrage $R = 6370$ km.)

b) Wo erreicht das Flugzeug seinen nördlichsten Punkt?

Lösung: a) Der Seitenkosinussatz mit $\beta = 6{,}75^\circ - (-73{,}78) = 80{,}53^\circ$, $c = 90^\circ - 51{,}28^\circ = 38{,}72^\circ$, $a = 90^\circ - 40{,}64^\circ = 49{,}36^\circ$ liefert den Abstand 6015 km wegen $\cos b = 0{,}5863$, $b = 54{,}1^\circ$. Der Abflugkurs $\alpha = \sphericalangle(N, D, \text{NewYork})$ berechnet sich nach dem Sinussatz zu $\sin\alpha = \sin a\ \sin\beta/\sin b = 0{,}9239$, $\alpha = 67{,}52^\circ$.

b) Für die geographische Breite $90^\circ - \tilde{a}$ des nördlichsten Punktes gilt dann $\sin\tilde{a} = \sin\alpha\ \sin c = 0{,}578$, also $90^\circ - \tilde{a} = 54{,}69^\circ$. Die zugehörige geographische Länge ist $6{,}75^\circ - \tilde{\beta} = -34{,}66^\circ$, wo $\tilde{\beta}$ nach dem Winkelkosinussatz durch $\sin\tilde{\beta} = \cos\alpha/\sin\tilde{a} = 0{,}6615^\circ$, $\tilde{\beta} = 41{,}42^\circ$ berechnet wird. •

Abschnitt 13.C, Aufg. 1 p. 425 (1.6.2012):

Das Volumen eines n-dimensionalen regulären Simplexes der Kantenlänge a in einem euklidischen affinen Raum ist

$$\frac{a^n\sqrt{1+n}}{2^{n/2}\,n!}\,.$$

Beweis: Nach 4.B, Aufg. 3, angewandt mit den Gewichten $a_i = 1$, teilt der Schwerpunkt S eines n-Simplex $(P_0, \ldots, P_n)$ die Schwerelinien, also die Strecken $[S_i, P_i]$, wo S_i der Schwerpunkt des $n-1$-(Rand-)Simplex ist, der durch Weglassen von P_i entsteht, jeweils im Verhältnis $1 : n$. Bei einem regulären Simplex sind auch alle Randsimplizes regulär, und die Schwerelinien sind gleichzeitig die Höhen, also orthogonal zu dem entsprechenden Randsimplex.

Wir beweisen durch Induktion über n, dass die Höhe h_n eines regulären n-Simplex der Kantenlänge a die Länge $h_n = a\sqrt{(n+1)/2n}$ hat, wobei $h_1 := a$ gesetzt werde. Nach dem Satz 13.A.6 von Pythagoras gilt $d(P_j, S)^2 = d(P_j, S_i)^2 + d(S_i, S)^2$ für $j \neq i$. Da die Schwerpunkte die Schwerelinien im angegebenen Verhältnis teilen, folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\Big(\frac{n}{n+1}\,h_n\Big)^2 = \Big(\frac{n-1}{n}\,h_{n-1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{n+1}\,h_n\Big)^2, \quad \text{d.h.}\ \frac{n^2-1}{(n+1)^2}\,h_n^2 = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2 h_{n-1}^2 = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2 a^2\,\frac{n}{2(n-1)}\,,$$

und somit $h_n^2 = a^2\,(n+1)/2n$, also die Induktionsbehauptung.

Wir zeigen nun durch Induktion über n, dass das Parallelotop $Q_n := Q(P_0, \ldots, P_n)$ in V das Volumen $\lambda(Q_n) = a^n\,2^{-n/2}\sqrt{n+1}$ hat. Für $n=1$ ist offenbar $\lambda(Q_1) = a$. Beim Schluss von $n-1$ auf n hat man nach Beispiel 13.C.3 $\lambda(Q_n) = \lambda(Q_{n-1})\cdot h_n = a^{n-1}\,2^{-(n-1)/2}\sqrt{n}\cdot a\sqrt{(n+1)/2n} = a^n\,2^{-n/2}\sqrt{n+1}$.

Das Volumen des regulären Simplex $(P_0, \ldots, P_n)$ ist somit $a^n\,2^{-n/2}\sqrt{n+1}\,/n!$ nach Satz 9.G.4. •

Abschnitt 13.C, Aufg. 2 p. 425 (1.6.2012):

Seien V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und Φ ein weiteres Skalarprodukt auf V. Für eine Orthonormalbasis $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ist die Gramsche Determinante $d_\Phi := \mathrm{G}_\Phi(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Det}\big(\Phi(v_i, v_j)\big)$ unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{v}$. Man zeige: Das „Ellipsoid“ $\{x \in V \mid \Phi(x,x) \leq 1\}$, vgl. dazu auch Beispiel 15.B.8, hat das Volumen $\omega_n/\sqrt{d_\Phi}$, wo ω_n das Volumen der Einheitskugel $\overline{\mathrm{B}}(0\,;1) \subseteq \mathbb{R}^n$ bzgl. der Standardvolumenfunktion λ^n auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. (Es ist $\omega_n = \pi^{n/2}/(n/2)!$, vgl. Bd. 3, 12.C.10.)

Beweis: Sei $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. des Standardskalarprodukts von V, $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. Φ und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von R^n. Die Isomorphismen $f : V \to V$ und $h : \mathbb{R}^n \to V$ seien definiert durch $f(v_i) := w_j$ bzw. $h(e_i) := v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Ferner sei $g := h^{-1}\circ f\circ h$. Definitionsgemäß gilt dann $\lambda_V\big(\overline{\mathrm{B}}_V(0\,;1)\big) = \lambda_{\mathfrak{v}}\big(\overline{\mathrm{B}}_V(0\,;1)\big) = \lambda^n\big(h^{-1}\big(\overline{\mathrm{B}}_V(0\,;1)\big)\big) = \lambda^n\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big) = \omega_n$. Für $L_V := \{x \in V \mid \Phi(x,x) \leq 1\}$ und $L := h^{-1}(L_V)$ gilt entsprechend $\lambda_V(L_V) = \lambda^n(L)$. Außerdem hat man $\Phi(x,x) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j\,\Phi(w_i, w_j) = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ für $x = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$, $a_i \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} g\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big) &= h^{-1}\big(f\big(\overline{\mathrm{B}}_V(0\,;1)\big)\big) = h^{-1}\big(f\big(\{x = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid a_i \in \mathbb{R}\,, a_1^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1\}\big)\big)\\ &= h^{-1}\big(\{x = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n \mid a_i \in \mathbb{R}\,, a_1^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1\}\big) = h^{-1}\big(\{x \in V \mid \Phi(x,x) \leq 1\}\big) = h^{-1}(L_V)\,. \end{aligned}$$

Mit Satz 9.G.2 erhält man dann $\lambda_V(L_V) = \lambda^n\big(h^{-1}(L_V)\big) = |\,\mathrm{Det}\,g|\,\lambda^n\big(\overline{\mathrm{B}}(0\,;1)\big) = |\,\mathrm{Det}\,g|\,\omega_n$. Sei nun $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Folglich gilt $g(e_j) = h^{-1}\big(f(v_j)\big) = h^{-1}(w_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i$ und $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ ist die Matrix von g bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Schließlich erhält man

$$\mathfrak{E}_n = \big(\Phi(w_j, w_\ell)\big) = \Big(\Phi\big(\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i\,,\ \sum_{k=1}^n a_{k\ell} v_k\big)\Big) = \Big(\sum_{i,k=1}^n a_{ij}\ \Phi(v_i, v_k)\,a_{k\ell}\Big) = {}^t\mathfrak{A}\,\big(\Phi(v_j, v_\ell)\big)\,\mathfrak{A}\,.$$

Dies liefert für die Determinanten $1 = \operatorname{Det} \mathfrak{E}_n = \operatorname{Det}\,({}^t\mathfrak{A}\, G_\Phi(v_1,\dots,v_n)\,\mathfrak{A}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^2\, d_\Phi$, also $|\operatorname{Det} g| = |\operatorname{Det}\mathfrak{A}| = 1/\sqrt{d_\Phi}$ und somit $\lambda_V(L_V) = \omega_n/\sqrt{d_\Phi}$. •

Abschnitt 13.C, Aufg. 5 p. 426 (1.6.2012) :

Das Volumen eines Parallelotops (Spats) $Q(P\,;x_1,x_2,x_3)$ in einem dreidimensionalen euklidischen affinen Raum mit den Kantenlängen $a := \|x_1\|$, $b := \|x_2\|$, $c := \|x_3\|$ und den Winkeln $\alpha := \measuredangle(x_2,x_3)$, $\beta := \measuredangle(x_1,x_3)$, $\gamma := \measuredangle(x_1,x_2)$ ist gleich

$$abc\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\ .$$

Beweis: Nach Satz 13.A.1 gilt

$$\lambda\big(Q(P\,;x_1,x_2,x_3)\big) = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \langle x_1,x_3\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \langle x_2,x_3\rangle \\ \langle x_3,x_1\rangle & \langle x_3,x_2\rangle & \langle x_3,x_3\rangle \end{vmatrix}^{1/2} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}^{1/2}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}^{1/2} = abc\sqrt{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\ . \qquad \bullet$$

14 Isometrien

Abschnitt 14.A, Aufg. 1, p. 440 (1.6.2012) :

Man gebe alle orthogonalen bzw. unitären Matrizen an, deren erste Spalten jeweils die folgende Gestalt haben:

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ (1-\mathrm{i})/\sqrt{3} \end{pmatrix}.\quad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -\mathrm{i}/2 \\ (1-\mathrm{i})/2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathrm{i}/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.\quad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{d)}\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.\quad \textbf{e)}\ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/15 \\ -11/15 \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) Gesucht sind alle unitären Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & a \\ (1-\mathrm{i})/\sqrt{3} & b \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, für die also gilt $\overline{a}/\sqrt{3}+\overline{b}\,(1-\mathrm{i})/\sqrt{3}=0$ und $|a|^2+|b|^2=1$. Daraus folgt $\overline{a}/\overline{b}=-(1-\mathrm{i})$, d.h. $a/b=-(1+\mathrm{i})$. Aus $|a|^2+|b|^2=1$ erhält man $a=-z(1+\mathrm{i})/\sqrt{3},\ b=z/\sqrt{3}$ mit einem beliebigen $z\in\mathbb{C}$ vom Betrag 1.

b) Gesucht sind alle unitären Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/\sqrt{2} & a \\ -\mathrm{i}/2 & -1/\sqrt{2} & b \\ (1-\mathrm{i})/2 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$, für die also gilt $\overline{a}/2-\overline{b}\,\mathrm{i}/2+\overline{c}\,(1-\mathrm{i})/2=0$ und $\overline{a}\,\mathrm{i}/\sqrt{2}-\overline{b}/\sqrt{2}=0$ sowie $|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$. Daraus folgt $\overline{b}=\overline{a}\,\mathrm{i}$ und dann $\overline{a}=-\overline{c}(1-\mathrm{i})/2$, d.h. $\overline{c}=-\overline{a}\,(1+\mathrm{i})$. Einsetzen liefert $1=|a|^2+|b|^2+|c|^2=4|a|^2,\ |a|=1/2$. Daher ist $a=z/2,\ b=-a\mathrm{i}=-z\mathrm{i}/2,\ c=-a(1-\mathrm{i})=-z(1-\mathrm{i})/2$ mit beliebigem $z\in\mathbb{C}$ vom Betrag 1.

c) Wegen $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ haben genau die Matrizen $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & \pm 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & -1/\sqrt{5} & \pm 4/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & \mp 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$ die angegebenen beiden ersten Spalten und sind orthogonal.

d) Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ haben genau die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & \pm 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \pm 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \mp 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ die angegebenen beiden ersten Spalten und sind orthogonal.

e) Wegen $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/15 \\ -11/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 14/15 \\ -2/15 \end{pmatrix}$ haben genau die Matrizen $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 1/3 & 2/15 & \pm 14/15 \\ 2/3 & -11/15 & \mp 2/15 \end{pmatrix}$ die angegebenen beiden ersten Spalten und sind orthogonal. •

Abschnitt 14.A, Teil von **Aufg. 2**, p. 440 (1.6.2012) :

Man zeige, dass die unten angegebenen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ orthogonal mit Determinante 1 sind. Man bestimme für die Drehungen, die durch die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, versehen mit der Standardorientierung, beschrieben werden, jeweils Drehachse, Drehebene, Drehwinkel, Drehvektor und die Eulerschen Winkel.

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} \frac12 & -\frac12\sqrt{2} & \frac12 \\ \frac12\sqrt{2} & 0 & -\frac12\sqrt{2} \\ \frac12 & \frac12\sqrt{2} & \frac12 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} := \begin{pmatrix} \frac14\sqrt{3}+\frac12 & \frac14\sqrt{3}-\frac12 & -\frac14\sqrt{2} \\ \frac14\sqrt{3}-\frac12 & \frac14\sqrt{3}+\frac12 & -\frac14\sqrt{2} \\ \frac14\sqrt{2} & \frac14\sqrt{2} & \frac12\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die beiden angegebenen Matrizen sind orthogonal, da ihre Spalten (und Zeilen) offensichtlich paarweise orthogonal sind und den Betrag 1 haben. Ihre Determinanten sind $\operatorname{Det}\mathfrak{A}=\frac14+\frac14+\frac14+\frac14=1$ und durch Entwickeln nach der 3. Zeile $\operatorname{Det}\mathfrak{B}=\frac14\sqrt{2}\cdot\frac14\sqrt{2}-\frac14\sqrt{2}\cdot(-\frac14\sqrt{2})+\frac12\sqrt{3}\cdot\frac12\sqrt{3}=\frac18+\frac18+\frac34=1$. Die Drehachse ist jeweils der Eigenraum der beiden Drehungen zum Eigenwert 1. Aus

$$(\mathfrak{A}-\mathfrak{E}_3)\,\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -\frac12 & -\frac12\sqrt{2} & \frac12 \\ \frac12\sqrt{2} & -1 & -\frac12\sqrt{2} \\ \frac12 & \frac12\sqrt{2} & -\frac12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} -\tfrac12 x_1-\tfrac12\sqrt{2}\,x_2+\tfrac12 x_3&=0 \\ \tfrac12\sqrt{2}\,x_1-x_2-\tfrac12\sqrt{2}\,x_3&=0 \\ \tfrac12 x_1+\tfrac12\sqrt{2}\,x_2-\tfrac12 x_3&=0 \end{aligned}\ ,$$

bekommt man durch Addition des $\sqrt{2}$-fachen der ersten zur zweiten Gleichung $x_2 = 0$ und dann aus der ersten Gleichung $x_1 = x_3$. Die Drehachse bei $\mathfrak{A}$ ist also $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $v_1 := \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis.

Aus

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{E}_3)\,\mathfrak{x} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}\\ \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2}\\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{4}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2})x_1 + (\tfrac{1}{4}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2})x_2 - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x_3 &= 0\\ (\tfrac{1}{4}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2})x_1 + (\tfrac{1}{4}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2})x_2 - \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x_3 &= 0\ ,\\ (\tfrac{1}{4}\sqrt{2})x_1 + (\tfrac{1}{4}\sqrt{2})x_2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-1)x_3 &= 0\end{aligned}$$

folgt durch Addition des $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$-fachen der zweiten zum $(\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2})$-fachen der dritten Gleichung $x_3 = 0$ und dann aus der ersten Gleichung $x_1 = -x_2$. Die Drehachse bei $\mathfrak{B}$ ist also $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit $w_1 := \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis.

Die Drehebenen sind die orthogonalen Komplemente der Drehachsen, also $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ mit der Orthonormalbasis $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 := \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}$ bei $\mathfrak{A}$ und $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $w_2 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $w_3 := \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ als Orthonormalbasis bei $\mathfrak{B}$.

Die zugehörigen Drehwinkel α und β berechnen wir mit Hilfe der Spur. Da im Dreidimensionalen die Spur einer Drehmatrix mit Drehwinkel α gleich $1+2\cos\alpha$ ist, bekommen wir die Gleichungen $1+2\cos\alpha = \operatorname{Spur}\mathfrak{A} = 1$ und somit $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ bzw. 90° sowie $1+2\cos\beta = \operatorname{Spur}\mathfrak{B} = \sqrt{3}+1$, $\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\alpha = \pi/6$ bzw. 30°.

Wegen $\mathfrak{D}_\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{A}v_2 = v_3 = 0\cdot v_2 + 1\cdot v_3$ sowie $\alpha\in[0,\pi]$ repräsentiert v_2, v_3 bereits die kanonische Orientierung der Drehebene. Der zugehörige Drehvektor ist $\sin(\alpha/2)\,v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\\\frac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, da die Determinante mit den Zeilen v_1, v_2, v_3 den Wert $1>0$ hat, v_1, v_2, v_3 also die kanonische Orientierung von $\mathbb{R}^3$ repräsentiert.

Wegen $\mathfrak{D}_\beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{3}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B}w_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\\-\frac{1}{4}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,w_2 + \frac{1}{2}\,w_3$ sowie $\beta\in[0,\pi]$ repräsentiert w_2, w_3 bereits die kanonische Orientierung der Drehebene. Der zugehörige Drehvektor ist $\sin(\beta/2)\,w_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, da die Determinante mit den Zeilen w_1, w_2, w_3 den Wert $1>0$ hat, w_1, w_2, w_3 also die kanonische Orientierung von $\mathbb{R}^3$ repräsentiert.

Wir berechnen noch die Eulerschen Winkel bzgl. der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ gemäß Beispiel 14.A.13: Es seien e_1', e_2', e_3' die Spalten von $\mathfrak{A}$. Bei $\mathfrak{A}$ fallen $H = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ und das Bild $H' = \mathbb{R}e_1' + \mathbb{R}e_2'$ offenbar nicht zusammen. Wir erhalten den ersten Eulerschen Winkel $\theta_{\mathfrak{A}} = \pi/2$ aus $\cos\theta_{\mathfrak{A}} = \langle e_3, e_3'\rangle = 1/2$. Dann ist $H\cap H' = \mathbb{R}w_{\mathfrak{A}}$ mit $w_{\mathfrak{A}} := e_3\times e_3'/\sin\theta_{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\Big/\frac{1}{2}\sqrt{3} = \begin{pmatrix}\sqrt{2/3}\\1/\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$. Den zweiten Eulerschen Winkel $\varphi_{\mathfrak{A}} = 0{,}6154797\ldots$ berechnen wir aus $\cos\varphi_{\mathfrak{A}} = \langle w_{\mathfrak{A}}, e_1\rangle = \sqrt{2/3}$, $\sin\varphi_{\mathfrak{A}} = \langle w_{\mathfrak{A}}, e_2\rangle = \sqrt{1/3}$ und den dritten Eulerschen Winkel $\psi_{\mathfrak{A}} = 2\pi - 0{,}6154797\ldots = 5{,}6677056\ldots$ aus $\cos\psi_{\mathfrak{A}} = \langle w_{\mathfrak{A}}, e_1'\rangle = \sqrt{2/3}$, $\sin\varphi_{\mathfrak{A}} = -\langle w_{\mathfrak{A}}, e_2'\rangle = -\sqrt{1/3}$.

Es seien e_1'', e_2'', e_3'' die Spalten von $\mathfrak{B}$. Bei $\mathfrak{B}$ fallen $H = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ und das Bild $H'' = \mathbb{R}e_1'' + \mathbb{R}e_2''$ offenbar nicht zusammen. Wir erhalten den ersten Eulerschen Winkel $\theta_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{6}\pi$ aus $\cos\theta_{\mathfrak{B}} = \langle e_3, e_3''\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dann ist $H \cap H'' = \mathbb{R}w_{\mathfrak{B}}$ mit $w_{\mathfrak{B}} := e_3 \times e_3''/\sin\theta_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \frac14\sqrt2 \\ -\frac14\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \frac12 = \begin{pmatrix} \frac12\sqrt2 \\ -\frac12\sqrt2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Den zweiten Eulerschen Winkel $\varphi_{\mathfrak{B}} = 2\pi - \frac14\pi = \frac74\pi$ berechnen wir aus $\cos\varphi_{\mathfrak{B}} = \langle w_{\mathfrak{B}}, e_1\rangle = \frac12\sqrt2$, $\sin\varphi_{\mathfrak{B}} = \langle w_{\mathfrak{B}}, e_2\rangle = -\frac12\sqrt2$ und den dritten Eulerschen Winkel $\psi_{\mathfrak{B}} = \frac14\pi$ aus $\cos\psi_{\mathfrak{B}} = \langle w_{\mathfrak{B}}, e_1''\rangle = \frac12\sqrt2$, $\sin\varphi_{\mathfrak{B}} = -\langle w_{\mathfrak{B}}, e_2''\rangle = \frac12\sqrt2$. •

Bemerkung: Man hätte einen erzeugenden Vektor der Drehachsen auch mit Hilfe von Aufg. 20d) als von 0 verschiedene Spalte der Matrix $(3 - \operatorname{Sp}\mathfrak{A})^{-1} \cdot \big(\mathfrak{A} + {}^t\mathfrak{A} - (\operatorname{Sp}\mathfrak{A} - 1)\,\mathfrak{E}_3\big)$ bestimmen können.

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 440 (1.6.2012):

Man bestimme alle Möglichkeiten für die dritte Zeile $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ einer orthogonalen Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, deren erste beiden Zeilen die in a) bzw. b) bzw. c) angegebene Gestalt haben. Man gebe jeweils an, ob $\mathfrak{A}$ dann bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ eine Drehung oder eine Drehspiegelung beschreibt, und bestimme dafür Drehachse und Drehwinkel.

a) $(\frac19, \frac49, \frac89)$ und $(-\frac89, \frac49, -\frac19)$. **b)** $(\frac34, \frac14, \frac14\sqrt6)$ und $(\frac14, \frac34, -\frac14\sqrt6)$. **c)** $(\frac13, \frac23, \frac23)$ und $(-\frac23, -\frac13, \frac23)$.

Lösung: $\mathfrak{A}$ ist orthogonal, wenn die Zeilen von $\mathfrak{A}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Da die angegebenen Zeilen jeweils bereits Betrag 1 haben und zueinander orthogonal sind, ist die gesuchte dritte Zeile das Vektorprodukt der beiden ersten Zeilen (und dann beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Drehung) oder sein Negatives (und dann beschreibt $\mathfrak{A}$ eine Drehspiegelung). Die Drehachse ist bei Drehungen der Eigenraum zum Eigenwert 1 und bei Drehspiegelungen der Eigenraum zum Eigenwert -1. Die Drehwinkel α bestimmen sich dabei aus $2\cos\alpha + 1 = \operatorname{Spur}\mathfrak{A}$ bzw. $2\cos\alpha - 1 = \operatorname{Spur}\mathfrak{A}$.

a) Es ist $(\frac19, \frac49, \frac89) \times (-\frac89, \frac49, -\frac19) = (-\frac49, -\frac79, \frac49)$.

Bei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac19 & \frac49 & \frac89 \\ -\frac89 & \frac49 & -\frac19 \\ -\frac49 & -\frac79 & \frac49 \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehung mit der Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und dem aus $2\cos\alpha + 1 = 1$, also $\cos\alpha = 0$, berechneten Drehwinkel $\alpha = \pi/2$ (bzw. $\alpha = 90^\circ$).

Bei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac19 & \frac49 & \frac89 \\ -\frac89 & \frac49 & -\frac19 \\ \frac49 & \frac79 & -\frac49 \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehspiegelung mit der Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und dem aus $2\cos\alpha - 1 = \frac19$, also $\cos\alpha = \frac59$, berechneten Drehwinkel $\alpha = 0{,}981765\ldots$ (bzw. $\alpha = 56{,}251\ldots^\circ$).

b) Es ist $(\frac34, \frac14, \frac14\sqrt6) \times (\frac14, \frac34, -\frac14\sqrt6) = (-\frac14\sqrt6, \frac14\sqrt6, \frac12)$.

Bei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac34 & \frac14 & \frac14\sqrt6 \\ \frac14 & \frac34 & -\frac14\sqrt6 \\ -\frac14\sqrt6 & \frac14\sqrt6 & \frac12 \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem aus $2\cos\alpha + 1 = 2$, also $\cos\alpha = \frac12$, berechneten Drehwinkel $\alpha = \pi/3$ (bzw. $\alpha = 60^\circ$).

Bei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac34 & \frac14 & \frac14\sqrt6 \\ \frac14 & \frac34 & -\frac14\sqrt6 \\ \frac14\sqrt6 & -\frac14\sqrt6 & -\frac12 \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehspiegelung mit Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt6 \end{pmatrix}$ und dem aus $2\cos\alpha - 1 = 1$, also $\cos\alpha = 1$, berechneten Drehwinkel $\alpha = 0$ (bzw. $\alpha = 0^\circ$), d.h. sogar um eine Spiegelung.

c) Es ist $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \times (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Bei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehung mit Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und dem aus $2\cos\alpha+1 = 1/3$, also $\cos\alpha = -1/3$, berechneten Drehwinkel $\alpha = 1,910633\ldots$ (bzw. $\alpha = 109{,}471\ldots^\circ$).

Bei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehspiegelung mit Drehachse $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ und dem aus $2\cos\alpha - 1 = -1/3$, also $\cos\alpha = 1/3$, berechneten Drehwinkel $\alpha = 1,230959\ldots$ (bzw. $\alpha = 70{,}528\ldots^\circ$). •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 440 (1.6.2012):

$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien Drehungen des $\mathbb{R}^3$, e_1, e_2, e_3 sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Drehachse und Drehwinkel der Drehung $g \circ f$, falls gilt:

a) f hat $\mathbb{R}e_1$ als Drehachse und einen Drehwinkel von 90°, g hat $\mathbb{R}e_2$ als Drehachse und einen Drehwinkel von 90°. Der Drehsinn sei jeweils so gewählt, dass $f(e_2) = e_3$ und $g(e_1) = e_3$ ist.

b) f hat $\mathbb{R}e_3$ als Drehachse und einen Drehwinkel von 90°, g hat $\mathbb{R}e_1$ als Drehachse und einen Drehwinkel von 180°. Der Drehsinn von f sei so gewählt, dass $f(e_1) = e_2$ ist.

c) f hat $\mathbb{R}e_1$ als Drehachse und einen Drehwinkel von 45°, g hat $\mathbb{R}e_3$ als Drehachse und einen Drehwinkel von 180°. Der Drehsinn von f sei so gewählt, dass $f(e_2) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,e_3$ ist.

Lösung: a) Es ist $\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & 0 & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also

$$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g \circ f) = \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g)\,\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Drehachse wird von einem Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert 1 erzeugt, sie ist also gleich $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Den Drehwinkel α berechnen wir aus $2\cos\alpha + 1 = \mathrm{Spur}\,(g \circ f) = 0$, d.h. $\cos\alpha = -1/2$, und erhalten $\alpha = 2\pi/3$ (bzw. $\alpha = 120^\circ$).

b) Es ist $\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, also

$$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g \circ f) = \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g)\,\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Drehachse wird von einem Eigenvektor von $g \circ f$ zum Eigenwert 1 erzeugt, sie ist also gleich $\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Den Drehwinkel α berechnen wir aus $2\cos\alpha + 1 = \mathrm{Spur}\,(g \circ f) = -1$, d.h. $\cos\alpha = -1$, und erhalten $\alpha = \pi$ (bzw. $\alpha = 180^\circ$).

c) Es ist $\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g) = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi & 0 \\ \sin\pi & \cos\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also

$$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g\circ f) = \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g)\,\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Die Drehachse wird von einem Eigenvektor von $g\circ f$ zum Eigenwert 1 erzeugt, sie ist also gleich $\mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Den Drehwinkel α berechnen wir aus $2\cos\alpha + 1 = \operatorname{Spur}(g\circ f) = -1$, d.h. $\cos\alpha = -1$, und erhalten $\alpha = \pi$ (bzw. $\alpha = 180°$). •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 440 (1.6.2012) :

Berechnen Sie Drehachse und Drehwinkel der Drehung $g\circ f\circ g$, falls $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ die Drehung des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{R}e_3$ als Drehachse und einem Drehwinkel von 60° ist und $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ die Drehung des $\mathbb{R}^3$ mit Drehachse $\mathbb{R}e_2$ und einem Drehwinkel von 90°. Der Drehsinn dieser Drehungen sei so gewählt, dass $f(e_2) = \big(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0\big)$ und $g(e_1) = e_3$ ist, wo e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Lösung: Es ist $\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und

$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & 0 & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & 0 & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also

$$\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g\circ f\circ g) = \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g)\,\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)\,\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(g) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Drehachse wird von einem Eigenvektor von $g\circ f\circ g$ zum Eigenwert 1 erzeugt, sie ist also gleich $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Den Drehwinkel α berechnen wir aus $2\cos\alpha + 1 = \operatorname{Spur}(g\circ f\circ g) = -1$, d.h. $\cos\alpha = -1$, und erhalten $\alpha = \pi$ (bzw. $\alpha = 180°$). •

Abschnitt 14.A, Aufg. 3, p. 440 (1.6.2012) :

Man zeige, dass für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$ die Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ eine Orthogonalmatrix mit Determinante -1 ist, also bzgl. jeder Orthonormalbasis v_1, v_2 einer euklidischen Ebene eine (orthogonale) Spiegelung beschreibt. Die Spiegelungsachse ist dabei die Gerade, die von $(\cos\frac{\alpha}{2})v_1 + (\sin\frac{\alpha}{2})v_2$ erzeugt wird.

Beweis: Wegen $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Matrix orthogonal.

Wegen $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1\cos\alpha + r_2\sin\alpha \\ r_1\sin\alpha - r_2\cos\alpha \end{pmatrix}$ ist $(r_1\cos\alpha + r_2\sin\alpha)v_1 + (r_1\sin\alpha - r_2\cos\alpha)v_2$ das Bild von $x = r_1v_1 + r_2v_2$, $r_1, r_2\in\mathbb{R}$, bei der durch die Matrix beschriebenen Abbildung. Bezeichnet andererseits $v := (\cos\frac{\alpha}{2})v_1 + (\sin\frac{\alpha}{2})v_2$ den angegebenen Einheitsvektor in Richtung der obigen Gerade g, so ist $\langle x, v\rangle v$ der Fußpunkt des Lotes von x auf g und somit $\langle x, v\rangle v + \big(\langle x, v\rangle v - x\big) = 2\langle x, v\rangle v - x$ das

Bild von x bei der orthogonalen Spiegelung von $\mathbb{R}^2$ an g. Wegen $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\cos\alpha=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}$ und $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha$ sowie $\langle x,v\rangle=r_1\cos\frac{\alpha}{2}+r_2\sin\frac{\alpha}{2}$ gilt nun wie behauptet

$$\begin{aligned}2\langle x,v\rangle v-x&=\big(2r_1\cos^2\tfrac{\alpha}{2}+2r_2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}-r_1\big)v_1+\big(2r_1\cos\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\alpha}{2}+2r_2\sin^2\tfrac{\alpha}{2}-r_2\big)v_2\\&=(r_1\cos\alpha+r_2\sin\alpha)\,v_1+(r_1\sin\alpha-r_2\cos\alpha)\,v_2\,.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 14.A, Aufg. 4, p. 440 (1.6.2012) :

a) Jede Drehung einer euklidischen Ebene ist das Produkt von zwei orthogonalen Geradenspiegelungen, von denen eine frei vorgegeben werden kann. Umgekehrt ist das Produkt von zwei solchen Geradenspiegelungen stets eine Drehung der euklidischen Ebene, wobei der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den Spiegelungsgeraden ist.

b) Jede Drehung $f:V\to V$ eines 3-dimensionalen euklidischen Vektorraums V ist das Produkt von zwei orthogonalen Ebenenspiegelungen. Umgekehrt ist das Produkt zweier solcher Ebenenspiegelungen eine Drehung von V. Dabei ist die Drehachse die Schnittgerade der beiden Spiegelebenen (falls diese verschieden sind) und der Drehwinkel ist das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Spiegelebenen.

c) Jede Drehung $f:V\to V$ eines 3-dimensionalen euklidischen Vektorraums V ist das Produkt von zwei Halbdrehungen. Umgekehrt ist das Produkt zweier Halbdrehungen eine Drehung von V. Dabei ist die Drehachse orthogonal zu den Drehachsen der Halbdrehungen, und der Drehwinkel ist das Doppelte des Winkels zwischen den Drehachsen der Halbdrehungen.

Beweis: a) Bezeichnet $\mathfrak{S}_\alpha$ die Spiegelungsmatrix aus Aufg. 3, so erhält man für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta&=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\\sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\\sin\beta&-\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta&\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta&\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta)&-\sin(\alpha-\beta)\\\sin(\alpha-\beta)&\cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}=\mathfrak{D}_{\alpha-\beta}\,.\end{aligned}$$

Das Produkt zweier Geradenspiegelungen ist also die Drehung um das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Geraden, an denen gespiegelt wird. Wegen $\mathfrak{S}_\alpha^2=\mathfrak{E}_2$ folgt für eine Drehmatrix $\mathfrak{D}_\gamma$, $\gamma\in\mathbb{R}$, dass $\mathfrak{D}_\gamma=\mathfrak{S}_{\gamma+\beta}\mathfrak{S}_\beta=\mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_{\alpha-\gamma}$ ist, wobei α bzw. β beliebig vorgegeben werden können.

b) Ist v_1,v_2,v_3 eine Orthonormalbasis von V derart, dass $\mathbb{R}v_1$ die Drehachse der Drehung f ist, so kann man die f bzgl. dieser Basis beschreibende Drehmatrix in folgender Weise in Faktoren zerlegen:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Dabei sind beide Faktoren orthogonale Matrizen mit der Determinante -1, beschreiben also bzgl. der Orthonormalbasis v_1,v_2,v_3 Drehspiegelungen von V. Die Spur der beiden Matrizen ist jeweils 1. Der zugehörige Drehwinkel φ ist daher 0 wegen $1=2\cos\varphi-1$, d.h. $\cos\varphi=1$, $\varphi=0$. Folglich beschreiben beide Faktoren der gegebenen Drehmatrix Spiegelungen von V.

Seien umgekehrt s_1,s_2 Spiegelungen von V an Ebenen E_1 bzw. E_2. Bei $E_1=E_2$ ist $s_1=s_2$ und somit $s_1s_2=\mathrm{id}_V$ die Drehung mit Drehwinkel 0. Sei also $E_1\neq E_2$. Dann ist $E_1\cap E_2$ ein 1-dimensionaler Unterraum $\mathbb{R}v_0$, $\|v_0\|=1$. Wir ergänzen v_0 zu einer Orthonormalbasis v_0,v_1 von E_1 und zu einer Orthonormalbasis v_0,v_2 von E_2. Dann sind v_1 und v_2 linear unabhängig, spannen also den 2-dimensionalen Unterraum $E:=(\mathbb{R}v_0)^\perp$ von V auf. Sind n_1 und n_2 Einheitsnormalenvektoren zu E_1 bzw. E_2, so sind auch n_1 und n_2 linear unabhängig und liegen in $E_1^\perp\subseteq(\mathbb{R}v_0)^\perp=E$ bzw. $E_2^\perp\subseteq(\mathbb{R}v_0)^\perp=E$, erzeugen also ebenfalls die Ebene E. Da s_1 und s_2 die Gerade $\mathbb{R}v_0$ in der Spiegelebene fest lassen, ist auch $E=(\mathbb{R}v_0)^\perp$ nach Lemma 14.A.7 (3) invariant unter s_1 und s_2. Daher sind $s_1|E$ und $s_2|E$ Spiegelungen von E an den Fixgeraden $\mathbb{R}v_1$ bzw. $\mathbb{R}v_2$, und $s_1s_2|E$ ist nach a) eine Drehung mit einem Drehwinkel α, der das Doppelte des Winkels zwischen $\mathbb{R}v_1$ und $\mathbb{R}v_2$ ist. Dann wird s_1s_2 in der Orthonormalbasis v_0,v_1,n_1 von V durch die Drehmatrix $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$ beschrieben, ist also eine Drehung mit dem Drehwinkel α. Dieser Winkel ergänzt wie der Winkel zwischen den Geraden $\mathbb{R}n_1$ und $\mathbb{R}n_2$ den Winkel zwischen $\mathbb{R}n_1$und $\mathbb{R}v_2$ zu einem rechten Winkel, ist also definitionsgemäß gleich dem Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2.

c) Ist v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis von V derart, dass $\mathbb{R}v_1$ die Drehachse der Drehung f ist, so kann man die f bzgl. dieser Basis beschreibende Drehmatrix in folgender Weise in Faktoren zerlegen:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&-\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Dabei sind beide Faktoren orthogonale Matrizen mit der Determinante 1, beschreiben also bzgl. der Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 Drehungen von V. Die Spur der beiden Matrizen ist jeweils -1. Der zugehörige Drehwinkel φ ist daher gleich 180° wegen $-1=1+2\cos\varphi$, d.h. $\cos\varphi=-1$, $\varphi=\pi$. Folglich beschreiben beide Faktoren der gegebenen Drehmatrix Halbdrehungen von V.

Seien umgekehrt h_1, h_2 Halbdrehungen von V mit den Drehachsen $\mathbb{R}v_1$ bzw. $\mathbb{R}v_2$, $\|v_1\|=\|v_2\|=1$. Bei $\mathbb{R}v_1=\mathbb{R}v_2$ ist $h_1=h_2$ und somit $h_1h_2=\mathrm{id}_V$ die Drehung mit Drehwinkel 0. Sei also $\mathbb{R}v_1\neq\mathbb{R}v_2$. Dann sind $E_1:=(\mathbb{R}v_1)^\perp$ und $E_2:=(\mathbb{R}v_2)^\perp$ verschiedene 2-dimensionale Unteräume von V und somit $E_1\cup E_2$ eine Gerade $\mathbb{R}v_0$, $\|v_0\|=1$. Nach Konstruktion liegt v_0 in der Drehebene von h_1 und von h_2, d.h. es ist $h_1(v_0)=-v_0$ und $h_2(v_0)=-v_0$ und somit $h_1h_2(v_0)=v_0$. Daher ist $\mathbb{R}v_0$ die Drehachse der Drehung h_1h_2. Die Drehebene $E_0:=(\mathbb{R}v_0)^\perp$ dieser Drehung enthält ebenfalls nach Konstruktion die beiden verschiedenen Geraden $\mathbb{R}v_1$und $\mathbb{R}v_2$, d.h. es ist $E_0=\mathbb{R}v_1+\mathbb{R}v_2$. Da $\mathbb{R}v_0$ unter h_1 und h_2 invariant ist, ist nach Lemma 14.A.7 (3) auch E_0 unter h_1 und h_2 invariant. $h_1|E_0$ ist eine Isometrie von E_0 mit den beiden Eigenwerten 1 und -1, also eine Spiegelung an der Fixgeraden $\mathbb{R}v_1$ von $h_1|E_0$. Der Drehwinkel der Drehung h_1h_2 ist nun der Winkel zwischen der Geraden $\mathbb{R}v_2$ und ihrem Bild $h_1h_2(\mathbb{R}v_2)=h_1(\mathbb{R}v_2)=\mathbb{R}h_1(v_2)$ in E_0. Nach a) ist dieser Winkel das Doppelte des Winkels zwischen $\mathbb{R}v_2$ und der Spiegelungsgeraden $\mathbb{R}v_1$ bei der Spiegelung $h_1|E_0$, also das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Drehachsen $\mathbb{R}v_1$ und $\mathbb{R}v_2$. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 5, p. 440 (1.6.2012) :

(Spiegelungssatz) Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n. Dann ist jede Isometrie von V ein Produkt von höchstens n orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen von V.

1. Beweis: Nach Satz 14.A.11 gibt es eine Orthonormalbasis von V, bzgl. der f durch eine Matrix der Form $\mathfrak{A}=\mathrm{Diag}(\mathfrak{E}_r,-\mathfrak{E}_s,\mathfrak{D}_{\alpha_1},\ldots,\mathfrak{D}_{\alpha_t})$ mit $\alpha_1,\ldots,\alpha_t\in\,]0,\pi[$ und $\mathfrak{D}_{\alpha_\tau}=\begin{pmatrix}\cos\alpha_\tau&-\sin\alpha_\tau\\\sin\alpha_\tau&\cos\alpha_\tau\end{pmatrix}$, $\tau=1,\ldots,t$, beschrieben wird. Gemäß Aufg. 4a) lässt sich jedes $\mathfrak{D}_{\alpha_\tau}$ als Produkt $\mathfrak{D}_{\alpha_\tau}=\mathfrak{S}_{\alpha_\tau}\mathfrak{S}'_{\alpha_\tau}$ zweier 2×2-Spiegelungsmatrizen $\mathfrak{S}_{\alpha_\tau}$ und $\mathfrak{S}'_{\alpha_\tau}$ darstellen. Dann beschreiben $\mathfrak{A}_{s+2\tau-1}:=\mathrm{Diag}(\mathfrak{E}_{r+s+2\tau-2},\mathfrak{S}_{\alpha_\tau},\mathfrak{E}_{2t-2\tau})$ und $\mathfrak{A}_{s+2\tau}:=\mathrm{Diag}(\mathfrak{E}_{r+s+2\tau-2},\mathfrak{S}'_{\alpha_\tau},\mathfrak{E}_{2t-2\tau})$ sowie $\mathfrak{A}_\sigma:=\mathrm{Diag}(\mathfrak{E}_{r+\sigma-1},-1,\mathfrak{E}_{s+2t-\sigma})$, $\sigma=1,\ldots,s$, bezüglich der gewählten Orthonormalbasis Spiegelungen von V an Hyperebenen, und es gilt nach Konstruktion $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\cdots\mathfrak{A}_{s+2t}$. Daraus folgt die Behauptung. •

2. Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Im Fall $n=1$ sind id und $-$id die einzigen Isometrien von f, diese sind Produkt von 0 bzw. 1 Spiegelungen. Der Fall $n=2$ folgt aus Aufg. 4a). Beim Schluss von $n-1$ auf n sei f eine Isometrie von V und $x\in V$, $x\neq0$. Bei $f(x)=x$ ist $\mathbb{R}x$ eine f-invariante Gerade in V und daher $(\mathbb{R}x)^\perp$ ein f-invarianter $n-1$-dimensionaler Unterraum von V. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann $\le n-1$ Spiegelungen s'_i von $(\mathbb{R}x)^\perp$ derart, dass $f|(\mathbb{R}x)^\perp$ das Produkt dieser s'_i ist. Setzt man die s'_i durch $s_i(x):=x$ linear zu Spiegelungen s_i von ganz V fort, so ist f offenbar das Produkt der s_i.

Bei $f(x)\neq x$ sei s die orthogonale Spiegelung von V an der Hyperebene $H:=\mathbb{R}(x+f(x))+\big(\mathbb{R}x+\mathbb{R}f(x)\big)^\perp$. Dann gilt $s(f(x))=x$, da $\frac12(x+f(x))\in H$ wegen $\langle x+f(x)\,,x-f(x)\rangle=\langle x,x\rangle-\langle f(x)\,,f(x)\rangle=0$ und $f(x)-\frac12(x+f(x))=\frac12(f(x)-x)=\frac12(x+f(x))-x$ der Fußpunkt des Lote von $f(x)$ bzw. x auf H ist. Dann ist $sf|\mathbb{R}x$ die Identität, und $(\mathbb{R}x)^\perp$ ist sf-invariant, also nach Induktionsvoraussetzung Produkt von $\le n-1$ Spiegelungen s'_i von $(\mathbb{R}x)^\perp$. Setzt man die s'_i durch $s_i(x):=x$ linear zu Spiegelungen s_i von ganz V fort, so ist sf offenbar das Produkt der $\le n-1$ Spiegelungen s_i und somit $f=s(sf)$ ein Produkt von $\le n$ Spiegelungen. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 6, p. 441 (1.6.2012) :

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Die involutorischen Isometrien von V, d.h. die Isometrien von V mit $f^2=\mathrm{id}$, heißen die orthogonalen Spiegelungen von V.

a) Genau dann ist eine Involution f von V eine orthogonale Spiegelung, wenn V die orthogonale direkte Summe der beiden Eigenräume

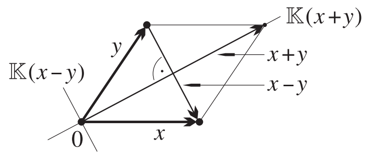
$$V^+=V_f(1)=\{x\in V\mid f(x)=x\}\qquad\text{und}\qquad V^-=V_f(-1)=\{x\in V\mid f(x)=-x\}$$

ist. In diesem Fall sagt man, f sei die **orthogonale Spiegelung von V an V^+**. Es ist dann $V^- = (V^+)^\perp$. Auf V^+ induziert f die Identität, auf V^- die Spiegelung am Nullpunkt.

b) Bei der Bijektion $\gamma : p \mapsto \mathrm{id} - 2p$ der Projektionen p auf die Involutionen von V entsprechen die orthogonalen Projektionen genau den orthogonalen Spiegelungen.

c) Für zwei orthogonale Spiegelungen f_1, f_2 von V an Unterräumen W_1 bzw. W_2 von V ist $f_1 f_2$ genau dann eine orthogonale Spiegelung, wenn $f_1 f_2 = f_2 f_1$ ist (vgl. 13.B, Aufg. 1b)). Ist $W_1 \perp W_2$, so ist diese Bedingung stets erfüllt. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt und $W_1 \cap W_2 = 0$, so ist $W_1 \perp W_2$.

d) Seien $x, y \in V - \{0\}$ und sei $\mathrm{Dim}\, V \geq 2$. Genau dann gibt es eine orthogonale Spiegelung f an einer Hyperebene von V mit $f(x) = y$, wenn $\|x\| = \|y\|$ ist und $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$.



e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}} V = 2$. Dann ist jede spezielle Isometrie $g \in \mathrm{SU}(V)$ Produkt zweier orthogonaler Geradenspiegelungen und jede beliebige Isometrie von V ist das Produkt zweier orthogonaler Geradenspiegelungen und einer Homothetie.

f) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}} V = n \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann ist jedes $g \in \mathrm{SU}(V)$ Produkt von (höchstens) $2n-2$ orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen. – Eine beliebige Isometrie von V ist das Produkt einer Homothetie $a\,\mathrm{id}_V$, $|a| = 1$, mit (höchstens) $2n-2$ orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen. (Bemerkung. Wir wissen nicht, inwieweit sich die Zahl $2n-2$ der benötigten Spiegelungen verkleinern lässt. Für $n = 3$ siehe g) und für $n = 4$ die Zusatzaufgabe weiter unten. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt Aufg. 5 die Antwort.

g) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}} V = 3$. Dann hat jede Isometrie $g \in \mathrm{U}(V)$ mit $\mathrm{Det}\, g = -1$ eine Darstellung $g = a f_1 f_2 f_3$ mit orthogonalen Ebenenspiegelungen f_1, f_2, f_3 und einer dritten Einheitswurzel a. – Jede beliebige Isometrie von V ist das Produkt von drei orthogonalen Ebenenspiegelungen und einer Homothetie.

h) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}} V = n \in \mathbb{N}^*$. Eine **orthogonale Pseudo- (oder Quasi-)Spiegelung** von V ist definitionsgemäß eine Isometrie von V, die eine Hyperebene von V elementweise festlässt, vgl. 7.A, Aufg. 17. Jede Isometrie $g \in \mathrm{U}(V)$ ist Produkt von (höchstens) n orthogonalen Pseudospiegelungen, die überdies paarweise kommutierend gewählt werden können.

Beweis: a) Für jede Involution f gilt $V = V^+ \oplus V^-$, vgl. 5.f, Aufg. 8. (Dies folgt auch daraus, dass f (wegen $\mathrm{Char}\,\mathbb{K} \neq 2$) diagonalisierbar ist.)

Sei nun f überdies eine Isometrie. Für $x \in V_+$ und $y \in V_-$ gilt dann $f(x) = x$ und $f(y) = -y$, und $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, da f Isometrie ist. Es folgt $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$ und somit $\langle x, y\rangle = 0$. Daher sind V^+ und V^- zueinander orthogonal. (Nach Lemma 14.A.7 (2) sind Eigenräume einer beliebigen Isometrie zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal.)

Seien umgekehrt V_+ und V_- zueinander orthogonal. Für $x \in V$ gilt $f\big(x+f(x)\big) = f(x)+f^2(x) = f(x)+x$, d.h. $x+f(x) \in V_+$, und $f\big(x-f(x)\big) = f(x) - f^2(x) = f(x) - x = -\big(x - f(x)\big)$, d.h. $x - f(x) \in V_+$. Es folgt $0 = \langle x+f(x), x-f(x)\rangle = \langle x, x\rangle - \langle f(x), f(x)\rangle$, also $\langle f(x), f(x)\rangle = \langle x, x\rangle$. Nach Satz 14.A.2 ist f daher eine Isometrie. (Generell gilt natürlich: Ist $V = V' \oplus V''$ und sind f' und f'' Isometrien von V' bzw. V'', so ist $f := f' \oplus f'' : V \to V$ eine Isometrie von V.)

b) Ist p eine Projektion von V, so ist $f := \mathrm{id} - 2p$ wegen $f^2 = \mathrm{id} - 4p + 4p^2 = \mathrm{id}$ eine Involution; ist f eine Involution von V, so ist $p := \frac{1}{2}(\mathrm{id} - f)$ wegen $p^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{id} - \frac{1}{2}f + \frac{1}{4}f^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{id} - \frac{1}{2}f = p$ eine Projektion. Daher ist γ eine Bijektion vom Raum der Projektionen auf den Raum der Involutionen von V mit $\delta : s \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{id} - f)$ als Umkehrabbildung.

Ist nun p eine orthogonale Projektion und sind $x, y \in V$, so gilt $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$ nach Satz 13.B.2 und es folgt $\langle \gamma(p)(x), \gamma(p)(y)\rangle = \langle x-2p(x), y-2p(y)\rangle = \langle x, y\rangle - 2\langle p(x), y\rangle - 2\langle x, p(y)\rangle + 4\langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, y\rangle - 4\langle x, p(y)\rangle + 4\langle x, p^2(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, d.h. $\gamma(p)$ ist eine Isometrie.

Ist umgekehrt f eine Isometrie, so gilt $\langle \delta(f)(x), y\rangle = \langle \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}f(x), y\rangle = \frac{1}{2}\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle f(x), f^2(y)\rangle = \frac{1}{2}\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\langle x, f(y)\rangle = \langle x, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}f(y)\rangle = \langle x, \delta(f)(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$, d.h. $\delta(f)$ ist nach Satz 13.B.2 eine orthogonale Projektion. (Die orthogonalen Spiegelungen sind also genau die selbstadjungierten Isometrien, vgl. 15.A, Aufg. 10.)

c) Seien f_1, f_2 orthogonale Spiegelungen von V an den Unterräumen $W_1 = V_1^+$ bzw. $W_2 = V_2^+$ von V. Dann ist $f_1 f_2$ als Produkt von Isometrien wieder eine Isometrie. Gilt $f_1 f_2 = f_2 f_1$, so ist $f_1 f_2$ auch eine Involution wegen $(f_1 f_2)^2 = f_1 f_2 f_1 f_2 = f_1 f_1 f_2 f_2 = \mathrm{id}^2 = \mathrm{id}$, also ebenfalls eine orthogonale Spiegelung. Ist umgekehrt $f_1 f_2$ eine orthogonale Spiegelung, so gilt $f_1 f_2 f_1 f_2 = (f_1 f_2)^2 = \mathrm{id}$ und Multiplikation von links mit f_1 und von rechts mit f_2 liefert wegen $f_1^2 = f_2^2 = \mathrm{id}$ sofort $f_2 f_1 = f_1^2 f_2 f_1 f_2^2 = f_1\,\mathrm{id}\, f_2 = f_1 f_2$.

Sei nun $W_1 \perp W_2$. Nach a) gilt dann

$$W_1 = V_1^+ \subseteq W_2^\perp = V_2^- := \{x \in V \mid f_2(x) = -x\}, \quad W_2 = V_2^+ \subseteq W_1^\perp = V_1^- := \{x \in V \mid f_1(x) = -x\}$$

sowie $V = V_1^+ \oplus V_1^-$. Es folgt $V = V_2^+ \oplus V_2^- = V_2^+ \oplus V_1^+ \oplus (V_1^- \cap V_2^-)$. Für $x \in V_2^+$ gilt $f_1(f_2(x)) = f_1(x) = -x = f_2(-x) = f_2(f_1(x))$, für $x \in V_1^+$ gilt $f_1(f_2(x)) = f_1(-x) = -x = f_2(x) = f_2(f_1(x))$ und für $x \in V_1^- \cap V_2^-$ gilt $f_1(f_2(x)) = f_1(-x) = x = f_2(-x) = f_2(f_1(x))$. Insgesamt erhält man so $f_1 f_2 = f_2 f_1$.

Sei umgekehrt $f_1 f_2 = f_2 f_1$ und überdies $W_1 \cap W_2 = 0$. Für $x \in W_1$ gilt dann $f_1(f_2(x)) = f_2(f_1(x)) = f_2(x)$, also $f_2(x) \in W_1$. Es folgt $f_2(W_1) \subseteq W_1$. Dabei ist $f_2|W_1$ ebenfalls eine involutorische Isometrie und besitzt eine orthogonale Summenzerlegung gemäß a). Wegen $W_1 \cap W_2 = 0$ besteht allerdings der Summand $\{x \in W_2 \mid f_2(x) = x\}$ nur aus 0. Daher gilt $f_2(x) = -x$ für alle $x \in W_1$. Da f_2 Isometrie ist, folgt für $x \in W_1$ und $y \in W_2$ nun $\langle x, y\rangle = \langle f_2(x), f_2(y)\rangle = \langle -x, y\rangle$, also $\langle x, y\rangle = 0$. Daher gilt $W_1 \perp W_2$.

d) Gibt es eine orthogonale Spiegelung f der angegebenen Art, so ist $\|x\| = \|f(x)\| = \|y\|$, da f eine Isometrie ist, und es gilt $\langle x, y\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \langle f^2(x), f(x)\rangle = \langle f(x), x\rangle = \overline{\langle x, f(x)\rangle} = \overline{\langle x, y\rangle}$, also $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$.

Seien umgekehrt für x, y die angegebenen Bedingungen erfüllt. Ist $x = y$, so kann man für f jede orthogonale Spiegelung an einer Hyperebene wählen, die x enthält. (Man beachte $\operatorname{Dim} V \ge 2$.) Sei nun überdies $x \neq y$ und $v := (x-y)/\|x-y\|$. Dann ist $z \mapsto \langle z, v\rangle v$ die orthogonale Projektion von V auf die Gerade $\mathbb{K}v$, also $f: z \mapsto z - 2\langle z, v\rangle v$ die orthogonale Spiegelung von V an $(\mathbb{K}v)^\perp$, vgl. b). Wegen $\|x\| = \|y\|$ und $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$, also $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, gilt $\langle x+y, v\rangle = \langle x+y, x-y\rangle/\|x-y\| = \big(\|x\|^2 - \|y\|^2\big)/\|x-y\| = 0$ und somit $2\langle x, v\rangle = \langle x-y, v\rangle + \langle x+y, v\rangle = \langle x-y, v\rangle$. Es folgt $f(x) = x - 2\langle x, v\rangle v = x - \langle x-y, v\rangle v = x - \langle x-y, x-y\rangle (x-y)/\|x-y\|^2 = y$.

e) Sei g eine Isometrie von V mit $\operatorname{Det} g = 1$. Da die Eigenwerte von g den Betrag 1 haben und ihr Produkt die Determinante ist, hat g die Eigenwerte s und $\overline{s}$ mit $|s| = 1$. Ist v_1, v_2 eine Orthonormalbasis von V aus den zugehörigen Eigenvektoren von g, so hat jedes $x \in V$ eine Darstellung $x = a_1 v_1 + a_2 v_2$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, und es folgt $\langle x, g(x)\rangle = \langle a_1 v_1 + a_2 v_2, a_1 s v_1 + a_2 \overline{s} v_2\rangle = |a_1|^2 \overline{s} + |a_2|^2 s$. Indem man $|a_1| = |a_2| \neq 0$ wählt, bekommt man einen Vektor $x_0 \in V - \{0\}$ mit $\langle x_0, g(x_0)\rangle \in \mathbb{R}$. Nach d) gibt es nun wegen $\|g(x_0)\| = \|x_0\|$ eine orthogonale Geradenspiegelung f_1 mit $f_1(x_0) = g(x_0)$. Dann ist $f_2 := f_1 g$ eine Isometrie von V mit $f_2(x_0) = x_0$, und 1 ist ein Eigenwert von f_2. Da $\operatorname{Det} f_2 = \operatorname{Det} f_1 \operatorname{Det} g = (-1)\cdot 1 = -1$ das Produkt der beiden Eigenwerte von f_2 ist, muss der andere Eigenwert von f_2 gleich -1 sein, und f_2 ist eine orthogonale Geradenspiegelung. Wegen $f_1^2 = \mathrm{id}_V$ folgt $g = f_1 f_2$.

Ist die Isometrie g beliebig, so ist $a^{-1} g$, wo $a := \sqrt{\operatorname{Det} g}$ eine der beiden Quadratwurzeln aus $\operatorname{Det} g$ ist, eine Isometrie von V mit der Determinante 1, also nach dem gerade Gezeigten ein Produkt $f_1 f_2$ von orthogonalen Spiegelungen. Folglich ist $g = a f_1 f_2$ eine Darstellung von g als Produkt zweier orthogonaler Geradenspiegelungen und einer Homothetie.

f) Sei zunächst g eine Isometrie mit $\operatorname{Det} g = 1$. Nach dem Spektralsatz 14.A.8 gibt es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V, bezüglich der g durch eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D} := \operatorname{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$, $|a_i| = 1$, beschrieben wird. $\mathfrak{D}$ ist offenbar das Produkt der Diagonalmatrizen $\mathfrak{D}_0 := \operatorname{Diag}(a_1, a_2 \cdots a_n, 1, \ldots, 1)$ mit den Diagonalmatrizen $\mathfrak{D}_i := \operatorname{Diag}(1, \ldots, 1, a_{i+2}^{-1} \cdots a_n^{-1}, a_{i+2} \cdots a_n, 1, \ldots, 1)$, $i = 1, \ldots, n-2$, wobei in $\mathfrak{D}_i$ zu Beginn i Einsen stehen. Dann haben die 2×2-Matrizen $\mathfrak{D}_0' := \operatorname{Diag}(a_1, a_2 \cdots a_n)$ und $\mathfrak{D}_i' := \operatorname{Diag}(a_{i+2}^{-1} \cdots a_n^{-1}, a_{i+2} \cdots a_n)$ die Determinante 1 und sind unitär, beschreiben also für $i = 0, \ldots, n-2$ spezielle Isometrien g_i' des Unterraums $\mathbb{K}v_{i+1} + \mathbb{K}v_{i+2}$ von V. Nach e) gibt es dazu orthogonale Geradenspiegelungen $f_{i,1}'$ und $f_{i,2}'$ mit $g_i' = f_{i,1}' f_{i,2}'$. Setzen wir nun g_i' und $f_{i,1}', f_{i,2}'$ durch $g_i'(v_j) := f_{i,1}'(v_j) = f_{i,2}'(v_j) = v_j$ für $j \neq i+1, i+2$ nach ganz V fort, so erhält man Isometrien g_i von V, die bzgl. $v_1, \ldots, v_n$ durch die Matrizen $\mathfrak{D}_i$ beschrieben werden, sowie orthogonale Spiegelungen $f_{i,j}$ von V an Hyperebenen, und es gilt nach Konstruktion $g = g_0 \cdots g_{n-2} = f_{0,1} f_{0,2} \cdots f_{n-2,1} f_{n-2,2}$.

Ist die Isometrie g beliebig, so ist $a^{-1}g$, wo $a := \sqrt[n]{\operatorname{Det} g}$ eine der n-ten Wurzeln aus $\operatorname{Det} g$ ist, eine Isometrie von V mit Determinante 1, also nach dem gerade Gezeigten ein Produkt von $2n-2$ orthogonalen Hyperebenenspiegelungen. Dies liefert eine Darstellung von g als Produkt von $2n-2$ orthogonalen Hyperebenenspiegelungen und einer Homothetie.

g) Sei g eine Isometrie von V mit $\operatorname{Det} g = -1$. Dann gilt $s_1s_2s_3 = -1$ für die Eigenwerte s_1, s_2, s_3 von g. Ist v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis von V aus zugehörigen Eigenvektoren von g, so hat jedes $x \in V$ eine Darstellung $x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. Für $a \in \mathbb{C}$ folgt

$$a\langle x, g(x)\rangle = a\langle a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, a_1s_1v_1 + a_2s_2v_2 + a_3s_3v_3\rangle = |a_1|^2 a\,\overline{s}_1 + |a_2|^2 a\,\overline{s}_2 + |a_3|^2 a\,\overline{s}_3\,.$$

Der Wertebereich von $x \mapsto a\langle x, g(x)\rangle$ ist also der Sektor $\mathbb{R}_+ a\,\overline{s}_1 + \mathbb{R}_+ a\,\overline{s}_2 + \mathbb{R}_+ a\,\overline{s}_3$. (Allgemein gilt für eine beliebige Isometrie oder sogar für einen beliebigen normalen Operator g auf einem n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit den (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $s_1, \ldots, s_n$: Der Wertebereich der Funktion $x \mapsto \langle x, g(x)\rangle$ ist der konvexe Sektor $\mathbb{R}_+\overline{s}_1 + \cdots + \mathbb{R}_+\overline{s}_n \subseteq \mathbb{C}$.)

Wir zeigen, dass die komplexen Zahlen a, a_1, a_2, a_3 so gewählt werden können, dass a eine dritte Einheitswurzel ist, $a\langle x, g(x)\rangle \in \mathbb{R}$ gilt und nicht alle a_i gleich 0 sind. Dazu genügt es zu erreichen, dass es unter den $a\overline{s}_1, a\overline{s}_2, a\overline{s}_3$ sowohl welche mit Imaginärteil ≥ 0 als auch solche mit Imaginärteil ≤ 0 gibt. Schreiben wir $\overline{s}_1 = e^{\mathrm{i}\varphi_1}, \overline{s}_2 = e^{\mathrm{i}\varphi_2}, \overline{s}_3 = e^{\mathrm{i}\varphi_3}$ mit Argumenten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in [0, 2\pi[$, so ist $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ wegen $\overline{s}_1\,\overline{s}_2\,\overline{s}_3 = \overline{s_1s_2s_3} = -1$ gleich $\pi, 3\pi$ oder 5π.

Bei $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 3\pi$ gibt es sicher i_1, i_2 mit $\varphi_{i_1} \leq \pi$ und $\varphi_{i_2} \geq \pi$. Wir können dann $a = 1$ wählen.

Bei $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$ sind alle $\varphi_i \leq \pi$, und wir wählen $a = e^{2\pi\mathrm{i}/3}$. Dann gilt $a\overline{s}_i = e^{\mathrm{i}\,(\varphi_i + 2\pi/3)}$ mit $\varphi_i + 2\pi/3 \in [2\pi/3\,, 5\pi/3]$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $(\varphi_1 + 2\pi/3) + (\varphi_2 + 2\pi/3) + (\varphi_3 + 2\pi/3) = 3\pi$, und wir sind im ersten Fall.

Bei $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 5\pi$ sind alle $\varphi_i \geq \pi$, und wir wählen $a = e^{-2\pi\mathrm{i}/3}$. Dann gilt $a\overline{s}_i = e^{\mathrm{i}\,(\varphi - 2\pi/3)}$ mit $\varphi - 2\pi/3 \in [\pi/3\,, 4\pi/3]$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $(\varphi_1 - 2\pi/3) + (\varphi_2 - 2\pi/3) + (\varphi_3 - 2\pi/3) = 3\pi$, und wir sind wieder im ersten Fall.

Es gibt also eine dritte Einheitswurzel a und ein $x_0 \in V - \{0\}$ mit $a\langle x_0, g(x_0)\rangle = \langle x_0, \overline{a}g(x_0)\rangle \in \mathbb{R}$. Nach d) gibt es eine orthogonale Ebenenspiegelung f_1 mit $f_1(x_0) = \overline{a}g(x_0)$. Dann gilt $\overline{a}\,f_1g(x_0) = x_0$, und wegen $\operatorname{Det}(\overline{a}\,f_1g) = \overline{a}^3 \operatorname{Det} f_1 \cdot \operatorname{Det} g_1 = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$ ist auch $\operatorname{Det}(\overline{a}\,f_1g)|V' = 1$, $V' := (\mathbb{C}x_0)^\perp$. Nach e) gibt es orthogonale Geradenspiegelungen f_2', f_3' auf V' mit $\overline{a}\,f_1g|V' = f_2'f_3'$. Es folgt $g = a\,f_1f_2f_3$, wobei f_2, f_3 die orthogonalen Ebenenspiegelungen von V sind, die f_2', f_3' vermöge $f_2(x_0) := f_3(x_0) := x_0$ fortsetzen.

h) Nach dem Spektralsatz 14.A.8 für Isometrien über $\mathbb{C}$ gibt es eine Orthonormalbasis von V, bezüglich der g durch eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D} := \operatorname{Diag}(s_1, \ldots, s_n)$ mit komplexen Eigenwerten s_i vom Betrag 1 dargestellt wird. Bezüglich dieser Orthonormalbasis beschreiben dann die Diagonalmatrizen $\mathfrak{D}_i := \operatorname{Diag}(1, \ldots, s_i, \ldots, 1)$ für $i = 1, \ldots, n$ orthogonale Pseudospiegelungen f_i von V. Wegen $\mathfrak{D}_1 \cdots \mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}$ ist dabei $f_1 \cdots f_n = g$. Offenbar kommutieren die $\mathfrak{D}_i$ und somit auch die f_i miteinander. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 440 (1.6.2012):

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\operatorname{Dim}_{\mathbb{C}} V = 4$. Dann ist jede Isometrie $g \in \mathrm{U}(V)$, die höchstens zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, das Produkt von vier orthogonalen Hyperebenenspiegelungen und einer Homothetie. Bei nur einem Eigenwert handelt es sich bereits um eine Homothetie. Des Weiteren gilt dann genauer:

a) Die Multiplizität der beiden Eigenwerte von g sei 2. Bei $\operatorname{Det} g = 1$ ist g Produkt von 4 orthogonalen Spiegelungen von V an Hyperebenen und eine Homothetie mit 1 oder i. Ein solches g mit beliebiger Determinante hat eine Darstellung als Produkt von 4 orthogonalen Hyperebenenpiegelungen und einer Homothetie.

b) Die Multiplizität eines der beiden Eigenwerte von g sei 3, die des anderen 1. Bei $\operatorname{Det} g = 1$ ist g dann ein Produkt von (höchstens) 4 orthogonalen Spiegelungen von V an Hyperebenen und einer vierten Einheitswurzel. Bei beliebiger Determinante hat g eine Darstellung als Produkt von 4 orthogonalen Spiegelungen und einer Homothetie.

Beweis: a) Sei $\operatorname{Det} g = 1$. Dann hat g die beiden Eigenwerte s und $\overline{s}$ bzw. s und $-\overline{s}$, und es gibt eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3, v_4 aus Eigenvektoren von g mit Eigenwerten $s, \overline{s}, s, \overline{s}$ bzw. $s, -\overline{s}, s, -\overline{s}$. Im ersten Fall ist g nach e) Produkt von vier orthogonalen Hyperebenenspiegelungen (vgl. den Beweis von f)).

Im zweiten Fall hat $-\mathrm{i}g$ die Eigenwerte $-\mathrm{i}s, \mathrm{i}\overline{s}, -\mathrm{i}s, \mathrm{i}\overline{s}$ und ist folglich nach dem ersten Fall Produkt von vier orthogonalen Hyperebenenspiegelungen. – Bei beliebigem Det g betrachte man $g/\sqrt[4]{\operatorname{Det} g}$.

b) Es genügt wieder den Fall $\operatorname{Det} g = 1$ zu betrachten. Dann seien die Eigenwerte von g gleich $s, s, s, \overline{s}^3$ mit $s \neq \overline{s}^3 = (s^{-1})^3 = s^{-3}$. Es gibt eine Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3, v_4 von V aus Eigenvektoren von g zu diesen Eigenwerten. Wir benutzen das folgende Lemma, das weiter unten bewiesen wird:

Lemma. *Sei s wie oben und sei h' auf dem 2-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum U eine Isometrie mit den Eigenwerten s und $\overline{s}^3$. Dann gibt es eine vierte Einheitswurzel a und eine Isometrie h'' von U mit den Eigenwerten a und $a^2\overline{s}$ derart, dass die Determinante des Operators $h := h'' - h'$ gleich 0 ist, d.h. ein $u \neq 0$ in U existiert mit $h'(u) = h''(u)$.*

Sei nun $U := \mathbb{C}v_3 + \mathbb{C}v_4$ und $h' := g|U$. Dann erfüllt h' die Voraussetzungen des Lemmas , und a, h'', u seien wie dort gewählt. Dann hat $\overline{a}h''$ die Eigenwerte 1 und $a\overline{s}$ auf U. Wir definieren die Isometrie $\overline{a}h$ auf ganz V durch $\overline{a}h|U = \overline{a}h''$ sowie $\overline{a}h(v_1) := \overline{a}sv_1$ und $\overline{a}h(v_2) := v_2$. Nach e) ist $\overline{a}h = f_1f_2$ mit zwei orthogonalen Hyperebenenspiegelungen f_1, f_2 von V, vgl. den Beweis von f). Die Isometrie $\overline{a}f_2f_1g$ hat dann die Determinante 1 und überdies 1 als doppelten Eigenwert. Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $v_1 \notin U$ und ein davon linear unabhängiger ist der Vektor $u \in U$. Wiederum nach e) existieren dann orthogonale Hyperebenenspiegelungen f_3, f_4 von V mit $\overline{a}f_2f_1g = f_3f_4$, d.h. $g = af_1f_2f_3f_4$.

B e w e i s d e s L e m m a s: Sei u_1, u_2 eine Orthonormalbasis von U aus Eigenvektoren von h' zu den Eigenwerten s und $\overline{s}^3$. Die Isometrien von U mit den Eigenwerten a und $a^2\overline{s}$ werden bezüglich u_1, u_2 durch die Matrizen $\mathfrak{B}\operatorname{Diag}(a, a^2\overline{s})\mathfrak{B}^{-1}$ dargestellt, wobei $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} c & -\overline{d} \\ d & \overline{c} \end{pmatrix}$ mit $c, d \in \mathbb{C}$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$ eine Matrix in $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ ist, vgl. auch 14.A, Aufg. 21a). Dann ist $\mathfrak{B}^{-1} = {}^t\overline{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \overline{c} & \overline{d} \\ -d & c \end{pmatrix}$, und die Matrix von h bzgl. u_1, u_2 ist

$$\mathfrak{B}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^2\overline{s} \end{pmatrix}\mathfrak{B}^{-1} - \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \overline{s}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac\overline{c} + a^2\overline{s}d\overline{d} - s & ac\overline{d} - a^2\overline{s}c\overline{d} \\ a\overline{c}d - a^2\overline{s}\overline{c}d & ad\overline{d} + a^2\overline{s}c\overline{c} - \overline{s}^3 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante

$$a^3\overline{s} + \overline{s}^2 - (a\overline{s}^3 + a^2)\,|c|^2 - (a^2\overline{s}^4 + as)\,|d|^2 = \overline{s}\left(a^3 + \overline{s} - (a\overline{s}^2 + a^2 s)\,|c|^2 - (a^2\overline{s}^3 + as^2)\,|d|^2\right).$$

(Man beachte $a^4 = |s| = |c|^2 + |d|^2 = 1$.) Wir haben a, c und d so zu bestimmen, dass diese Determinante verschwindet. Dies ist genau dann möglich, wenn der Punkt $a^3 + \overline{s} \neq 0$ auf der Verbindungsstrecke der Punkte $a\overline{s}^2 + a^2 s$ und $a^2\overline{s}^3 + as^2$ liegt. Die beiden Quotienten

$$\frac{a\overline{s}^2 + a^2 s}{a^3 + \overline{s}} = \frac{\operatorname{Re}(a^2 s^2 + a\overline{s})}{1 + \operatorname{Re}(a\overline{s})} = 1 - \frac{1 - \operatorname{Re}(a^2 s^2)}{1 + \operatorname{Re}(a\overline{s})} \qquad \text{und} \qquad \frac{a^2\overline{s}^3 + as^2}{a^3 + \overline{s}} = \frac{\operatorname{Re}(as^3 + a^2 s^2)}{1 + \operatorname{Re}(a\overline{s})}$$

sind aber für beliebige vierte Einheitswurzeln a reell. Der erste Quotient ist offenbar stets ≤ 1. Es genügt also eine vierte Einheitswurzel a zu finden, für die der zweite Quotient ≥ 1 ist. Dazu schreiben wir $s = e^{\mathrm{i}\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $a = e^{k\mathrm{i}\pi/2}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Dann ist der zweite Quotient gleich

$$Q_k(\varphi) := \frac{\cos(3\varphi + k\pi/2) + \cos(2\varphi + k\pi)}{1 + \cos(\varphi - k\pi/2)}\,.$$

Eine leichte Kurvendiskussion zeigt, dass für $k = 0, 1, 2, 3$ der Quotient Q_k auf den Mengen $[4\pi/6\,, 8\pi/6]$, $[7\pi/6\,, 11\pi/6]$, $[0\,, 2\pi/6] \cup [10\pi/6\,, 12\pi/6[$ bzw. $[\pi/6\,, 5\pi/6]$ einen Wert ≥ 1 hat. Diese Mengen überdecken aber das Intervall $[0\,, 2\pi[$. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 7, p. 441 (1.6.2012):

Sei $f: V \to V$ eine Isometrie des orientierten euklidischen Vektorraums V der Dimension $n \geq 2$. Dann gilt $f(x_1 \times \cdots \times x_{n-1}) = (\operatorname{Det} f)\, f(x_1) \times \cdots \times f(x_{n-1})$ für beliebige $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V$. – Umgekehrt ist bei $n \geq 3$ jede lineare Abbildung $f: V \to V$ mit $f \neq 0$ und $f(x_1 \times \cdots \times x_{n-1}) = f(x_1) \times \cdots \times f(x_{n-1})$ für alle $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V$ eine orientierungserhaltende Isometrie von V. Speziell ist bei $n = 3$ jede lineare Abbildung $f \neq 0$ mit $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) \times f(x_2)$ eine Drehung.

Beweis: Sei zunächst f eine Isometrie. Für Elemente $x_1, \ldots, x_{n-1} \in V$ und alle $x \in V$ gilt definitionsgemäß $\langle x, f(x_1) \times \cdots \times f(x_{n-1})\rangle = \operatorname{Det}\big(f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), x\big) = \operatorname{Det}\big(f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), f(f^{-1}(x))\big) = \operatorname{Det} f \cdot \operatorname{Det}\big(x_1, \ldots, x_{n-1}, f^{-1}(x)\big) = \operatorname{Det} f \cdot \langle f^{-1}(x)\,, x_1 \times \cdots \times x_{n-1}\rangle = \operatorname{Det} f \cdot \langle x\,, f(x_1 \times \cdots \times x_{n-1})\,\rangle$, wobei wir zum Schluss benutzt haben, dass f Isometrie ist. Da der Gradient einer Linearform eindeutig bestimmt ist, folgt $f(x_1)\times\cdots\times f(x_{n-1} = \operatorname{Det} f\cdot f(x_1\times\cdots\times x_{n-1})$. Daraus erhält man die Behauptung, denn als Isometrie eines euklidischen Vektorraums hat f Determinante ±1, d.h. es ist $(\operatorname{Det} f)^{-1} = \operatorname{Det} f$.

Sei umgekehrt $f(x_1\times\cdots\times x_{n-1}) = f(x_1)\times\cdots\times f(x_{n-1})$ für alle $x_1,\ldots,x_{n-1}\in V$ und sei $f\neq 0$. Zu jedem $x\in V$ gibt es nach 13.B, Aufg. 15 Elemente $x_1,\ldots,x_{n-1}\in V$ mit $x_1\times\cdots\times x_{n-1} = x$. Dann gilt $\|f(x)\|^2 = \langle f(x)\,,\, f(x_1\times\cdots\times x_{n-1})\rangle = \langle f(x)\,,\, f(x_1)\times\cdots\times f(x_{n-1})\rangle = \operatorname{Det}\big(f(x_1),\ldots,f(x_{n-1}),f(x)\big) = \operatorname{Det} f\cdot\operatorname{Det}\big(x_1,\ldots,x_{n-1},x\big) = \operatorname{Det} f\cdot\langle x, x_1\times\cdots\times x_{n-1}\rangle = \operatorname{Det} f\cdot\|x\|^2$. Wegen $f\neq 0$ gibt es ein $x_0\in V$ mit $f(x_0)\neq 0$, d.h. es gibt auch $x_1^{(0)},\ldots,x_{n-1}^{(0)}\in V$ mit $f(x_1^{(0)})\times\cdots\times f(x_{n-1}^{(0)}) = f(x_1^{(0)}\times\cdots\times x_{n-1}^{(0)}) = f(x_0)\neq 0$ und $f(x_1^{(0)}),\ldots,f(x_{n-1}^{(0)}), f(x_0)$ sind linear unabhängig. Daher ist $\operatorname{Det} f>0$. Sei $a := (\operatorname{Det} f)^{-1/2}$ und $\tilde f := af$. Dann gilt $\|\tilde f(x)\|^2 = a^2\|f(x)\|^2 = a^2\operatorname{Det} f\cdot\|x\|^2 = \|x\|^2$, also $\|\tilde f(x)\| = \|x\|$ für alle $x\in V$ und $\tilde f$ ist nach Satz 14.A.2 eine Isometrie. Mit der eingangs gezeigten Richtung der Aussage folgt $af(x_0) = \tilde f(x_1^{(0)}\times\cdots\times x_{n-1}^{(0)}) = \tilde f(x_1^{(0)})\times\cdots\times\tilde f(x_{n-1}^{(0)}) = a^{n-1}f(x_1^{(0)})\times\cdots\times f(x_{n-1}^{(0)}) = a^{n-1}f(x_0)$. Wegen $f(x_0)\neq 0$ und $n\geq 3$ folgt $a=1$, d.h. $f=\tilde f$ ist eine Isometrie. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 8, p. 441 (1.6.2012):

Seien $f: V\to V$ eine Drehung des 3-dimensionalen euklidischen Vektorraums V, die keine Halbdrehung ist, und x ein von 0 verschiedener Vektor der Drehebene von f. Dann ist der Drehvektor von f gleich $v_f = \alpha\, x\times f(x)$ mit $\alpha := \|x\|^{-1}\big(2\,\langle x\,,\,x+f(x)\rangle\big)^{-1/2}$.

Beweis: Da f keine Halbdrehung ist, sind x und $f(x)$ linear unabhängige Vektoren der Drehebene, die so orientiert werde, dass der orientierte Drehinkel $\varphi := \measuredangle(x, f(x))\in[0,\pi[$ liegt. Dann repräsentieren $x, f(x), v_f$ und $x, f(x), x\times f(x)$ die gleiche Orientierung von V, d.h. es ist $v_f = \alpha'\,x\times f(x)$ mit einem $\alpha'>0$. Dabei ist $\alpha' = \sin\frac12\varphi\big/\|x\times f(x)\| = \alpha_f$, da wegen $\|f(x)\| = \|x\|$ und $\sin\varphi = 2\sin\frac12\varphi\cos\frac12\varphi$, $\cos\varphi = 2\cos^2\frac12\varphi - 1$ gilt:

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\|x\times f(x)\|}{\sin\frac12\varphi} = \frac{\|x\|\|f(x)\|\sin\varphi}{\sin\frac12\varphi} = 2\|x\|^2\cos\tfrac12\varphi = \|x\|\sqrt{2\|x\|^2\cdot 2\cos^2\tfrac12\varphi}$$
$$= \|x\|\sqrt{2\|x\|\|f(x)\|\cdot\cos\varphi + 2\|x\|^2} = \|x\|\sqrt{2\langle x, f(x)\rangle + 2\langle x, x\rangle} = \|x\|\sqrt{2\langle x, x+f(x)\rangle} = \frac{1}{\alpha_f}\,. \quad\bullet$$

Abschnitt 14.A, Aufg. 9, p. 441 (1.6.2012):

Seien V ein euklidischer Vektorraum und $v, w\in V$ Vektoren mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $v\neq -w$. Dann gibt es genau eine eigentliche Isometrie $f\in\mathrm{SO}(V)$ mit $f(v) = w$ und $f|W = \mathrm{id}_W$ für $W := (\mathbb{R}v+\mathbb{R}w)^\perp$.

Beweis: Wird $\mathbb{R}v+\mathbb{R}w$ so orientiert, dass der orientierte Winkel $\alpha := \measuredangle(v, w)$ in $[0,\pi[$ liegt, so bildet die orientierte Drehung f von $\mathbb{R}v+\mathbb{R}w$ um den Winkel α den Vektor v auf w ab. Setzt man f so auf V fort, dass $f(x) := x$ für $x\in W$ ist, so erhält man ein $f\in\mathrm{SO}(V)$ der gewünschten Art. – Umgekehrt induziert jede Isometrie $f\in\mathrm{SO}(V)$ mit $f|W = \mathrm{id}_W$ eine eigentliche Isometrie von $W^\perp = \mathbb{R}v+\mathbb{R}w$. Gilt dabei $f(v) = w$, so muss $f|W^\perp$ die Drehung um den Winkel α sein. Daher ist f eindeutig bestimmt. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 11, p. 442 (1.6.2012):

Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und $f: V\to W$ eine lineare Abbildung mit $\measuredangle(f(x), f(y)) = \measuredangle(x, y)$ für alle $x, y\in V$. Für einen Einheitsvektor $x_0\in V$ sei $r := \|f(x_0)\|$. Dann ist $r^{-1}f$ eine Isometrie, also f eine Ähnlichkeit(sabbildung).

Beweis: Bei $f(x_0) = 0$ wäre $\measuredangle(f(x_0), f(x_0)) = \pi/2\neq 0 = \measuredangle(x_0, x_0)$. Also ist $f(x_0)\neq 0$ und $\|(r^{-1}f)(x_0)\| = r^{-1}\|f(x_0)\| = 1$. Wir können also gleich annehmen, dass $r=1$ ist und daher $\|f(x_0)\| = 1$. Für $t\in\mathbb{R}$ gilt dann $\|f(tx_0)\| = |t|\|f(x_0)\| = |t| = \|tx_0\|$.

Sei nun $x\in V$, $x\notin\mathbb{R}x_0$, beliebig. Zunächst betrachten wir den Fall, dass $t_0 := \langle x, x_0\rangle\neq 0$ ist. Es gilt $\langle x - t_0x_0\,,\,t_0x_0\rangle = t_0\langle x, x_0\rangle - t_0\langle x, x_0\rangle\langle x_0, x_0\rangle = 0$ wegen $\|x_0\| = 1$, d.h. es ist $\measuredangle(x - t_0x_0\,,\,t_0x_0) = \pi/2 = \measuredangle\big(f(x-t_0x_0)\,,\,f(t_0x_0)\big) = \measuredangle\big(f(x) - f(t_0x_0)\,,\,f(t_0x_0)\big)$ nach Voraussetzung. Der Satz 13.A.6 von Pythagoras liefert nun $\|f(x) - f(t_0x_0)\|^2 + \|f(t_0x_0)\|^2 = \|x\|^2$, also $\|f(x)\|^2 - 2t_0\langle f(x), f(x_0)\rangle + 2t_0^2\|f(x_0)\|^2 = \|f(x)\|^2$ und daher $\langle f(x), f(x_0)\rangle = t_0\|f(x_0)\|^2 = t_0 = \langle x, x_0\rangle = \|x\|\|x_0\|\cos\measuredangle(x, x_0) = \|x\|\cos\measuredangle(x, x_0)$. Wegen $\|f(x_0)\| = 1$ und da nach Voraussetzung $\measuredangle\big(f(x), f(x_0)\big) = \measuredangle(x, x_0)$ ist, gilt andererseits $\langle f(x)\,,\, f(x_0)\rangle = \|f(x)\|\,\|f(x_0)\|\cos\measuredangle\big(f(x),\, f(x_0)\big) = \|f(x)\|\cos\measuredangle(x, x_0)$, also insgesamt $\|x\|\cos\measuredangle(x, x_0) = \|f(x)\|\cos\measuredangle(x, x_0)$. Da $\langle x, x_0\rangle \neq 0$ ist, d.h. $\measuredangle(x, x_0) \neq \pi/2$, ergibt sich daraus $\|f(x)\| = \|x\|$.

Im Fall $\langle x, x_0\rangle = 0$ ist $\langle x_1, x_0\rangle = \langle x+x_0\,,\, x_0\rangle/\|x+x_0\| = 1/\|x+x_0\| \neq 0$ für $x_1 := (x+x_0)/\|x+x_0\|$, und aus dem schon Bewiesenen folgt $\|f(x_1)\| = \|x_1\| = 1$. Außerdem ist dann $\langle x, x_1\rangle = \langle x\,,\, x+x_0\rangle/\|x+x_0\| = \|x\|^2/\|x+x_0\| \neq 0$, und, indem man die obigen Überlegungen mit x_1 statt x_0 durchführt, erhält man jetzt $\|f(x)\| = \|x\|$. Nach Satz 14.A.2 ist f dann eine Isometrie. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 12, p. 442 (1.6.2012):

V und W seien $\mathbb{R}$-Vektorräume mit Skalarprodukt und $f: V \to W$ sei eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Für beliebige $x, y \in V$ sei $x \perp y$ genau dann, wenn $f(x) \perp f(y)$ ist. Dann ist f eine Ähnlichkeitsabbildung.

1. Beweis: Zusätzlich zu dem gegebenen Skalarprodukt $\Phi := \langle -, -\rangle$ betrachten wir auch die hermitesche Form $\Psi := \langle f(-)\,,\, f(-)\rangle$ auf V. Nach Voraussetzung gilt $\Phi(x, y) = 0$ für $x, y \in V$ genau dann, wenn $\Psi(x, y) = 0$ ist. Nach 12.B, Aufg. 15 gibt es daher ein $a \in \mathbb{K}^\times$ mit $\Phi(x, y) = a\Psi(x, y)$ für alle $x, y \in V$, d.h. mit $\|x\|^2 = \Phi(x, x) = a\,\Psi(x, x) = a\|f(x)\|^2$ und somit $a > 0$ und $\|\tilde{f}(x)\| = \|x\|$ für $\tilde{f} := a^{1/2} f$ und alle $x \in V$. Nach Satz 14.A.2 ist dann $\tilde{f}$ eine Isometrie und daher $f = a^{-1/2}\tilde{f}$ eine Ähnlichkeitsabbildung.

2. Beweis: Sei $x_0 \neq 0$ aus V. Dann ist auch $f(x_0) \neq 0$, da aus $f(x_0) = 0$ folgen würde $f(x_0) \perp f(x_0)$ und dann $x_0 \perp x_0$, d.h. $x_0 = 0$. Sei $a := \|f(x_0)\|/\|x_0\|$ und $\tilde{f} := a^{-1} f$, also $\|\tilde{f}(x_0)\| = \|x_0\|$. Ist gezeigt, dass $\tilde{f}$ eine Isometrie ist, so folgt, dass $f = a\tilde{f}$ eine Ähnlichkeitsabbildung ist. Wir können also gleich annehmen, dass $f = \tilde{f}$ ist, also $\|f(x_0)\| = \|x_0\|$, und haben zu zeigen, dass f eine Isometrie ist.

Für jedes $x \in V$ mit $\|x\| = \|x_0\|$ ist $\langle x+x_0\,,\, x-x_0\rangle = \|x\|^2 - \|x_0\|^2 = 0$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $0 = \langle f(x+x_0)\,,\, f(x-x_0)\rangle = \langle f(x) + f(x_0)\,,\, f(x) - f(x_0)\rangle = \|f(x)\|^2 - \|f(x_0)\|^2$, also $\|f(x)\| = \|f(x_0)\| = \|x_0\|$. Für beliebige $x \in V$, $x \neq 0$, ist nun $\|(\,\|x_0\|/\|x\|\,)\,x\| = \|x_0\|$ und somit $f\big((\,\|x_0\|/\|x\|\,)\,x\big) = \|x_0\|$, d.h. $\|f(x)\| = \|x\|$. Nach Satz 14.A.2 ist f dann eine Isometrie. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 24, p. 442 (1.6.2012):

Sei V ein 3-dimensionaler euklidischer Raum.

a) Genau dann ist $fg = gf$ für zwei Drehungen $f, g \neq \mathrm{id}$ von V, wenn die Drehachsen übereinstimmen oder wenn die Drehachsen orthogonal sind und beide Drehungen Halbdrehungen sind.

b) Genau dann ist $fg = gf$ für zwei Drehspiegelungen f, g von V, wenn eine davon die Punktspiegelung am Nullpunkt ist oder wenn beide Drehachsen übereinstimmen oder wenn es sich um Spiegelungen an zueinander orthogonalen Ebenen handelt.

c) Genau dann ist $fg = gf$ für eine Drehung $f \neq \mathrm{id}$ und eine Drehspiegelung g von V, wenn g die Punktspiegelung am Nullpunkt ist oder beide Drehachsen übereinstimmen oder wenn f eine Halbdrehung und g eine Spiegelung an einer Ebene ist, die die Drehachse von f enthält.

Beweis: a) Sei zunächst $fg = gf$. Ist $\mathbb{R}x$, $x \neq 0$, die Drehachse von f, so gilt $f(x) = x$ und folglich $g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$, d.h. $g(x) \neq 0$ ist ebenfalls ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 1. Wegen $f \neq \mathrm{id}$ ist daher auch $\mathbb{R}g(x)$ die Drehachse von f, und es folgt $g(x) = \mu x$ mit $\mu = \pm 1$. Im Fall $\mu = 1$ ist $\mathbb{R}x$ auch die Drehachse von g. Bei $\mu == -1$ hat g wegen $\operatorname{Det} g = 1$ den doppelten Eigenwert -1 und ist daher eine Halbdrehung. Außerdem liegt die Drehachse $\mathbb{R}x$ von f dann im Eigenraum von g zum Eigenwert -1 und ist daher nach Lemma 14.A.2 (2) orthogonal zum Eigenraum $\mathbb{R}y$ von g zum Eigenwert 1, der Drehachse von g. Dabei gilt auch $f(y) = f(g(y)) = g(f(y))$ und $\mathbb{R}f(y)$ ist ebenfalls die Drehachse von g. Daher gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f(y) = \lambda y$. Wegen $\mathbb{R}x \perp \mathbb{R}y$ ist dann $\mathbb{R}x$ nicht die Drehachse von f und somit muss $\lambda = -1$ sein, also -1 ein dannn notwendigerweise doppelter Eigenwert von f und somit f ebenfalls eine Halbdrehung.

Haben umgekehrt f und g gleiche Drehachsen, so auch die gleichen Drehebenen (als orthogonale Komplemente der Drehachsen) und induzieren dort ebene Drehungen, die stets kommutieren. Da die Drehachsen unter f und g fest bleiben, folgt $fg = gf$. Sind jedoch die Drehachsen $\mathbb{R}x$ und $\mathbb{R}y$ der Halbdrehungen f bzw. g zueinander orthogonal und ist $(\mathbb{R}x)^\perp \cap (\mathbb{R}y)^\perp = \mathbb{R}z$ der Durchschnitt der beiden Drehebenen, so ist x, y, z eine Basis von V und es gilt $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $f(y) = -y$, $g(y) = -y$, $f(z) = -z$, $g(z) = -z$. Daraus folgt $fg(x) = -f(x) = -x = g(x) = gf(x)$, $fg(y) = f(y) = -y = -g(y) = gf(y)$, $fg(z) = -f(z) = z = -g(z) = gf(z)$, es ist also $fg = gf$.

b) Sei s die Punktspiegelung von V mit $s(x)=-x$ für alle $x\in V$. Dann kommutiert s mit allen Endomorphismen von V, und sf und sg sind wegen $\operatorname{Det} sf=(-1)^2=1$ und $\operatorname{Det} sg=(-1)^2=1$ Drehungen von V. Genau dann gilt $fg=gf$, wenn $(sf)(sg)=(sg)(sf)$ ist. Sind $sf=\mathrm{id}$ oder $sg=\mathrm{id}$, so sind $f=s$ bzw. $g=s$ Halbdrehungen. Seien also $sf\neq\mathrm{id}$ und $sg\neq\mathrm{id}$. Nach a) gilt nun $(sf)(sg)=(sg)(sf)$ genau dann, wenn sf und sg und damit $f=s(sf)$ und $s=s(sg)$ die gleichen Drehachsen haben oder wenn die Drehachsen von sf und sg orthogonal sind und sf und sg Halbdrehungen sind. In letzterem Fall sind auch die Spiegelebenen von $f=s(sf)$ und $s=s(sg)$, d.h. die orthogonalen Komplemente dieser Drehachsen, zueinander orthogonal. Außerdem gilt $sf(x)=-x$, also $f(x)=x$, für Vektoren x aus der Drehebene der Halbdrehung sf und ebenso $g(x)=x$ für Vektoren x aus der Drehebene von sg. Daher sind f und g dann sogar Spiegelungen an zueinander orthogonalen Ebenen.

c) Wir betrachten die Drehspiegelung $sf\neq s$ mit der Punktspiegelung s. Genau dann gilt $fg=gf$, wenn $(sf)g=g(sf)$ ist. Nach b) ist dies genau dann der Fall, wenn g die Punktspiegelung s ist oder wenn sf und f (und dann auch f und g) die gleichen Drehachsen haben oder wenn sf und g Spiegelungen an zueinander orthogonalen Ebenen sind. Letzteres bedeutet, dass die Drehachse von sf (und damit auch die von f) in der Ebene liegt, an der bei g gespiegelt wird. Außerdem ist f genau dann eine Halbdrehung, wenn sf eine Spiegelung ist. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 25, p. 442 (1.6.2012) :

Sei V ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum. Jeder $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f: V\to V$, die keinen (reellen) Eigenwert besitzt, ist zu genau einer Ähnlichkeitsabbildung $g: V\to V$ eigentlich ähnlich. Dabei heißen f und g *eigentlich ähnlich*, wenn es einen Automorphismus $h: V\to V$ mit $\operatorname{Det} h>0$ und $g=hfh^{-1}$ gibt. (Man beachte die beiden unterschiedlichen Bedeutungen von „ähnlich“).

Beweis: Sei $x\in V$ mit $\|x\|=1$. Dann ist $x, f(x)$ eine Basis von V. Andernfalls wären x und $f(x)$ nämlich linear abhängig, also $f(x)$ ein Vielfaches von x und somit x ein Eigenvektor von f zu einem reellen Eigenwert. Wir ergänzen x zu einer Orthonormalbasis x, y von V. Dann gibt es $a, b\in\mathbb{R}$ mit $f(x)=ax+by$.

Das charakteristische Polynom von f ist $\chi_f=X^2-(\operatorname{Sp} f)X+\operatorname{Det} f$ mit den (nicht reellen) konjugiert-komplexen Nullstellen $\frac{1}{2}\operatorname{Sp} f\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{|(\operatorname{Sp} f)^2-4\operatorname{Det} f|}$. Es sei $r\cos\varphi+\mathrm{i}r\sin\varphi$, $r\in\mathbb{R}_+^\times$, $\varphi\in\,]0,2\pi[$, $\varphi\neq\pi$, diejenige Nullstelle, für die $b^{-1}\sin\varphi>0$ ist. Es ist $\operatorname{Sp} f=2r\cos\varphi$ die Summe und $\operatorname{Det} f=r^2$ das Produkt dieser Nullstellen. Ferner sei g die Ähnlichkeitsabbildung von V mit $g(x):=xr\cos\varphi+yr\sin\varphi$, $g(y):=-xr\sin\varphi+yr\cos\varphi$, also die Drehung um den Winkel φ mit nachfolgender Streckung um den Faktor r. Dann gilt $\operatorname{Sp} g=2r\cos\varphi=\operatorname{Sp} f$ und $\operatorname{Det} g=r^2=\operatorname{Det} f$. Schließlich ist $h: V\to V$ mit $h(x):=x$, $h(f(x)):=g(x)$ ein Automorphismus von V, da $x, g(x)$ eine Basis von V ist.

Es gilt $f^2(x)=\operatorname{Sp} f\cdot f(x)-\operatorname{Det} f\cdot x$ und analog $g^2(x)=\operatorname{Sp} g\cdot g(x)-\operatorname{Det} g\cdot x$ nach dem Satz von Cayley-Hamilton. Die angegebene Konstruktion liefert nun $hfh^{-1}(x)=hf(x)=g(x)$ und $hfh^{-1}\big(g(x)\big)=hf\big(f(x)\big)=h(f^2(x))=\operatorname{Sp} f\cdot h(f(x))-\operatorname{Det} f\cdot h(x)=\operatorname{Sp} g\cdot g(x)-\operatorname{Det} g\cdot x=g^2(x)=g\big(g(x)\big)$. Da die Abbildungen hfh^{-1} und g auf der Basis $x, g(x)$ übereinstimmen, sind sie gleich.

Ist $g(x)=cx+df(x)$ mit $c,d\in\mathbb{R}$, so folgt $xr\cos\varphi+yr\sin\varphi=g(x)=(c+da)x+dby$, also $d=b^{-1}\sin\varphi>0$. Die Matrix von h bzgl. der Basis $x, f(x)$ ist $\begin{pmatrix}1&c\\0&d\end{pmatrix}$ mit Determinante $\operatorname{Det} h=d>0$, h ist also ein eigentlicher Automorphismus.

Da reelle Vielfache rs von Spiegelungen s von V die reellen Eigenwerte $\pm r$ besitzen, sind die einzigen Ähnlichkeitsabbildungen, zu denen f ähnlich sein kann, die positiven reellen Vielfachen rd von Drehungen d um einen Drehwinkel $\varphi\neq\pi$ in $]0,2\pi[$. Dafür muss $2r\cos\varphi=\operatorname{Sp} f$ sein und $r=\operatorname{Det} f$. Es genügt daher zu zeigen, dass die Drehungen mit den Drehwinkeln φ und $2\pi-\varphi$, d.h. $-\varphi$, nicht eigentlich ähnlich sind. Für eine invertierbare Matrix $\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ folgt aber aus $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi\\-\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $a\cos\varphi+b\sin\varphi=a\cos\varphi+c\sin\varphi$, d.h. $b=c$ wegen $\sin\varphi\neq0$, und $c\cos\varphi+d\sin\varphi=-a\sin\varphi+c\cos\varphi$, d.h. $d=-a$. Dies liefert $\operatorname{Det}\mathfrak{A}=ad-bc=-a^2-b^2<0$. (Natürlich sind die beiden Drehungen um φ und um $-\varphi$ (uneigentlich) ähnlich.) •

Abschnitt 14.B, Aufg. 1, p. 463 (1.6.2012):
Man bestimme den Typ der folgenden Bewegungen der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und beschreibe sie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Matrix $\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, die den linearen Anteil der ersten Abbildung beschreibt, ist offensichtlich orthogonal und hat die Determinante $\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$. Die Abbildung ist daher eine Drehung, deren (nicht orientierter) Drehwinkel α sich aus $2\cos\alpha + 1 = \operatorname{Sp}\mathfrak{A} = \frac{6}{5}$, d.h. $\cos\alpha = \frac{1}{10}$, berechnet. Es ist $\alpha = 1,47\ldots$ (bzw. $\alpha = 84{,}26\ldots°$). Da $\mathfrak{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$ im ersten Quadranten liegt, ist dies auch der orientierte Drehwinkel bzgl. der Standardorientierung von $\mathbb{R}^2$. Den Drehpunkt erhält man als Fixpunkt der Abbildung aus $\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} -2/5 & -4/5 \\ 4/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Er ist $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die Matrix $\mathfrak{B} := \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$, die den linearen Anteil der zweiten und dritten Abbildung beschreibt, ist offensichtlich orthogonal und hat die Determinante $-\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1$. Die Abbildungen sind daher Schubspiegelungen. $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Eigenraum von $\mathfrak{B}$ zum Eigenraum 1 mit dem Eigenraum $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zu -1 als orthogonalem Komplement. Da der Translationsanteil der dritten Abbildung im Eigenraum zu -1 liegt, ist ihr Schubvektor 0 und sie ist die Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Translationsanteil der zweiten Abbildung hat $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$ als Zerlegung in Richtung der Spiegelungsgeraden und orthogonal dazu. Sie ist also eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ mit nachfolgender Translation um den Schubvektor $\begin{pmatrix} -3/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$.

Abschnitt 14.B, Aufg. 2, p. 463 (1.6.2012):
Man bestimme den Typ der folgenden Bewegungen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ und beschreibe sie:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die drei Matrizen, die die linearen Anteile der angegebenen Abbildungen beschreiben, sind offenbar orthogonal. Die erste hat das charakteristische Polynom $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$, also die Determinante -1 und 1 nicht als Eigenwert. Die zugehörigen Abbildung ist daher eine Drehspiegelung. Ihren Drehpunkt erhält man als Fixpunkt der Abbildung aus $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Er ist also $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den Drehwinkel α bekommt man über die Spur aus $2\cos\alpha - 1 = -1$, d.h. $\cos\alpha = 0$; er ist $\alpha = \pi/2$ (bzw. 90°). Der Eigenraum $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der Matrix zum Eigenwert -1 liefert die Drehachse; sie ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Die Abbildung setzt sich somit zusammen aus der Drehung um die x_3-Achse mit Drehwinkel π und der Spiegelung an der x_1, x_2-Ebene.

Die zweite Matrix hat das charakteristische Polynom $(X-1)(X+1)^2$, also die Determinante -1 und 1 als Eigenwert. Die zugehörigen Abbildung ist daher eine Schubspiegelung. Der Eigenraum zu Eigenwert -1 ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ mit orthogonalem Komplement $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, die entsprechende Zerlegung des Translationsvektors ist $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\-3/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und liefert die Spiegelebene $\begin{pmatrix}3/4\\-3/4\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Die Abbildung setzt ich somit zusammen aus der Spiegelung an der Ebene $x_1 - x_2 = 3/2$ und der Translation um den Vektor $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$ parallel zur Spiegelebene.

Die dritte Matrix hat die Determinante 1 und die Spur 1. Die zugehörigen Abbildung ist daher eine Schraubung mit einem Drehwinkel β, der sich aus $2\cos\beta + 1 = 1$ bestimmt. Es folgt $\beta = \pi/2$ (bzw. 90°). Der Eigenraum zun Eigenwert 1 ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit orthogonalem Komplement $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, die entsprechende Zerlegung des Translationsvektors ist $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$. Die Fixpunktmenge des Rotationsanteils wird aus $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, bestimmt und ist gleich $\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\3/2\\0\end{pmatrix}$. Die Abbildung setzt sich also zusammen aus einer Drehung mit Drehwinkel π um diese Fixpunktmenge als Drehachse und einer Translation um den Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ in Richtung der Drehachse. •

Abschnitt 14.B, Aufg. 3, p. 463 (1.6.2012):

Sei E eine orientierte euklidische affine Ebene.

a) Das Produkt zweier Drehungen $\neq$ id von E ist genau dann eine Translation, wenn die orientierten Drehwinkel sich zu 2π ergänzen. Andernfalls handelt es sich um eine Drehung. Man beschreibe den Translationsvektor bzw. Drehpunkt und Drehwinkel des Produkts.

b) Das Produkt einer Drehung oder Translation und einer Schubspiegelung von E in beliebiger Reihenfolge ist jeweils eine Schubspiegelung. Man beschreibe Spiegelungsachse und Schubvektor des Produkts.

c) Das Produkt zweier Schubspiegelungen von E ist genau dann eine Translation, wenn die Spiegelachsen parallel sind. Andernfalls handelt es sich um eine Drehung. Man beschreibe den Translationsvektor bzw. Drehpunkt und Drehwinkel des Produkts.

Lösung: a) Seien $f_1 : P \mapsto f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P}) + P_1$ und $f_2 : P \mapsto f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P}) + P_2$ zwei Drehungen von E mit den Drehpunkten P_1 bzw. P_2, den Drehwinkeln α_1 bzw. α_2 und den linearen Anteilen $f_{\alpha_1} : V \to V$ bzw. $f_{\alpha_2} : V \to V$, wo V der zu E gehörende Raum der Translationen ist. Dann gilt $\overrightarrow{P_1\, f_2(P)} = \overrightarrow{P_1P_2} + f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P})$ und folglich $f_1(f_2(P)) = f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) + f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P})) + P_1 = f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P}) + f_1(P_2)$.

Wenn die beiden orientierten Drehwinkel α_1 und α_2 sich zu 2π ergänzen, ist $f_{\alpha_1+\alpha_2}$ die Identität von V und man erhält $f_1(f_2(P)) = \overrightarrow{P_2P} + f_1(P_2) = \overrightarrow{P_2P} + \overrightarrow{Pf_1(P_2)} + P = \overrightarrow{P_2\, f_1(P_2)} + P$, d.h. f_1f_2 ist die Translation von E um den Vektor $\overrightarrow{P_2\,f_1(P_2)}$.

Wenn $\alpha_1+\alpha_2\neq 2\pi$ ist, ist $f_{\alpha_1+\alpha_2}$ eine Drehung $\neq \mathrm{id}_V$, d.h. $\mathrm{id}_V-f_{\alpha_1+\alpha_2}$ ist ein Isomorphismus. In diesem Fall ist $P_0\in E$ genau dann ein Fixpunkt von f_1f_2, wenn gilt $f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2})+f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P_0}))+P_1=P_0$, d.h. $f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2})+f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P_0}))=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_0}$, also $-(\mathrm{id}_V-f_{\alpha_1+\alpha_2})^{-1}(\mathrm{id}_V-f_{\alpha_1})(\overrightarrow{P_1P_2})=\overrightarrow{P_2P_0}$. Der einzige Fixpunkt von f_1f_2 ist also $P_0:=\overrightarrow{P_2P_0}+P_2=-(\mathrm{id}_V-f_{\alpha_1+\alpha_2})^{-1}(\mathrm{id}_V-f_{\alpha_1})(\overrightarrow{P_1P_2})+P_2$.

Wegen $P_0=f_1(f_2(P_0))=f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P_0})+f_1(P_2)$ ist $\overrightarrow{f_1(P_2)\,P_0}=f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P_0})$ und, wie oben gesehen, gilt $\overrightarrow{f_1(P_2)\,f_1(f_2(P)}=f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P})$. Daraus folgt $\overrightarrow{P_0\,f_1(f_2(P))}=\overrightarrow{f_1(P_2)\,f_1(f_2(P)}-\overrightarrow{f_1(P_2)\,P_0}=f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P})-f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P_0})=f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_0P})$, also $f_1f_2(P)=f_{\alpha_1+\alpha_2}(\overrightarrow{P_0P})+P_0$. Daher ist f_1f_2 die Drehung mit Drehwinkel $\alpha_1+\alpha_2$ um den Drehpunkt P_0.

b) Seien $f:P\mapsto f_\alpha(\overrightarrow{P_0P})+P_0$ eine Drehung von E mit Drehpunkt P_0, Drehwinkel α und linearem Anteil $f_\alpha:V\to V$, wo V der zu E gehörende Raum der Translationen ist, und g eine Schubspiegelung $g:P\mapsto g_0(\overrightarrow{Q_0P})+av_1+Q_0$ von E mit linearem Anteil g_0, die sich aus der Spiegelung von E an der Geraden $\mathbb{R}v_1+Q_0$, $\|v_1\|=1$, und der Translation $P\mapsto av_1+P$, $a\in\mathbb{R}$, in Richtung der Geraden, an der gespiegelt wird, zusammensetzt. Dann gilt $\overrightarrow{P_0\,g(P)}=\overrightarrow{P_0Q_0}+g_0(\overrightarrow{Q_0P})+av_1$ und somit

$$f(g(P))=f_\alpha(g_0(\overrightarrow{Q_0P}))+f_\alpha(\overrightarrow{P_0Q_0})+af_\alpha(v_1)+P_0=g_\alpha(\overrightarrow{Q_0P})+f_\alpha(\overrightarrow{P_0Q_0})+af_\alpha(v_1)+P_0$$

wegen $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ für die f_α bzw. g_0 bzgl. v_1,v_2 beschreibenden Matrizen bzgl. einer (die Orientierung repräsentierenden) Orthonormalbasis v_1,v_2 von V. Nach 14.A, Aufg. 3 ist $f_\alpha g_0=g_\alpha$ die Spiegelung von V an der Geraden $\mathbb{R}v_1'$, wo $v_1':=\cos\frac{\alpha}{2}v_1+\sin\frac{\alpha}{2}v_2$ ist. Ergänzt man v_1' zu einer die Orientierung repräsentierenden Orthonormalbasis v_1',v_2' von V, so ist $\overrightarrow{P_0Q_0}=a_1v_1'+a_2v_2'$ und $f_\alpha(\overrightarrow{P_0Q_0})+af_\alpha(v_1)=b_1v_1'+b_2v_2'$ mit $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$. Wir setzen $Q_1:=\frac{1}{2}(a_2+b_2)v_2'+P_0$. Dann gilt $\overrightarrow{Q_0P}=\overrightarrow{Q_1P}-\overrightarrow{P_0Q_0}+\overrightarrow{P_0Q_1}$ und somit

$$\begin{aligned}f(g(P))&=g_\alpha(\overrightarrow{Q_0P}))+f_\alpha(\overrightarrow{P_0Q_0})+af_\alpha(v_1)+P_0\\&=g_\alpha(\overrightarrow{Q_1P})-g_\alpha(\overrightarrow{P_0Q_0})+g_\alpha(\overrightarrow{P_0Q_1})+b_1v_1'+b_2v_2'+P_0\\&=g_\alpha(\overrightarrow{Q_1P})-(a_1v_1'-a_2v_2')-\tfrac{1}{2}(a_2+b_2)v_2'+b_1v_1'+b_2v_2'+P_0\\&=g_\alpha(\overrightarrow{Q_1P})+(b_1-a_1)v_1'+\tfrac{1}{2}(a_2+b_2)v_2'+P_0=(b_1-a_1)v_1'+g_\alpha(\overrightarrow{Q_1P})+Q_1\,.\end{aligned}$$

Daher ist fg die Schubspiegelung von E, die sich aus der Spiegelung $P\mapsto g_\alpha(\overrightarrow{Q_1P})+Q_1$ an der Geraden $\mathbb{R}v_1'+Q_1$ und der Translation $P\mapsto(b_1-a_1)v_1'+P$ in Richtung dieser Geraden zusammensetzt.

Mit den vorstehenden Bezeichnungen gilt auch $\overrightarrow{Q_0\,f(P)}=\overrightarrow{Q_0P_0}+f_\alpha(\overrightarrow{P_0P})$ und folglich $g(f(P))=g_0(f_\alpha(\overrightarrow{P_0P}))+g_0(\overrightarrow{Q_0P_0})+av_1+Q_0=g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_0P})+g_0(\overrightarrow{Q_0P_0})+av_1+Q_0$ wegen

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & \sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & -\cos(-\alpha)\end{pmatrix}$$

mit der orthogonalen Spiegelung $g_{-\alpha}$ von V an der Geraden $\mathbb{R}v_1''$, wo $v_1'':=\cos\frac{\alpha}{2}v_1-\sin\frac{\alpha}{2}v_2$ ist. Ergänzt man v_1'' zu einer die Orientierung repräsentierenden Orthonormalbasis v_1'',v_2'' von V, so ist $\overrightarrow{Q_0P_0}=r_1v_1''+r_2v_2''$ und $g_0(\overrightarrow{Q_0P_0})+av_1=s_1v_1''+s_2v_2''$ mit $r_1,r_2,s_1,s_2\in\mathbb{R}$. Wir setzen $P_1:=\frac{1}{2}(r_2+s_2)v_2''+Q_0$. Dann gilt $\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{P_1P}-\overrightarrow{Q_0P_0}+\overrightarrow{Q_0P_1}$ und somit

$$\begin{aligned}g(f(P))&=g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_0P}))+g_0(\overrightarrow{Q_0P_0})+av_1+Q_0\\&=g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_1P})-g_{-\alpha}(\overrightarrow{Q_0P_0})+g_{-\alpha}(\overrightarrow{Q_0P_1})+s_1v_1''+s_2v_2''+Q_0\\&=g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_1P})-(r_1v_1''-r_2v_2'')-\tfrac{1}{2}(r_2+s_2)v_2''+s_1v_1''+s_2v_2''+Q_0\end{aligned}$$

$$= g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_1P}) + (s_1 - r_1)v_1'' + \tfrac{1}{2}(r_2 + s_2)v_2'' + Q_0 = (s_1 - r_1)v_1'' + g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_1P}) + P_1\ .$$

Daher ist gf die Schubspiegelung von E, die sich aus der Spiegelung $P \mapsto g_{-\alpha}(\overrightarrow{P_1P}) + P_1$ an der Geraden $\mathbb{R}v_1'' + P_1$ und der Translation $P \mapsto (s_1 - r_1)v_1'' + P$ in Richtung dieser Geraden zusammensetzt.

Sei nun f keine Drehung von E, sondern einfach die Translation $f: P \mapsto v + P$, $v \in V$. Verwenden wir im Übrigen die vorstehenden Bezeichnungen, so lässt sich v zerlegen in seine Komponenten in Richtung der Spiegelungsgeraden und orthogonal dazu, d.h. es gibt $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = a_1v_1 + a_2v_2$. Für $Q_1 := \frac{1}{2}a_2v_2 + Q_0$ gilt dann $\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_1P} + \frac{1}{2}a_2v_2$ sowie $g_0(\frac{1}{2}a_2v_2) = -\frac{1}{2}a_2v_2$ und somit

$$\begin{aligned} f(g(P)) &= v + g(P) = v + g_0(\overrightarrow{Q_0P}) + av_1 + Q_0 = (a_1 + a)v_1 + a_2v_2 + g_0(\overrightarrow{Q_0P}) + Q_0 \\ &= (a_1 + a)v_1 + \tfrac{1}{2}a_2v_2 - \tfrac{1}{2}a_2v_2 + g_0(\overrightarrow{Q_2P}) + \tfrac{1}{2}a_2v_2 + Q_0 = (a_1 + a)v_1 + g_0(\overrightarrow{Q_1P}) + Q_1\ . \end{aligned}$$

Daher ist fg in diesem Fall eine Schubspiegelung, die sich zusammensetzt aus der Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}v_1 + Q_1$ und der Translation um den Vektor $(a_1 + a)v_1$ in Richtung der Spiegelungsgeraden. Außerdem gilt dann $g_0(v) = a_1v_1 - a_2v_2$ und für $Q_2 := -\frac{1}{2}a_2v_2 + Q_0$ erhält man wegen $\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_2P} - \frac{1}{2}a_2v_2$

$$\begin{aligned} g(f(P)) &= g(v + P) = g_0(\overrightarrow{Q_0P}) + g_0(v) + av_1 + Q_0 = (a_1 + a)v_1 - a_2v_2 + g_0(\overrightarrow{Q_0P}) + Q_0 \\ &= (a_1 + a)v_1 - \tfrac{1}{2}a_2v_2 + \tfrac{1}{2}a_2v_2 + g_0(\overrightarrow{Q_2P}) - \tfrac{1}{2}a_2v_2 + Q_0 = (a_1 + a)v_1 + g_0(\overrightarrow{Q_2P}) + Q_2\ . \end{aligned}$$

Daher ist gf in diesem Fall eine Schubspiegelung, die sich zusammensetzt aus der Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R}v_1 + Q_2$ und der Translation um den Vektor $(a_1 + a)v_1$ in Richtung der Spiegelungsgeraden.

c) Seien $f: P \mapsto f_0(\overrightarrow{P_0P}) + bu_1 + P_0$ und $g: P \mapsto g_0(\overrightarrow{Q_0P}) + av_1 + Q_0$ zwei Schubspiegelungen von E mit den linearen Anteilen $f_0, g_0: V \to V$, wo V der zu E gehörende Raum der Translationen ist, die sich aus den Spiegelungen von E an den Geraden $\mathbb{R}u_1 + P_0$, $\|u_1\| = 1$, bzw. $\mathbb{R}v_1 + Q_0$, $\|v_1\| = 1$, und den Translationen $P \mapsto bu_1 + P$, bzw. $P \mapsto av_1 + Q$, $a, b \in \mathbb{R}$, in Richtung der Geraden, an denen gespiegelt wird, zusammensetzen. Dann gilt $f(g(P)) = f_0(g_0(\overrightarrow{Q_0P})) + f_0(\overrightarrow{P_0Q_0}) + af_0(v_1) + bu_1 + P_0$. Wir ergänzen u_1 bzw. v_1 zu die Orientierung von V repräsentierenden Orthonormalbasen u_1, u_2 bzw. v_1, v_2. Es sei $\overrightarrow{P_0Q_0} = b_1u_1 + b_2u_2$ mit $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Sind die Geraden, an denen gespiegelt wird, parallel, so gilt $f_0 = g_0$ und wir können $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ annehmen. Wegen $\overrightarrow{Q_0P} + P_0 = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} + P_0 = -b_1u_1 - b_2u_2 + P$ gilt dann

$$f(g(P)) = \overrightarrow{Q_0P} + b_1u_1 - b_2u_2 + au_1 + bu_1 + P_0 = -2b_2u_2 + (a + b)u_1 + P\ ,$$

d.h. fg ist die Translation um den Vektor $(a + b)u_1 - 2b_2u_2$, wo $2|b_2|$ der doppelte Abstand der beiden Spiegelungsgeraden ist.

Sind die Geraden, an denen gespiegelt wird, nicht parallel, so schneiden sie sich in einem Punkt $P_1 \in E$. Wir können dann $P_1 = P_0 = Q_0$ annehmen, erhalten also $f(P) = f_0(\overrightarrow{P_1P}) + bu_1 + P_1$ und $g(P) := g_0(\overrightarrow{P_1P}) + av_1 + P_1$. Nach 14.A, Aufg. 3 wird f_0g_0 bzgl. der Basis v_1, v_2 durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben, wo die Spiegelungsgerade $\mathbb{R}u_1$ von f_0 mit $\mathbb{R}v_1$, der Spiegelungsgeraden von g_0 den Winkel $\alpha/2$ einschließt. Daher ist f_0g_0 die Drehung f_α von V um das Doppelte dieses Winkels. Mit $v_1 = c_1u_1 + c_2u_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, folgt

$$\begin{aligned} f(g(P)) &= f_0\big(\overrightarrow{P_1g(P)}\big) + bu_1 + P_1 = f_0g_0(\overrightarrow{P_1P}) + af_0(v_1) + bu_1 + P_1 \\ &= f_\alpha(\overrightarrow{P_1P}) + (ac_1 + b)u_1 - ac_2u_2 + P_1\ . \end{aligned}$$

Daher ist fg die Drehung mit Drehwinkel α um P_1 mit nachfolgender Translation τ_v um den Vektor $v := (ac_1 + b)u_1 - ac_2u_2$.

Wir beschreiben allgemein das Produkt $\tau_v h$ einer Drehung $h: P \mapsto f_\alpha(\overrightarrow{P_1P}) + P_1$ mit der Translation $\tau_v: P \mapsto v + P$ um $v \in V$. Bei $h \neq \mathrm{id}_E$ ist $f_\alpha \neq \mathrm{id}_V$. Für $P_2 := (\mathrm{id}_V - f_\alpha)^{-1}(v) + P_1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\tau_v h(P) &= f_\alpha(\overrightarrow{P_1P}) + v + P_1 = f_\alpha(\overrightarrow{P_2P}) + f_\alpha(\overrightarrow{P_1P_2}) + v - \overrightarrow{P_1P_2} + P_2\\ &= f_\alpha(\overrightarrow{P_2P}) - (\mathrm{id}_V - f_\alpha)(\overrightarrow{P_1P_2}) + v + P_2 = f_\alpha(\overrightarrow{P_2P}) + P_2\,,\end{aligned}$$

d.h. $\tau_v h$ ist die Drehung um P_2 mit Drehwinkel α. •

Bemerkung: Man gebe auch zeichnerische Lösungen für die Aufgaben a), b), c) an.

Abschnitt 14.B, Aufg. 5, p. 463 (1.6.2012):

($(n+1)$-Spiegelungssatz) Jede Bewegung eines n-dimensionalen euklidischen affinen Raums ist Produkt von höchstens $n+1$ orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen von E.

Beweis: Sei $f: P \mapsto f_0(\overrightarrow{P_0P}) + v + P_0$ eine Isometrie von E mit linearem Anteil $f_0: V \to V$, wo E affiner Raum über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist, $P_0 \in E$ und $\tau: P \mapsto v + P$, $v \in V$, der Translationsanteil von f, und mit $\tilde{f}: P \mapsto f_0(\overrightarrow{P_0P}) + P_0$ gilt $f = \tau\tilde{f}$.

Bei $v = 0$ folgt die Aussage unmittelbar aus 14.A, Aufg. 5. Bei $v \neq 0$ ist $\tau = g_1g_2$, wo g_1 und g_2 die orthogonalen Spiegelungen von E an den Hyperebenen $(\mathbb{R}v)^\perp + (\frac{1}{2}v + P_0)$ bzw. $(\mathbb{R}v)^\perp + P_0$ sind. Ist nämlich $P = av + w + P_0 = (a - \frac{1}{2})v + w + (\frac{1}{2}v + P_0)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $w \in (\mathbb{R}v)^\perp$, so gilt $g_1g_2(P) = g_1(-av + w + P_0) = g_1((-a - \frac{1}{2})v + w + (\frac{1}{2}v + P_0)) = (a + \frac{1}{2})v + w + (\frac{1}{2}v + P_0) = v + P$. Dann gilt $g_2\tilde{f}(P_0) = P_0$, und nach 14.A, Aufg. 5 lässt sich der lineare Anteil von $g_2\tilde{f}$ als Produkt $f_{0,1}\cdots f_{0,m}$ von $m \le n$ orthogonalen Spiegelungen $f_{0,1}, \ldots, f_{0,m}$ von V schreiben. Durch $f_i: P \mapsto f_{0,i}(\overrightarrow{P_0P}) + P_0$ werden dann orthogonale Spiegelungen von E mit $f_1\cdots f_m = g_2\tilde{f}$ definiert, und $f = \tau\tilde{f} = g_1g_2\tilde{f} = g_1f_1\cdots f_m$ ist Produkt von $m+1$ orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen von E. •

Bemerkung: Ist n gerade, so kommt man natürlich mit höchstens n orthogonalen Spiegelungen an Hyperebenen aus.

Abschnitt 14.B, Aufg. 6, p. 463 (1.6.2012):

Sei E eine euklidische affine Ebene.

a) Zwei Drehungen $f_1, f_2 \neq \mathrm{id}_E$ von E mit verschiedenen Drehpunkten kommutieren nicht, d.h. der Kommutator $f_1f_2f_1^{-1}f_2^{-1}$ ist eine Translation $\neq \mathrm{id}_E$.

b) Die Elemente einer Untergruppe der Bewegungsgruppe von E, die keine Translation $\neq \mathrm{id}_E$ enthält, haben einen gemeinsamen Fixpunkt.

Beweis: a) Wir verwenden Aufg. 3a) und die bei der dortigen Lösung eingeführten Bezeichnungen. Es gilt $f_1f_2(P) = f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P}) + f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) + P_1$ und analog

$$\begin{aligned}f_2f_1(P) &= f_{\alpha_2}f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P}) + f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P_1}) + P_2\\ &= f_{\alpha_2}f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_2P}) + f_{\alpha_2}f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) - f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_1P_2}) + \overrightarrow{P_1P_2} + P_1\\ &= f_{\alpha_2}f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) - f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_1P_2}) + \overrightarrow{P_1P_2} - f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) + \big(f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}(\overrightarrow{P_2P}) + f_{\alpha_1}(\overrightarrow{P_1P_2}) + P_1\big)\\ &= (f_{\alpha_2} - \mathrm{id}_V)(f_{\alpha_1} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{P_1P_2}) + f_1f_2(P)\,.\end{aligned}$$

Dabei haben wir $f_{\alpha_2}f_{\alpha_1} = f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}$ benutzt. Nach Voraussetzung gilt $P_1 \neq P_2$, also $\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$. Wegen $f_1, f_2 \neq \mathrm{id}_E$ sind $f_{\alpha_2} - \mathrm{id}_V$ und $f_{\alpha_1} - \mathrm{id}_V$ bijektiv; somit ist $(f_{\alpha_2} - \mathrm{id}_V)(f_{\alpha_1} - \mathrm{id}_V)(\overrightarrow{P_1P_2}) \neq 0$. Es folgt $f_1f_2(P) \neq f_2f_1(P)$ sogar für alle $P \in E$.

Der Kommutator $f_1f_2f_1^{-1}f_2^{-1}$ hat den linearen Anteil $f_{\alpha_1}f_{\alpha_2}f_{-\alpha_1}f_{-\alpha_2} = \mathrm{id}_V$, ist also eine Translation. Wäre er gleich id_E, so wäre $f_1f_2 = f_2f_1$ im Widerspruch zu dem gerade Bewiesenen.

b) Sei G eine Untergruppe der Bewegungsgruppe von E, die keine Translation $\neq \mathrm{id}_E$ enthält. Nach a) haben alle Drehungen in G dann denselben Drehpunkt P_0. Enthält G nur Drehungen, so ist P_0 der gemeinsame Fixpunkt aller Elemente aus G. Für eine Schubspiegelung $f \in G$ ist $f^2 \in G$ nach Aufg. 3c) eine Translation um den doppelten Schubvektor von f. Daher muss dieser Schubvektor gleich 0 sein und f somit eine Spiegelung. Da das Produkt von Spiegelungen mit parallelen Spiegelungsachsen nach Aufg. 3c) eine Translation ist, sind die Spiegelungsachsen zweier verschiedener Spiegelungen aus G nie parallel. Besteht G nur aus id und f, so ist jeder Punkt der Fixgeraden von f gemeinsamer Fixpunkt aller Elemente aus G. Enthält G außer f noch eine Drehung $h \neq \mathrm{id}$, so ist $fh \neq f$ eine Spiegelung aus G. Enthält G Spiegelungen f, g, $f \neq g$, so schneiden sich die Spiegelungsachsen von f und g in einem Punkt, der als Drehpunkt der Drehung $fg \in G$ gleich P_0 ist. Auch in diesem Fall ist P_0 gemeinsamer Fixpunkt der Elemente von G. •

15 Selbstadjungierte und normale Operatoren

Abschnitt 15.A, Aufg. 1, p. 477 (1.6.2012) :

Das Produkt zweier selbstadjungierter Operatoren ist genau dann selbstadjungiert, wenn diese vertauschbar sind.

Beweis: Seien $f, g : V \to V$ selbstadjungierte Operatoren auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Für $x, y \in V$ folgt dann aus $fg = gf$ bereits $\langle fg(x)\,,\,y\rangle = \langle g(x)\,,\,f(y)\rangle = \langle x\,,\,gf(y)\rangle = \langle x\,,\,fg(y)\rangle$, d.h. die Selbstadjungiertheit von fg.

Umgekehrt folgt aus $\langle fg(x), y\rangle = \langle x, fg(y)\rangle$ auch $\langle fg(x), y\rangle = \langle x, fg(y)\rangle = \langle f(x), g(y)\rangle = \langle gf(x)\,, y\rangle$, d.h. $\langle (fg - gf)(x), y\rangle = 0$ für alle $x, y \in V$. Indem man benutzt, dass $\langle -, -\rangle$ nicht-ausgeartet ist, oder indem man $y = (fg - gf)(x)$ setzt, sieht man $(fg - gf)(x) = 0$ für alle $x \in V$, d.h. $fg = gf$. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 2, p. 477 (1.6.2012) :

Sei f ein selbstadjungierter Operator.

a) Polynome in f mit reellen Koeffizienten sind wieder selbstadjungiert.

b) Wenn f bijektiv ist, so ist auch f^{-1} selbstadjungiert.

Beweis: a) Für alle $x, y \in V$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\langle f^k(x), y\rangle = \langle f^{k-1}(x), f(y)\rangle = \cdots = \langle x, f^k(y)\rangle$ und dann $\langle \sum_{k=0}^n a_k f^k(x), y\rangle = \sum_{k=0}^n a_k \langle f^k(x), y\rangle = \sum_{k=0}^n a_k \langle x, f^k(y)\rangle = \langle x, \sum_{k=0}^n a_k f^k(y)\rangle$, wenn die Koeffizienten a_k reell sind.

b) Wenn f bijektiv ist, gibt es zu $x, y \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $x', y' \in V$ mit $f(x') = x$ und $f(y') = y$. Dann gilt $\langle f^{-1}(x), y\rangle = \langle x', f(y')\rangle = \langle f(x'), y'\rangle = \langle x, f^{-1}(y)\rangle$. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 3, p. 477 (1.6.2012) :

Sei f ein normaler Operator auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt.

a) Jeder Operator in $\mathbb{K}[f, \hat{f}\,]$ ist normal.

b) Wenn f und $\hat{f}$ bijektiv sind, ist auch f^{-1} normal.

Beweis: a) Wegen $f\hat{f} = \hat{f}f$ erhält man mit 15.A.3 zunächst $\Big(\sum_{k,\ell} a_{k,\ell} f^k \hat{f}^\ell\Big)^{\wedge} = \sum_{k,\ell} \overline{a}_{k,\ell} \hat{f}^k f^\ell$ und dann, dass der Operator auch mit seinem adjungierten Operator vertauscht.

b) Seien f und $\hat{f}$ bijektiv. Zu $x, y \in V$ gibt es dann $x', y' \in V$ mit $f(x') = x$ und $\hat{f}(y') = y$. Damit gilt $\langle f^{-1}(x), y\rangle = \langle x', \hat{f}(y')\rangle = \langle f(x'), y'\rangle = \langle x, \big(\hat{f}\big)^{-1}(y)\,\rangle$, d.h. f^{-1} besitzt den adjungierten Operator $\big(\hat{f}\big)^{-1}$. Es folgt $f^{-1}\big(f^{-1}\big)^{\wedge} = f^{-1}\big(\hat{f}\big)^{-1} = \big(\hat{f}f\big)^{-1} = \big(f\hat{f}\big)^{-1} = \big(\hat{f}\big)^{-1}f^{-1} = \big(f^{-1}\big)^{\wedge}f^{-1}$, d.h. f^{-1} ist normal. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 4, p. 477 (1.6.2012) :

a) Genau dann ist der Operator f auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt selbstadjungiert, wenn $\langle f(x)\,,\,x\rangle$ für alle $x \in V$ reell ist. Genau dann ist f schiefselbstadjungiert, wenn $\langle f(x)\,,\,x\rangle$ für alle $x \in V$ rein-imaginär ist.

b) Ein Operator f auf einem reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt ist genau dann schiefselbstadjungiert, wenn für jedes $x \in V$ der Vektor x und sein Bild $f(x)$ orthogonal sind.

Beweis: a) Ist f selbstadjungiert, so gilt $\langle f(x), x\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \overline{\langle f(x), x\rangle}$, d.h. $\langle f(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, für $x \in V$. Sei umgekehrt $\langle x, f(x)\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in V$. Für $x, y \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle x+y, f(x+y)\rangle &= \langle x, f(x)\rangle + \langle y, f(x)\rangle + \langle x, f(y)\rangle + \langle y, f(y)\rangle\,, \quad \text{d.h.}\,,\\
\overline{\langle f(x), y\rangle} + \langle x, f(y)\rangle &= \langle y, f(x)\rangle + \langle x, f(y)\rangle = \langle x+y, f(x+y)\rangle - \langle x, f(x)\rangle - \langle y, f(y)\rangle \in \mathbb{R}, \text{ und}\\
\langle x+\mathrm{i}y, f(x+\mathrm{i}y)\rangle &= \langle x, f(x)\rangle + \mathrm{i}\langle y, f(x)\rangle - \mathrm{i}\langle x, f(y)\rangle + \langle y, f(y)\rangle\,, \quad \text{d.h.}\,,\\
\mathrm{i}\big(\overline{\langle f(x), y\rangle} - \langle x, f(y)\rangle\big) &= \mathrm{i}\big(\langle y, f(x)\rangle - \langle x, f(y)\rangle\big)\\
&= \langle x+\mathrm{i}y, f(x+\mathrm{i}y)\rangle - \langle x, f(x)\rangle - \langle y, f(y)\rangle \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aus $\overline{\langle f(x), y\rangle} + \langle x, f(y)\rangle \in \mathbb{R}$ folgt $\operatorname{Im}\langle f(x), y\rangle = \operatorname{Im}\langle x, f(y)\rangle$ und aus $\mathrm{i}\big(\overline{\langle f(x), y\rangle} - \langle x, f(y)\rangle\big) \in \mathbb{R}$ folgt $\operatorname{Re}\langle f(x), y\rangle = \operatorname{Re}\langle x, f(y)\rangle$, insgesamt also $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Daher ist f selbstadjungiert.

Ist f schiefselbstadjungiert, so gilt $\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle = -\overline{\langle f(x), x\rangle}$, d.h. $\operatorname{Re}\langle f(x), x\rangle = 0$, für $x \in V$.

Sei umgekehrt $\langle x, f(x)\rangle \in \mathbb{R}\mathrm{i}$ für alle $x \in V$. Für $x, y \in V$ erhält man dann ganz analog wie oben im selbstadjungierten Fall $\overline{\langle f(x), y\rangle} + \langle x, f(y)\rangle \in \mathbb{R}\mathrm{i}$ und $\mathrm{i}\big(\overline{\langle f(x), y\rangle} - \langle x, f(y)\rangle\big) \in \mathbb{R}\mathrm{i}$. Die erste der beiden Inklusionen liefert $\operatorname{Re}\langle f(x), y\rangle = \operatorname{Re} -\langle x, f(y)\rangle$ und die zweite $\operatorname{Im}\langle f(x), y\rangle = \operatorname{Im} -\langle x, f(y)\rangle$. Insgesamt folgt $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$. Daher ist f schiefselbstadjungiert.

Bemerkung: Die Ergebnisse dieser Aufgabe lassen sich natürlich auch folgendermaßen formulieren: Eine Sesquilinearform auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist genau dann hermitesch (bzw. schiefhermitesch), wenn ihre Werte auf der Diagonalen alle reell (bzw. rein-imaginär) sind.

b) Sei $f: V \to V$ schiefselbstadjungiert. Da V ein reeller Vektorraum ist, gilt $\langle x, f(x)\rangle = \langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$, also $\langle x, f(x)\rangle = 0$.

Sei umgekehrt $\langle x, f(x)\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Für $x, y \in V$ erhält man dann

$$\begin{aligned} 0 = \langle x+y, f(x+y)\rangle &= \langle x, f(x)\rangle + \langle y, f(x)\rangle + \langle x, f(y)\rangle + \langle y, f(y)\rangle \\ &= \langle y, f(x)\rangle + \langle x, f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle + \langle x, f(y)\rangle\,, \end{aligned}$$

also $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$. Daher ist f schiefselbstadjungiert. •

Bemerkung: Das Ergebnis dieser Aufgabe lässt sich auch so formulieren: Geanau dann ist eine Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V schiefsymmetrisch, wenn sie auf der Diagonalen verschwindet. Dies gilt aber über beliebigen Körpern der Charakteristik $\neq 2$.

Abschnitt 15.A, Aufg. 5, p. 477 (1.6.2012):

Jeder nilpotente normale Operator ist der Nulloperator.

1. Beweis: Sei $f: V \to V$ nilpotent und normal auf dem Vektorraum V mit Skalarprodukt, und sei $x \in V$. Aus $f(x) = 0$ folgt, da f normal ist, $\|\hat{f}(x)\|^2 = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(x)\rangle = \langle f\hat{f}(x), x\rangle = \langle \hat{f} f(x), x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$, d.h. $\hat{f}(x) = 0$. Da f nilpotent ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(x) = 0$. Sei n minimal mit dieser Eigenschaft. Es ist zu zeigen, dass $n \le 1$ sein muss. Wegen $f\big(f^{n-1}(x)\big) = f^n(x) = 0$ gilt also $\hat{f}\big(f^{n-1}(x)\big) = 0$. Bei $n \ge 2$ erhält man nun $\|f^{n-1}(x)\|^2 = \langle f^{n-1}(x), f^{n-1}(x)\rangle = \langle f^{n-2}(x), \hat{f}\big(f^{n-1}(x)\big)\rangle = \langle f^{n-2}(x), 0\rangle = 0$, d.h. $f^{n-1}(x) = 0$ im Widerspruch zur Wahl von n.

2. Beweis: Sei $f: V \to V$ nilpotent und normal auf dem Vektorraum V mit Skalarprodukt. Da f nilpotent ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(x) = 0$. Da f normal ist, folgt $\|\hat{f}^n(x)\|^2 = \langle \hat{f}^n(x), \hat{f}^n(x)\rangle = \langle f^n \hat{f}^n(x), x\rangle = \langle \hat{f}^n f^n(x), x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$, d.h. $\hat{f}^n(x) = 0$. Dann ist $U := \sum_{k,\ell=0}^{n-1} \mathbb{K} f^k \hat{f}^{\,\ell}(x)$ ein endlichdimensionaler Unterraum von V, der unter f und $\hat{f}$ invariant ist. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist $f|U$ nach dem Spektralsatz 15.A.15 diagonalisierbar, also nach 11.B, Aufg. 10 gleich 0. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hat $f|U$, wie der Beweis des Spektralsatzes 15.A.18 zeigt, ein charakteristisches Polynom der Form

$$\chi_f = (X - a_1)\cdots(X - a_s)(X^2 - 2b_1 X + b_1^2 + c_1^2)\cdots(X^2 - 2b_t X + b_t^2 + c_t^2)$$

mit $c_\tau > 0$ für alle τ. Da andererseits f als nilpotenter Operator das charakteristische Polynom $X^{\operatorname{Dim} U}$ hat, folgt, dass alle $a_\sigma = 0$ sind und keiner der Faktoren $X^2 - 2b_\tau X + b_\tau^2 + c_\tau^2$ existiert. Daher ist $f|U$ und dann auch f gleich 0. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 6, p. 477 (1.6.2012):

Ein Operator f, für den $\hat{f}$ existiert, ist genau dann normal, wenn für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(y)\rangle$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\|f(x)\| = \|\hat{f}(x)\|$ ist für alle $x \in V$.

Beweis: Sei f normal. Für $x, y \in V$ gilt dann $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, \hat{f} f(y)\rangle = \langle x, f\hat{f}(y)\rangle = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(y)\rangle$, insbesondere also $\|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x), f(x)\rangle} = \sqrt{\langle \hat{f}(x), \hat{f}(x)\rangle} = \|\hat{f}(x)\|$.

Gilt umgekehrt $\|f(x)\| = \|\hat{f}(x)\|$ für alle $x \in V$, so stimmen die hermiteschen Formen $(x, y) \mapsto \langle f(x), f(y)\rangle$ und $(x, y) \mapsto \langle \hat{f}(x), \hat{f}(y)\rangle$ auf der Diagonale überein und mit 12.B.2 (2) , vgl. auch 12.B, Aufg. 8, ergibt sich, dass sie gleich sind. Es folgt $\langle f\hat{f}(x), y\rangle = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(y)\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle \hat{f} f(x), y\rangle$, also

$\langle (f\hat{f}-\hat{f}f)(x)\,,\,y\rangle=0$. Setzt man $y=(f\hat{f}-\hat{f}f)(x)$, so sieht man $\|f\hat{f}-\hat{f}f)(x)\|=0$ für alle $x\in V$, d.h. es ist $f\hat{f}=\hat{f}f$.

Beweisvariante: Gilt umgekehrt $\|f(x)\|=\|\hat{f}(x)\|$, also $\langle f(x),\,f(x)\rangle=\langle \hat{f}(x),\,\hat{f}(x)\rangle$, für alle $x\in V$, so erhält man aus

$$\langle f(x+y)\,,\,f(x+y)\rangle=\langle f(x),\,f(x)\rangle+\langle f(x),\,f(y)\rangle+\langle f(y),\,f(x)\rangle+\langle f(y),\,f(y)\rangle \quad \text{und}$$
$$\langle \hat{f}(x+y),\,\hat{f}(x+y)\rangle=\langle \hat{f}(x),\,\hat{f}(x)\rangle+\langle \hat{f}(x),\,\hat{f}(y)\rangle+\langle \hat{f}(y),\,\hat{f}(x)\rangle+\langle \hat{f}(y),\,\hat{f}(y)\rangle$$

durch Differenzbildung

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Re}\langle \hat{f}f(x),\,y\rangle&=\langle \hat{f}f(x),\,y\rangle+\overline{\langle \hat{f}f(x),\,y\rangle}=\langle \hat{f}f(x),\,y\rangle+\langle y,\,\hat{f}f(x)\rangle\\&=\langle f(x),\,f(y)\rangle+\langle f(y),\,f(x)\rangle=\langle \hat{f}(x),\,\hat{f}(y)\rangle+\langle \hat{f}(y),\,\hat{f}(x)\rangle\\&=\langle f\hat{f}(x),\,y\rangle+\langle y,\,f\hat{f}(x)\rangle=\langle f\hat{f}(x),\,y\rangle+\overline{\langle f\hat{f}(x),\,y\rangle}=2\,\mathrm{Re}\langle f\hat{f}(x),\,y\rangle\,,\end{aligned}$$

also $\mathrm{Re}\langle (f\hat{f}-\hat{f}f)(x),\,y\rangle=0$ für alle $x,y\in V$. Setzt man speziell $y=(f\hat{f}-\hat{f}f)(x)$, so sieht man $\|(f\hat{f}-\hat{f}f)(x)\|^2=\mathrm{Re}\langle (f\hat{f}-\hat{f}f)(x),\,(f\hat{f}-\hat{f}f)(x)\rangle=0$ für alle $x\in V$, d.h. $f\hat{f}=\hat{f}f$. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 7, p. 477 (1.6.2012):

Sei f ein Operator auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt, für den $\hat{f}$ existiert.

a) $f\hat{f}$ und $\hat{f}f$ sind selbstadjungiert. Es ist $\mathrm{Kern}\,f=\mathrm{Kern}\,\hat{f}f$ und $\mathrm{Kern}\,\hat{f}=\mathrm{Kern}\,f\hat{f}$.

b) Ist f normal, so ist $\mathrm{Kern}\,f=\mathrm{Kern}\,\hat{f}=\mathrm{Kern}\,f^2=\mathrm{Kern}\,\hat{f}^{\,2}$.

c) Ist f normal und V endlichdimensional, so ist $\mathrm{Bild}\,f=\mathrm{Bild}\,\hat{f}$.

d) Ist f normal, so ist $\mathrm{Kern}\,f=(\mathrm{Bild}\,f)^\perp$ und insbesondere $V=\mathrm{Kern}\,f\oplus\mathrm{Bild}\,f$, falls überdies V oder wenigstens $\mathrm{Bild}\,f$ endlichdimensional sind.

e) Sind f, g normale Operatoren auf V mit $fg=0$, so ist auch $gf=0$.

Beweis: a) Nach 15.A.3 gilt $(f\hat{f})\hat{}=\hat{\hat{f}}\hat{f}=f\hat{f}$ und $(\hat{f}f)\hat{}=\hat{f}\hat{\hat{f}}=\hat{f}f$, d.h. $f\hat{f}$ und $\hat{f}f$ sind selbstadjungiert.

Für $x\in\mathrm{Kern}\,f$ gilt $f(x)=0$ und folglich $\hat{f}f(x)=0$, d.h. $x\in\mathrm{Kern}\,\hat{f}f$. Aus $x\in\mathrm{Kern}\,\hat{f}f$ folgt umgekehrt $\hat{f}f(x)=0$ und somit $0=\langle \hat{f}f(x)\,,\,x\rangle=\langle f(x),\,f(x)\rangle=\|f(x)\|^2$, also $f(x)=0$, $x\in\mathrm{Kern}\,f$. Insgesamt erhält man so $\mathrm{Kern}\,f=\mathrm{Kern}\,\hat{f}f$.

Für $x\in\mathrm{Kern}\,\hat{f}$ gilt $\hat{f}(x)=0$ und folglich $f\hat{f}(x)=0$, d.h. $x\in\mathrm{Kern}\,f\hat{f}$. Aus $x\in\mathrm{Kern}\,f\hat{f}$ folgt umgekehrt $f\hat{f}(x)=0$ und somit $0=\langle f\hat{f}(x)\,,\,x\rangle=\langle \hat{f}(x)\,,\,\hat{f}(x)\rangle=\|\hat{f}(x)\|^2$, also $\hat{f}(x)=0$, $x\in\mathrm{Kern}\,\hat{f}$. Insgesamt erhält man so $\mathrm{Kern}\,\hat{f}=\mathrm{Kern}\,f\hat{f}$.

b) Sei f normal, also $f\hat{f}=\hat{f}f$. Mit a) folgt $\mathrm{Kern}\,f=\mathrm{Kern}\,\hat{f}f=\mathrm{Kern}\,f\hat{f}=\mathrm{Kern}\,\hat{f}$.

Für $x\in\mathrm{Kern}\,f$ gilt $f(x)=0$ und somit $f^2(x)=0$, d.h. $x\in\mathrm{Kern}\,f^2$. Ist umgekehrt $f^2(x)=0$, so folgt $\|\hat{f}f(x)\|^2=\langle \hat{f}f(x)\,,\,\hat{f}f(x)\rangle=\langle f(x)\,,\,f\hat{f}f(x)\rangle=\langle f(x)\,,\,\hat{f}f^2(x)\rangle=0$, d.h. $\hat{f}f(x)=0$, $x\in\mathrm{Kern}\,\hat{f}f$ $=\mathrm{Kern}\,f$. Insgesamt erhält man so $\mathrm{Kern}\,\hat{f}f=\mathrm{Kern}\,f^2$. Analog sieht man $\mathrm{Kern}\,f\hat{f}=\mathrm{Kern}\,\hat{f}^2$.

Mit a) erhält man daraus $\mathrm{Kern}\,f^2=\mathrm{Kern}\,\hat{f}f=\mathrm{Kern}\,f=\mathrm{Kern}\,\hat{f}=\mathrm{Kern}\,f\hat{f}=\mathrm{Kern}\,\hat{f}^2$.

Bemerkung: Ebenso folgt $\mathrm{Kern}\,f=\mathrm{Kern}\,f^n=\mathrm{Kern}\,\hat{f}^{\,n}$ für alle $n\in\mathbb{N}^*$. (Dies ergibt einen neuen Beweis für Aufg. 5.)

c) Sei f normal und V endlichdimensional. Mit 12.B.9 und dem Rangsatz 5.E.1 erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim\,Bild}\,f&=\mathrm{Dim}\,V-\mathrm{Dim\,Kern}\,f=\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}\,f)^\perp=\mathrm{Dim}(\mathrm{Kern}\,\hat{f})^\perp\\&=\mathrm{Dim}\,V-\mathrm{Dim\,Kern}\,\hat{f}=\mathrm{Dim\,Bild}\,\hat{f}.\end{aligned}$$

Für alle $x\in\mathrm{Kern}\,\hat{f}$ und $y=f(z)\in\mathrm{Bild}\,f$ gilt $\langle y,x\rangle=\langle f(z),x\rangle=\langle z,\,\hat{f}(x)\rangle=\langle z,0\rangle=0$, d.h. $y\in(\mathrm{Kern}\,\hat{f})^\perp$. Es folgt $\mathrm{Bild}\,f\subseteq(\mathrm{Kern}\,\hat{f})^\perp$ und somit $\mathrm{Bild}\,f=(\mathrm{Kern}\,\hat{f})^\perp$ aus Dimensionsgründen. Analog sieht man $\mathrm{Bild}\,\hat{f}=(\mathrm{Kern}\,f)^\perp$. Es folgt $\mathrm{Bild}\,f=(\mathrm{Kern}\,\hat{f})^\perp=(\mathrm{Kern}\,f)^\perp=\mathrm{Bild}\,\hat{f}$.

d) Sei f normal. Für $x \in \operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} \hat{f}$ und $y = f(z) \in \operatorname{Bild} f$ gilt $\hat{f}(x) = 0$, folglich $\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle \hat{f}(x), z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0$, d.h. $x \in (\operatorname{Bild} f)^{\perp}$. Daher ist $\operatorname{Kern} f \subseteq (\operatorname{Bild} f)^{\perp}$. Umgekehrt folgt für $x \in (\operatorname{Bild} f)^{\perp}$ und $y = f\hat{f}(x) \in \operatorname{Bild} f$ aus $0 = \langle x, y\rangle = \langle x, f\hat{f}(x)\rangle = \langle \hat{f}(x), \hat{f}(x)\rangle = \|\hat{f}(x)\|^2$, d.h. $x \in \operatorname{Kern} \hat{f} = \operatorname{Kern} f$. Insgesamt erhält man $\operatorname{Kern} f = (\operatorname{Bild} f)^{\perp}$. Ist $\operatorname{Bild} f$ endlichdimensional, so folgt daraus $V = \operatorname{Kern} f \oplus \operatorname{Bild} f$ mit Satz 12.B.9.

e) Sei $fg = 0$, also $\operatorname{Bild} g \subseteq \operatorname{Kern} f$. Nach d) gilt $\operatorname{Kern} f = (\operatorname{Bild} f)^{\perp}$ und $\operatorname{Kern} g = (\operatorname{Bild} g)^{\perp}$. Daraus folgt $\operatorname{Kern} g = (\operatorname{Bild} g)^{\perp} \supseteq (\operatorname{Kern} f)^{\perp} = \big((\operatorname{Bild} f)^{\perp}\big)^{\perp} \supseteq \operatorname{Bild} f$, d.h. $gf = 0$. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 8, p. 477 (1.6.2012):

Ein normaler Operator auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt ist genau dann selbstadjungiert, wenn seine Eigenwerte reell sind.

Beweis: Ist f selbstadjungiert, so sind alle Eigenwerte nach Satz 15.A.8 reell. Ist umgekehrt f normal, so ist f nach dem Spektralsatz 15.A.15 diagonalisierbar in einer Orthonormalbasis. Sind zusätzlich alle Eigenwerte reell, so wird f bezüglich dieser Basis durch eine Diagonalmatrix mit reellen Diagonalelementen beschrieben. Da diese Matrix hermitesch ist, ist f nach Satz 15.A.7 selbstadjungiert. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 9, p. 478 (1.6.2012):

Seien f ein Operator auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und $n \in \mathbb{N}^*$. Genau dann ist f eine Orthogonalprojektion, wenn f selbstadjungiert ist und $f^n = f^{n+1}$ ist.

Beweis: Ist f eine Orthogonalprojektion, so f nach Satz 13.B.2 selbstadjungiert und es gilt $f = f^2$, also $f^n = f^{n-1}f = f^{n-1}f^2 = f^{n+1}$.

Umgekehrt sei f selbstadjungiert. Dann gilt nach Aufg. 7b) $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} f^n$. Ist nun $x \in V$ und $f^n(x) = f^{n+1}(x)$, also $f^n\big(x - f(x)\big) = 0$ und somit $x - f(x) \in \operatorname{Kern} f^n$, so folgt $x - f(x) \in \operatorname{Kern} f$, d.h. $f(x) = f^2(x)$, und f ist eine Projektion, die wegen ihrer Selbstadjungiertheit nach 13.B.2 eine Orthogonalprojektion ist.

Ist V endlichdimensional, so ist f nach 15.A.15 diagonalisierbar, und alle Eigenwerte λ von f sind nach Satz 15.A.8 reell. Aus $f^n = f^{n+1}$ folgt dann $\lambda^n = \lambda^{n+1}$, d.h. $\lambda \in \{0, 1\}$, und nach 8.A, Aufg. 9 ist f eine Projektion. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 10, p. 478 (1.6.2012):

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt.

a) Eine Involution f auf V ist genau dann eine orthogonale Spiegelung, wenn sie selbstadjungiert ist. Dies ist bereits dann der Fall, wenn die Involution f normal ist.

b) Ist $f : V \to V$ isometrisch und selbstadjungiert, so ist f eine orthogonale Spiegelung.

Beweis: a) Sei f eine Involution, d.h. es gelte $f^2 = \mathrm{id}_V$. Definitionsgemäß ist f genau dann eine orthogonale Spiegelung, wenn f eine Isometrie ist, wenn also für alle $x, y \in V$ gilt $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Wendet man dies mit $f(x)$ statt x an, so folgt $\langle x, f(y) = f^2(x), f(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle$, d.h. die Selbstadjungiertheit von f. Ist umgekehrt f selbstadjungiert, so gilt $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$. Wendet man dies mit $f(y)$ statt y an, so folgt $\langle f(x), f(y) y\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, d.h. f ist auch eine Isometrie.

Bemerkung: Benutzt man, dass ein linearer Operator f auf V genau dann eine Involution ist, wenn $\frac{1}{2}(\mathrm{id}_V - f)$ eine Projektion ist, so ist a) äquivalent mit der Aussage, dass *eine Projektion genau dann normal ist, wenn sie orthogonal ist.*

b) Sei f isometrisch und selbstadjungiert. Für alle $x, y \in V$ gilt dann $\langle f^2(x), y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, d.h. $\langle (f^2 - \mathrm{id}_V)(x), y\rangle = 0$. Indem man $y = (f^2 - \mathrm{id}_V)(x)$ setzt oder indem man ausnutzt, dass $\langle -, -\rangle$ nicht-ausgeartet ist, sieht man $f^2 - \mathrm{id}_V = 0$, also $f^2 = \mathrm{id}_V$ •

Abschnitt 15.A, Aufg. 11, p. 478 (1.6.2012):

Ein Operator auf einem unitären ($\mathbb{C}$-)Vektorraum ist genau dann eine Isometrie, wenn er normal ist und alle seine Eigenwerte den Betrag 1 haben.

Beweis: Isometrien f sind normal mit $\hat{f} = f^{-1}$ und ihre Eigenwerte haben nach Lemma 14.A.(1) den Betrag 1.

Umgekehrt sei f normal. Dann gibt es zu f nach dem Spektralsatz 15.A.15 eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Sind die Eigenwerte von f zusätzlich reell, so wird f bezüglich dieser Basis durch eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen beschrieben. Da diese Matrix hermitesch ist, ist f nach Satz 15.A.7 selbstadjungiert. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 12, p. 478 (1.6.2012) :

a) Ein Operator f auf einem unitären ($\mathbb{C}$-)Vektorraum, für den es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f gibt, ist normal.

b) Ein Operator f auf einem euklidischen oder unitären Vektorraum, für den es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f mit reellen Eigenwerten gibt, ist selbstadjungiert.

Beweis: a) Gibt es zu f eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, so wird f in dieser Basis durch eine Diagonalmatrix $\operatorname{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ und dann $\hat{f}$ durch die Diagonalmatrix $\operatorname{Diag}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ beschrieben. Da diese beiden Diagonalmatrizen kommutieren, kommutieren auch f und $\hat{f}$, d.h. f ist normal.

b) Nach a) ist ein solcher Operator normal und dann nach Aufg. 8 auch selbstadjungiert. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 13, p. 478 (1.6.2012) :

Sei f ein normaler Operator auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Ist der Unterraum $W \subseteq V$ f-invariant, so ist auch das orthogonale Komplement $W^\perp \subseteq V$ f-invariant.

Beweis: Nach Lemma 15.A.16 gibt es ein Polynom $P \in \mathbb{K}[X]$ mit $\hat{f} = P(f)$. Für $x \in W$ folgt dann $\hat{f}(x) = P(f)(x) \in W$, d.h. auch W ist $\hat{f}$-invariant. Sei nun $y \in W^\perp$. Für alle $x \in W$ gilt $\hat{f}(x) \in W$ und folglich $\langle f(y), x\rangle = \langle y, \hat{f}(x)\rangle = 0$, d.h. $f(y) \in W^\perp$, und somit $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 14, p. 478 (1.6.2012) :

Eine normale obere Dreiecksmatrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist eine Diagonalmatrix.

1. Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $a_{ij} = 0$ für $1 \le j < i \le n$ eine normale obere Dreiecksmatrix. Dann gilt $\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}} = {}^t\overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{A}$. Ein Vergleich der Diagonalelemente in der i-ten Zeile und i-ten Spalte dieser Produkte liefert $\sum_{j=1}^n a_{ij}\,\overline{a}_{ij} = \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ji}\,a_{ji}$, also $|a_{ii}|^2 + |a_{i,i+1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = |a_{1i}|^2 + |a_{2i}|^2 + \cdots + |a_{ii}|^2$. Daraus folgt $a_{ij} = 0$ auch für $j > i$ durch Induktion über i: Bei $i = 1$ folgt dies sofort aus $|a_{11}|^2 + \cdots + |a_{1n}|^2 = |a_{11}|^2$, und beim Schluss von $i-1$ auf i liefert die Induktionsvoraussetzung $|a_{ii}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = |a_{1i}|^2 + \cdots + |a_{ii}|^2 = |a_{ii}|^2$, woraus sich die Behauptung ergibt.

2. Beweis: Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ der normale Operator, der durch die normale obere Dreiecksmatrix $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ beschrieben wird, d.h. es ist $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^j a_{ij} e_i$, $j = 1, \ldots, n$. Wir zeigen $a_{ij} = 0$ auch für $j \ge i$ durch Induktion über n. Beim Schluss von n auf $n-1$ ist e_1 Eigenvektor von f zum Eigenwert a_{11}. Daher sind $\mathbb{R}e_1$ und dann nach Aufg. 13 auch $(\mathbb{R}e_1)^\perp = \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$ f-invariante Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Wegen $f(e_j) \in \mathbb{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$ folgt $a_{1j} = 0$ für $j > 1$. Daher wird $f|(\mathbb{R}e_1)^\perp$ durch die ebenfalls normale obere Dreiecksmatrix $(a_{ij})_{2\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ beschrieben, die nach Induktionsvoraussetzung eine Diagonalmatrix ist. Dies liefert die Behauptung. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 15, p. 478 (1.6.2012) :

Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit den Spaltenvektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in \mathbb{C}^n$ und den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (mit Vielfachheiten gezählt). Dann ist

$$|\lambda_1|^2 + \cdots + |\lambda_n|^2 \le \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = \|\mathfrak{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathfrak{a}_n\|^2 = \operatorname{Sp}\left({}^t\overline{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{A}\right) = \operatorname{Sp}\left(\mathfrak{A}\,{}^t\overline{\mathfrak{A}}\right).$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ normal ist.

Beweis: Nach den Bemerkungen zu Lemma 12.C.10 gibt es eine unitäre Matrix $\mathfrak{B}$ derart, dass $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{C} = (c_{ij})$ ein obere Dreiecksmatrix ist. Dabei stehen in der Hauptdiagonale notwendigerweise die λ_i. Es folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B} = {}^t\overline{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ und

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \operatorname{Sp}\left({}^t\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{A}}\right) = \operatorname{Sp}\left({}^t\mathfrak{B}\,{}^t\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{B}}^{-1}\,\overline{\mathfrak{C}}\,\overline{\mathfrak{B}}\right) = \operatorname{Sp}\left({}^t\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{C}}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}|^2 \ge \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 .$$

Dabei haben wir zum Schluss benutzt, dass die Eigenwerte λ_i gerade die Diagonalelemente von $\mathfrak{C}$ sind. Ist $\mathfrak{A}$ normal, so können wir nach Satz 15.A.15 annehmen, dass $\mathfrak{C}$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist die letzte Ungleichung natürlich eine Gleichheit. Gilt umgekehrt dort das Gleichheitszeichen, so ist der durch $\mathfrak{A}$ bezüglich einer Orthonormalbasis, nämlich den Spalten von $\mathfrak{B}^{-1}$, beschriebene Operator f diagonalisierbar. Nach Aufg. 12a) sind f und dann auch $\mathfrak{A}$ normal. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 16, p. 478 (1.6.2012):

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein Operator f auf V ist genau dann diagonalisierbar, wenn er bezüglich eines geeigneten Skalarprodukts auf V normal ist.

Beweis: Normale Operatoren sind nach dem Spektralsatz 15.A.15 diagonalisierbar. Ist umgekehrt f diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V aus Eigenvektoren von f. Dann definiert man ein Skalarprodukt $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ durch $\Phi(\sum_i a_i v_i\,, \sum_j b_j v_j) := \sum_i a_i b_i$, d.h. durch $\mathfrak{G}^{v_1,\ldots,v_n}(\Phi) := \mathfrak{E}_n$. Dann ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich Φ aus Eigenvektoren von V. Nach Aufg. 12a) ist f bezüglich Φ normal. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 17, p. 478 (1.6.2012):

Sei f ein normaler Operator auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Eigenvektoren von f zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

Beweis: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit f ist auch $f - \lambda\,\mathrm{id}$ normal mit adjungiertem Operator $\hat{f} - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}$. Nach Aufg. 7b) gilt $V_f(\lambda) = \mathrm{Kern}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \mathrm{Kern}\,(\hat{f} - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}) = V_{\hat{f}}(\overline{\lambda})$ für die Eigenräume von f und $\hat{f}$. Sind also x und y Eigenvektoren von f zu den Eigenwerten λ bzw. μ mit $\lambda \neq \mu$, so ist y auch Eigenvektor von $\hat{f}$ zum Eigenwert $\overline{\mu}$. Es folgt $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, \hat{f}(y)\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$. Wegen $\lambda \neq \mu$ muss dann $\langle x, y\rangle = 0$ sein, d.h. x und y sind orthogonal. •

Abschnitt 15.A, Aufg. 18, p. 478 (1.6.2012):

Man gebe eine orthogonale Matrix $\mathfrak{B} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ an derart, dass $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^{-1}$ und $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}^{-1}$ Diagonalmatrizen sind für

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 4 & -5 & 13 \\ 4 & 13 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}' := \begin{pmatrix} -12 & 12 & 12 \\ 12 & 33 & -3 \\ 12 & -3 & 33 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass gegenüber der Buchfassung der Koeffizient a_{11} von $\mathfrak{A}$ in "-6" statt "2" geändert wurde.

Lösung: Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ symmetrisch sind und kommutieren, gibt es nach Satz 15.A.12 die gesuchte Matrix $\mathfrak{B} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. – Zur Bestimmung der charakteristischen Polynome subtrahieren wir jeweils die dritte Zeile der zu berechnenden Determinante von der zweiten Zeile und erhalten

$$\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X+6 & -4 & -4 \\ -4 & X+5 & -13 \\ -4 & -13 & X+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+6 & -4 & -4 \\ 0 & X+18 & -(X+18) \\ -4 & -13 & X+5 \end{vmatrix} = (X+18) \begin{vmatrix} X+6 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & -13 & X+5 \end{vmatrix}$$

$$= (X+18) \begin{vmatrix} X+6 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & X-8 \end{vmatrix} = (X+18)\big((X+6)(X-8) - 32\big) = (X+18)(X+8)(X-10)\,,$$

$$\chi_{\mathfrak{A}'} = \begin{vmatrix} X+12 & -12 & -12 \\ -12 & X-33 & 3 \\ -12 & 3 & X-33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+12 & -12 & -12 \\ 0 & X-36 & -(X-36) \\ -12 & 3 & X-33 \end{vmatrix} = (X-36) \begin{vmatrix} X+12 & -12 & -12 \\ 0 & 1 & -1 \\ -12 & 3 & X-33 \end{vmatrix}$$

$$= (X-36) \begin{vmatrix} X+12 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -1 \\ -12 & 0 & X-30 \end{vmatrix} = (X-36)\big((X+12)(X-30) - 144\big) = (X-36)^2(X+18)\,.$$

Die Eigenräume von $\mathfrak{A}$ sind $V_{\mathfrak{A}}(10) = \mathbb{R}\,{}^t(1,2,2) = \mathbb{R}\,{}^t(1/3, 2/3, 2/3)$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 10$, $V_{\mathfrak{A}}(-8) = \mathbb{R}\,{}^t(-4,1,1) = \mathbb{R}\,{}^t(-4/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}\,)$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -8$ und $V_{\mathfrak{A}}(-18) = \mathbb{R}\,{}^t(0,-1,1) = \mathbb{R}\,{}^t(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,)$ zum Eigenwert $\lambda_3 = -18$.

Die Eigenräume von $\mathfrak{A}'$ sind $V_{\mathfrak{A}'}(-18) = \mathbb{R}\,{}^t(-4,1,1) = \mathbb{R}\,{}^t(-4/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}\,)$ zum Eigenwert $\mu_1 = -18$ und $V_{\mathfrak{A}}(36) = \mathbb{R}\,{}^t(1,4,0) + \mathbb{R}\,{}^t(0,-1,1) = \mathbb{R}\,{}^t(1/3, 2/3, 2/3) + \mathbb{R}\,{}^t(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\,)$ zum

Eigenwert $\lambda_1 = 36$. Da die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ zu verschiedenen Eigenwerten zueinander orthogonal sind, bilden sie (nach Normalisierung) die Spalten einer orthogonalen Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und somit die Zeilen von $\mathfrak{B}$. Da die Spalten von $\mathfrak{B}$ auch Eigenvektoren von $\mathfrak{A}'$ sind, sind $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^{-1}$ bzw. $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}^{-1}$ die Diagonalmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ 4 & -5 & 13 \\ 4 & 13 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 1/3\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -4/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 12 & 12 \\ 12 & 33 & -3 \\ 12 & -3 & 33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & 1/3\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/3\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Abschnitt 15.A, Aufg. 19, p. 478 (1.6.2012):

Welche der folgenden Matrizen aus $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ sind normal: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}$?

Lösung: Die erste Matrix hat das charakteristische Polynom $(X-1)^2$. Wäre sie normal, so wäre sie nach Satz 15.A.15 diagonalisierbar, ihr Minimalpolynom wäre nach Satz 11.B.9 gleich $X-1$, also die Matrix die Einheitsmatrix. Widerspruch! (Natürlich hätte man auch direkt nachrechnen können, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$ verschieden sind.)

Die zweite Matrix ist normal wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2-\mathrm{i} \\ 2+2\mathrm{i} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Abschnitt 15.A, Aufg. 20, p. 479 (1.6.2012):

Sei f ein Operator auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Für jeden *normierten* Vektor $x \in V$ ist

$$\langle f(x)\,,\, f(x)\rangle = \|f(x)\|^2 \ge |\langle f(x)\,,\, x\rangle|^2\,,$$

und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x ein Eigenvektor von f ist. In diesem Fall ist $\langle f(x)\,,\,x\rangle$ der Eigenwert von f zu x. (Für $\|x\| = 1$ ist die Zahl

$$(\Delta f)(x) := \sqrt{\|f(x)\|^2 - |\langle f(x)\,,\,x\rangle|^2} = \begin{vmatrix} \langle f(x)\,,\,f(x)\rangle & \langle f(x)\,,\,x\rangle \\ \langle x\,,\,f(x)\rangle & 1 \end{vmatrix}^{1/2}$$

also ein Maß dafür, inwieweit x davon abweicht, ein Eigenvektor von f zu sein. Sie heißt die Unschärfe von f in x. Der Wert $\langle f(x)\,,\,x\rangle$ heißt auch der Mittelwert von f in x. Ist x ein Eigenvektor von f, so ist der Mittelwert zugleich der zugehörige Eigenwert. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f_\alpha := f - \alpha\,\mathrm{id}_V$ ist

$$(\Delta f_\alpha)(x) = (\Delta f)(x) \qquad \text{und} \qquad \langle f_\alpha(x)\,,\,x\rangle = \langle f(x)\,,\,x\rangle - \alpha\,.)$$

Beweis: Wegen $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \|f(x) - \langle f(x)\,,\,x\rangle\,x\|^2 &= \langle f(x) - \langle f(x)\,,\,x\rangle\,x\,,\, f(x) - \langle f(x)\,,\,x\rangle\,x\rangle \\ &= \langle f(x)\,,\,f(x)\rangle - \langle f(x)\,,\,x\rangle\langle x\,,\,f(x)\rangle - \overline{\langle f(x)\,,\,x\rangle}\,\langle f(x)\,,\,x\rangle + \langle f(x)\,,\,x\rangle\overline{\langle f(x)\,,\,x\rangle} \\ &= \|f(x)\|^2 - |\langle f(x)\,,\,x\rangle|^2 = \big((\Delta f)(x)\big)^2, \quad \text{also } \|f(x)\|^2 \ge |\langle f(x)\,,\,x\rangle|^2\,. \end{aligned}$$

Gilt dabei das Gleichheitszeichen, so ist $f(x) = \langle f(x)\,,\,x\rangle\,x$, d.h. x ist Eigenvektor von f zum Eigenwert $\langle f(x)\,,\,x\rangle$. Umgekehrt folgt aus $f(x) = \lambda x$ sofort $\|f(x)\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 = |\lambda|^2 = |\lambda|^2|\langle x, x\rangle|^2 = |\langle f(x)\,,\,x\rangle|^2$, d.h. $(\Delta f)(x) = 0$.

Schließlich gilt $\langle f_\alpha(x), x\rangle = \langle f(x) - \alpha x, x\rangle = \langle f(x), x\rangle - \alpha$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} (\Delta f_\alpha)(x) &= \sqrt{\|f_\alpha(x)\|^2 - |\langle f_\alpha(x), x\rangle|^2} = \sqrt{\langle f(x) - \alpha x\,,\, f(x) - \alpha x\rangle^2 - |\langle f(x), x\rangle - \alpha|^2} \\ &= \sqrt{\|f(x)\|^2 - \alpha\overline{\langle f(x), x\rangle} - \overline{\alpha}\langle f(x), x\rangle + |\alpha|^2 - \big(|\langle f(x), x\rangle|^2 - \alpha\overline{\langle f(x), x\rangle} - \overline{\alpha}\langle f(x), x\rangle + |\alpha|^2\big)} \\ &= \sqrt{\|f(x)\|^2 - |\langle f(x)\,,\,x\rangle|^2} = (\Delta f)(x)\,. \end{aligned} \quad \bullet$$

Abschnitt 15.A, Aufg. 21, p. 479 (1.6.2012):

Sei $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ ein Operator auf dem *komplexen* Prä-Hilbert-Raum V mit adjungiertem Operator $\hat{f}$ und den selbstadjungierten Komponenten $f_1 = (f + \hat{f})/2$, $f_2 = (f - \hat{f})/2\mathrm{i}$. (Man nennt $\mathrm{i} f_2$ die schiefselbstadjungierte Komponente von f.) Für jeden Vektor $x \in V$ gilt

$$\langle f(x), x\rangle = \langle f_1(x), x\rangle + \mathrm{i}\,\langle f_2(x), x\rangle \quad \text{und} \quad |\langle f(x), x\rangle|^2 = \langle f_1(x), x\rangle^2 + \langle f_2(x), x\rangle^2 .$$

Beweis: Es ist $\langle f_1(x), x\rangle + \mathrm{i}\,\langle f_2(x), x\rangle = \langle (f(x)+\hat{f}(x))/2, x\rangle + \mathrm{i}\,\langle (f(x)-\hat{f}(x))/2\mathrm{i}, x\rangle = \langle f(x), x\rangle$, und wegen $\langle \hat{f}(x), x\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \overline{\langle f(x), x\rangle}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\langle f_1(x), x\rangle^2 + \langle f_2(x), x\rangle^2 = \tfrac14\langle f(x)+\hat{f}(x), x\rangle^2 - \tfrac14\langle f(x)-\hat{f}(x), x\rangle^2 \\
&= \tfrac14\langle f(x), x\rangle^2 + \tfrac12\langle f(x), x\rangle\langle \hat{f}(x), x\rangle + \tfrac14\langle \hat{f}(x), x\rangle^2 - \big(\tfrac14\langle f(x), x\rangle^2 - \tfrac12\langle f(x), x\rangle\langle \hat{f}(x), x\rangle + \tfrac14\langle \hat{f}(x), x\rangle^2\big) \\
&= \langle f(x), x\rangle\langle \hat{f}(x), x\rangle = |\langle f(x), x\rangle|^2 .
\end{aligned}$$

•

Abschnitt 15.A, Aufg. 22, p. 479 (1.6.2012):

(Heisenbergsche Unschärferelation) Seien f und g selbstadjungierte Operatoren auf dem *komplexen* Vektorraum V mit Skalarprodukt. Wir definieren: $\{f, g\} := fg + gf$ und $[f, g] := fg - gf$.

a) Die Zerlegung des Operators fg in seine selbstadjungierten Komponenten ist $fg = \frac12\{f, g\} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2\mathrm{i}}[f, g]$.

b) Für alle Vektoren $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2\|g(x)\|^2 &\ge |\langle f(x), g(x)\rangle|^2 = |\langle gf(x), x\rangle|^2 = |\langle fg(x), x\rangle|^2 \\
&= \tfrac14\big(\langle \{f, g\}(x), x\rangle^2 - \langle [f, g](x), x\rangle^2\big) \ge -\tfrac14\,\langle [f, g](x), x\rangle^2 = \tfrac14\,\big|\langle [f, g](x), x\rangle\big|^2 .
\end{aligned}$$

c) Für jeden normierten Vektor $x \in V$ gilt die (Heisenbergsche) Unschärferelation

$$(\Delta f)(x)\cdot(\Delta g)(x) \ge \tfrac12\,\big|\langle [f, g](x), x\rangle\big| .$$

Beweis: a) Die selbstadjungierten Komponenten von fg sind wegen $\hat{f} = f$ und $\hat{g} = g$

$$\begin{aligned}
(fg)_1 &= \tfrac12\big(fg + (fg)\hat{}\,\big) = \tfrac12\big(fg + \hat{g}\hat{f}\big) = \tfrac12(fg + gf) = \tfrac12\{f, g\} , \\
(fg)_2 &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(fg - (fg)\hat{}\,\big) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(fg - \hat{g}\hat{f}\big) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(fg - gf) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}[f, g] .
\end{aligned}$$

b) Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert $|\langle f(x), g(x)\rangle| \le \|f(x)\|\,\|g(x)\|$, also $\|f(x)\|^2\|g(x)\|^2 \ge |\langle f(x), g(x)\rangle|^2$. Da g und f selbstadjungiert sind, gilt $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle gf(x), x\rangle$ und $\langle f(x), g(x)\rangle = \langle x, fg(x)\rangle = \overline{\langle fg(x), x\rangle}$, also $|\langle f(x), g(x)\rangle|^2 = |\langle gf(x), x\rangle|^2 = |\langle fg(x), x\rangle|^2$. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned}
\langle\{f, g\}(x), x\rangle &= \langle fg(x), x\rangle + \langle gf(x), x\rangle = \overline{\langle f(x), g(x)\rangle} + \langle f(x), g(x)\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle f(x), g(x)\rangle , \\
\langle[f, g](x), x\rangle &= \langle fg(x), x\rangle - \langle gf(x), x\rangle = \overline{\langle f(x), g(x)\rangle} - \langle f(x), g(x)\rangle = -2\mathrm{i}\ \mathrm{Im}\langle f(x), g(x)\rangle , \\
\langle\{f, g\}(x), x\rangle^2 - \langle[f, g](x), x\rangle^2 &= 4\big(\mathrm{Re}\langle f(x), g(x)\rangle\big)^2 + 4\big(\mathrm{Im}\langle f(x), g(x)\rangle\big)^2 = 4|\langle f(x), g(x)\rangle|^2 \\
&= 4|\langle fg(x), x\rangle|^2 ,
\end{aligned}$$

$\frac14\big(\langle\{f, g\}(x), x\rangle^2 - \langle[f, g](x), x\rangle^2\big) \ge -\frac14\,\langle[f, g](x), x\rangle^2 = (\mathrm{Im}\langle f(x), g(x)\rangle)^2 = |\langle f(x), g(x)\rangle|^2$.

c) Im Fall $\langle f(x), x\rangle = \langle g(x), x\rangle = 0$ ist einfach $(\Delta f)(x) = \|f(x)\|$ und $(\Delta g)(x) = \|g(x)\|$. Die zu beweisende Ungleichung ergibt sich dafür aus b), die allgemeine Aussage wird darauf zurückgeführt: Nach Aufg. 20, angewandt mit $\alpha := \langle f(x), x\rangle$, gilt $\Delta(f - \langle f(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V) = (\Delta f)(x)$, analog hat man $\Delta(g - \langle g(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V) = (\Delta g)(x)$. Die Behauptung folgt nun wegen

$$\begin{aligned}
&\langle[(f - \langle f(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V), (g - \langle g(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V)](x), x\rangle \\
&= \langle\big(f - \langle f(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V\big)\big(g - \langle g(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V\big)(x) - \big(g - \langle g(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V\big)\big(f - \langle f(x), x\rangle\,\mathrm{id}_V\big)(x), x\rangle \\
&= \langle fg(x), x\rangle - \langle f(x), x\rangle\langle g(x), x\rangle - \langle g(x), x\rangle\langle f(x), x\rangle + \langle f(x), x\rangle\langle g(x), x\rangle \\
&\quad - \big(\langle gf(x), x\rangle - \langle g(x), x\rangle\langle f(x), x\rangle - \langle f(x), x\rangle\langle g(x), x\rangle + \langle g(x), x\rangle\langle f(x), x\rangle\big) \\
&= \langle fg(x) - gf(x), x\rangle = \langle [f, g](x), x\rangle .
\end{aligned}$$

•

Abschnitt 15.B, Aufg. 1, p. 496 (1.6.2012):

Man bestimme die Hauptwerte $c_1 \geq c_2$ und ein System von Hauptachsen für die hermitesche Form Φ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C},$$

bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{C}^2$. Im Fall $b \in \mathbb{R}$ gebe man auch den Typ der Quadrik $\Phi(x, x) = 1$ an, $x \in \mathbb{R}^2$.

Lösung: Die Matrix hat das charakteristische Polynom $X^2 - (a+c)X + ac - |b|^2$ mit den (reellen) Nullstellen $\frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}$. Ihre Hauptwerte sind also $c_1 := \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}$ sowie $c_2 := \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}$. Ein System von Hauptachsen wird gebildet von den Eigenräumen $\mathbb{K}\big(2b\,, c-a+\sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}\big)$ zu c_1 und $\mathbb{K}\big(2b\,, c-a-\sqrt{(a-c)^2 + 4|b|^2}\big)$ zu c_2.

Sei nun $b \in \mathbb{R}$. Ist die Determinante der Matrix positiv, d.h. $ac > b^2$, so haben a und c das gleiche Vorzeichen. Bei $a, c > 0$ ist die Matrix dann positiv definit, beide Hauptwerte sind positiv und die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x, x) = 1\}$ ist eine Ellipse. Bei $a, c < 0$ ist die Matrix negativ definit, der Hauptwert c_2 ist negativ und, da $c_1 c_2$ die Determinante der Matrix ist, ist auch c_1 negativ. Die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x, x) = 1\}$ ist dann leer. Ist die Determinante der Matrix negativ, d.h. $ac < |b|^2$, so haben c_1 und c_2 unterschiedliche Vorzeichen. Die Quadrik $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(x, x) = 1\}$ ist dann eine Hyperbel. Verschwindet die Determinante der Matrix, d.h. ist $ac = |b|^2$, so ist wenigstens einer der beiden Hauptwert gleich 0. Ist dann der andere Hauptwert positiv, so ist die Quadrik die Vereinigung zweier paralleler Geraden, andernfalls ist sie leer. •

Abschnitt 15.B, Aufg. 2, p. 497 (1.6.2012):

Man bestimme die Hauptachsen und ihre Längen für die folgenden Ellipsen bzw. Hyperbeläste im $\mathbb{R}^2$:

$$x = a_1 \cos t + b_1 \sin t\,, \qquad y = a_2 \cos t + b_2 \sin t$$

bzw.

$$x = a_1 \cosh t + b_1 \sinh t\,, \quad y = a_2 \cosh t + b_2 \sinh t\,,$$

$t \in \mathbb{R}$. (Es sei $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. – Vgl. Beispiel 15.B.8.)

1. Lösung: Wie behandeln zunächst die Kurven $x = a_1 \cos t + b_1 \sin t\,,\ y = a_2 \cos t + b_2 \sin t$.

Zur Abkürzung setzen wir $A := a_2^2 + b_2^2,\ B := a_1^2 + b_1^2,\ C := a_1 a_2 + b_1 b_2$ und $D := a_1 b_2 - a_2 b_1$. Nach Voraussetzung ist die Determinante $D \neq 0$. Es gilt $AB = C^2 + D^2$.

Wir bestimmen eine quadratische Form $Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ derart, dass die gegebene Kurve auf der Quadrik $L := \{{}^t(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) = 1\}$ liegt. Einsetzen liefert die Bedingung

$$\begin{aligned} &a\big(a_1^2 \cos^2 t + 2a_1 b_1 \sin t \cos t + b_1^2 \sin^2 t\big) + b\big(a_2^2 \cos^2 t + 2a_2 b_2 \sin t \cos t + b_2^2 \sin^2 t\big) \\ &\quad + c\big(a_1 a_2 \cos^2 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sin t \cos t + b_1 b_2 \sin^2 t\big) = 1\,, \end{aligned}$$

die wegen $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ sicher gilt, wenn a, b, c das folgende lineare Gleichungssystem erfüllen:

$$a_1^2\, a + a_2^2\, b + a_1 a_2\, c = 1\,, \quad b_1^2\, a + b_2^2\, b + b_1 b_2\, c = 1\,, \quad 2a_1 b_1\, a + 2a_2 b_2\, b + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, c = 0\,.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist (bei $a_1 a_2 \neq 0$, das Ergebnis gilt aber allgemein)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_1 b_2 \\ 2a_1 b_1 & 2a_2 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{vmatrix} &= \frac{1}{a_1 a_2} \begin{vmatrix} a_1^2 a_2 & a_2^2 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 a_2 & b_2^2 a_1 & b_1 b_2 \\ 2a_1 b_1 a_2 & 2a_2 b_2 a_1 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1 a_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_1 a_2 \\ -Db_1 & Db_2 & b_1 b_2 \\ -Da_1 & Da_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{vmatrix} = D^3 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Mit der Cramerschen Regel erhält man die Lösung

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2^2 & a_1 a_2 \\ 1 & b_2^2 & b_1 b_2 \\ 0 & 2a_2 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{vmatrix}}{D^3} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2^2 + b_2^2)}{D^3} = \frac{A}{D^2}\,,$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 & 1 & a_1a_2\\ b_1^2 & 1 & b_1b_2\\ 2a_1b_1 & 0 & a_1b_2+a_2b_1\end{vmatrix}}{D^3}=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)(a_1^2+b_1^2)}{D^3}=\frac{B}{D^2}\,,$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & 1\\ b_1^2 & b_2^2 & 1\\ 2a_1b_1 & 2a_2b_2 & 0\end{vmatrix}}{D^3}=-\frac{2(a_1b_2-a_2b_1)(a_1a_2+b_1b_2)}{D^3}=-2\frac{C}{D^2}\,,$$

Die Fundamentalmatrix der zu Q gehörenden symmetrischen Bilinearform Φ ist $\frac{1}{D^2}\begin{pmatrix} A & -C\\ -C & B\end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $X^2-\frac{A+B}{D^2}\,X+\frac{1}{D^2}$, den Eigenwerten

$$c_{1,2}:=\frac{1}{2D^2}\big(A+B\pm\sqrt{(A+B)^2-4D^2}\,\big)>0$$

und den zugehörigen Eigenräumen $\mathbb{R}v_1$ und $\mathbb{R}v_2$ mit $v_{1,2}:=\big(2C\,,\,A-B\mp\sqrt{(A+B)^2-4D^2}\,\big)$. Es handelt sich also um eine Ellipse mit diesen Eigenräumen als Hauptachsen; die zugehörigen Haupachsenlängen sind $2/\sqrt{c_1}$ und $2/\sqrt{c_2}$.

Wie behandeln nun die Kurven $x=a_1\cosh t+b_1\sinh t\,,\ y=a_2\cosh t+b_2\sinh t$.

Zur Abkürzung setzen wir $A':=b_2^2-a_2^2,\ B':=b_1^2-a_1^2,\ C':=a_1a_2-b_1b_2$ und $D:=a_1b_2-a_2b_1$. Nach Voraussetzung ist die Determinante $D\neq 0$. Es gilt $A'B'=C'^2-D^2$.

Wir bestimmen eine quadratische Form $Q(x,y)=ax^2+by^2+cxy$ derart, dass die gegebene Kurve auf der Quadrik $L:=\{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid Q(x,y)=1\}$ liegt. Einsetzen liefert die Bedingung

$$a\big(a_1^2\cosh^2 t+2a_1b_1\sinh t\cosh t+b_1^2\sinh^2 t\big)+b\big(a_2^2\cosh^2 t+2a_2b_2\sinh t\cosh t+b_2^2\sinh^2 t\big)$$
$$+\,c\big(a_1a_2\cosh^2 t+(a_1b_2+a_2b_1)\sinh t\cosh t+b_1b_2\sinh^2 t\big)=1\,,$$

die wegen $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ sicher gilt, wenn a,b,c das folgende lineare Gleichungssystem erfüllen:

$$a_1^2\,a+a_2^2\,b+a_1a_2\,c=1\,,\quad b_1^2\,a+b_2^2\,b+b_1b_2\,c=-1\,,\quad 2a_1b_1\,a+2a_2b_2\,b+(a_1b_2+a_2b_1)\,c=0\,.$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems ist wie oben $D^3\neq 0$. Mit der Cramerschen Regel erhält man die Lösung

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_2^2 & a_1a_2\\ -1 & b_2^2 & b_1b_2\\ 0 & 2a_2b_2 & a_1b_2+a_2b_1\end{vmatrix}}{D^3}=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)(b_2^2-a_2^2)}{D^3}=\frac{A'}{D^2}\,,$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 & 1 & a_1a_2\\ b_1^2 & -1 & b_1b_2\\ 2a_1b_1 & 0 & a_1b_2+a_2b_1\end{vmatrix}}{D^3}=\frac{(a_1b_2-a_2b_1)(b_1^2-a_1^2)}{D^3}=\frac{B'}{D^2}\,,$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & 1\\ b_1^2 & b_2^2 & -1\\ 2a_1b_1 & 2a_2b_2 & 0\end{vmatrix}}{D^3}=-\frac{2(a_1b_2-a_2b_1)(a_1a_2-b_1b_2)}{D^3}=-2\frac{C'}{D^2}\,,$$

Die Fundamentalmatrix der zu Q gehörenden symmetrischen Bilinearform Φ ist $\frac{1}{D^2}\begin{pmatrix} A' & -C'\\ -C' & B'\end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $X^2-\frac{A'+B'}{D^2}\,X-\frac{1}{D^2}$, den Eigenwerten

$$c_1:=\frac{1}{2D^2}\big(A'+B'+\sqrt{(A'+B')^2+4D^2}\,\big)>0\quad\text{und}\quad c_2:=\frac{1}{2D^2}\big(A'+B'-\sqrt{(A'+B')^2+4D^2}\,\big)<0$$

und den zugehörigen Eigenräumen $\mathbb{R}v_1$ und $\mathbb{R}v_2$ mit $v_{1,2} := \bigl(2C'\,,\,A'-B'\mp\sqrt{(A'+B')^2+4D^2}\,\bigr)$. Es handelt sich also um einen Hyperbelast mit diesen Eigenräumen als Hauptachsen; die zugehörigen Haupachsenlängen sind $2/\sqrt{c_1}$ und $2/\sqrt{-c_2}$. •

2. Lösung: Sei $\mathfrak{A} := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ mit der Determinante $D := a_1b_2 - a_2b_1$ und der Inversen $\mathfrak{A}^{-1} = D^{-1}\left(\begin{smallmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Ellipse bzw. der Hyperbelast sind das Bild des Einheitskreises $u^2+v^2 = 1$ bzw. des Hyperbelastes $u^2-v^2 = 1$, $u>0$, unter der linearen Transformation $\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) := \mathfrak{A}\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a_1u+b_1v \\ a_2u+b_2v \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \mathfrak{A}^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = D^{-1}\left(\begin{smallmatrix} b_2x-b_1y \\ -a_2x+a_1y \end{smallmatrix}\right)$. Einsetzen liefert für die Ellipse die Gleichung

$$u^2+v^2 = D^{-2}\bigl((b_2x-b_1y)^2+(-a_2x+a_1y)^2\bigr) = \frac{a_2^2+b_2^2}{D^2}x^2 - 2\frac{a_1a_2+b_1b_2}{D^2}xy + \frac{a_1^2+b_1^2}{D^2}y^2 = 1$$

und entsprechend für den Hyperbelast

$$u^2-v^2 = D^{-2}\bigl((b_2x-b_1y)^2-(-a_2x+a_1y)^2\bigr) = \frac{b_2^2-a_2^2}{D^2}x^2 - 2\frac{a_1a_2-b_1b_2}{D^2}xy + \frac{b_1^2-a_1^2}{D^2}y^2 = 1\,.$$

Dann schließt man wie oben. •

Abschnitt 15.B, Aufg. 3, p. 497 (1.6.2012):

Man gebe ein System von Hauptachsen und die zugehörigen Hauptwerte an für die symmetrische Bilinearform Φ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Die Matrix hat das charakteristische Polynom

$$\begin{vmatrix} X-8 & -4 & 1 \\ -4 & X+7 & -4 \\ 1 & -4 & X-8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-9 & -4 & 1 \\ 0 & X+7 & -4 \\ -X+9 & -4 & X-8 \end{vmatrix} = (X-9)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & X+7 & -4 \\ -1 & -4 & X-8 \end{vmatrix}$$
$$= (X-9)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+7 & -4 \\ -1 & -8 & X-7 \end{vmatrix} = (X-9)^2(X+9)$$

mit den Eigenwerten 9 und -9 und den zugehörigen Eigenräumen $\mathbb{R}\,{}^t(4,1,0)+\mathbb{R}\,{}^t(-1,0,1)$ und $\mathbb{R}\,{}^t(1,-4,1)$. Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert daraus die Orthonormalbasis $v_1 := {}^t\bigl(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, 0\bigr)$, $v_2 := {}^t\bigl(-\frac{1}{3\sqrt{34}}, \frac{4}{3\sqrt{34}}, \frac{17}{3\sqrt{34}}\bigr)$, $v_3 := {}^t\bigl(\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\bigr)$ von $\mathbb{R}^3$. Dies liefert ein System von Hauptachsen von Φ zu den Hauptwerten $c_1 = 9$, $c_2 = 9$, $c_3 = -9$. – Statt $\mathbb{R}v_1$, $\mathbb{R}v_2$ kann man auch $\mathbb{R}v_1'$, $\mathbb{R}v_2'$ als Hauptachsen zum Hauptwert 9 wählen, wo v_1', v_2' eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathbb{R}v_1+\mathbb{R}v_2$ ist. •

Abschnitt 15.B, Aufg. 4, p. 497 (1.6.2012):

Man gebe eine Basis des $\mathbb{R}^2$ an, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis ist für die Formen Φ und Ψ, die bzgl. der Standardbasis e_1, e_2 durch folgende Matrizen definiert werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Da die Hautminoren der ersten Matrix beide gleich 1, also positiv sind, ist Φ ein Skalarprodukt. Indem wir das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich Φ etwa auf die Basis $(1,0)$, $(0,1)$ von $\mathbb{R}^2$ anwenden, erhalten wir die Φ-Orthonormalbasis $v_1 := (1,0)$, $v_2 := (1,1)$ von $\mathbb{R}^2$. Die Fundamentalmatrix von Ψ bezüglich v_1, v_2 ist $\bigl(\Psi(v_i,v_j)\bigr) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom X^2-3X-5 und den Eigenwerten $\frac{1}{2}\bigl(3\pm\sqrt{29}\bigr)$ sowie zugehörigen Eigenvektoren $(a_1,a_2) := \bigl(1\,,\,\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})\bigr)$, $(b_1,b_2) := \bigl(1\,,\,\frac{1}{2}(5-\sqrt{29})\bigr)$. Dies sind die Koordinaten der gesuchten simultanen Orthogonalbasis $a_1v_1+a_2v_2 = \bigl(\frac{1}{2}(7+\sqrt{29})\,,\,\frac{1}{2}(5+\sqrt{29})\bigr)$, $b_1v_1+b_2v_2 = \bigl(\frac{1}{2}(7-\sqrt{29})\,,\,\frac{1}{2}(5-\sqrt{29})\bigr)$ von $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Basis v_1, v_2. •

Abschnitt 15.B, Aufg. 5, p. 497 (1.6.2012):

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ seien hermitesche Matrizen, $\mathfrak{A}$ sei positiv definit. Das charakteristische Polynom $\mathrm{Det}\,(X\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$ relativ zu $\mathfrak{A}$ habe n paarweise verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Diese Nullstellen liegen notwendigerweise in $\mathbb{R}$, und es gibt Elemente $x_i \in \mathbb{K}^n$, $x_i \neq 0$, im Kern von $\lambda_i\, {}^t\mathfrak{A} - {}^t\mathfrak{B}$, $i = 1, \ldots, n$. Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ bilden eine gemeinsame Orthogonalbasis des $\mathbb{K}^n$ für die beiden durch $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bzgl. der Standardbasis beschriebenen Formen auf $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind auch $\overline{\mathfrak{A}} = {}^t\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{B}} = {}^t\mathfrak{B}$ hermitesch, beschreiben also selbstadjungierte Operatoren f, g auf $\mathbb{K}^n$ mit $f(x) := \overline{\mathfrak{A}}x$ bzw. $g(x) := \overline{\mathfrak{B}}x$. Da $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A}}$ die gleichen reellen Eigenwerte haben, ist $\overline{\mathfrak{A}}$ wie $\mathfrak{A}$ positiv definit. Dann ist auch die durch $\mathfrak{A}$ definierte hermitesche Form $\Phi_{\mathfrak{A}}$ mit $\Phi_{\mathfrak{A}}(x, y) := \langle x, f(y)\rangle$ positiv definit, d.h. es gilt $\langle x, f(x)\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$.

Ist nun $\lambda_i \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $\mathrm{Det}\,(X\mathfrak{A} - \mathfrak{B})$, so ist $\overline{\lambda}_i$ eine Nullstelle von $\mathrm{Det}\,(X\overline{\mathfrak{A}} - \overline{\mathfrak{B}})$. Für $x_i \neq 0$ in K^n mit $(\overline{\lambda}_i\overline{\mathfrak{A}} - \overline{\mathfrak{B}})x_i = (\overline{\lambda}_i\, {}^t\mathfrak{A} - {}^t\mathfrak{B})x_i = 0$, d.h. mit $\overline{\lambda}\, f(x_i) = g(x_i)$, gilt dann $\lambda_i\langle x_i, f(x_i)\rangle = \langle x_i, \overline{\lambda}_i f(x_i)\rangle = \langle x_i, g(x_i)\rangle \in \mathbb{R}$, d.h. $\lambda_i = \langle x_i, g(x_i)\rangle / \langle x_i, f(x_i)\rangle \in \mathbb{R}$.

Für $j \neq i$ erhält man damit $\lambda_j \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i, x_j) = \lambda_j\langle x_i, f(x_j)\rangle = \langle x_i, \lambda_j f(x_j)\rangle = \langle x_i, g(x_j)\rangle = \langle g(x_i), x_j\rangle = \langle \lambda_i f(x_i), x_j\rangle = \lambda_i\langle x_i, f(x_j)\rangle = \lambda_i \Phi_{\mathfrak{A}}(x_i, x_j)$. Wegen $\lambda_j \neq \lambda_i$ folgt daraus $\Phi_{\mathfrak{A}}(x_i, x_j) = 0$ und dann auch $\Phi_{\mathfrak{B}}(x_i, x_j) = \langle x_i, g(x_j)\rangle = 0$. Dies ist die Behauptung. •

Abschnitt 15.B, Aufg. 6, p. 497 (1.6.2012):

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt.

a) Jede positiv semidefinite Form Φ vom Rang 1 auf V hat die Gestalt $(x, y) \mapsto f(x)\overline{f(y)}$ mit einer von 0 verschiedenen Linearform f auf V, die durch Φ bis auf einen Faktor vom Betrag 1 eindeutig bestimmt ist.

b) Seien Φ und f wie in a). Dann ist $\operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|$ zusammen mit einer Orthonormalbasis von Kern f eine Orthonormalbasis von V, die gleichzeitig eine Orthogonalbasis von Φ ist. Der von 0 verschiedene Hauptwert von Φ ist $\|\operatorname{grad} f\|^2$.

Beweis: a) Da Φ positiv semidefinit vom Rang 1 ist, liefert Hauptachsentransformation (Satz 15.B.2) eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V, bezüglich der die Fundamentalmatrix von Φ eine Diagonalmatrix der Form $\mathrm{Diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)$ mit $\lambda > 0$ ist. Definieren wir dann die Linearform f auf V durch $f(x) := \sqrt{\lambda}\, a_1$ für $x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so gilt dann für $x = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $y = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$ aus V mit $a_i, b_j \in \mathbb{R}$: $\Phi(x, y) = (a_1, \ldots, a_n)\mathrm{Diag}(\lambda, 0, \ldots, 0)\,{}^t(\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_n) = \lambda a_1\overline{b}_1 = f(x)\,\overline{f(y)}$.

Ist g eine Linearform auf V mit $g(x)\overline{g(y)} = f(x)\overline{f(y)}$ für alle $x, y \in V$, so gilt $|g(v_1)|^2 = |f(v_1)|^2$, also $g(v_1) = af(v_1)$ mit einem $a \in \mathbb{K}$ vom Betrag 1, und $|g(v_i)|^2 = |f(v_i)|^2 = 0$ für $i \geq 2$. Es folgt $g(x) = af(x)$ für alle $x \in V$.

b) Aus der Eindeutigkeitsaussage in a) folgt, dass in jedem Fall $v_2, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von Kern f bilden und außerdem nach Konstruktion eine Orthogonalbasis von Kern f bzgl. Φ. Wegen $\langle v_i, \operatorname{grad} f\rangle = f(v_i) = 0$ für $i = 2, \ldots, n$ ist dann $\operatorname{grad} f$ im orthogonalen Komplement von $\mathbb{K}v_2 + \cdots + \mathbb{K}v_n$ bzgl. des Skalarprodukts von V, also ein Vielfaches von v_1. Daher ist $\operatorname{grad} f / \|\operatorname{grad} f\|^2, v_2, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. des Skalarprodukts. Ferner ist $\|\operatorname{grad} f\|^2$ der Hauptwert $\neq 0$ von Φ wegen

$$\begin{aligned}\Phi\Big(\frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}, \frac{\operatorname{grad} f}{\|\operatorname{grad} f\|}\Big) &= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2}\,\Phi(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2}\, f(\operatorname{grad} f)\,\overline{f(\operatorname{grad} f)}\\ &= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2}\,\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle\,\overline{\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle} = \|\operatorname{grad} f\|^2.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 15.B, Aufg. 7, p. 497 (1.6.2012):

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und f ein Operator auf V. Für die Form $\Phi := \Phi_f$ und jeden Unterraum $W \subseteq V$ mit orthogonalem Komplement $W^\perp$ (bzgl. des vorgegebenen Skalarprodukts) ist $\Phi|W = \Phi_{f_W}$ mit $f_W := p_W \circ (f|W)$, wobei p_W die orthogonale Projektion auf W ist.

Beweis: Seien $u, v \in W$. Wir haben $(\Phi|W)(u, v) = \Phi_{f_W}(u, v)$ zu zeigen. Dazu sei $f(v) = w + w^\perp$ mit $w \in W$ und $w^\perp \in W^\perp$ die Zerlegung von $f(w)$ in seine Komponenten in W bzw. $W^\perp$. Dann gilt $\langle u, w^\perp\rangle = 0$ und $f_W(v) = p_W\big((f|W)(v)\big) = p_W(w + w^\perp) = w$. Es folgt

$$(\Phi|W)(u, v) = \langle u, f(v)\rangle = \langle u, w + w^\perp\rangle = \langle u, w\rangle = \langle u, f_W(v)\rangle = \Phi_{f_W}(u, v)\,.$$ •

Abschnitt 15.B, Aufg. 8, p. 497 (1.6.2012):

Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, Φ eine hermitesche Form auf V und $c_1 \geq \cdots \geq c_n$ die Hauptwerte von Φ.

a) Für $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\begin{aligned} c_i &= \mathrm{Min}\{\mathrm{Max}\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq V,\ \mathrm{Kodim}\, W = i-1\} \\ &= \mathrm{Max}\{\mathrm{Min}\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq V,\ \mathrm{Dim}\, W = i\}, \end{aligned}$$

wobei $R_\Phi(x) = \Phi(x,x)/\langle x, x\rangle$ der Rayleigh-Quotient ist.

b) Für einen Unterraum U von V der Dimension m seien $c'_1 \geq \cdots \geq c'_m$ die Hauptwerte von $\Phi|U$. Dann gelten für $i = 1, \ldots, m$ die Ungleichungen $c_{n-m+i} \leq c'_i \leq c_i$.

c) Sei Ψ eine positiv semidefinite hermitesche Form auf V, und seien $c'_1 \geq \cdots \geq c'_n$ die Hauptwerte von $\Phi + \Psi$. Dann ist $c_i \leq c'_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist Ψ sogar positiv definit, so gilt $c_i < c'_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis: a) Sei $\mathbb{K}v_1, \ldots, \mathbb{K}v_n$ ein System von Hauptachsen von Φ. Die Unterräume $W_i := \mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_i$ und $W'_i := \mathbb{K}v_i + \cdots + \mathbb{K}v_n$ haben dann die Dimensionen i bzw. $n-i+1$, also W'_i die Kodimension $i-1$. Für Elemente $x \in W_i$, $x \neq 0$, gilt $x = a_1v_1 + \cdots a_iv_i$ mit $a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{K}$ und somit $\Phi(x,x) = c_1|a_1|^2 + \cdots + c_i|a_i|^2 \geq c_i|a_1|^2 + \cdots + c_i|a_i|^2 = c_i\|x\|^2$, d.h. $R_\Phi(x) \geq c_i$. Für Elemente $x \in W'_i$, $x \neq 0$, gilt $x = a_iv_i + \cdots a_nv_n$ mit $a_i, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ und somit $\Phi(x,x) = c_i|a_i|^2 + \cdots + c_n|a_i|^2 \leq c_i|a_i|^2 + \cdots + c_i|a_n|^2 = c_i\|x\|^2$, d.h. $R_\Phi(x) \leq c_i$. Wegen $R_\Phi(v_i) = \Phi(v_i, v_i) = c_i$ und $c_i \in W_i$ sowie $c_i \in W'_i$ ergibt sich so $c_i = \mathrm{Min}\{R_\Phi(x) \mid x \in W_i,\ x \neq 0\}$ und ferner $c_i = \mathrm{Max}\{R_\Phi(x) \mid x \in W_i,\ x \neq 0\}$.

Sei nun W ein weiterer i-dimensionaler Unterraum von V. Mit der Dimensionsformel 3.B.11 erhält man $\mathrm{Dim}\,(W \cap W'_i) = \mathrm{Dim}\, W + \mathrm{Dim}\, W'_i - \mathrm{Dim}\,(W + W'_i) \geq i + (n-i+1) - n = 1$. Daher gibt es ein $x \neq 0$ in W, das in W'_i liegt, für das also $R_\Phi(x,x) \leq c_i$ gilt. Es folgt $\mathrm{Min}\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \leq c_i$ und insgesamt $\mathrm{Max}\,\{\mathrm{Min}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq V,\ \mathrm{Dim}\, W = i\} = c_i$.

Sei ferner W' ein weiterer Unterraum von V der Kodimension $i-1$. Mit der Dimensionsformel 3.B.11 erhält man $\mathrm{Dim}\,(W' \cap W_i) = \mathrm{Dim}\, W' + \mathrm{Dim}\, W_i - \mathrm{Dim}\,(W' + W_i) \geq (n-i+1) + i - n = 1$. Daher gibt es ein $x \neq 0$ in W', das in W_i liegt, für das also $R_\Phi(x,x) \geq c_i$ gilt. Es folgt $\mathrm{Max}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W',\ x \neq 0\} \geq c_i$ und insgesamt $\mathrm{Min}\,\{\mathrm{Max}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W',\ x \neq 0\} \mid W' \subseteq V,\ \mathrm{Kodim}\, W' = i-1\} = c_i$.

b) Die Aussage folgt aus a). Da jeder i-dimensionale Unterraum W von U auch ein solcher von V ist, gilt nämlich

$$\begin{aligned} c'_i &= \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Min}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq U,\ \mathrm{Dim}\, W = i\} \\ &\leq \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Min}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq V,\ \mathrm{Dim}\, W = i\} = c_i. \end{aligned}$$

Da jeder $(i-1)$-kodimensionale Unterraum W' von U die Dimension $m-i+1$ hat und folglich die Kodimension $n-m+i-1$ in V, gilt

$$\begin{aligned} c'_i &= \mathrm{Min}\,\{\mathrm{Max}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W',\ x \neq 0\} \mid W' \subseteq U,\ \mathrm{Kodim}\, W' = i-1\} \\ &\geq \mathrm{Min}\,\{\mathrm{Max}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W',\ x \neq 0\} \mid W' \subseteq V,\ \mathrm{Kodim}\, W' = n-m+i-1\} = c_{n-m+i}. \end{aligned}$$

c) Nach a) gilt wegen $\Phi(x,x) \leq \Phi(x,x) + \Psi(x,x) = (\Phi + \Psi)(x,,x)$, also $R_\Phi(x) \leq R_{\Phi+\Psi}(x)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} c_i &= \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Min}\,\{R_\Phi(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq V,\ \mathrm{Dim}\, W = i\} \\ &\leq \mathrm{Max}\,\{\mathrm{Min}\,\{R_{\Phi+\Psi}(x) \mid x \in W,\ x \neq 0\} \mid W \subseteq V,\ \mathrm{Dim}\, W = i\} = c'_i \end{aligned}$$

Ist Ψ positiv definit, so gilt stets $R_\Phi(x) < R_{\Phi+\Psi}(x)$, und mit den Bezeichnungen des Beweises von a) gilt insbesondere $c_i = R_\Phi(v_i) < R_{\Phi+\Psi}(v_i) \leq c'_i$. •

Abschnitt 15.B, Teil von **Aufg. 9**, p. 498 (1.6.2012):

Man gebe die Hauptachsen und die Hauptachsenlängen der Quadriken $Q(x) = 1$ an und bestimme ihren Typ, falls $Q(x)$ eine der folgenden quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^3$ ist:

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3\,; \qquad 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3\,.$$

Lösung: Die Fundamentalmatrix der zur ersten Form gehörenden Bilinearform Φ bzgl. der Standardbasis ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $X^3+3X^2-24X+28=(X-2)^2(X+7)$ und den Eigenräumen $\mathbb{R}\,{}^t(2,0,1)+\mathbb{R}\,{}^t(0,1,1)$ zum Eigenwert 2 und $\mathbb{R}\,{}^t(1,2,-2)$ zum Eigenwert -7. Anwenden des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Basen der beiden Eigenräume liefert die Orthonormalbasis $v_1 := {}^t(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $v_2 := {}^t(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $v_3 := {}^t(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}})$ von $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2, \mathbb{R}v_3$ ein System von Hauptachsen von Φ, die zugehörigen Hauptachsenlängen sind $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2/\sqrt{7}$. Φ hat den Typ $(2,1)$.

Die Fundamentalmatrix der zur zweiten Form gehörenden Bilinearform Ψ bzgl. der Standardbasis ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $X^3+12X^2-21X+10=(X-1)^2(X-10)$ und den Eigenräumen $\mathbb{R}\,{}^t(1,2,-2)$ zum Eigenwert 10 und $\mathbb{R}\,{}^t(-2,1,0)+\mathbb{R}\,{}^t(2,0,1)$ zum Eigenwert 1. Anwenden des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Basen der beiden Eigenräume liefert die Orthonormalbasis $v_1 := {}^t(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $v_2 := {}^t(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0)$, $v_3 := {}^t(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}})$ von $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\mathbb{R}v_1, \mathbb{R}v_2, \mathbb{R}v_3$ ein System von Hauptachsen von Ψ, die zugehörigen Hauptachsenlängen sind $2/\sqrt{10}, 2, 2$. Ψ hat den Typ $(3,0)$. •

Abschnitt 15.B, Spezialfall zu **Aufg. 11**, p. 498 (1.6.2012):

Man untersuche für die folgenden Quadriken L, um welchen Typ es sich handelt, und bestimme jeweils den Mittelpunkt sowie die Hauptachsen und deren Längen.

a) $L := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2+2xy+3y^2+16x+32y=8\}$

b) $L := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9x^2-4xy+6y^2+60x+20y=-50\}$.

Lösung: a) Der quadratische Anteil der Gleichung liefert die Form Φ mit der Fundamentalmatrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Ihr charakteristisches Polynom ist $X^2-6X+8=(X-2)(X-4)$ mit den Eigenwerten 2 und 4. Die zugehörigen Eigenräume sind $\mathbb{R}\,{}^t(1,-1)$ und $\mathbb{R}\,{}^t(1,1)$. Eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle -,-\rangle$, die gleichzeitig Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bzgl. Φ ist, ist dann $v_1 := {}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $v_2 := {}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Die Fundamentalmatrix von Φ bzgl. v_1, v_2 ist $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Setzen wir $(x,y)=t_1v_1+t_2v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1+t_2, -t_1+t_2)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} L :&= \{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2+2xy+3y^2+16x+32y=8\} \\ &= \{t_1v_1+t_2v_2 \mid 2t_1^2+4t_2^2+8\sqrt{2}\,(t_1+t_2)+16\sqrt{2}\,(-t_1+t_2)=8\} \\ &= \{t_1v_1+t_2v_2 \mid 2t_1^2+4t_2^2-8\sqrt{2}\,t_1+24\sqrt{2}\,t_2=8\} \\ &= \{t_1v_1+t_2v_2 \mid 2(t_1-2\sqrt{2}\,)^2+4(t_2+3\sqrt{2}\,)^2=96\} \\ &= \Big\{t_1v_1+t_2v_2 \;\Big|\; \frac{(t_1-2\sqrt{2}\,)^2}{(4\sqrt{3})^2}+\frac{(t_2+3\sqrt{5}\,)^2}{(2\sqrt{6})^2}=1\Big\}\,. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $M := 2\sqrt{2}\,v_1-3\sqrt{2}\,v_2={}^t(-1,-5)$, den Hauptachsen $\mathbb{R}v_1+M=\mathbb{R}\,{}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})+{}^t(-1,-5)$ und $\mathbb{R}v_2+M=\mathbb{R}\,{}^t(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})+{}^t(-1,-5)$ sowie den Hauptachsenlängen $8\sqrt{3}$ und $4\sqrt{6}$.

b) Der quadratische Anteil der Gleichung liefert die Form Φ mit der Gramschen Matrix $\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Ihr charakteristisches Polynom ist $X^2-15X-50=(X-5)(X-10)$ mit den Eigenwerten 5 und 10. Die zugehörigen Eigenräume sind $\mathbb{R}\,{}^t(1,2)$ und $\mathbb{R}\,{}^t(-2,1)$. Eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ bzgl. $\langle -,-\rangle$, die gleichzeitig Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich Φ ist, ist dann $v_1 := {}^t(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $v_2 := {}^t(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Die Gramsche Matrix von Φ bzgl. v_1, v_2 ist $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$. Setzen wir $(x,y)=t_1v_1+t_2v_2=$

$\frac{1}{\sqrt{5}}(t_1 - 2t_2, 2t_1 + t_2)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} L := &\left\{{}^t(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9x^2-4xy+6y^2+60x+20y=-50\right\}\\ &= \left\{t_1v_1+t_2v_2 \;\middle|\; 5t_1^2+10t_2^2+12\sqrt{5}\,(t_1-2t_2)+4\sqrt{5}\,(2t_1+t_2)=-50\right\}\\ &= \left\{t_1v_1+t_2v_2 \;\middle|\; 5t_1^2+10t_2^2+20\sqrt{5}\,t_1-20\sqrt{5}\,t_2=-50\right\}\\ &= \left\{t_1v_1+t_2v_2 \;\middle|\; 5(t_1+2\sqrt{5}\,)^2+10(t_2-\sqrt{5}\,)^2=100\right\}\\ &= \left\{t_1v_1+t_2v_2 \;\middle|\; \frac{(t_1+2\sqrt{5}\,)^2}{(2\sqrt{5}\,)^2}+\frac{(t_2-\sqrt{5}\,)^2}{(\sqrt{10}\,)^2}=1\right\}. \end{aligned}$$

Es handelt sich also um eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $M := -2\sqrt{5}\,v_1 + \sqrt{5}\,v_2 = {}^t(-4,-3)$, den Hauptachsen $\mathbb{R}v_1 + M = \mathbb{R}\,{}^t(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) + {}^t(-4,-3)$ und $\mathbb{R}v_2 + M = \mathbb{R}\,{}^t(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}) + {}^t(-4,-3)$ sowie den Hauptachsenlängen $4\sqrt{5}$ und $2\sqrt{10}$. •

Abschnitt 15.C, Teil von **Aufg. 1**, p. 509 (1.6.2012):

Man gebe die beiden Polardarstellungen der Matrix $\mathfrak{A}$ an und bestimme ihren Verzerrungsfaktor für

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 3 & -4 & -8\\ 0 & -10 & -5\\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}).$$

Lösung: Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned} {}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4\\ -4 & -10 & 3\\ -8 & -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -8\\ 0 & -10 & -5\\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0\\ 0 & 125 & 100\\ 0 & 100 & 125 \end{pmatrix} \quad \text{und}\\ \mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A} &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -8\\ 0 & -10 & -5\\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4\\ -4 & -10 & 3\\ -8 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 80 & -48\\ 80 & 125 & -60\\ -48 & -60 & 61 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

${}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}$ haben das charakteristische Polynom $(X-25)(X^2-250X+56250) = (X-25)^2(X-225)$, ${}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ die Eigenräume $\mathbb{R}(1,0,0) + \mathbb{R}(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ zum Eigenwert 25 und $\mathbb{R}(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ zum Eigenwert 225, $\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}$ die Eigenräume $\mathbb{R}(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}) + \mathbb{R}(\frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{5\sqrt{2}})$ zum Eigenwert 25 und $\mathbb{R}(\frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}})$ zum Eigenwert 225. Seien nun $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ die Matrizen mit den angegebenen Orthonormalbasen aus Eigenvektoren als Spalten. Damit ergibt sich $\mathfrak{B}_1^{-1}\,{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 = \mathrm{Diag}\,(25,25,225) = \mathfrak{B}_2^{-1}\,\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2$, also

$$\begin{aligned} {}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A} &= \mathfrak{B}_1\,\mathrm{Diag}\,(25,25,225)\,\mathfrak{B}_1^{-1} = \mathfrak{B}_1\,\mathrm{Diag}\,(25,25,225)\,{}^t\mathfrak{B}_1,\\ \mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A} &= \mathfrak{B}_2\,\mathrm{Diag}\,(25,25,225)\,\mathfrak{B}_2^{-1} = \mathfrak{B}_2\,\mathrm{Diag}\,(25,25,225)\,{}^t\mathfrak{B}_2. \end{aligned}$$

Dann werden die hermiteschen Anteile von $\mathfrak{A}$ durch folgende symmetrische Matrizen gegeben:

$$\sqrt{{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_1\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}{}^t\mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 5\\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_2\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}{}^t\mathfrak{B}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} & \frac{-3}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\ \frac{-4}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}}\\ \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{41}{5} & 4 & -\frac{12}{5}\\ 4 & 10 & -3\\ -\frac{12}{5} & -3 & \frac{34}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $\left(\sqrt{{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\sqrt{\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{59}{375} & \frac{-4}{75} & \frac{4}{125} \\ \frac{-4}{75} & \frac{2}{15} & \frac{1}{25} \\ \frac{4}{125} & \frac{1}{25} & \frac{22}{125} \end{pmatrix}$ erhält man dann für den unitären Anteil von $\mathfrak{A}$ die orthogonale Matrix

$$\mathfrak{A}\left(\sqrt{{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -8 \\ 0 & -10 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sqrt{\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}}\right)^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{59}{375} & \frac{-4}{75} & \frac{4}{125} \\ \frac{-4}{75} & \frac{2}{15} & \frac{1}{25} \\ \frac{4}{125} & \frac{1}{25} & \frac{22}{125} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -8 \\ 0 & -10 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchten Polardarstellungen von $\mathfrak{A}$ sind also

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -8 \\ 0 & -10 & -5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{5} & 4 & -\frac{12}{5} \\ 4 & 10 & -3 \\ -\frac{12}{5} & -3 & \frac{34}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Der Verzerrungsfaktor von $\mathfrak{A}$ ist $\dfrac{\mathrm{Max}\,(5,5,15)}{\mathrm{Min}\,(5,5,15)} = \dfrac{15}{5} = 3$. •

Abschnitt 15.C, Variante zu **Aufg. 1**, p. 509 (1.6.2012):
Man gebe die beiden Polardarstellungen der Matrix $\mathfrak{A}$ an und bestimme ihren Verzerrungsfaktor für

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst

$${}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -8 \\ 8 & 9 & -8 \\ -8 & -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

${}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}$ haben das charakteristische Polynom $(X-1)^2(X-25)$. Die Matrix ${}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ hat die Eigenräume $\mathbb{R}(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0) + \mathbb{R}(-\frac{1}{\sqrt2}, 0, \frac{1}{\sqrt2}) = \mathbb{R}(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0) + \mathbb{R}(-\frac{1}{\sqrt6}, -\frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6})$ zum Eigenwert 1 und $\mathbb{R}(\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3})$ zum Eigenwert 25 und $\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}$ die Eigenräume $\mathbb{R}(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}, 0) + \mathbb{R}(\frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{2}{\sqrt6})$ zum Eigenwert 1 und $\mathbb{R}(-\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3})$ zum Eigenwert 25. Seien nun $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ die Matrizen mit den angegebenen Orthonormalbasen aus Eigenvektoren als Spalten. Damit ergibt sich $\mathfrak{B}_1^{-1}\,{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{B}_1 = \mathrm{Diag}\,(1,1,25) = \mathfrak{B}_2^{-1}\,\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{B}_2$, also

$${}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1\mathrm{Diag}\,(1,1,25)\,\mathfrak{B}_1^{-1} = \mathfrak{B}_1\mathrm{Diag}\,(1,1,25)\,{}^t\mathfrak{B}_1,$$
$$\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_2\mathrm{Diag}\,(1,1,25)\,\mathfrak{B}_2^{-1} = \mathfrak{B}_2\mathrm{Diag}\,(1,1,25)\,{}^t\mathfrak{B}_2.$$

Dann werden die hermiteschen Anteile von $\mathfrak{A}$ durch folgende symmetrische Matrizen gegeben:

$$\sqrt{{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}{}^t\mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix},$$

$$\sqrt{\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}{}^t\mathfrak{B}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & -\frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} \\ -\frac{1}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\left(\sqrt{{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\,\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{11}{15} & \frac{4}{15} \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$ bzw. $\left(\sqrt{\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{11}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$ erhält man dann für den unitären Anteil von $\mathfrak{A}$ die orthogonale Matrix

$$\mathfrak{A}\left(\sqrt{{}^t\mathfrak{A}\mathfrak{A}}\,\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sqrt{\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{A}}\right)^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{11}{15} & \frac{-4}{15} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{11}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchten Polardarstellungen von $\mathfrak{A}$ sind also

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Der Verzerrungsfaktor von $\mathfrak{A}$ ist $\dfrac{\mathrm{Max}\,(1,1,5)}{\mathrm{Min}\,(1,1,5)} = \dfrac{5}{1} = 5\,.$ •

Abschnitt 15.C, Aufg. 2, p. 509 (1.6.2012) :

Seien $f = gh_1 = h_2g$ die Polardarstellungen des invertierbaren Operators f auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Dann sind äquivalent:
(1) $h_1 = h_2$. (2) $gh_1 = h_1g$. (2′) $h_2g = gh_2$. (3) f ist normal.

Beweis: Aus (1) folgen (2) und (2’) unmittelbar. Ferner folgt aus (1) wegen $\hat{g} = g^{-1}$ und $\hat{h}_1 = h_1 = h_2 = \hat{h}_2$ sofort $f\hat{f} = h_2g(h_2g)\hat{\ } = h_2g\hat{g}h_2 = h_2^2 = h_1^2 = h_1\hat{g}gh_1 = (gh_1)\hat{\ }gh_1 = \hat{f}f$, d.h. (3).

Umgekehrt folgt aus (2) (und analog aus (2’) bereits $h_1g = gh_1 = f = h_2g$ und dann $h_1 = h_2$ wegen der Bijektivität von g. Ist schließlich (3) erfüllt, also $f\hat{f} = \hat{f}f$, so folgt $h_1^2 = \hat{h}_1h_1 = \hat{h}_1\hat{g}gh_1 = (gh_1)\hat{\ }gh_1 = \hat{f}f = f\hat{f} = h_2g(h_2g)\hat{\ } = h_2g\hat{g}h_2 = h_2^2$. Mit Satz 15.C.3 erhält man daraus $h_1 = h_2$. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 3, p. 509 (1.6.2012) :

Sei f ein semipositiver Operator auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Für $x \in V$ ist dann $f(x) = 0$ äquivalent zu $\langle x\,,\,f(x)\rangle = 0$, d.h. Kern f ist der Ausartungsraum der Form Φ_f, d.h. ihr Radikal.

Beweis: Natürlich folgt $\Phi_f(x,x) = \langle x,\,f(x)\rangle = 0$ aus $f(x) = 0$.

Sei umgekehrt $\Phi_f(x,x) = \langle x,\,f(x)\rangle = 0$ für ein $x \in V$. Da Φ_f nach Voraussetzung eine positiv semidefinite Form auf V ist, liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung aus 12.C, Aufg. 7b)

$$|\Phi_f(f(x)\,,\,x)|^2 \le \Phi_f(f(x),\,f(x))\,\Phi_f(x,x) = 0\,,$$

d.h. $\|f(x)\|^2 = \Phi_f(f(x)\,,\,x) = 0$ und somit $f(x) = 0$. •

Bemerkung: f induziert also auf $V/\,\mathrm{Kern}\,f$ einen positiven Operator.

Abschnitt 15.C, Aufg. 4, p. 509 (1.6.2012) :

Seien f und g positive Operatoren auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Dann hat die Komposition $f \circ g$ (die im Allgemeinen nicht selbstadjungiert ist, vgl. 15.A, Aufg. 1) nur positive Eigenwerte.

Beweis: Nach Voraussetzung über f und g werden durch $\Phi_f(x,y) := \langle x,\,f(y)\rangle$ und $\Phi_g(x,y) := \langle x,\,g(y)\rangle$ Skalarprodukte auf V gegeben. Sei nun $x \neq 0$ ein Eigenvektor von $f \circ g$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt $f(g(x)) = \lambda x$ und ferner $\Phi_g(x,x) > 0$ und $\Phi_f(g(x),g(x)) > 0$, da g als positiver Operator bijekiv und daher $g(x) \neq 0$ ist. Man erhält: $\Phi_f(g(x),g(x)) = \langle g(x)\,,\,f(g(x))\rangle = \langle f(g(x))\,,\,g(x)\rangle = \lambda\langle x,g(x)\rangle = \lambda\Phi_g(x,x)$, also $\lambda = \Phi_f(g(x),g(x))/\Phi_g(x,x) > 0$. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 5, p. 509 (1.6.2012) :

Seien f und g selbstadjungierte Operatoren auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Einer der beiden Operatoren sei positiv. Dann sind fg und gf diagonalisierbar mit nur reellen Eigenwerten. Insbesondere ist das Produkt zweier hermitescher $n \times n$-Matrizen, von denen wenigstens eine positiv definit ist, stets diagonalisierbar mit nur reellen Eigenwerten. Sind sogar beide Faktoren positiv, so sind auch alle Eigenwerte des Produkts positiv.

Beweis: Sei etwa g positiv und somit Φ_g mit $\Phi_g(x, y) := \langle x, g(y)\rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann ist fg bezüglich Φ_g selbstadjungiert wegen

$$\Phi_g(fg(x), y) = \langle fg(x), g(y)\rangle = \langle g(x), fg(y)\rangle = \langle x, gfg(y)\rangle = \Phi_g(x, fg(y)).$$

Der Spektralsatz 15.A.10 liefert nun, dass fg diagonalisierbar und alle Eigenwerte von fg reell sind. Mit fg ist natürlich auch der dazu konjugierte Operator $g(fg)g^{-1} = gf$ diagonalisierbar mit denselben Eigenwerten. Daraus und mit Hilfe von Aufg. 4 ergeben sich sofort die weiteren Behauptungen. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 6, p. 509 (1.6.2012) :

Der Operator f auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt sei positiv in dem allgemeineren Sinne der Bemerkung 15.C.2. Dann haben alle Eigenwerte von f einen positiven Realteil.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $\langle x, \frac{1}{2}(f + \hat{f})(x)\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ aus V. Sei nun $v \neq 0$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, also mit $f(v) = \lambda v$. Dann gilt wegen $\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})$:

$$\operatorname{Re}\lambda\, \|v\|^2 = \tfrac{1}{2}\langle \lambda v, v\rangle + \tfrac{1}{2}\langle v, \lambda v\rangle = \tfrac{1}{2}\langle f(v), v\rangle + \tfrac{1}{2}\langle v, f(v)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle v, \tfrac{1}{2}(f + \hat{f})(v)\rangle > 0\,,$$

d.h. $\operatorname{Re}\lambda = \frac{1}{2}\langle v, \frac{1}{2}(f + \hat{f})(v)\rangle \big/ \lambda\, \|v\|^2 > 0$. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 7, p. 509 (1.6.2012) :

Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, G eine Untergruppe der unitären Gruppe $\mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$ und $f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ ein Operator mit $fGf^{-1} \subseteq \mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$.

a) Es ist $gGg^{-1} = fGf^{-1}$, wobei g der unitäre Anteil von f in der Polardarstellung $f = gh$ von f ist. Folgerung: Zwei Untergruppen von $\mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$, die als Untergruppen von $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ konjugiert sind, sind dies auch als Untergruppen von $\mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$.

b) V sei einfach bzgl. G, d.h. V besitze außer 0 und V keine Unterräume, die invariant unter allen Operatoren $\sigma \in G$ sind. Dann ist f bereits eine Ähnlichkeit. Folgerung: Der Normalisator von $\mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$ in $\mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ ist die Gruppe der Ähnlichkeiten von V.

Beweis: a) Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\sigma \in G$ ein $\tau \in G$ mit $f\sigma f^{-1} = \tau$. Es folgt $gh\sigma h^{-1}g^{-1} = \tau$, d.h. $h\sigma = (g^{-1}\tau g)h$. Wegen $g^{-1}\tau g \in \mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$ liefert die Eindeutigkeitsaussage in Satz 15.C.4 dann $g^{-1}\tau g = \sigma$ und folglich $h\sigma = \sigma h$. Damit erhält man $f\sigma f^{-1} = gh\sigma h^{-1}g^{-1} = g\sigma hh^{-1}g^{-1} = g\sigma g^{-1}$.

b) Für ein Element v aus dem Eigenraum $V_h(\lambda)$ von h zum Eigenwert λ gilt $h(v) = \lambda v$ und folglich $h(\sigma(v)) = \sigma(h(v)) = \sigma(\lambda v) = \lambda\sigma(v)$ (vgl. den Beweis zu a)), d.h. $V_h(\lambda)$ ist invariant unter jedem $\sigma \in G$. Die Voraussetzung bei b) liefert dann $V_h(\lambda) = V$, d.h. $h = \lambda\, \mathrm{id}_V$, und $f = gh = \lambda g$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

Zum Beweis der Folgerung wenden wir dies an mit $G := \mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$. Ist $U \subset V$ ein Unterraum von V, so ergänzen wir eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_m$ von U zu einer Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n$ von V und definieren $\sigma \in \mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$ durch $\sigma(u_1) := u_n$, $\sigma(u_n) := u_1$ und $\sigma(u_i) := u_i$ für $i \neq 1, n$. Dann ist $\sigma \in \mathrm{U}_{\mathbb{K}}(V)$ und $\sigma(U) \not\subseteq U$. Aus dem gerade Gezeigten folgt nun, dass jedes $f \in \mathrm{GL}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $fUf^{-1} \subseteq U$ bereits eine Ähnlichkeitsabbildung ist. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 9, p. 510 (1.6.2012) :

(Cartan-Zerlegung) Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine invertierbare $n{\times}n$-Matrix. Dann gibt es unitäre $n{\times}n$-Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ und eine Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ mit positiven reellen Diagonalelementen derart, dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}$ gilt.

Beweis: Der Satz 15.C.4 über die Polarform liefert eine unitäre $n \times n$-Matrix $\mathfrak{B}_1$ und eine positiv definite hermitesche $n{\times}n$-Matrix $\mathfrak{C}_1$ mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$. Nach Satz 15.A.11 gibt es zu $\mathfrak{C}_1$ eine unitäre $n{\times}n$-Matrix $\mathfrak{C}$ derart, dass $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}^{-1}$ eine reelle Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$ ist. Da die Eigenwerte von $\mathfrak{C}_1$ und damit auch von $\mathfrak{D}$ positiv sind, besitzt $\mathfrak{D}$ positive reelle Diagonalelemente. Es folgt $\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ mit der unitären Matrix $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}$. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 10, p. 510 (1.6.2012):

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine positive hermitesche Matrix. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix $\mathfrak{R}$ in der Gruppe $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ der oberen Dreiecksmatrizen mit (reellen) positiven Hauptdiagonalelementen, für die $\mathfrak{A} = {}^t\mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{R}}$ gilt.

Beweis: Sei $\mathfrak{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und Φ das durch die positive Matrix $\mathfrak{A}$ als Gramscher Matrix bzgl. dieser Basis gegebene Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$. Dann liefert das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren aus Abschnitt 13.A eine Orthonormalbasis $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathbb{K}^n$ bzgl. Φ mit $\mathbb{K}v_1 + \cdots + \mathbb{K}v_i = \mathbb{K}w_1 + \cdots + \mathbb{K}w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gibt daher eine obere Dreiecksmatrix $\mathfrak{R} = (r_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $w_j = \sum_{i=1}^{j} r_{ij} v_i$ für $j = 1, \ldots, n$. Die Konstruktion der $v_1, \ldots, v_n$ zeigt, dass die r_{jj} dabei positive reelle Zahlen sind. Daraus folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}^{\mathfrak{w}}(\Phi) = {}^t\mathfrak{R}\,\mathfrak{G}^{\mathfrak{v}}(\Phi)\,\overline{\mathfrak{R}} = {}^t\mathfrak{R}\,\mathfrak{E}_n\overline{\mathfrak{R}} = {}^t\mathfrak{R}\,\overline{\mathfrak{R}}$.

Gilt auch $\mathfrak{A} = {}^t\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}$ mit einer oberen Dreiecksmatrix $\mathfrak{T} \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$, so folgt ${}^t\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}\,\overline{\mathfrak{R}^{-1}} = \mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{R}^{-1}} = {}^t\mathfrak{R}$ und somit $(\mathfrak{T}\,\mathfrak{R}^{-1})^{-1} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{T}^{-1} = {}^t\big({}^t\mathfrak{T}^{-1}\,{}^t\mathfrak{R}\big) = {}^t\big({}^t\mathfrak{T}^{-1}\,{}^t\mathfrak{T}\,\overline{\mathfrak{T}}\,\overline{\mathfrak{R}^{-1}}\big) = \overline{{}^t(\mathfrak{T}\,\mathfrak{R}^{-1})}$. Daher ist $\mathfrak{T}\,\mathfrak{R}^{-1}$ eine unitäre Matrix. Da $\mathfrak{T}\,\mathfrak{R}^{-1}$ wie $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{T}$ in der Gruppe $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ liegt, handelt es es sich um eine unitäre obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Zahlen in der Hauptdiagonale. Nach Lemma 14.A.7 (7) sind diese Hauptdiagonalelemente, also die Eigenwerte der unitären Matrix, alle gleich 1. Da die Spalten einer unitären Matrix eine Orthonormalbasis von $\mathbb{K}^n$ bzgl. des Standardskalarprodukts bilden, muss dann $\mathfrak{T}\,\mathfrak{R}^{-1}$ die Einheitsmatrix sein, also $\mathfrak{T} = \mathfrak{R}$ gelten. •

Abschnitt 15.C, Aufg. 11, p. 510 (1.6.2012):

Sei f ein Operator auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt. Sei $h = (\hat{f} f)^{1/2}$ der Verzerrungsanteil von f mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (Da f nicht notwendig bijektiv ist, ist h in der Regel nur semipositiv.) Dann gilt $|\mathrm{Sp}\, f| \le \mathrm{Sp}\, h = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn f normal ist und alle Eigenwerte von f (einschließlich der komplexen) auf einem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl in $\mathbb{C}$ liegen.

Beweis: Da h selbstadjungiert ist, gibt es nach dem Spektralsatz 15.A.10 eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $h(v_i) = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wegen $\lambda_i \langle v_i . v_i\rangle = \langle h(v_i), v_i\rangle \ge 0$ sind die Eigenwerte λ_i sämtlich nichtnegative reelle Zahlen. Es gilt $\hat{f} f(v_i) = \lambda_i^2 v_i$, also $\|f(v_i)\|^2 = \langle f(v_i), f(v_i)\rangle = \langle \hat{f} f(v_i), , v_i\rangle = \lambda_i^2\langle v_i, v_i\rangle = \lambda_i^2$ und folglich $\|f(v_i)\| = \lambda_i$. Ist nun (a_{ki}) die Matrix von f bzgl. der Basis $v_1, \ldots, v_n$, d.h. $f(v_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k$, so erhalten wir $\langle f(v_i), v_i\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\langle v_k, v_i\rangle = a_{ii}$ und folglich

$$|\mathrm{Sp}\, f| = \Big|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n}\langle f(v_i), v_i\rangle\Big| \le \sum_{i=1}^{n} |\langle f(v_i), v_i\rangle| \le \sum_{i=1}^{n} \|f(v_i)\|\,\|v_i\| = \sum_{i=1}^{n} \|f(v_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

Dabei ist das zweite Ungleichheitszeichen nach 13.A.3 genau dann eine Gleichheit, wenn $f(v_i)$ und v_i für alle i linear abhängig sind, d.h. ein $c_i \in \mathbb{K}$ existiert mit $f(v_i) = c_i v_i$. In diesem Fall ist f diagonalisierbar und normal, vgl. 15.A, Aufg. 12a). Die erste Ungleichung lautet dann $|\sum_{i=1}^{n} c_i| \le \sum_{i=1}^{n} |c_i|$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die c_i auf einem im Nullpunkt entspringenden Strahl in $\mathbb{K}$ liegen.

Ist f umgekehrt normal und liegen die (komplexen) Eigenwerte von f alle auf einem in 0 entspringenden Strahl, so sind sie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ notwendigerweise alle reell, da dann mit jedem Eigenwert auch der konjugiert-komplexe auftritt, und f ist sogar selbstadjungiert. Nach den Spektralsätzen 15.A.15 und 15.A.10 ist f in jedem Fall in einer Orthonormalbasis diagonalisierbar, und wir können gleich annehmen, dass dies die obige Basis $v_1, \ldots, v_n$ ist. Dann gilt nämlich $\hat{f}(v_i) = \bar{c}_i v_i$ und folglich $h(v_i) = (\hat{f} f)^{1/2}(v_i) = |c_i| v_i$. In dieser Situation ist die erste Ungleichung eine Gleichheit, da die c_i auf einem im Nullpunkt entspringenden Strahl in $\mathbb{K}$ liegen, und die zweite Ungleichung trivialerweise eine Gleichheit. •