Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 2, 2. Aufl. (Version 2010), Kapitel 4

10 Polynomalgebren

Abschnitt 10.A, Variante zu **Aufg. 1. a)**, p. 277 (1.10.2011) :

Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $F, G \in \mathbb{Q}[X]$ und stelle diesen als Linearkombination $SF + TG,\ S, T \in \mathbb{Q}[X]$, dar:

$$F := X^4 + X^3 - X - 1\,, \quad G := X^4 + 2X^3 + X^2 - 1\,;$$
$$F := X^5 + X^3 + 2X^2 + 3X + 2\,, \quad G := X^5 - X^4 - 2X^3 - 4X^2 - 2X - 1\,;$$
$$F := X^5 + 2X^2 - X + 2\,, \quad G := X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2\,.$$

Lösung: Wir verwenden den euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers und starten zur Darstellung des ggT gemäß 10.A.5 (anders als dort beschrieben) jeweils mit der letzten Zeile des Divisionsschemas.

$$\begin{aligned} X^4 + X^3 - X - 1 &= 1 \cdot (X^4 + 2X^3 + X^2 - 1) + (-X^3 - X^2 - X)\,, \\ X^4 + 2X^3 + X^2 - 1 &= (-X - 1) \cdot (-X^3 - X^2 - X) + (-X^2 - X - 1)\,, \\ -X^3 - X^2 - X &= X \cdot (-X^2 - X - 1)\,, \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{ggT}(F, G) = -(X^2 + X + 1)$ (bis auf eine Konstante als Faktor). Damit bekommt man

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(F, G) = -(X^2 + X + 1) &= G - (-X - 1) \cdot (-X^3 - X^2 - X) \\ &= G - (-X - 1)(F - G) = (X + 1)F - XG\,. \end{aligned}$$

Im zweiten Beispiel erhält man

$$\begin{aligned} X^5 + X^3 + 2X^2 + 3X + 2 &= 1 \cdot (X^5 - X^4 - 2X^3 - 4X^2 - 2X - 1) + (X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3)\,, \\ X^5 - X^4 - 2X^3 - 4X^2 - 2X - 1 &= (X - 4) \cdot (X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3) + (4X^3 + 15X^2 + 15X + 11)\,, \\ X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3 &= (\tfrac{1}{4}X - \tfrac{3}{16}) \cdot (4X^3 + 15X^2 + 15X + 11) + \tfrac{81}{16}X^2 + \tfrac{81}{16}X + \tfrac{81}{16}\,, \\ 4X^3 + 15X^2 + 15X + 11 &= (\tfrac{64}{81}X + \tfrac{176}{81})(\tfrac{81}{16}X^2 + \tfrac{81}{16}X + \tfrac{81}{16})\,, \end{aligned}$$

und somit $\operatorname{ggT}(F, G) = \frac{81}{16}X^2 + \frac{81}{16}X + \frac{81}{16}$ (bis auf eine Konstante als Faktor). Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(F, G) = \tfrac{81}{16}X^2 + \tfrac{81}{16}X + \tfrac{81}{16} &= X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3 - (\tfrac{1}{4}X - \tfrac{3}{16}) \cdot (4X^3 + 15X^2 + 15X + 11) \\ &= X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3 - (\tfrac{1}{4}X - \tfrac{3}{16}) \cdot \big(G - (X - 4) \cdot (X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3)\big) \\ &= (X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 5X + 3)(\tfrac{1}{4}X^2 - \tfrac{19}{16}X + \tfrac{7}{4}) - (\tfrac{1}{4}X - \tfrac{3}{16})\,G \\ &= (F - G)(\tfrac{1}{4}X^2 - \tfrac{19}{16}X + \tfrac{7}{4}) - (\tfrac{1}{4}X - \tfrac{3}{16})\,G \\ &= (\tfrac{1}{4}X^2 - \tfrac{19}{16}X + \tfrac{7}{4})\,F + (-\tfrac{1}{4}X^2 + \tfrac{15}{16}X - \tfrac{25}{16})\,G\,. \end{aligned}$$

Im dritten Beispiel erhält man

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^2 - X + 2 &= (X - 1) \cdot (X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2) + (-2X^3 + 4X^2 - 2X + 4)\,, \\ X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2 &= (-\tfrac{1}{2}X - \tfrac{3}{2}) \cdot (-2X^3 + 4X^2 - 2X + 4) + (8X^2 + 8)\,, \\ -2X^3 + 4X^2 - 2X + 4 &= (-\tfrac{1}{4}X + \tfrac{1}{2}) \cdot (8X^2 + 8)\,. \end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{ggT}(F, G) = 8X^2 + 8$ (eindeutig bis auf eine Konstante als Faktor). Ferner ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{ggT}(F, G) = 8X^2 + 8 &= X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 2 - (-\tfrac{1}{2}X - \tfrac{3}{2}) \cdot (-2X^3 + 4X^2 - 2X + 4) \\ &= G - (-\tfrac{1}{2}X - \tfrac{3}{2}) \cdot \big(F - (X - 1) \cdot G\big) \\ &= G - (-\tfrac{1}{2}X - \tfrac{3}{2})\,F + (-\tfrac{1}{2}X^2 - X + \tfrac{3}{2})\,G = (\tfrac{1}{2}X + \tfrac{3}{2})\,F + (-\tfrac{1}{2}X^2 - X + \tfrac{5}{2})\,G\,, \end{aligned}$$

also $\operatorname{ggT}(F, G) = SF + TG$ mit $S := \frac{1}{2}X + \frac{3}{2}$ und $T := -\frac{1}{2}X^2 - X + \frac{5}{2}$. •

Abschnitt 10.A, Aufg. 6, p. 278 (1.10.2011):

Sei K ein Körper. Dann gibt es stets unendlich viele normierte Primpolynome in $K[X]$.

Beweis; Besitzt K unendlich viele Elemente, so sind die Polynome $X-a$, $a \in K$, bereits unendlich viele normierte Primpolynome.

Ist K beliebig (also möglicherweise endlich), so schließen wir analog zum Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, vgl. Bd. 1, Satz 2.D.2. Angenommen, es gebe nur endlich viele normierte Primpolynome, etwa $P_1 = X, P_2 \ldots, P_r$ in $K[X]$. Dann ist $F := P_1 \cdots P_r + 1$ ein normiertes Polynom in $K[X]$, das von keinem der Polynome $P_1, \ldots, P_r$ geteilt wird. Nach Satz 10.A.9 lässt sich F wegen $\operatorname{Grad} F \geq 1$ als Produkt von Primpolynomen schreiben, von denen wir nach Multiplikation mit einer Konstanten annehmen können, dass sie normiert sind. Sie sind also von $P_1, \ldots, P_r$ verschieden, d.h. die Annahme, dass es außer $P_1, \ldots, P_r$ keine weiteren Primpolynome gibt, führt zu einem Widerspruch. •

Bemerkung: Man kann natürlich auch mit dem Ergebnis von Aufg. 9 schließen.

Abschnitt 10.A, Aufg. 8. b), p. 279 (1.10.2011):

$F \in K[X]$ sei ein von 0 verschiedenes Polynom. F zerfalle in Linearfaktoren. Genau dann sind alle Nullstellen von F einfach, wenn F und F' teilerfremd sind.

Lösung: Ist α eine mehrfache Nullstelle von F, d.h. ist $F(X) = (X-\alpha)^k G(X)$ mit $k \geq 2$ und einem Polynom $G(X)$, so liefert die Produktregel $F'(X) = \big((X-\alpha)^k G(X)\big)' = (X-\alpha)^{k-1}\big(kG(X) + (X-\alpha)G'(X)\big)$ mit $k-1 \geq 1$, d.h. $X-\alpha$ wäre ein gemeinsamer Teiler beider Polynome vom Grad ≥ 1, und F und F' wären nicht teilerfremd.

Seien umgekehrt F und F' nicht teilerfremd. Sie besitzen dann einen gemeinsamen Teiler und dann nach der Voraussetzung über F sogar einen gemeinsamen Linearfaktor $X-a$, $a \in K$. Dann ist $F(a) = F'(a) = 0$. Wir nehmen an, dass F nur einfache Nullstellen habe. Somit lässt sich F in der Form $F(X) = (X-\alpha)G$ mit einem Polynom G schreiben, für das $G(\alpha) \neq 0$ ist. Die Produktregel liefert dann $F'(X) = \big((X-a)\,G(X)\big)' = G(X) + (X-a)\,G'(X)$, d.h. den Widerspruch $F'(a) = G(a) \neq 0$. •

Abschnitt 10.A, Aufg. 17, p. 278 (1.10.2011):

Seien K ein Körper und A eine K-Algebra. Das Element $x \in A$ sei algebraisch über K vom Grade n mit dem Minimalpolynom

$$\mu_x = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 .$$

a) Genau dann ist x eine Einheit in A, wenn der konstante Term a_0 von μ_x von 0 verschieden ist. In diesem Fall ist

$$x^{-1} = -a_0^{-1}\,(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)\,.$$

Insbesondere ist dann x^{-1} ein Polynom in x.

b) Ist x eine Einheit in A, so ist

$$\frac{1}{a_0}\,X^n \mu_x\Big(\frac{1}{X}\Big) = X^n + \frac{a_1}{a_0}\,X^{n-1} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_0}\,X + \frac{1}{a_0}$$

das Minimalpolynom von x^{-1}.

c) Für $a \in K$ ist das Minimalpolynom von $x+a$ gleich $\mu_x(X-a)$ und, falls $a \neq 0$, dasjenige von ax gleich $a^n \mu_x(X/a)$.

Beweis: a) Ist $a_0 \neq 0$, so ist a_0 in K invertierbar und aus $0 = \mu_x(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ folgt $x\,(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1) = -a_0$ und somit $x\big(-a_0^{-1}(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)\big) = 1$. Daher ist x in A invertierbar mit dem angegebenen Inversen.

Ist umgekehrt x eine Einheit in A und wäre $a_0 = 0$, so folgte aus $0 = \mu_x(x) = x\,(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)$ durch Multiplikation mit x^{-1} bereits $x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0$ im Widerspruch dazu, dass der Grad von x gleich n ist.

b) Ist x eine Einheit in A, so folgt aus $0 = \mu_x(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ durch Multiplikation mit $a_0^{-1}(x^{-1})^n$ bereits $a_0^{-1} + a_0^{-1}a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_0^{-1}a_1(x^{-1})^{n-1} + (x^{-1})^n = 0$, d.h. das angegebene normierte Polynom vom Grade n annulliert x^{-1}. Gäbe es ein normiertes Polynom μ_1 mit $\operatorname{Grad}\mu_1 < n$, das x^{-1}

annulliert, so erhielte man daraus in analoger Weise ein normiertes Polynom vom Grad $<n$, das $x=(x^{-1})^{-1}$ annulliert, im Widerspruch dazu, dass der Grad von x gleich n ist.

c) $\mu_x(X-a)$ ist ebenfalls ein normiertes Polynom vom Grad n, das $x+a$ wegen $\mu_x\big((x+a)-a\big)=\mu_x(x)=0$ annulliert. Gäbe es ein normiertes Polynom μ_1 mit $\mu_1(x+a)=0$ und Grad $\mu_1<n$, so wäre $\mu_1(X+a)$ ein normiertes Polynom vom Grad $<n$, das x annulliert im Widerspruch dazu, dass der Grad von x gleich n ist.

Ferner ist $\widetilde{\mu}:=a^n\mu_x(X/a)$ ein normiertes Polynom vom Grad n mit $\widetilde{\mu}(ax)=a^n\mu_x(x)=0$. Gäbe es ein Polynom $\neq 0$ vom Grad $<n$, das x/a annulliert, so gewönne man daraus analog ein Polynom $\neq 0$ vom Grad $<n$, das $x=a(x/a)$ annullierte. •

Abschnitt 10.A, Zusatzaufgabe, p. 278 (1.10.2011):

Seien $F_1,\ldots F_n\in K[X]$ Polynome $\neq 0$ über dem Körper K, $n\geq 2$. Der größte gemeinsame Teiler $\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_n)$ ist das bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Polynom $F\in K[X]$, das alle F_i teilt und von jedem gemeinsamen Teiler der F_i geteilt wird. Offenbar ist $\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_n)=\operatorname{ggT}\big(\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_{n-1}),F_n\big)$. Man zeige: Es gibt Polynome $S_1,\ldots,S_n\in K[X]$ mit $S_1F_1+\cdots+S_nF_n=\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_n)$ (Lemma von Bezout).

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Der Fall $n=2$ ist Lemma 10.A.5. Beim Schluss von n auf n–1 auf n gibt es nach Induktionsvoraussetzung $\widetilde{S}_1,\ldots,\widetilde{S}_{n-1}\in K[X]$ mit $\widetilde{S}_1F_1+\cdots+\widetilde{S}_{n-1}F_{n-1}=\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_{n-1})$ und aus Lemma 10.A.5 ergibt sich die Existenz von $S,T\in K[X]$ mit $S\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_{n-1})+TF_n=\operatorname{ggT}\big(\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_{n-1}),F_n\big)=\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_n)$. Mit $S_i:=S\widetilde{S}_i$ für $i=1,\ldots,n-1$ und $S_n:=T$ folgt

$$\begin{aligned}S_1F_1+\cdots+S_nF_n&=S(\widetilde{S}_1F_1+\cdots+\widetilde{S}_{n-1}F_{n-1})+TF_n=S\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_{n-1})+TF_n\\&=\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_n)\,.\end{aligned}$$ •

Bemerkung: $\operatorname{ggT}(F_1,\ldots,F_n)$ erzeugt das Ideal $K[X]F_1+\cdots+K[X]F_n$, das nach Satz 10.A.23 a priori ein Hauptideal ist.

11 Eigenwerte · Charakteristisches Polynom · Minimalpolynom

Abschnitt 11.A, Teil von **Aufg. 1**, p. 305 (1.10.2011) :

Für die folgenden linearen Abbildungen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch ihre Matrizen bzgl. der Standardbasen gegeben werden, bestimme man charakteristisches Polynom und Minimalpolynom sowie Eigenwerte und Eigenräume:

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 \\ 10 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Im Fall der ersten Matrix $\mathfrak{A}$ ist das charakteristische Polynom von f gleich

$$\chi_f = \mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} X-6 & 5 & 3 \\ -3 & X+2 & 2 \\ -2 & 2 & X \end{pmatrix} = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)\,.$$

Die Eigenwerte von f sind daher 1 und 2.

Eigenvektoren von f zum Eigenwert 1 sind die Lösungen $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3$ von

$$(\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{d.h. von} \quad \begin{aligned} -5x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und erhalten:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 &= 0 \\ -\tfrac{1}{15}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{10}x_3 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \text{d.h.} \quad x_3 = 0,\ \ x_1 = x_2\,.$$

Der Eigenraum von f zum Eigenwert 1 ist also $\mathbb{R}\,{}^t(1,1,0)$.

Eigenvektoren von f zum Eigenwert 2 sind die Lösungen $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3$ von

$$(2\cdot\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{d.h. von} \quad \begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und erhalten:

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{5}{4}x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - \tfrac{5}{4}x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 &= 0 \\ \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3 &= 0 \\ -\tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \text{d.h.} \quad x_2 = x_3,\ \ x_1 = 2x_2\,.$$

Der Eigenraum von f zum Eigenwert 1 ist also $\mathbb{R}\,{}^t(2,1,1)$.

Die geometrische Multiplizität des Eigenwerts 1 ist (1), während seine algebraische Multiplizität (2) ist. Da beide ungleich sind, ist f nicht diagonalisierbar. Somit zerfällt das Minimalpolynom μ_f nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren und ist dann nach dem Satz von Cayley-Hamilton gleich χ_f.

Mit Hilfe des Blockmatrizensatzes sieht man, dass das charakteristische Polynom von f bei der zweiten Matrix die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} \chi_f &= \mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} X-5 & 2 & -3 & -6 \\ -10 & X+4 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & X-6 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & X-5 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} X-5 & 2 \\ -10 & X+4 \end{pmatrix}\ \mathrm{Det}\begin{pmatrix} X-6 & 10 \\ -3 & X-5 \end{pmatrix} \\ &= \big((X-5)(X+4)+20\big)\big((X-6)(X-5)+30\big) = X(X-1)(X^2-11X+60)\,. \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung $X^2-11X+60=0$ hat keine Lösungen in $\mathbb{R}$. Daher sind $\lambda_1=0$ und $\lambda_2=1$ die einzigen Eigenwerte von f. Das Minimalpolynom μ_f hat genau dieselben Primfaktoren wie χ_f (eventuell aber in geringer Vielfachheit). Da alle Primteiler von χ_f nur die Vielfachheit 1 haben, muss $\mu_f=\chi_f$ sein.

Der Eigenraum von f zum Eigenwert 0 besteht aus den Lösungen $\mathfrak{x}\in\mathbb{R}^4$ von

$$(0\cdot\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}-5&2&-3&-6\\-10&4&-6&-10\\0&0&-6&10\\0&0&-3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\,,\quad\text{d.h. von}\quad\begin{aligned}-5x_1+2x_2-3x_3-\ \ 6x_4&=0\\-10x_1+4x_2-6x_3-10x_4&=0\\-6x_3+10x_4&=0\\-3x_3-\ \ 5x_4&=0\ .\end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und erhalten:

$$\begin{aligned}5x_1-2x_2+3x_3+\ \ 6x_4&=0\\2x_4&=0\\6x_3-10x_4&=0\\10x_4&=0\ ,\end{aligned}\qquad\text{d.h.}\quad x_4=x_3=0,\quad x_1=\frac{2}{5}x_2\,.$$

Der Eigenraum von f zum Eigenwert 0 ist also $\mathbb{R}\,{}^t(2,5,0,0)$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 besteht aus den Lösungen $\mathfrak{x}\in\mathbb{R}^4$ von

$$(\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})\,\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}-4&2&-3&-6\\-10&5&-6&-10\\0&0&-5&10\\0&0&-3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\,,\quad\text{d.h. von}\quad\begin{aligned}-4x_1+2x_2-3x_3-\ \ 6x_4&=0\\-10x_1+5x_2-6x_3-10x_4&=0\\-5x_3+10x_4&=0\\-3x_3-\ \ 4x_4&=0\ .\end{aligned}$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren und erhalten:

$$\begin{aligned}4x_1-2x_2+3x_3+\ \ 6x_4&=0\\\tfrac{3}{2}x_3+\ \ 5x_4&=0\\5x_3-10x_4&=0\\-10x_4&=0\ ,\end{aligned}\qquad\text{d.h.}\quad x_4=x_3=0,\quad x_1=\frac{1}{2}x_2\,.$$

Der Eigenraum von f zum Eigenwert 1 ist also $\mathbb{R}\,{}^t(1,2,0,0)$. •

Abschnitt 11.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 305 (1.10.2011) :

Für die folgende lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, die durch ihre Matrix bzgl. der Standardbasen gegeben wird, bestimme man charakteristisches Polynom und Minimalpolynom sowie Eigenwerte und Eigenräume:

$$\begin{pmatrix}6&10&31&100\\-2&-3&-11&-36\\0&0&-1&-12\\0&0&1&6\end{pmatrix}.$$

Lösung: Mit Hilfe des Blockmatrizensatzes sieht man

$$\begin{aligned}\chi_f&=\operatorname{Det}(X\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})=\operatorname{Det}\begin{pmatrix}X-6&-10&-31&-100\\2&X+3&11&36\\0&0&X+1&12\\0&0&-1&X-6\end{pmatrix}\\&=\operatorname{Det}\begin{pmatrix}X-6&-10\\2&X+3\end{pmatrix}\operatorname{Det}\begin{pmatrix}X+1&12\\-1&X-6\end{pmatrix}\\&=\big((X-6)(X+3)+20\big)\big((X-1)(X-6)+12\big)=(X-1)(X-2)^2(X-3)\ .\end{aligned}$$

Daher sind $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ und $\lambda_3=3$ die Eigenwerte von f.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 besteht aus den Lösungen $\mathfrak{x}\in\mathbb{R}^4$ von

$$(\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}-5&-10&-31&-100\\2&4&11&36\\0&0&2&12\\0&0&-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\,,\quad\text{d.h. von}\quad\begin{aligned}-5x_1-10x_2-31x_3-100x_4&=0\\2x_1+\ \ 4x_2+11x_3+\ \ 36x_4&=0\\2x_3+12x_4&=0\\-x_3-\ \ 5x_4&=0\ .\end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen liefert $x_3 = -5x_4$. Eingesetzt in die vorletzte Gleichung ergibt dies $0 = 2x_3 + 12x_4 = 2x_4$, d.h. $x_4 = 0$, und $x_3 = 0$. Damit bekommen die ersten beiden Gleichungen die Form $-5x_1 - 10x_2 = 0$ und $2x_1 + 4x_2 = 0$. Die zweite dieser Gleichungen ist ein Vielfaches der ersten Gleichung, und man bekommt als Eigenraum von f zum Eigenwert 1 den Lösungsraum $\mathbb{R}\,{}^t(-2, 1, 0, 0)$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 2 besteht aus den Lösungen $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^4$ von

$$(2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -31 & -100 \\ 2 & 5 & 11 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{d.h. von} \quad \begin{aligned} -4x_1 - 10x_2 - 31x_3 - 100x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \ 5x_2 + 11x_3 + \ 36x_4 &= 0 \\ 4x_3 + 12x_4 &= 0 \\ -x_3 - \ 4x_4 &= 0\ . \end{aligned}$$

Die vorletzte dieser Gleichungen ist das (-3)-fache der letzten Gleichung. Diese ergibt $x_3 = -4x_4$. Eingesetzt in die beiden ersten Gleichungen bekommt man $-4x_1 - 10x_2 + 24x_4 = 0$, $2x_1 + 5x_2 - 8x_4 = 0$. Addition des Doppelten der zweiten dieser Gleichungen zur ersten liefert $8x_4 = 0$, d.h. $x_4 = 0$ und dann auch $x_3 = 0$. Die beiden Gleichungen bekommen so die Gestalt $-4x_1 - 10x_2 = 0$, $2x_1 + 5x_2 = 0$. Da wieder die erste Gleichung das (-2)-fache der zweiten ist, erhält man alle Lösungen in der Form $\mathbb{R}\,{}^t(-5, 2, 0, 0)$.

Der Eigenraum zum Eigenwert 3 besteht aus den Lösungen $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^4$ von

$$(3\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & -31 & -100 \\ 2 & 6 & 11 & 36 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{d.h. von} \quad \begin{aligned} -3x_1 - 10x_2 - 31x_3 - 100x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \ 6x_2 + 11x_3 + \ 36x_4 &= 0 \\ 4x_3 + 12x_4 &= 0 \\ -x_3 - \ 3x_4 &= 0\ . \end{aligned}$$

Die vorletzte dieser Gleichungen ist das (-4)-fache der letzten Gleichung. Diese ergibt $x_3 = -3x_4$. Eingesetzt in die beiden ersten Gleichungen bekommt man $-3x_1 - 10x_2 - 7x_4 = 0$, $2x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0$. Addition des $\frac{3}{2}$-fachen der zweiten dieser Gleichungen zur ersten liefert $-x_2 - \frac{5}{2}x_4 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{2}x_4$ und schließlich $x_1 = -3x_2 - \frac{3}{2}x_4 = 6x_4$. Der Lösungsraum ist also $\mathbb{R}\,{}^t(12, -5, -6, 2)$.

Das Minimalpolynom von f ist gleich dem charakteristischen Polynom, da es dieselben Linearfaktoren (nur eventuell in geringerer Vielfachheit) wie χ_f haben muss, also nur gleich $(X-1)(X-2)(X-3)$ oder gleich $(X-1)(X-2)^2(X-3)$ sein kann. Einsetzen ergibt

$$(\mathfrak{A} - \mathfrak{E}_4)(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{E}_4)(\mathfrak{A} - 3\mathfrak{E}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -40 & -120 \\ 0 & 0 & 16 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Daher ist $\mu_f = \mu_{\mathfrak{A}} = (X-1)(X-2)^2(X-3)$. Man könnte hier auch schneller argumentieren, dass f nicht diagonalisierbar ist, weil die geometrische Multiplizität des Eigenwerts 2 nur 1 ist, seine algebraische Multiplizität aber 2, also $\neq 1$, vgl. Abschnitt 11.B Dann kann aber μ_f nicht in paarweise verschieden Linearfaktoren zerfallen. •

Abschnitt 11.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 305 (1.10.2011) :

Man berechne Eigenwerte und Eigenräume sowie charakteristisches Polynom und Minimalpolynom der folgenden linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) $f(x_1, x_2, x_3) := (2x_1 - x_2 + x_3\,,\, 3x_1 - 2x_2 + x_3\,,\, x_1 - x_2)$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) := (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3\,,\, -x_2\,,\, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$.

c) $f(x_1, x_2, x_3) := (-2x_1 - x_2\,,\, 2x_1 + 2x_2 - 3x_3\,,\, 3x_1 + x_2 + x_3)$.

d) $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_2\,,\, x_2\,,\, x_1 + x_2 + 3x_3)$.

Lösung: a) Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{e_1, e_2, e_3}_{e_1, e_2, e_3}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $\chi_f = \chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -1 \\ -3 & X+2 & -1 \\ -1 & 1 & X \end{vmatrix} = X^3 - 4X + 1 + 3 - (X+2) + (X-2) + 3X =$

$X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ und den Eigenwerten $0\,,\,1\,,\,-1$. Der Eigenraum zu 0 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}-2&1&-1\\-3&2&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}-2x_1+x_2-x_3=0\,,\\-3x_1+2x_2-x_3=0\,,\\-x_1+x_2=0\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1=x_2=-x_3\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu 1 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1-2&1&-1\\-3&1+2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}-x_1+x_2-x_3=0\,,\\-3x_1+3x_2-x_3=0\,,\\-x_1+x_2+x_3=0\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1=x_2\,,\,x_3=0\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu -1 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1-2&1&-1\\-3&1+2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}-3x_1+x_2-x_3=0\,,\\-3x_1+x_2-x_3=0\,,\\-x_1+x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1=0\,,\,x_2=x_3\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Da f drei verschiedene Eigenwerte besitzt und diese alle auch Nullstellen des Minimalpolynoms μ_f von f sind, muss μ_f bereits gleich dem charakteristischen Polynom $X^3 - X$ sein.

b) Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix}-3&2&-4\\0&-1&0\\2&-2&3\end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $\chi_f = \chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix}X+3&-2&4\\0&X+1&0\\-2&2&X-3\end{vmatrix} = (X+1)(X^2-9+8) = (X+1)^2(X-1)$ und den Eigenwerten 1 und -1. Der Eigenraum zu 1 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}1+3&-2&4\\0&1+1&0\\-2&2&1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}4x_1-2x_2+4x_3=0\,,\\2x_2=0\,,\\-2x_1+2x_2-2x_3=0\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_2=0\,,\,x_1=-x_3\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu -1 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix}-1+3&-2&4\\0&-1+1&0\\-2&2&-1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix}2x_1-2x_2+4x_3=0\,,\\0=0\,,\\-2x_1+2x_2-4x_3=0\end{matrix}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \,\middle|\, x_1=x_2-2x_3\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Da die geometrische Multiplizität jedes der beiden Eigenwerte von f gleich seiner algebraischen Multiplizität ist, ist f diagonalisierbar, vgl. 11.B. Daher ist das Minimalpolynom μ_f von f ein Produkt paaarweise teilerfremder Linearfaktoren. Da μ_f dieselben Nullstellen wie χ_f hat, muss $\mu_f = (X+1)(X-1) = X^2-1$ sein.

c) Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f) = \begin{pmatrix}-2&-1&0\\2&2&-3\\3&1&1\end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $\chi_f = \chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix}X+2&1&0\\-2&X-2&3\\-3&-1&X-1\end{vmatrix} = (X^2-4)(X-1) - 9 + 3(X+2) + 2(X-1) =$

$(X-1)(X^2+1)$ und 1 als einzigem Eigenwert (über $\mathbb{R}$). Der zugehörige Eigenraum ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}1+2&1&0\\-2&1-2&3\\-3&-1&1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{matrix}3x_1+x_2=0\,,\\-2x_1-x_2+3x_3=0\,,\\-3x_1-x_2=0\end{matrix}\right\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-3\\9\\1\end{pmatrix}.$$

Da das Minimalpolynom μ_f das charakteristische Polynom χ_f teilt und dieselben Primteiler besitzt, muss μ_f bereits gleich dem charakteristischen Polynom $(X-1)(X^2+1)$ sein.

d) Die Matrix von f bzgl. der Standardbasis ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&3\end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $\chi_f=\chi_{\mathfrak{A}}=\begin{vmatrix}X-1&-1&0\\0&X-1&0\\-1&-1&X-3\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix}X-1&0\\-1&X-3\end{vmatrix}=(X-1)^2(X-3)$ und den Eigenwerten 1 und 3. Der Eigenraum zu 1 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}1-1&-1&0\\0&1-1&0\\-1&-1&1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{matrix}-x_2=0\,,\\-x_1-x_2-2x_3=0\end{matrix}\right\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Der Eigenraum zu 3 ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}3-1&-1&0\\0&3-1&0\\-1&-1&3-\;3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{matrix}2x_1-x_2=0\,,\\2x_2=0\,,\\-x_1-x_2=0\end{matrix}\right\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Da die geometrische Multiplizität des Eigenwerts 1 nur 1 und damit kleiner als die geometrische Multiplizität 2 ist, ist f nicht diagonalisierbar und somit μ_f nicht Produkt paarweise teilerfremder Linearfaktoren, vgl. Abschnitt 11.B. Da μ_f ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_f=(X-1)^2(X-3)$ ist, muss daher $\mu_f=(X-1)^2(X-3)$ sein. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 2, p. 305 (1.10.2011):

Sei V der Vektorraum $\mathbb{K}[t]_n$ der Polynomfunktionen vom Grad $<n$. Für die Operatoren $f\mapsto f'$ bzw. $f(t)\mapsto f(t+1)$ bestimme man charakteristisches Polynom und Minimalpolynom sowie Eigenwerte und Eigenräume.

Lösung: Die Matrix des Operators $D:f\mapsto f'$ bzgl. der Basis $1,t,t^2,\ldots,t^{n-1}$ von $\mathbb{K}[t]_n$ ist wegen $(t^j)'=jt^{j-1}$ für $j=1,\ldots,n-1$ gleich

$$\mathfrak{A}:=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&2&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&i&0&\cdots&0&\\0&0&0&\cdots&0&0&i+1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\vdots&&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&n-1\\0&0&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $\chi_D=\operatorname{Det}(X\mathfrak{E}_n-\mathfrak{A})=X^n$. Daher ist 0 der einzige Eigenwert und wegen $\operatorname{Grad} f'=\operatorname{Grad} f-1$ für $\mathbb{K}[t]_n$ werden nur die Konstanten durch das Differenzieren D auf 0 abgebildet. Daher besteht der Eigenraum von D zu 0 nur aus den konstanten Polynomen. Wegen $D^{n-1}(t^{n-1})=(n-1)!\neq 0$ ist $D^{n-1}\neq 0$. Als Teiler des charakteristischen Polynoms ist das Minimalpolynom von D somit gleich dem charakteristischen Polynom $\chi_D=X^n$.

Die Matrix von $F:f(t)\mapsto f(t+1)$ bzgl. der Basis $1,t,t^2,\ldots,t^{n-1}$ von $\mathbb{K}[t]_n$ ist wegen $t^j=\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}t^i$ für $j=1,\ldots,n-1$ gleich

$$\mathfrak{B} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & j-1 & j & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{i}{i-1} & \binom{i+1}{i-1} & \cdots & \binom{n-1}{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{i+1}{i} & \cdots & \binom{n-1}{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist also $\chi_F = \operatorname{Det}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{B}) = (X-1)^n$, und 1 ist der einzige Eigenwert des Operators. Wegen $(t+1)^j - t^j = jt^{j-1} + \cdots$ ist $\operatorname{Grad}(F-\mathrm{id})(f) = \operatorname{Grad} f(t+1) - f(t) = \operatorname{Grad} f(t) - 1$ für $f \in \mathbb{K}[t]_n$. Daher ist $(F-\mathrm{id})^{n-1}(t^{n-1}) = (n-1)! \neq 0$, also $(F-\mathrm{id})^{n-1} \neq 0$. Als Teiler des charakteristischen Polynoms χ_F muss das Minimalpolynom von F daher gleich $\chi_F = (X-1)^n$ sein. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 3, p. 305 (1.10.2011) :

Sei D der Differenziationsoperator $f \mapsto f'$ auf dem Vektorraum $C^\infty_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ der unendlich oft differenzierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Man bestimme Eigenwerte, Spektralwerte und Eigenräume von D.

Lösung: Jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert von D, da die lineare Differenzialgleichung $D(y) = \lambda y$, also $y' - \lambda y = 0$, nach Bd. 1, Abschnitt 19.C genau die Lösungen $ce^{\lambda x}$, $c \in \mathbb{K}$, hat. Der zugehörige Eigenraum ist also $\mathbb{K}e^{\lambda x}$. Insbesondere ist auch jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ Spektralwert von D. •

Abschnitt 11.A, Variante zu **Aufg. 3**, p. 305 (1.10.2011) :

Sei $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = (X-\lambda_1)^{k_1} \cdots (X-\lambda_m)^{k_m}$ ein Polynom mit den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ sowie den paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, die jeweils die Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_m > 0$ haben. V bezeichne den $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexwertigen Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1\dot{y} + a_0 y = 0$ mit konstanten Koeffizienten. Dann definiert das Differenzieren $D(y) := \dot{y}$ eine lineare Abbildung $D: V \to V$. Man gebe dafür Minimalpolynom und charakteristisches Polynom sowie Eigenwerte und Eigenräume an.

Lösung: Für $y \in V$ ist $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1\dot{y} + a_0 y = 0$. Durch Differenzieren folgt daraus sofort $(\dot{y})^{(n)} + a_{n-1}(\dot{y})^{(n-1)} + \cdots a_1\ddot{y} + a_0\dot{y} = 0$, d.h. $D(y) = \dot{y} \in V$. Wegen der üblichen Differenziationsrechenregeln ist $D: V \to V$ auch $\mathbb{C}$-linear.

Nach Konstruktion ist $V = \operatorname{Kern} P(D)$, d.h. auf V ist $P(D) = 0$, und nach Bd. 1, Satz 19.D.6 ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $k_1 + \cdots + k_m = n$. Aus der Definition des Minimalpolynom μ_D von $D: V \to V$ folgt, dass μ_D ein Teiler von P ist. Wäre dies ein echter Teiler, so wäre der Grad von μ_D kleiner als der Grad n von P. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Lösungsraum $\operatorname{Kern} \mu_D(D)$ der linearen Differenzialgleichung $\mu_D(D)$einerseits nach Definition von μ_D ganz V ist, andererseits aber nur die Dimension $\operatorname{grad} \mu_D < n$ hat. Daher haben P und μ_D den gleichen Grad. Da beide normiert sind, folgt $\mu_D = P$.

Das charakteristische Polynom χ_D von $D: V \to V$ hat den Grad $\dim V = n$, also denselben Grad wie μ_D, Nach dem Satz von Cayley-Hamilton von μ_D ist es daher bereits gleich χ_D.

Die Eigenwerte von $D: V \to V$ sind die Nullstellen von $\chi_D = P$, also $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Die zugehörigen Eigenräume sind definitionsgemäß die Räume $\operatorname{Kern}(\lambda_1 \mathrm{id} - D), \ldots, \operatorname{Kern}(\lambda_m \mathrm{id} - D)$. Genau dann ist nun $y \in \operatorname{Kern}(\lambda_i \mathrm{id} - D)$, wenn y die Differenzialgleichung $(\lambda_i \mathrm{id} - D)(y) = 0$, d.h. $\dot{y} = \lambda_i y$, erfüllt. Dies sind genau die Funktionen $y \in \mathbb{C}e^{\lambda_i t}$. •

Bemerkung: Man vergleiche hierzu auch die Verallgemeinerung in 11.E, Aufg. 6.

Abschnitt 11.A, Aufg. 4, p. 305 (1.10.2011) :

Für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei S der Integrationsoperator $f \longmapsto \big(t \mapsto \int_0^t f(\tau)\,d\tau\big)$ auf dem Raum $C^k_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ der k-mal stetig differenzierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann besitzt S keine Eigenwerte und 0 als einzigen Spektralwert.

Lösung: Für ein $f \in C^k_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ mit $S(f) = 0$ erhält man sofort $f = 0$ durch Differenzieren nach der oberen Grenze des Integrals, vgl. Bd. 1, Satz 16.C.1. Daher ist f injektiv und somit 0 kein Eigenwert von S. Der

Operator S ist jedoch nicht surjektiv, und folglich ist 0 ein Spektralwert von S. Für $g \in C^k_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ folgt aus $S(f) = g$ nämlich $g(0) = \int_0^0 f(\tau)\, d\tau = 0$, d.h. kein g mit $g(0) \neq 0$ liegt in Bild f.

Sei von nun an $\lambda \neq 0$. Wir zeigen, dass λ kein Eigenwert von S ist, d.h. dass $S - \lambda\,\mathrm{id}$ injektiv ist: Für ein $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $S(f) - \lambda f = 0$ gilt nämlich $f(0) = \lambda^{-1} S(f)(0) = \lambda^{-1} \int_0^0 f(\tau)\, d\tau = 0$ und $\int_0^t f(\tau)\, d\tau - \lambda f = 0$. Differenzieren liefert $f - \lambda f' = 0$, d.h. $f' = \lambda^{-1} f$. Lösungen dieser Differenzialgleichung haben die Form $f(t) = ce^{\lambda^{-1} t}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{K}$. Wegen $f(0) = 0$ ist aber $c = 0$ und folglich $f = 0$. – Nun zeigen wir, dass $\lambda \neq 0$ auch kein Spektralwert ist, d.h. dass $\lambda\,\mathrm{id} - S$ surjektiv ist. Sei dazu $g \in C^k_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ vorgegeben. Zunächst betrachten wir den Fall $k \geq 1$, d.h. g ist stetig differenzierbar. Dann ist die (eindeutig bestimmte) Lösung f der linearen Differenzialgleichung $y' = \lambda^{-1} y - \lambda^{-1} g'$ mit $f(0) = -\lambda^{-1} g(0)$, vgl. Bd. 1, Satz 19.B.1, eine C^k-Funktion auf $\mathbb{R}$ und ein Urbild von g wegen

$$\begin{aligned}(\lambda\,\mathrm{id} - S)(f)(t) &= \lambda f(t) - \int_0^t f(\tau)\, d\tau = \lambda f(t) - \int_0^t (\lambda f'(\tau) + g'(\tau))\, d\tau \\ &= \lambda f(t) - \big(\lambda f(t) + g(t)\big) + \big(\lambda f(0) + g(0)\big) = g(t)\,.\end{aligned}$$

Sei schließlich $k = 0$, d.h. g sei nur stetig. Sei φ_n eine stetige Funktion, die für $|t| \leq n$ identisch 1 ist und für $|t| \geq n+1$ verschwindet. Haben wir $\varphi_n g \in \mathrm{Bild}\,(\lambda\,\mathrm{id} - S)$ gezeigt, so gibt es $h_n \in C^0_{\mathbb{K}}(\mathbb{R})$ mit $(\lambda\,\mathrm{id} - S)(h_n) = \varphi_n\, g$. Sei dann $a \geq 0$. Für $n, m \geq a$ und $t \in [-a, a]$ erhält man wegen $\varphi_n(t) = \varphi_m(t) = 1$ $\lambda(h_n - h_m)(t) - \int_0^t (h_n - h_m)(\tau)\, d\tau = (\varphi_n - \varphi_m)(t)\, g(t) = 0$. Da $h_n - h_m$ stetig ist, ist $h_n - h_m$ sogar stetig differenzierbar, und auf [-a,a] gilt $(h_n - h_m)' = \lambda^{-1}(h_n - h_m)$, d.h. $(h_n - h_m)(t) = ce^{t\lambda^{-1}}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{K}$. Für $t = 0$ ergibt sich $c = h_n(0) - h_m(0) = \int_0^0 (h_n - h_m)(\tau)\, d\tau = 0$. Daher ist $h_n(t) = h_m(t)$ für $t \in [-a, a]$. Setzen wir $h(t) := \lim_{n\to\infty} h_n(t)$, so ist h also eine stetige Funktion, und wählt man n zu gegebenem t hinreichend groß, so gilt $(\lambda\,\mathrm{id} - S)(h)(t) = (\lambda\,\mathrm{id} - S)(h_n)(t) = \varphi_n(t)\, g(t) = g(t)$, d.h. $g \in \mathrm{Bild}(\lambda\,\mathrm{id} - S)$.

Wir haben noch $\varphi_n g \in \mathrm{Bild}(\lambda\,\mathrm{id} - S)$ zu zeigen. Sei dazu allgemein $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die außerhalb eines kompakten Intervalls $[-a, a]$ verschwindet. Nach Bd. 1, Satz 10.D.8 ist g dann sogar gleichmäßig stetig, lässt sich also durch eine gleichmäßig konvergente Folge stückweise linearer Funktionen ℓ_n approximieren, die außerhalb $[-a, a]$ von verschwinden, vgl. Bd. 1, 12.A, Aufg. 17c). Diese sind überall stetig differenzierbar mit Ausnahme endlich vieler Stellen $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, und lassen sich somit ganz elementar gleichmäßig durch stetig differenzierbare Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ approximieren, die außerhalb von $[-a-1, a+1]$ verschwinden.(Man überbrücke eventuelle Ecken z. B. durch geeignete Kreisbögen.) Nach Konstruktion konvergiert auch die Folge (g_n) gleichmäßig gegen g. Wie oben gezeigt, gibt es nun stetige Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(\lambda\,\mathrm{id} - S)(f_n) = g_n$, nämlich die Lösungen

$$f_n(t) = e^{\lambda^{-1} t}\Big(-g_n(0)\lambda^{-1} - \int_0^t e^{-\lambda^{-1}\tau}\, g_n'(\lambda^{-1}\tau)\, d\tau\Big)$$

des Anfangswertproblems $y' = \lambda^{-1} y - \lambda^{-1} g',\;\; y(0) = -\lambda^{-1} g_n(0)$.

Wir zeigen mit Hilfe partieller Integration, dass auch die Folge (f_n) auf einem kompakten Intervall $[-a, a]$ gleichmäßig konvergiert. Für $n, m \geq n_0$ mit $\|g_m - g_n\|_{[-a,a]} \leq \varepsilon'$ und $t \in [-a, a]$ gilt

$$\begin{aligned} f_n(t) - f_m(t) &= \lambda^{-1} e^{\lambda^{-1} t}\Big((g_m - g_n)(0) + \int_0^t e^{-\lambda^{-1}\tau}\, (g_m - g_n)'(\tau)\, d\tau\Big) \\ &= \lambda^{-1} e^{\lambda^{-1} t}\Big((g_m - g_n)(0) + e^{-\lambda^{-1} t}(g_m - g_n)(t) - (g_m - g_n)(0) + \lambda^{-1} \int_0^t e^{-\lambda^{-1}\tau}\, (g_m - g_n)(\tau)\, d\tau\Big) \\ &= \lambda^{-1}(g_m - g_n)(t) + \lambda^{-2} e^{\lambda^{-1} t} \int_0^t e^{-\lambda^{-1}\tau}\, (g_m - g_n)(\tau)\, d\tau\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_m(t)| &\leq |\lambda|^{-1}\varepsilon' + |\lambda|^{-2} e^{\lambda^{-1} t}\, \varepsilon'\, \Big|\int_0^t e^{-\lambda^{-1}\tau}\, d\tau\Big| = |\lambda|^{-1}\varepsilon' + |\lambda|^{-2} e^{\lambda^{-1} t}\, \varepsilon'\, |\lambda(1 - e^{-\lambda^{-1} t})| \\ &= \varepsilon'\, |\lambda|^{-1}\big(1 + |e^{\lambda^{-1} t} - 1|\big) \leq \varepsilon'\, \big(2 + |\lambda|^{-1} e^{|\lambda|^{-1} a}\big) = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

falls $\varepsilon' := \varepsilon\, |\lambda| \big/ \big(1 + |\lambda|^{-1} |e^{\lambda^{-1} t}\big)$ zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gewählt wurde. Nach Bd. 1, Korollar 12.A.11 ist die Grenzfunktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ nun ebenfalls stetig, und mit Satz 16.B.14 erhält man aus $(\lambda\,\mathrm{id} - S)(f_n) = g_n$ durch Grenzübergang mit Bd. 1, Satz 16.B.14 wie gewünscht $(\lambda\,\mathrm{id} - S)(f) = g$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 6, p. 306 (1.10.2011) :

Sei f ein Operator auf dem n-dimensionalen K-Vektorraum V. Der Grad von μ_f sei m.

a) Es ist $\chi_{f+a\,\mathrm{id}}(X) = \chi_f(X-a)$ und $\mu_{f+a\,\mathrm{id}}(X) = \mu_f(X-a)$, $a \in K$.

b) Es ist $\chi_{af}(X) = a^n \chi_f(X/a)$ und $\mu_{af}(X) = a^m\, \mu_f(X/a)$, $a \in K^\times$.

c) Ist f invertierbar, so ist $\chi_{f^{-1}}(X) = \dfrac{(-1)^n}{\mathrm{Det}\, f} X^n\, \chi_f(1/X)$ und $\mu_{f^{-1}}(X) = \dfrac{1}{a_0} X^m\, \mu_f(1/X)$, wo a_0 der konstante Term von μ_f ist.

Beweis: Die Aussagen über das Minimalpolynom wurden schon im allemeineren Zusammenhang von 10.A, Aufg. 17b) und c) bewiesen. – f werde nun bzgl. einer Basis von V durch die $n\times n$-Matrix $\mathfrak{A}$ beschrieben.

a) $f + a\,\mathrm{id}_V$ wird durch die Matrix $\mathfrak{A} + a\mathfrak{E}_n$ beschrieben. Es folgt:

$$\chi_{f+a\,\mathrm{id}}(X) = \mathrm{Det}\,\big(X\mathfrak{E}_n - (\mathfrak{A} + a\mathfrak{E}_n)\big) = \mathrm{Det}\,\big((X-a)\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}\big) = \chi_f(X-a)\,.$$

b) af wird durch die Matrix $a\mathfrak{A}$ beschrieben. Es folgt:

$$\chi_{af}(X) = \mathrm{Det}\,(X\mathfrak{E}_n - a\mathfrak{A}) = \mathrm{Det}\,\big(a\big((X/a)\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}\big)\big) = a^n\,\mathrm{Det}\,\big((X/a)\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}\big) = a^n \chi_f(X/a)\,.$$

c) f^{-1} wird durch die Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ beschrieben. Mit dem Determinantenproduktsatz folgt daraus:

$$\chi_{f^{-1}}(X) = \chi_{\mathfrak{A}^{-1}}(X) = \mathrm{Det}\,\big(X\,E_n - \mathfrak{A}^{-1}\big) = \mathrm{Det}\,\big(X\,(\mathfrak{A} - X^{-1}\mathfrak{E}_n)\,\mathfrak{A}^{-1}\big) = X^n\,\mathrm{Det}\,\big(\mathfrak{A} - X^{-1}\mathfrak{E}_n\big)\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}^{-1}$$

$$= X^n(-1)^n\,\mathrm{Det}\,\big(X^{-1}\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}\big)\,(\mathrm{Det}\,\mathfrak{A})^{-1} = \frac{(-1)^n}{\mathrm{Det}\, f}\, X^n\, \chi_f\Big(\frac{1}{X}\Big)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, Aufg. 7, p. 306 (1.10.2011) :

Seien V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein linearer Operator mit Minimalpolynom μ_f.

a) Genau dann ist f eine Projektion, wenn μ_f ein Teiler von $X(X-1) = X^2 - X$ ist.

b) Genau dann ist f eine Involution, wenn μ_f ein Teiler von $(X+1)(X-1) = X^2 - 1$ ist.

c) Für eine Projektion bzw. Involution auf einem endlichdimensionalen Vektorraum gebe man die charakteristischen Polynome an.

Beweis: a), b) Nach Definition ist f genau dann eine Projektion (bzw. Involution), wenn $f^2 - f = 0$ (bzw. $f^2 - \mathrm{id}_V = 0$) ist, d.h. wenn μ_f ein Teiler von $X^2 - X$ (bzw. $X^2 - 1$) ist.

c) Sei $n := \mathrm{Dim}_K V$ und f zunächst eine Projektion. Nach 8.A, Aufg. 9a) gibt es eine Basis von V bzgl. der f durch eine $n\times n$-Diagonalmatrix $\mathfrak{A}$ beschrieben wird, in deren Hauptdiagonale $r := \mathrm{Dim\,Bild}\, f$ Einsen und $n-r = \mathrm{Dim\,Kern}\, f$ Nullen stehen. Daher ist $\chi_f(X) = \mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}) = (X-1)^r X^{n-r}$.

Sei nun f eine Involution. Ist $\mathrm{Char}\, K \neq 2$, so gibt es nach 8.A, Aufg. 9b) eine Basis von V bzgl. der f durch eine $n\times n$-Diagonalmatrix $\mathfrak{A}$ beschrieben wird, in deren Hauptdiagonale $r := \mathrm{Dim}\, V_+$ Einsen und $n-r = \mathrm{Dim}\, V_-$ Minus-Einsen, wo $V_+ = \{x \in V \mid f(x) = x\}$, $V_- = \{x \in V \mid f(x) = -x\}$ die Eigenräume zu 1 bzw. -1 sind. Es folgt $\chi_f(X) = \mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}) = (X-1)^r(X+1)^{n-r}$. Bei $\mathrm{Char}\, K = 2$ ist μ_f ein Teiler von $X^2 - 1 = (X-1)^2$. Nach Satz 11.A.14 hat das charakteristische Polynom bei $V \neq 0$ dann den einzigen normierten Primfaktor $X-1$, d.h. es ist $\chi_f = (X-1)^n$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 8, p. 306 (1.10.2011) :

Sei $f : V \to V$ ein Operator vom Rang r auf dem n-dimensionalen K-Vektorraum V.

a) χ_f wird von X^{n-r} geteilt. **b)** μ_f hat einen Grad $\leq r+1$.

Beweis: a) Die Rangsatz 5.E.1 liefert $\dim_K \mathrm{Kern}\, f = \dim_K V - \dim_K \mathrm{Bild}\, f = n - r$. Außerdem ist $\mathrm{Kern}\, f$ ein f-invarianter Unterraum von V, da für $x \in \mathrm{Kern}\, f$ stets gilt $f(x) = 0 \in \mathrm{Kern}\, f$. Daher ist das charakteristische Polynom $\chi_{f\,|\,\mathrm{Kern}\, f}$ von $f\,|\,\mathrm{Kern}\, f : \mathrm{Kern}\, f \to \mathrm{Kern}\, f$ nach Lemma 11.A.8 (1) ein Teiler des charakteristischen Polynoms χ_f von f. Da $f\,|\,\mathrm{Kern}\, f = 0$ ist, wird dieser Endomorphismus durch die Nullmatrix beschrieben und hat somit das charakteristische Polynom $X^{\dim \mathrm{Kern}\, f} = X^{n-r}$, d.h. X^{n-r} teilt χ_f.

Da $f\,|\,\mathrm{Kern}\, f$ das Minimalpolynom X oder 1 hat und da das Minimalpolynom $\mu_{\overline{f}}$ des induzierten Operators $\overline{f} : V/\mathrm{Kern}\, f \to V/\mathrm{Kern}\, f$ höchstens den Grad $\mathrm{Dim}_K V/\mathrm{Kern}\, f = \mathrm{Dim}_K V - \mathrm{Dim}_K \mathrm{Kern}\, f = r$ hat, hat μ_f nach Lemma 11.A.8 (2) als Teiler von $\mu_{\overline{f}} \cdot \mu_{f\,|\,\mathrm{Kern}\, f}$ höchstens den Grad $r+1$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 9, p. 307 (1.10.2011) :

a) Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Das charakteristische Polynom der $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

ist $(X+b-a)^{n-1}(X-a-(n-1)b)$. Man bestimme auch das Minimalpolynom und, falls sie invertierbar ist, das Inverse dieser Matrix.

Beweis: Wir verwenden die erste Determinantenformel aus 9.D, Aufg. 28 zur Berechnung des charakteristisches Polynoms der Matrix:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} X-a & -b & \cdots & -b \\ -b & X-a & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & -b & \cdots & X-a \end{pmatrix} = \big(X-a-(n-1)b\big)(X-a+b)^{n-1}.$$

Bei $n=1$ hat sie das Minimalpolynom $X-a$ und ist genau dann invertierbar (mit Inversem (a^{-1}), wenn $a \neq 0$ ist. Sei also $n \geq 2$. Bei $b=0$ ist die Matrix die Diagonalmatrix $\operatorname{Diag}(a,\ldots,a)$ und somit genau dann invertierbar, wenn $a \neq 0$ ist. Dann ist ihr Inverses $\operatorname{Diag}(a^{-1},\ldots,a^{-1})$. Zur Bestimmung des Minimalpolynoms verwenden wir bei $b \neq 0$ Beispiel 11.A.21 mit der durch $g(e_j) := \mathfrak{b} := {}^t(b,\ldots,b)$ für $j=1,\ldots,n$ definierten linearen Abbildung $g: K^n \to K^n$ vom Rang 1. Sie wird bzgl. der Standardbasis durch die Matrix $\mathfrak{B} = (b_{ij})$ mit $b_{ij} := b$ für alle i, j beschrieben und hat die Spur nb. Es gilt $g^2(e_j) = g(\mathfrak{b}) = \sum_{j=1}^n bg(e_j) = nb\mathfrak{b} = nbg(e_j)$ für alle j. Die angegebene Matrix beschreibt nun $g + (a-b)\,\mathrm{id}_V$ bezüglich der Standardbasis. Beispiel 11.A.21 liefert dann (mit $a-b$ statt a und nb statt b), dass das Polynom $\big(X-(a-b)\big)\big(X-(a-b+nb)\big) = (X-a+b)(X-a-(n-1)b)$ das Minimalpolynom von $g+(a-b)\,\mathrm{id}_V$ und damit der angegebenen Matrix $\mathfrak{B}+(a-b)\mathfrak{E}_n$ ist. (Man hätte auch durch Einsetzen direkt prüfen können, dass dieses Polynom die Matrix annulliert, und dann ausnutzen, dass das Minimalpolynom die gleichen Primteiler wie das charakteristische Polynom hat, nur eventuell in kleinerer Vielfachheit.) Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn der konstante Term $(a-b)\big(a+(n-1)b\big)$ dieses Minmalpolynoms $\neq 0$ ist, d.h. wenn $a \neq b$ und $a \neq -(n-1)b$ gilt. In diesem Fall ist das Inverse dieser Matrix nach Beispiel 11.A.21 wegen $b_{ij} - \big((a-b)+nb\big) = -a-(n-2)b$ gleich

$$(\mathfrak{B}+(a-b)\mathfrak{E}_n)^{-1} = \frac{-1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} -a-(n-2)b & b & \cdots & b \\ b & -a-(n-2)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & b-a-(n-2)b \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(a-b)(a+(n-1)b)}\begin{pmatrix} a+(n-2)b & -b & \cdots & -b \\ -b & a+(n-2)b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b & -b & \cdots & a+(n-2)b \end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, Aufg. 10, p. 307 (1.10.2011) :

Sei f ein linearer Operator auf dem K-Vektorraum V. In den Teilen c) und d) dieser Aufgabe sei $\operatorname{Dim}_K V = n \in \mathbb{N}$.

a) Genau dann ist f nilpotent, wenn μ_f eine Potenz von X ist.

b) Genau dann ist f unipotent, d.h. $f - \mathrm{id}$ nilpotent, wenn μ_f eine Potenz von $X-1$ ist.

c) Genau dann ist f nilpotent, wenn $\chi_f = X^n$ ist.

d) Genau dann ist f unipotent, wenn $\chi_f = (X-1)^n$ ist.

Beweis: a) Genau dann ist f nilpotent, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$ gibt, also das Polynom X^m von dem Operator f annulliert wird. Nach Satz 11.A.6 bedeutet dies, dass μ_f ein Teiler von X^m, also ebenfalls eine Potenz von X ist.

b) ergibt sich unmittelbar aus a), angewandt auf $f - \mathrm{id}$.

c) Ist $\chi_f = X^n$, so ist $f^n = 0$ nach dem Satz 11.A.7 von Cayley-Hamilton und f somit nilpotent. Ist umgekehrt f nilpotent, so ist μ_f nach a) eine Potenz von X und dann nach Satz 11.A.14 auch χ_f, also $\chi_f = X^n$. – d) folgt wieder unmittelbar aus c). •

Abschnitt 11.A, Aufg. 12, p. 307 (1.10.2011) :

Seien f und g vertauschbare Operatoren auf dem K-Vektorraum V mit $\mathrm{Dim}_K V = n$, $n \in \mathbb{N}$, der Operator g sei nilpotent. Dann gilt $\chi_{f+g} = \chi_f$ und insbesondere $\mathrm{Det}\,(f+g) = \mathrm{Det}\, f$ sowie $\mathrm{Sp}\,(f+g) = \mathrm{Sp}\, f$.

Beweis: Es genügt, die analoge Aussage für $n\times n$-Matrizen zu beweisen. Seien also $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $n\times n$-Matrizen mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^n = 0$. Dann ist $\mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})$ ein Polynom vom Grad n, also $\neq 0$, also $X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}$ in $\mathrm{M}_n(K(X))$ invertierbar, und aus $(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})\mathfrak{B} = X\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} = X\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})$ folgt $(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}$ und dann $\big((X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{B}\big)^n = (X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-n}\mathfrak{B}^n = 0$. Daher ist $(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{B}$ in $\mathrm{M}_n(K(X))$ nilpotent. Somit gilt

$$\begin{aligned}\chi_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} &= \mathrm{Det}\,\big(X\mathfrak{E}_n - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\big) = \mathrm{Det}\,\big((X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})\,(\mathfrak{E}_n - (X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{B})\big)\\ &= \chi_{\mathfrak{A}} \cdot \mathrm{Det}\,\big((X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})\,(\mathfrak{E}_n - (X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}\mathfrak{B})\big) = \chi_{\mathfrak{A}}\ ,\end{aligned}$$

da für nilpotente $n\times n$-Matrizen $\mathfrak{N}$ über einem Körper L (hier $L = K(X)$) $\mathrm{Det}(\mathfrak{E}_n - \mathfrak{N}) = \chi_{\mathfrak{N}}(1) = 1$ ist. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 13a), p. 307 (1.10.2011) :

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(K)$, $n \ge 2$, eine nilpotente Matrix mit $\mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$. Dann gibt es kein $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{A}$.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{A}^k = 0$. Gäbe es ein $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{A}$, so folgte $\mathfrak{B}^{2k} = \mathfrak{A}^k = 0$, aber $\mathfrak{B}^{2n-2} = \mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$. Das charakteristische Polynom von $\mathfrak{B}$ ist nach Aufg. 10c) $\chi_{\mathfrak{B}} = X^n$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton ist nun $\chi_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^n = 0$ im Widerspruch zu $\mathfrak{B}^{2n-2} \neq 0$ und $n \ge 2$, d.h. $2n-2 \ge n$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 13b), p. 307 (1.10.2011) :

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(K)$, $n \ge 2$, eine nilpotente Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent: (1) $\mu_{\mathfrak{A}} = \chi_{\mathfrak{A}}$ $(= X^n)$. (2) $\mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$. (3) $\mathrm{Rang}\ \mathfrak{A} = n-1$. (4) Es gibt ein $\mathfrak{x} \in K^n$ derart, dass $\mathfrak{A}^i\mathfrak{x}$, $i = 0, \ldots, n-1$, eine Basis von K^n ist.

Beweis: Da $\mathfrak{A}$ nilpotent ist, hat $\mathfrak{A}$ nach Aufg. 10b) das charakteristische Polynom $\chi_{\mathfrak{B}} = X^n$; das Minimalpolynom ist dann nach dem Satz von Cayley-Hamilton $\mu_{\mathfrak{B}} = X^m$ mit $m \le n$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Genau dann ist $\mu_{\mathfrak{A}} = \chi_{\mathfrak{A}}$, wenn $m = n$ ist, also wenn $\mathfrak{A}^{n-1}$ noch von 0 verschieden ist.

(2) $\Leftarrow$ (4) Ist $\mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$, so gibt es einen Vektor $\mathfrak{x} \in K^n$ mit $\mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{x} \neq 0$. Wir zeigen, dass die n Vektoren $\mathfrak{A}^i\mathfrak{x}$, $i = 0, \ldots, n-1$, linear unabhängig und somit nach Satz 3.B.7 eine Basis von K^n sind. Sei dazu $\sum_{i=0}^{n-1} a_i\mathfrak{A}^i\mathfrak{x} = 0$ mit $a_i \in K$. Sind nicht alle $a_i = 0$, so sei k minimal gewählt mit $a_k \neq 0$. Wegen $\mathfrak{A}^n = 0$ erhält man dann aus $\sum_{i=k}^{n-1} a_i\mathfrak{A}^i\mathfrak{x} = 0$ durch Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{n-1-k}$ den Widerspruch $a_k\mathfrak{A}^{n-1} = 0$ zu $a_k \neq 0$ und $\mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$.

(4) $\Leftarrow$ (2) Ist $\mathfrak{A}^i\mathfrak{x}$, $i = 0, \ldots, n-1$, eine Basis von K^n, so ist sicherlich $\mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{x} \neq 0$, also $\mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Wir betrachten die durch $\mathfrak{A}$ bzgl. der Standardbasis definierte lineare Abbildung $f : K^n \to K^n$. Es ist $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ und $\mathrm{Rang}\, f = \mathrm{Rang}\, \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ bzw. f nilpotent, also nicht bijektiv sind, ist dieser Rang $\le n-1$. Nach dem Rangsatz ist $\mathrm{Dim\,Kern}\, f = n - \mathrm{Rang}\, f \ge n - (n-1) = 1$.

Ist $\mathrm{Rang}\, f \le n-2$, so ist $\mathrm{Dim\,Kern}\, f \ge 2$ und der durch f auf dem höchstens $(n-2)$-dimensionalen Restklassenraum $\overline{V} := K^n/\mathrm{Kern}\, f$ durch $\overline{f}(\overline{\mathfrak{x}}) := \overline{f(\mathfrak{x})}$ induzierte Operator $\overline{f} : \overline{V} \to \overline{V}$ ist ebenfalls nilpotent. Dann ist $(\overline{f})^{n-2} = 0$, also $f^{n-2}(K^n) \subseteq \mathrm{Kern}\, f$ und somit $f^{n-1}(K^n) = 0$, also $\mathfrak{A}^{n-1} = 0$.

Sei nun $\mathrm{Rang}\, f = n-1$, also $\mathrm{Dim\,Kern}\, f = 1$. Wir zeigen durch Induktion über $r = 1, \ldots, n-1$, dass $\mathrm{Rang}\, f^r = n{-}r$ ist. Der Induktionsanfang $r = 1$ ist klar. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $\mathrm{Rang}\, f^{r-1} = n-r+1$ und somit $\mathrm{Bild}\, f^{r-1} \neq 0$. Wegen $\mathrm{Kern}\, f\,|\,\mathrm{Bild}\, f^{r-1} \subseteq \mathrm{Kern}\, f$ ist $\mathrm{Dim\,Kern}\, f\,|\,\mathrm{Bild}\, f^{r-1} \le 1$, wobei $f\,|\,\mathrm{Bild}\, f^{r-1}$ wie f nilpotent, also nicht injektiv ist. Es folgt $\mathrm{Dim\,Kern}\, f\,|\,\mathrm{Bild}\, f^{r-1} = 1$. Nach dem Rangsatz gilt $\mathrm{Rang}\, f^r = \mathrm{Dim\,Bild}\, f^r = \mathrm{Dim\,Bild}\, f\,|\,\mathrm{Bild}\, f^{r-1} = \mathrm{Dim\,Bild}\, f^{r-1} - \mathrm{Dim\,Kern}\, f\,|\,\mathrm{Bild}\, f^{r-1}$ $= (n-r+1) - 1 = n-r$. Speziell ist $\mathrm{Rang}\, f^{n-1} = 1$, d.h. $f^{n-1} \neq 0$ und somit $\mathfrak{A}^{n-1} \neq 0$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 14, p. 307 (1.10.2011) :

Seien $f:V \to V$ ein Operator auf dem K-Vektorraum V. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist eine Homothetie. (2) Jeder Unterraum von V ist f-invariant. (3) Jeder Vektor $\neq 0$ in V ist ein Eigenvektor von f.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Ist f eine Homothetie, gibt es also ein $a \in K$ mit $f(x) = ax$ für alle $x \in V$. so gilt trivialerweise $f(U) \subseteq U$ für jeden Unterraum U von V.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $x \in V$, $x \neq 0$. Nach (2) gilt dann $f(Kx) \subseteq Kx$, es gibt also ein $\lambda \in K$ mit $f(x) = \lambda x$ und x ist Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sind $x, y \in V$ mit $x, y \neq 0$, so gibt es nach (3) zu x, y und $x+y$ Elemente $\lambda, \mu, \nu \in K$ mit $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \mu y$ und $f(x+y) = \nu(x+y)$. Sind x und y linear unabhängig, so folgt aus $\nu x + \nu y = \nu(x+y) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda x + \mu y$ sofort $\lambda = \nu = \mu$. Sind x und y linear abhängig, so gibt es ein $a \neq 0$ in K mit $x = ay$, also $\lambda ay = \lambda x = f(x) = f(ay) = af(y) = a\mu y$ und wegen $ay \neq 0$ ebenfalls $\lambda = \mu$. Alle Vektoren $\neq 0$ von V sind also Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ, und f ist folglich die Multiplikation mit λ. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 15, p. 308 (1.10.2011) :

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $n \times n$-Matrizen über dem Körper K, von denen wenigstens eine invertierbar ist. Dann gibt es höchstens n verschiedene Elemente $a \in K$, für die die Matrix $a\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ nicht invertierbar ist.

Beweis: Ist $\mathfrak{A}$ invertierbar, so ist $\operatorname{Det}\mathfrak{A} \neq 0$ und somit $a\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ wegen

$$\operatorname{Det}(a\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \operatorname{Det}(a\mathfrak{E}_n + \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}) \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{A} = \chi_{-\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}}(a) \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{A}$$

nur für die maximal n Eigenwerte a von $-\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ nicht invertierbar.

Sei nun $\mathfrak{B}$ invertierbar. Dann ist $a\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ für $a = 0$ invertierbar. Bei $a \neq 0$ ist $a\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ wegen

$$\operatorname{Det}(a\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = a\operatorname{Det}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} + a^{-1}\mathfrak{E}_n) \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{B} = a\,\chi_{-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}}(a^{-1}) \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{B}$$

nur für die Inversen der maximal n Eigenwerte $\neq 0$ von $-\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ nicht invertierbar. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 17, p. 308 (1.10.2011) :

Seien $f:V \to V$ ein Operator und μ das Minimalpolynom der Beschränkung von f auf $\operatorname{Bild} f$. Dann ist μ oder $X\mu$ das Minimalpolynom von f. Insbesondere ist ein Operator f endlichen Ranges r algebraisch mit einem Minimalpolynom vom Grade $\leq r+1$.

Beweis: Für das Minimalpolynom μ_f von f gilt $\mu_f(f) = 0$. Dann ist erst recht $\mu_f(f\,|\operatorname{Bild} f) = 0$, also μ ein Teiler von μ_f. Andererseits ist $(X\mu)(f) = \mu(f) \circ f = 0$ wegen $\mu(f)|\operatorname{Bild} f = 0$. Daher ist μ_f ein Teiler von $X\mu$ und es kann nur $\mu_f = \mu$ oder $\mu_f = X\mu$ gelten. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 18, p. 308 (1.10.2011) :

Sei f ein invertierbarer Operator auf dem K-Vektorraum V. Genau dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert (bzw. ein Spektralwert) von f, wenn λ^{-1} ein Eigenwert (bzw. ein Spektralwert) von f^{-1} ist.

Beweis: Da 0 kein Eigenwert (und kein Spektralwert) eines invertierbaren Operators ist, können wir $\lambda \neq 0$ annehmen. Es gilt $\lambda\,\mathrm{id}_V - f = -\lambda(\lambda^{-1}\,\mathrm{id} - f^{-1})f$. Da f invertierbar ist und $\lambda \neq 0$, ist also $\lambda\,\mathrm{id}_V - f$ genau dann nicht injektiv (bzw. nicht bijektiv), wenn dies für $\lambda^{-1}\,\mathrm{id} - f^{-1}$ gilt. Daher ist λ genau dann ein Eigenwert (bzw. ein Spektralwert) von f, wenn λ^{-1} ein Eigenwert (bzw. ein Spektralwert) von f^{-1} ist. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 19, p. 308 (1.10.2011) :

Seien f und g Operatoren auf dem K-Vektorraum V.

a) Die Eigenwerte $\neq 0$ von fg und gf stimmen überein.

b) Die Spektralwerte $\neq 0$ von fg und gf stimmen überein.

c) Man gebe ein Beispiel dafür an, dass die Eigenwerte (bzw. Spektralwerte) von fg und gf nicht übereinstimmen.

Beweis: a) Sei $\lambda \neq 0$ Eigenwert von fg, also $fg(v) = \lambda v$ für ein $v \neq 0$ aus V. Bei $g(v) = 0$ wäre $\lambda v = fg(v) = 0$, also $\lambda = 0$. Daher ist $g(v) \neq 0$, und wegen $(gf)(g(v)) = g(fg(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ ist λ auch Eigenwert von gf. Analog ist jeder Eigenwert $\neq 0$ von gf auch Eigenwert von fg.

b) Sei $a \in K^\times$. Ist $fg - a\,\mathrm{id}$ invertierbar mit Inversem $h \in \mathrm{End}_K V$, so gilt

$$(a^{-1}ghf - a^{-1}\,\mathrm{id}_V)(gf - a\,\mathrm{id}_V) = a^{-1}gh(fg - a\,\mathrm{id}_V)f - a^{-1}gf + \mathrm{id}_V = a^{-1}gf - a^{-1}gf + \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_V$$

und analog $(gf - a\,\mathrm{id}_V)(a^{-1}ghf - a^{-1}\,\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V$. Daher ist dann auch $gf - a\,\mathrm{id}$ invertierbar. Jeder Spektralwert $\neq 0$ von gf ist also Spektralwert von fg. Entsprechendes gilt mit vertauschten f und g.

c) Sei $V = K[X]$ der K-Vektorraum der Polynome über dem Körper K mit der Basis X^n, $n \in \mathbb{N}$. Die K-linearen Abbildungen $f, g : V \to V$ seien definiert durch $f(X^n) := X^{n+1}$ bzw. $g(X^0) = g(1) := 0$, $g(X^n) := X^{n-1}$ bei $n \geq 1$, d.h. f sei die Multiplikation mit X und g die Abbildung mit $g(P) = (P - P(0))/X$ für $P \in K[X]$. Dann ist 0 ein Eigenwert (also auch ein Spektralwert) von fg wegen $fg(1) = f(0) = 0 = 0 \cdot 1$, aber kein Eigenwert (und sogar kein Spektralwert) von gf, da $0 \cdot \mathrm{id} - gf = gf$ wegen $gf(X^n) = g(X^{n+1}) = X^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität von $K[X]$ ist. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 22, p. 308 (1.10.2011):

Seien $f : V \to V$ ein Operator auf dem K-Vektorraum V und $F \in K[X]$ ein nicht konstantes Polynom.

a) Ist λ Eigenwert (bzw. Spektralwert) von f, so ist $F(\lambda)$ Eigenwert (bzw. Spektralwert) von $F(f)$.

b) Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist jeder Eigenwert (bzw. jeder Spektralwert) von $F(f)$ von der Form $F(\lambda)$ mit einem Eigenwert (bzw. einem Spektralwert) λ von f.

Beweis: a) Da λ eine Nullstelle des Polynoms $F(X) - F(\lambda)$ ist, gilt $F(X) - F(\lambda) = (X - \lambda)\,Q(X)$ mit einem Polynom Q in $K[X]$. Einsetzen von f liefert $F(\lambda)\,\mathrm{id}_V - F(f) = (\lambda\,\mathrm{id}_V - f)\,Q(f)$ und $F(\lambda)\,\mathrm{id}_V - F(f) = Q(f)\,(\lambda\,\mathrm{id}_V - f)$. Ist λ Eigenwert von f, d.h. ist $\lambda\,\mathrm{id}_V - f$ nicht injektiv, so zeigt die zweite Gleichung, dass auch $F(\lambda)\,\mathrm{id}_V - F(f)$ nicht injektiv sein kann, $F(\lambda)$ also Eigenwert von $F(f)$ ist. Ist λ kein Eigenwert, aber ein Spektralwert von f, d.h. ist $\lambda\,\mathrm{id}_V - f$ nicht surjektiv, so zeigt die erste Gleichung, dass auch $F(\lambda)\,\mathrm{id}_V - F(f)$ nicht surjektiv sein kann, $F(\lambda)$ also Spektralwert von $F(f)$ ist.

b) Sei $\mu \in K$. Ist K algebraisch abgeschlossen, so zerfällt das Polynom $F(X) - \mu$ in Linearfaktoren: $F(X) - \mu = c(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n)$ mit $c, \lambda_i \in K$ und $F(\lambda_i) = \mu$ für $i = 1, \ldots, n$. Einsetzen von f liefert $\mu\,\mathrm{id}_V - F(f) = (-1)^{n-1}c\,(\lambda_1\,\mathrm{id}_V - f) \cdots (\lambda_n\,\mathrm{id}_V - f)$. Ist keines der Elemente λ_i ein Eigenwert (bzw. Spektralwert) von f, so sind sämtliche Abbildungen $\lambda_i\,\mathrm{id}_V - f$ injektiv (bzw. bijektiv) und somit auch ihre Komposition $\mu\,\mathrm{id}_V - F(f)$, d.h μ ist kein Eigenwert (bzw. Spektralwert) von $F(f)$. Ist also μ ein Eigenwert (bzw. Spektralwert) von $F(f)$, so muss wenigstens eines der Elemente λ_i ein Eigenwert (bzw. Spektralwert) von f sein. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 24, p. 308 (1.10.2011):

Sei $f : V \to V$ ein Operator auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum $V \neq 0$. Genau dann ist χ_f ein Primpolynom, wenn 0 und V die einzigen f-invarianten Unterräume von V sind.

Beweis: Ist U ein invarianter Unterraum von V mit $0 < m := \mathrm{Dim}_K U < \mathrm{Dim}_K V$, so ist das charakteristische Polynom $\chi_{f|U}$ von $f|U$ nach Lemma 11.A.8 ein echter Teiler von χ_f wegen $0 < m = \mathrm{Grad}\,\chi_{f|U} < \mathrm{Grad}\,\chi_f = \mathrm{Dim}_K V$ und somit χ_f kein Primpolynom.

Ist umgekehrt χ_f kein Primpolynom und P ein echter Teiler von χ_f, so gibt es nach Satz 11.A.12 einen f-invarianten Unterraum U von V mit $0 < \mathrm{Dim}_K U = \mathrm{Grad}\,P < \mathrm{Grad}\,\chi_f = \mathrm{Dim}_K V$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 25, p. 309 (1.10.2011):

Sei $f : V \to V$ ein Operator auf dem K-Vektorraum V mit dem dualen Operator $f^* : V^* \to V^*$.

a) Genau dann ist ein Unterraum U von V f-invariant, wenn U° f^*-invariant ist.

b) Ist ein Unterraum W von V^* f^*-invariant, so ist ${}^\circ W$ f-invariant. Bei endlichdimensionalem V gilt auch die Umkehrung.

Beweis: a) Sei $f(U) \subseteq U$ für den Unterraum U von V und sei $e \in U^\circ$. Dann ist $e(x) = 0$ für alle $x \in U$ und wegen $f(x) \in U$ somit auch $\big(f^*(e)\big)(x) = e(f(x)) = 0$, d.h. es gilt $f^*(e) \in U^\circ$.

Sei umgekehrt $f^*(U^\circ) \subseteq U^\circ$ und sei $x \in U$. Für jedes $e \in U^\circ$ ist dann $f^*(e) \in U^\circ$ und somit $e(f(x)) = \big(f^*(e)\big)(x) = 0$. Da jedes auf U verschwindende $e \in V^*$ also auch auf $f(x)$ verschwindet, folgt $f(x) \in U$ und schließlich $f(U) \subseteq U$ mit Satz 5.G.7.

b) Sei $f(W) \subseteq W$ für den Unterraum W von V^* und sei $x \in {}^\circ W$. Für jedes $e \in W$ gilt dann $f^*(e) \in W$ und somit $e(f(x)) = \big(f^*(e)\big)(x) = 0$ wegen $x \in {}^\circ W$. Es folgt $f({}^\circ W) \subseteq {}^\circ W$.

Sei nun V endlichdimensional und sei $f({}^\circ W) \subseteq {}^\circ W$ für den Unterraum W von V^*. Nach Satz 5.G.10 gilt dann $({}^\circ W)^\circ = W$, und mit a) ergibt sich $f^*(W) = f^*\big(({}^\circ W)^\circ\big) \subseteq ({}^\circ W)^\circ = W$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 26, p. 309 (1.10.2011):

Seien $f: V \to V$ ein Operator auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und U ein f-invarianter Unterraum von V. Dann gilt $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp}(f|U) + \operatorname{Sp}\overline{f}$, wo $\overline{f}$ der von f induzierte Operator $V/U \to V/U$ ist. Insbesondere ist $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp}(f|\operatorname{Bild} f) = \operatorname{Sp}(\overline{f})$ mit $\overline{f}: V/\operatorname{Kern} f \longrightarrow V/\operatorname{Kern} f$. (Man benutzt die letzte Gleichung, um die Spur eines Operators mit endlichem Rang auf nicht notwendig endlichdimensionalen Vektorräumen zu definieren.)

Beweis: Nach Lemma 11.A.8. (1) gilt für die charakteristischen Polynome $\chi_f = \chi_{f|U} \cdot \chi_{\overline{f}}$, also

$$\begin{aligned} X^n - \operatorname{Sp} f \cdot X^{n-1} + \cdots &= (X^m - \operatorname{Sp}(f|U) \cdot X^{m-1} + \cdots)(X^{n-m} - \operatorname{Sp}(\overline{f}) \cdot X^{n-m-1} + \cdots) \\ &= X^n - \big(\operatorname{Sp}(f|U) + \operatorname{Sp}(\overline{f})\big) \cdot X^{n-1} + \cdots, \end{aligned}$$

wo $m := \operatorname{Dim} U$ sei. Koeffizientenvergleich bei X^{n-1} liefert nun die Behaupung. Der Zusatz gilt, da $f|\operatorname{Kern} f = 0$ ist. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 27, p. 309 (1.10.2011):

Sei $f: V \to V$ ein Operator auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V mit der Basis v_i, $i \in I$. Dann gilt $\operatorname{Sp} f = \sum_{i\in I} v_i^*(f(v_i))$.

Beweis: Ist $\mathfrak{M}^{v_i}_{v_i}(f) = (a_{ij})$ die Matrix von f bzgl. der Basis v_i, $i \in I$, so gilt $f(v_j) = \sum_{i\in I} a_{ij} v_i$ für $j \in J$, also $v_j^*(f(v_j)) = v_j^*\big(\sum_{i\in I} a_{ij} v_i\big) = \sum_{i\in I} a_{ij} v_j^*(v_i) = \sum_{i\in I} a_{ij}\delta_{ij} = a_{jj}$ und $\sum_{j\in I} v_j^*(f(v_j)) = \sum_{j\in I} a_{jj} = \operatorname{Sp} f$. •

Abschnitt 11.A, Zusatzaufgabe, p. 309 (1.10.2011):

Sei $f: V \to V$ ein Operator auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Ist $\operatorname{Rang} f \le 1$, so ist f genau dann nilpotent, wenn die Spur von f gleich 0 ist.

Beweis: Aus $\operatorname{Rang} f \le 1$ folgt nach dem Rangsatz $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f = n - \operatorname{Rang} f \ge n-1$. Im Fall $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f = n$ ist $f = 0$ und somit auch $\operatorname{Sp} f = 0$. Im Fall $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f = n-1$ ergänzen wir eine Basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ von $\operatorname{Kern} f$ durch $v_n \in V$ zu einer Basis von V. Sei $f(v_n) = a_{1n}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n$. Wegen $f(v_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ hat die Matrix von f bezüglich dieser Basis die Form

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\chi_f = \chi_{\mathfrak{A}} = X^{n-1}(X - a_{nn}) = X^n - a_{nn}X^{n-1}$. Es folgt $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp}\mathfrak{A} = a_{nn}$. Bei $\operatorname{Sp} f = a_{nn} = 0$ liefert der Satz von Cayley-Hamilton $0 = \chi_f(f) = f^n$, d.h. die Nilpotenz von f. Bei $\operatorname{Sp} f = a_{nn} \ne 0$ hat die Matrix $\mathfrak{A}^k$ von f^k in der n-ten Zeile und n-ten Spalte den Koeffizienten $a_{nn}^k \ne 0$, ist also $\ne 0$. Daher ist f dann nicht nilpotent. •

Bemerkung: Man könnte auch mit Aufg. 8a) argumentieren: Danach gilt $\chi_f = X^{n-1}(X - \operatorname{Sp} f)$, also $\operatorname{Sp} f = 0$ genau dann, wenn $\chi_f = X^n$, d.h. f nilpotent ist.

Abschnitt 11.A, Aufg. 29, p. 309 (1.10.2011) :

Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Die K o m m u t a t o r e n $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] := \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(K)$, erzeugen einen Unterraum der Kodimension 1 in $\mathrm{M}_n(K)$. Dieser ist der Kern der Spurfunktion $\mathrm{Sp}: \mathrm{M}_n(K) \to K$.

b) Jede K-Linearform $h: \mathrm{M}_n(K) \to K$ mit $h(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = h(\mathfrak{B}\mathfrak{A})$ für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(K)$ ist ein Vielfaches der Spurfunktion auf $\mathrm{M}_n(K)$.

Beweis: a) Bezeichnet $\mathfrak{E}_{ij}$ die Matrix aus $\mathrm{M}_n(K)$, deren sämtliche Koeffizienten 0 sind mit Ausnahme des Koeffizienten in der i-ten Zeile und j-Spalte, der 1 ist, so gilt $\mathfrak{E}_{ij}\,\mathfrak{E}_{rs} = \delta_{jr}\,\mathfrak{E}_{is}$, vgl. die Bemerkungen im Anschluss an Satz 8.A.9. Es folgt $[\mathfrak{E}_{i1}, \mathfrak{E}_{1j}] = \mathfrak{E}_{i1}\,\mathfrak{E}_{1j} - \mathfrak{E}_{1j}\,\mathfrak{E}_{i1} = \delta_{11}\,\mathfrak{E}_{ij} - \delta_{ij}\,\mathfrak{E}_{11} = \mathfrak{E}_{ij}$ für $i \neq j$ und $[\mathfrak{E}_{i1}, \mathfrak{E}_{1i}] = \mathfrak{E}_{i1}\,\mathfrak{E}_{1j} - \mathfrak{E}_{1i}\,\mathfrak{E}_{i1} = \delta_{11}\,\mathfrak{E}_{ii} - \delta_{ii}\,\mathfrak{E}_{11} = \mathfrak{E}_{ii} - \mathfrak{E}_{11}$. Die n^2-1 linear unabhängigen Matrizen $\mathfrak{E}_{ij}$, $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, und $\mathfrak{E}_{ii} - \mathfrak{E}_{11}$, $i = 2, \ldots, n$, sind also Kommutatoren und erzeugen somit einen Unterraum der Kodimension 1 im n^2-dimensionalen Raum $\mathrm{M}_n(K)$, der nach Satz 11.A.18 in Kern Sp enthalten ist. Da es Matrizen gibt mit Spur $\neq 0$, ist dieser Kern $\neq V$, also ebenfalls 1-kodimensional.

b) Eine Linearform $h \in V^*$ mit $h(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = h(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ veschwindet auf allen Kommutatoren $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ und damit nach a) auf dem Kern der Spurfunktion $\mathrm{Sp} \neq 0$. Dann ist aber h ein Vielfaches dieser Spurfunktion. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 29, p. 309 (1.10.2011) :

Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper mit $k \cdot 1_K \neq 0$ für $k = 1, \ldots, n$, d.h. mit Char $K = 0$ oder Char $K > n$.

a) Zu jedem Operator $f: V \to V$ mit $\mathrm{Sp}\, f = 0$ auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum V gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit $v_i^*(f(v_i)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

b) Jede Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A} = 0$ ist ein Kommutator, d.h. von der Form $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] = \mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{B}$.

Beweis: a) Wir zeigen zunächst durch Induktion über $k = 1, \ldots, n$, dass es linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ und einen Unterraum W_k von V gibt mit $Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_k \oplus W_k = V$ und $f(v_i) \in \sum_{j \neq i} Kv_j + W_k$.

Sei $k = 1$. Ist jedes Element $\neq 0$ von V Eigenvektor von f, so ist f nach Aufg. 14 eine Homothetie $a\,\mathrm{id}_V$, $a \in K$. Es folgt $0 = \mathrm{Sp}\, f = n \cdot a$, also $a = 0$ nach Voraussetzung über K. Dann ist $f = 0$, und die Behauptung ist trivial. Andernfalls gibt es ein $v_1 \in V$ mit $f(v_1) \notin Kv_1$. Wir ergänzen $v_1, f(v_1)$ durch Vektoren $w_1, \ldots, w_{n-2}$ zu einer Basis von V und nehmen für W_1 den von $f(v_1), w_1, \ldots, w_{n-2}$ erzeugten Unterraum von V. Dann sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

Beim Schluss von k auf $k+1$ betrachten wir die Abbildung $(p \circ f)|W_k$, wo p die Projektion auf W_k längs $\sum_{j=1}^k Kv_j$ ist. Ergänzt man $v_1, \ldots, v_k$ durch $w_1, \ldots, w_{n-k}$ zu einer Basis von V, so erhält man aus der Matrix von f bzgl. dieser Basis die Matrix von $(p \circ f)|W_k$ bzgl. $w_1, \ldots, w_{n-k}$, indem man die ersten k Zeilen und Spalten streicht. Da die ersten k Diagonalelemente der Matrix von f nach Konstruktion bereits 0 sind und da $\mathrm{Sp}\, f = 0$ ist, folgt $\mathrm{Sp}\, p \circ f|W_k = 0$.

Ist jedes Element $\neq 0$ von W_k Eigenvektor von $(p \circ f)|W_k$, so ist $(p \circ f)|W_k$ nach Aufg. 14 eine Homothetie $a\,\mathrm{id}_{W_k}$, $a \in K$. Es folgt $0 = \mathrm{Sp}\,(p \circ f)|W_k = (n-k) \cdot a$, also $a = 0$ nach Voraussetzung über K. Dann ist $(p \circ f)|W_k = 0$, also $f(W_k) \subseteq Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_k$, und wir können $v_{k+1} \neq 0$ aus W_k sowie ein Komplement W_{k+1} von Kv_{k+1} in W_k beliebig wählen.

Andernfalls gibt es ein $v_{k+1} \in W_k$ mit $\big((p \circ f)|W_k\big)(v_{k+1}) \notin Kv_{k+1}$, also $f(v_{k+1}) \notin Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_k \oplus Kv_{k+1}$. Wir ergänzen $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, f(v_{k+1})$ durch Vektoren $w_1, \ldots, w_{n-k-2}$ zu eine Basis von V und nehmen für W_{k+1} den von $f(v_{k+1}), w_1, \ldots, w_{n-k-2}$ erzeugten Unterraum von W_k. Dann sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

Bei $k = n$ ist nun $W_n = 0$, also $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit $f(v_i) = \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j$, d.h. die Diagonalelemente der Matrix von f bzgl. dieser Basis sind 0.

b) Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(K)$ eine Matrix mit $\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A} = 0$. Nach a) ist $\mathfrak{A}$ dann ähnlich zu einer Matrix $\mathfrak{A}'$, in deren Hauptdiagonale nur Nullen stehen; es gibt somit eine invertierbare Matrix $\mathfrak{D} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\mathfrak{A}'\mathfrak{D}^{-1}$. Existieren nun $\mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] = \mathfrak{A}'$, so folgt bereits

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{D}\mathfrak{A}'\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}(\mathfrak{B}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\mathfrak{B})\mathfrak{D}^{-1} = (\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1})(\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{D}^{-1}) - (\mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{D}^{-1})(\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1}) = [\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{D}^{-1}, \mathfrak{D}\mathfrak{C}\mathfrak{D}^{-1}].$$

Wir können also gleich annehmen, dass alle Hauptdiagonalelemente von $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_{ij})$ gleich 0 sind. Sind dann $b_1, \ldots, b_n$ paarweise verschiedene Elemente von K (man beachte $|K| > n$) und ist $\mathfrak{B}$ die Diagonalmatrix

$\operatorname{Diag}(b_1,\dots,b_n)$ mit diesen Elementen in der Hauptdiagonale, so ist $[\mathfrak{B},\mathfrak{C}]$ für beliebiges $\mathfrak{C}=(c_{ij})\in \mathrm{M}_n(K)$ gleich

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_n\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} b_1c_{11} & b_1c_{12} & \cdots & b_1c_{1n}\\ b_2c_{21} & b_2c_{22} & \cdots & b_nc_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_nc_{n1} & b_nc_{n2} & \cdots & b_nc_{nn}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1c_{11} & b_2c_{12} & \cdots & b_nc_{1n}\\ b_1c_{21} & b_2c_{22} & \cdots & b_nc_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_1c_{n1} & b_2c_{n2} & \cdots & b_nc_{nn}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & (b_1-b_2)\,c_{12} & \cdots & (b_1-b_n)\,c_{1n}\\ (b_2-b_1)\,c_{21} & 0 & \cdots & (b_2-b_n)\,c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (b_n-b_1)\,c_{n1} & (b_n-b_2)\,c_{n2} & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Wählt man nun $c_{ij}:=a_{ij}/(b_i-b_j)$ für $i\neq j$ und $c_{ii}:=0$, so gilt folglich $[\mathfrak{B},\mathfrak{C}]=\mathfrak{A}$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 30, p. 310 (1.10.2011):

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.

a) Für eine Projektion p von V ist $\operatorname{Sp} p=\operatorname{Rang} p\ (=(\operatorname{Rang} p)1_K)$.

b) Seien $p_1,\dots,p_r$ Projektionen von V mit $p_1+\cdots+p_r=\mathrm{id}_V$ und sei $\operatorname{Char} K=0$ oder $\operatorname{Char} K>\sum_{i=1}^r \operatorname{Rang} p_i-\operatorname{Dim}_K V$. Dann ist $p_ip_j=\delta_{ij}p_i$ für $1\le i,j\le r$ und insbesondere V die direkte Summe der Unterräume $\operatorname{Bild} p_i$, $i=1,\dots,r$. (Man beachte die Änderungen gegenüber der Formulierung im Buch!)

c) Die endliche Gruppe G operiere auf V als Gruppe von K-Automorphismen. In K sei $|G|\cdot 1_K\neq 0$. Dann ist $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma$ eine Projektion von V auf $\mathrm{Fix}_G V$, vgl. Beispiel 6.E.10, und in K gilt
$$\operatorname{Dim}_K \mathrm{Fix}_G V=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\operatorname{Sp}\sigma\,.$$

Beweis: a) Da p eine Projektion ist, kann man eine Basis von $\operatorname{Bild} p$ durch eine Basis von $\operatorname{Kern} p$ zu einer Basis von V ergänzen. Bezüglich dieser Basis wird p durch eine Diagonalmatrix mit $\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} p$ Einsen und sonst Nullen in der Hauptdiagonale beschrieben, vgl. 8.A, Aufg. 9a). Daher ist $\operatorname{Sp} p=\operatorname{Rang} p$.

b) Wegen $p_1+\cdots+p_r=\mathrm{id}_V$ gilt $\operatorname{Bild} p_1+\cdots+\operatorname{Bild} p_r=V$. Mit a) erhält man in K die Gleichungen $\operatorname{Dim}_K V=\operatorname{Sp}(\mathrm{id}_V)=\operatorname{Sp} p_1+\cdots+\operatorname{Sp} p_r=\operatorname{Rang} p_1+\cdots+\operatorname{Rang} p_r$. Die Charakteristikvoraussetzung liefert die Gleichung $\operatorname{Dim}_K V=\operatorname{Rang} p_1+\cdots+\operatorname{Rang} p_r$ dann sogar in $\mathbb{N}$. Somit ist aber die Summe $V=\operatorname{Bild} p_1\oplus\cdots\oplus\operatorname{Bild} p_r$ direkt. Daher liegt $\operatorname{Bild} p_j$ sicher in $\operatorname{Kern} p_i$ für $i\neq j$, und es folgt $p_ip_j=0$. Ferner gilt $p_ip_i=p_i$, weil p_i eine Projektion ist, $i=1,\dots,r$.

c) Da $\tau\sigma$ bei festem $\tau\in G$ mit σ alle Elemente von G genau einmal durchläuft, gilt für $p:=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma$
$$p^2=\frac{1}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\tau\sigma=\frac{|G|}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sigma=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma=p\,,$$
d.h. p ist eine Projektion von V. Für $x\in\mathrm{Fix}_G V$ ist $\sigma(x)=x$ und folglich $p(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}x=x$. Umgekehrt gilt für $y=p(x)\in\operatorname{Bild} p$ sofort $\tau(y)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\tau\sigma(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sigma(x)=p(x)=y$ für jedes $\tau\in G$. Es folgt
$$\operatorname{Dim}_K\mathrm{Fix}_G V=\operatorname{Dim}_K\operatorname{Bild} p=\operatorname{Rang} p=\operatorname{Sp} p=\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\operatorname{Sp}\sigma\,.$$ •

Abschnitt 11.A, Aufg. 31, p. 310 (1.10.2011):

Seien $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper mit $k \cdot 1_K \neq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Ein Operator f auf dem n-dimensionalen K-Vektorraum V ist genau dann nilpotent, wenn gilt: $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} f^2 = \cdots = \operatorname{Sp} f^n = 0$.

Beweis: Ist f nilpotent, so auch $f^2, \ldots, f^n$ und das charakteristische Polynome ist jeweils X^n, die Spuren von $f, f^2, \ldots, f^n$ sind also 0.

Zum Beweis der Umkehrung verwenden wir Induktion über n. Wegen $\operatorname{Sp} f = \operatorname{Sp} f^2 = \cdots = \operatorname{Sp} f^n = 0$ liefert der Satz von Cayley-Hamilton $0 = \chi_f(f) = f^n - (\operatorname{Sp} f) f^{n-1} + \cdots + (-1)^n \operatorname{Det} f \operatorname{id}_V$, also

$$0 = \operatorname{Sp}\chi_f(f) = \operatorname{Sp}(f^n) - (\operatorname{Sp} f)(\operatorname{Sp} f^{n-1}) + \cdots + (-1)^n n \operatorname{Det} f = (-1)^n n \operatorname{Det} f .$$

Es folgt $\operatorname{Det} f = 0$, d.h. f ist nicht injektiv und es gilt $\operatorname{Dim} \overline{V} < n$ für $\overline{V} := V/\operatorname{Kern} f$. Für die durch f induzierte Abbildung $\overline{f} : \overline{V} \to \overline{V}$ gilt nach Aufg. 26 ebenfalls $\operatorname{Sp} \overline{f} = \cdots = \operatorname{Sp} (\overline{f})^{n-1} = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\overline{f}$ daher nilpotent. Es folgt $(\overline{f})^{n-1} = 0$, und somit $f^{n-1}(V) \subseteq \operatorname{Kern} f$. Also ist $f^n(V) = 0$, und f ist auch nilpotent. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 32, p. 310 (1.10.2011):

Seien n und K wie in Aufg. 31. Sind $a_1, \ldots, a_n$ Elemente in K mit

$$\begin{gathered} a_1^1 + \cdots + a_n^1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^n + \cdots + a_n^n = 0\,, \end{gathered}$$

so ist $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Beweis: Sei $f : K^n \to K^n$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis durch die Diagonalmatrix $\mathfrak{A} := \operatorname{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ beschrieben wird. Dann wird f^k durch $\mathfrak{A}^k = \operatorname{Diag}(a_1^k, \ldots, a_n^k)$ beschrieben, und nach Voraussetzung gilt $\operatorname{Sp} f = \cdots = \operatorname{Sp} f^n = 0$. Nach Aufg. 31 sind f und dann auch $\mathfrak{A}$ nilpotent. Da $\mathfrak{A}$ aber die Diagonalmatrix $\mathfrak{A} := \operatorname{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ ist, muss $a_1 = \cdots = a_n = 0$ sein. •

Bemerkung: Die Aufgaben 31 und 32 sind äquivalent: Geht man nämlich gemäß dem Satz von Kronecker zu einem Erweiterungskörper von K über, über dem das charakteristische Polynom von f in Linearfaktoren zerfällt: $\chi_f = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$, so ist $\operatorname{Sp} f^i = a_1^i + \cdots + a_n^i$, $i \in \mathbb{N}$, vgl. Beispiel 11.B.13.

Abschnitt 11.A, Aufg. 33, p. 310 (1.10.2011):

Seien K ein Körper wie in Aufg. 31 und f, g Operatoren auf dem n-dimensionalen K-Vektorraum V mit $\big[f, [f, g]\big] = 0$. Dann ist $[f, g]$ nilpotent. (J a c o b s o n - L e m m a)

Beweis: Die Bedingung $\big[f, [f, g]\big] = 0$ bedeutet, dass $f[f, g] = [f, g]f$ ist. Dann kommutiert f auch mit den Potenzen $[f, g]^n$, $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$[f, g]^n = (fg - gf)[f, g]^{n-1} = fg[f, g]^{n-1} - gf[f, g]^{n-1} = fg[f, g]^{n-1} - g[f, g]^{n-1} f = \big[f, g[f, g]^{n-1}\big].$$

Da die $[f, g]^n$ also Kommutatoren sind, haben sie Spur 0 und $[f, g]$ ist somit nach Aufg. 31 nilpotent. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 34, p. 310 (1.10.2011):

Sei $\mathfrak{A}$ eine $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Die Summe der Elemente in einer Zeile von $\mathfrak{A}$ sei für jede Zeile gleich $\lambda \in K$. Dann ist λ ein Eigenwert von $\mathfrak{A}$ mit dem Eigenvektor ${}^t(1, 1, \ldots, 1) \in K^n$. Sind die Spaltensummen von $\mathfrak{A}$ alle gleich λ, so ist λ ebenfalls ein Eigenwert von $\mathfrak{A}$.

Beweis: Offenbar ist $\mathfrak{A}\,{}^t(1, 1, \ldots, 1) = {}^t(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \lambda \cdot {}^t(1, 1, \ldots, 1)$, d.h. λ ist Eigenwert von $\mathfrak{A}$. Sind die Spaltensummen von $\mathfrak{A}$ alle gleich λ, so gilt dies auch für die Zeilensummen von ${}^t\mathfrak{A}$, d.h. ${}^t\mathfrak{A}$ besitzt den Eigenwert λ. Nach Satz 11.A.16 haben aber $\mathfrak{A}$ und ${}^t\mathfrak{A}$ dieselben Eigenwerte. (Ein zugehöriger Eigenvektor lässt sich dann aber im Allgemeinen nicht so einfach angeben. Das Problem tritt auf bei der Diskussion der stationären Zustände stochastischer Matrizen, vgl. Abschnitt 18.C.) •

Abschnitt 11.A, Aufg. 36, p. 311 (1.10.2011) :

Seien f und g Operatoren auf dem K-Vektorraum V. Ist fg oder gf algebraisch, so sind fg und gf beide algebraisch, und die Minimalpolynome von fg und gf stimmen überein oder unterscheiden sich um den Faktor X. Ist zusätzlich f oder g invertierbar, so ist $\mu_{fg} = \mu_{gf}$. Man gebe Operatoren f und g auf K^2 an, für die $\mu_{fg} \neq \mu_{gf}$ ist.

Beweis: Es ist $g(fg)^i f = g(fg)\cdots(fg)f = (gf)\cdots(gf) = (gf)^{i+1}$ für alle $i \geq 0$. Aus $0 = \mu_{fg}(fg) = \sum_{i=0}^{m} a_i(fg)^i$ folgt also $0 = g\mu_{fg}(fg)f = g\sum_{i=0}^{m} a_i(fg)^i f = \sum_{i=0}^{m} a_i(gf)^{i+1} = (gf)\mu_{fg}(gf)$. Mit fg ist daher auch gf algebraisch, und μ_{gf} ist ein Teiler von $X\mu_{fg}$, also $p\mu_{fg} = X\mu_{fg}$ für ein Polynom p. Analog gibt es ein Polynom $\widetilde{p}$ mit $\widetilde{p}\,\mu_{gf} = X\mu_{gf}$. Es folgt $X^2\mu_{fg} = p\,X\mu_{gf} = p\,\widetilde{p}\,\mu_{fg}$, also $X^2 = p\,\widetilde{p}$. Dies ist nur in den Fällen $p = 1$, d.h. $\mu_{fg} = X\mu_{gf}$, $p = X$, d.h. $\tau\mu_{fg} = X\mu_{gf}$, $\mu_{fg} = \mu_{gf}$ und $p = X^2$, d.h. $X^2\mu_{fg} = X\mu_{gf}$, $p = 1$, $X\mu_{fg} = \mu_{gf}$ möglich.

Ist etwa f ein Isomorphismus, so folgt aus $\mu_{fg}(fg) = 0$ bereits

$$0 = \mu_{fg}(fg)\,f = \sum_{i=0}^{m} a_i(fg)^i f = \sum_{i=0}^{m} a_i\,f(gf)^i = f\mu_{fg}(gf)\,.$$

Da f injektiv ist, muss dann aber bereits $\mu_{fg}(gf) = 0$ sein, d.h. μ_{gf} ist ein Teiler von μ_{fg}. Ferner folgt aus $\mu_{gf}(gf) = 0$ bereits

$$0 = f\mu_{gf}(gf) = f\sum_{i=0}^{m} a'_i(gf)^i = \sum_{i=0}^{m} a'_i(fg)^i f = \mu_{gf}(fg)\,f\,.$$

Da f surjektiv ist, muss dann aber bereits $\mu_{gf}(fg) = 0$ sein, d.h. μ_{fg} ist ein Teiler von μ_{gf}. Da die normierten Polynome μ_{fg} und μ_{gf} sich also gegenseitig teilen, müssen sie gleich sein.

Betrachten wir etwa die Endomorphismen f und g von $\mathbb{K}^2$, die bzgl. der Standardbasen durch die Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden, so werden $f \circ g$ durch $\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $g \circ f$ durch $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Es folgt $\mu_{fg} = \mu_A = X^2$ (wegen $\mathfrak{A} \neq 0$, aber $\mathfrak{A}^2 = 0$) und $\mu_{gf} = X$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 37, p. 311 (1.10.2011) :

Seien f und g Operatoren auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Dann ist $\chi_{fg} = \chi_{gf}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ die Matrizen von f bzw. g bzgl. einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Dann ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Matrix von $f \circ g$. Wir behandeln zunächst den Spezialfall der Aussage, dass f ein Automorphismus ist. Dann ist $\mathfrak{A}$ invertierbar, und die Produktformel 9.D.5 liefert

$$\begin{aligned}\chi_{fg} &= \mathrm{Det}\,(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathrm{Det}\,(X\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}) = \mathrm{Det}\,\big(\mathfrak{A}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{B}\mathfrak{A})\mathfrak{A}^{-1}\big) = \\ &= (\mathrm{Det}\,\mathfrak{A})\ \mathrm{Det}\,(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{B}\mathfrak{A})\ (\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}^{-1}) = \mathrm{Det}\,(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \chi_{gf}\,.\end{aligned}$$

Nach 5.F, Aufg. 26 ist $f = ph$ mit einem Automorphismus h und einer Projektion p. Gilt die Behauptung für p, so folgt aber mit dem bereits Bewiesenen (auf h angewandt) $\chi_{fg} = \chi_{(ph)g} = \chi_{p(hg)} = \chi_{(hg)p} = \chi_{h(gp)} = \chi_{(gp)h} = \chi_{g(ph)} = \chi_{gf}$.

Es noch zu zeigen, dass die Aussage gilt, wenn f eine Projektion p ist. p wird nach 8.A, Aufg. 9a) in einer geeigneten Basis von V durch eine Diagonalmatrix der Form $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ mit $r = \mathrm{Rang}\,p$ Einsen und dann $n-r$ Nullen in der Hauptdiagonalen dargestellt. Ist $\mathfrak{C}$ die Matrix von g bzgl. dieser Basis, so geht die $p \circ g$ beschreibende Matrix $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)\,\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{C}$ hervor, indem die letzten $n-r$ Zeilen von $\mathfrak{C}$ durch Nullen ersetzt werden, und die $g \circ p$ beschreibende Matrix $\mathfrak{C}\,\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, indem die letzten $n-r$ Spalten von $\mathfrak{C}$ durch Nullen ersetzt werden. Der Blockmatrizensatz 9.D.4 liefert nun, dass die zugehörigen charakteristischen Polynome übereinstimmen. •

Beweisvariante: Es hätte genügt, nur den Spezialfall zu beweisen, dass f bzw. $\mathfrak{A}$ invertierbar ist. Sind dann $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(K)$ und ist Z eine Unbestimmte, so ist die Determinante der Matrix $Z\mathfrak{E}_n + \mathfrak{A}$ ein Polynom vom Grad n in Z, also sicherlich $\neq 0$. Diese Matrix ist daher invertierbar als Matrix mit Koeffizienten im Körper $K(Z)$ der rationalen Funktionen über K, und folglich gilt die Gleichung $\chi_{(Z\mathfrak{E}_n+\mathfrak{A})\mathfrak{B}} = \chi_{\mathfrak{B}(Z\mathfrak{E}_n+\mathfrak{A})}$ in $K[Z][X] \subseteq K(Z)[X]$. Setzt man darin 0 für Z ein, so erhält man $\chi_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \chi_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 38, p. 311 (1.10.2011) :

Seien $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ und $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$, $m \ge n$. Dann gilt $\chi_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = X^{m-n}\chi_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}$.

Beweis: Wir füllen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Nullen zu quadratischen $m\times m$-Matrizen auf und erhalten die $m\times m$-Blockmatrizen

$$(\mathfrak{A}\;\;0)\begin{pmatrix}\mathfrak{B}\\0\end{pmatrix} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{B}\\0\end{pmatrix}(\mathfrak{A}\;\;0) = \begin{pmatrix}\mathfrak{B}\mathfrak{A} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynome $\chi_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist also gleich dem von $(\mathfrak{A}\;\;0)\begin{pmatrix}\mathfrak{B}\\0\end{pmatrix}$ und dann nach Aufg. 37 gleich dem charakteristischen Polynom von $\begin{pmatrix}\mathfrak{B}\\0\end{pmatrix}(\mathfrak{A}\;\;0)$, also nach dem Blockmatrizensatz 9.D.4 gleich

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{B}\mathfrak{A} & 0\\ 0 & X\mathfrak{E}_{m-n}\end{pmatrix} = X^{m-n}\,\mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_n - \mathfrak{B}\mathfrak{A}) = X^{m-n}\,\chi_{\mathfrak{B}\mathfrak{A}}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.A, Aufg. 40, p. 312 (1.10.2011) :

Seien f ein Operator auf dem K-Vektorraum V und $x \in V$.

a) $V_x := \sum_{m\in\mathbb{N}} Kf^m(x)$ ist der kleinste f-invariante Unterraum von V, der x enthält.

b) Genau dann ist V_x endlichdimensional, wenn es ein normiertes Polynom $F \in K[X]$ gibt mit $F(f)(x) = 0$. Ist in diesem Fall α_x das normierte Polynom kleinsten Grades mit dieser Eigenschaft, so ist α_x das Minimalpolynom und charakteristische Polynom von $f|V_x$. (Man nennt α_x den A n n u l l a t o r von x .)

c) Ist V endlichdimensional und $x_1,\dots,x_r$ ein Erzeugendensystem von V, so ist $\mu_f = \mathrm{kgV}\,(\alpha_{x_1},\dots,\alpha_{x_r})$. (Es genügt für die letzte Gleichung vorauszusetzen, dass $V = \sum_{\rho=1}^r V_{x_\rho}$ ist.)

d) Sei V endlichdimensional. Genau dann ist $\chi_f = \mu_f$, wenn $V_{x_0} = V$ für ein $x_0 \in V$ gilt. (Ein solcher Operator heißt ein z y k l i s c h e r O p e r a t o r .)

Beweis: a) Es ist $x = f^0(x) \in V_x$. Für $y \in V_x$ ist $y = \sum_{i=1}^r a_i f^{n_i}(x)$ mit $a_1,\dots,a_r \in K$ und $n_1,\dots,n_r \in \mathbb{N}$. Es folgt $f(y) = \sum_{i=1}^r f^{n_i+1}(x) \in V_x$, d.h. V_x ist f-invariant. Ist U ein weiterer f-invarianter Unterraum von V mit $x \in U$, so sieht man durch Induktion über n sofort $f^n(x) \in U$. Daher ist $V_x \subseteq U$.

b) Ist V_x endlichdimensional, so gibt es ein Erzeugendensystem der Form $f^{n_1}(x),\dots,f^{n_r}(x)$ von V_x. Ist $n > n_i$ für alle i, so existieren also $a_i \in K$ mit $f^n(x) = \sum_{i=1}^r a_i f^{m_i}(x)$. Dann ist $F(X) := X^n - \sum_{i=1}^r a_i X^{m_i}$ ein normiertes Polynom mit $F(f)(x) = 0$. Gibt es umgekehrt ein solches Polynom $F(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, so folgt $f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-a_k)\,f^k(x) \in \sum_{k=0}^{n-1} Kf^k(x)$. Durch Induktion über $m \ge n$ folgt dann $f^m(x) \in \sum_{k=0}^{n-1} Kf^k(x)$. Beim Schluss von m auf $m+1$ ist $f^{m+1}(x) = f\big(f^m(x)\big) \in f\big(\sum_{k=0}^{n-1} Kf^k(x)\big) = \sum_{k=0}^{n-1} Kf^{k+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} Kf^k(x)$ wegen $f^n(x) \in \sum_{k=0}^{n-1} Kf^k(x)$.

Ist α_x das normierte Polynom kleinsten Grades mit $\alpha_x(f)(x)$, so folgt auch $\alpha_x(f)(f^m(x)) = f^m(\alpha_x(f)(x)) = f^m(0) = 0$. Daher ist $\alpha_x(f)(x)$ das Minimalpolynom von $f|V_x$. Der vorstehende Beweis zeigt $\mathrm{Grad}\,\alpha_x = \mathrm{Min}\,\{n \in \mathbb{N} \mid f^n(x) \in \sum_{k=0}^{n-1} Kf^k(x)\} = \mathrm{Dim}_K V_x = \mathrm{Grad}\,\chi_{f|V_x}$. Da $\chi_{f|V_x}$ von α_x geteilt wird und beide Polynome normiert sind, folgt $\alpha_x = \chi_{f|V_x}$.

c) Sei $W = \sum_{\rho=1}^r V_{x_\rho}$. Für $x = \sum_{\rho=1} x_\rho$ mit $x_\rho \in V_{x_\rho}$ gilt dann $F(f)(x_\rho) = 0$ für jedes Vielfache F aller α_ρ und daher auch für $F = \mathrm{kgV}\,(\alpha_{x_1},\dots,\alpha_{x_r})$. Es folgt $\mathrm{kgV}\,(\alpha_{x_1},\dots,\alpha_{x_r})(f)(x) = 0$, d.h. μ_f teilt $\mathrm{kgV}\,(\alpha_{x_1},\dots,\alpha_{x_r})$. Ist umgekehrt $F(f)|W = 0$ für ein Polynom F, so folgt $F(f|V_\rho) = 0$, d.h. F ist ein Vielfaches eines jeden α_ρ und damit auch des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der α_ρ. Insgesamt folgt $\mathrm{kgV}\,(\alpha_{x_1},\dots,\alpha_{x_r}) = \mu_f$.

d) Ist $V = V_{x_0}$, so gilt $\chi_f = \mu_f$ nach b).

Sei umgekehrt $\chi_f = \mu_f = P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r}$ mit paarweise verschiedenen normierten Primpolynomen $P_1, \ldots, P_r$, die also teilerfremd sind. Nach Definition von μ_f gibt es ein $y_i \in V$ mit $(P_1^{n_1} \cdots P_i^{n_i-1} \cdots P_r^{n_r})(f)(y_i) = 0$ für jedes $i = 1, \ldots, r$. Setzen wir $x_i := (P_1^{n_1} \cdots P_{i-1}^{n_{i-1}} P_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots P_r^{n_r})(f)(y_i)$, so gilt dann also $P_i^{n_i}(f)(x_i) = 0$ und $P_i^{n_i-1}(f)(x_i) \neq 0$. Es folgt $\mu_{f|V_{x_i}} = P_i^{n_i}$. Für $W := V_{x_1} + \cdots + V_{x_r}$ erhält man mit b) und c) dann $\mu_{f|W} = \mathrm{kgV}(P_1^{n_1}, \ldots, P_r^{n_r}) = P_1^{n_1} \cdots P_r^{n_r} = \mu_f = \chi_f$. Daher ist $\mathrm{Dim}\, W \geq \mathrm{Grad}\, \mu_{f|W} = \mathrm{Grad}\, \chi_f = \mathrm{Dim}\, V$ und folglich $W = V$.

Sei nun $x := x_1 + \cdots + x_r$. Setzen wir $Q_i := P_1^{n_1} \cdots P_{i-1}^{n_{i-1}} P_{i+1}^{n_{i+1}} \cdots P_r^{n_r}$ für alle i, so gilt $\mathrm{ggT}(Q_1, \ldots, Q_r) = 1$. Nach Konstruktion von Q_i gilt $Q_i(f)(x_j) = 0$ für alle $j \neq i$. Das Lemma 10.A.5 von Bezout (siehe dazu auch die Zusatzaufgabe zu 10.A) zeigt, dass es Polynome $S_i \in K[X]$ gibt mit $S_1Q_1 + \cdots + S_rQ_r = 1$. Dann folgt $(S_iQ_i)(f)(x) = (S_iQ_i)(f)(x_i) = \mathrm{id}_V(x_i) - \sum_{j\neq i}(S_jQ_j)(f)(x_i) = x_i$. Daher enthält der f-invariante Unterraum V_x die Unterräume V_{x_i}, also auch $V = W = V_{x_1} + \cdots + V_{x_r}$. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 41, p. 312 (1.10.2011):

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert der Matrix $(a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Dann gilt $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ für wenigstens ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und auch $|\lambda - a_{jj}| \leq \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$ für wenigstens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. (Gerschgorin)

Beweis: Angenommen, es sei $|\lambda - a_{jj}| > \sum_{i=1,\, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$ für alle i. Wendet man 3.B, Aufg. 26 an, so sieht man, dass die Zeilen $(a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{11}, \ldots, a_{1n})$ der Matrix $\lambda\mathfrak{E}_n - (a_{ij})$ eine Basis von K^n bilden. Ihre Determinante $\chi_{(a_{ij})}(\lambda)$ ist also $\neq 0$ im Widerspruch dazu, dass λ ein Eigenwert von (a_{ij}) ist.

Die erste der beiden angegebenen Bedingungen liefert die zweite für die transponierte Matrix ${}^t(a_{ij})$, die nach Satz 11.A.16 aber dieselben Eigenwerte wie (a_{ij}) besitzt. •

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage, wenn man die Rolle von Zeilen und Spalten der Matrix (a_{ij}) vertauscht.

Abschnitt 11.A, Aufg. 42, p. 312 (1.10.2011):

Seien f ein Operator auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum und $F \in K[X]$ ein Polynom. Genau dann ist $F(f)$ invertierbar, wenn F und μ_f (oder auch F und χ_f) teilerfremd sind. Eine entsprechende Aussage gilt für quadratische Matrizen über K mit endlich vielen Zeilen.

Beweis: Sind F und μ_f teilerfremd, so gibt es nach dem Lemma von Bezout $S, T \in K[X]$ mit $SF + T\mu_f = 1$, also wegen $\mu_f(f) = 0$ mit $S(f)\,F(f) = \mathrm{id}_V$, und $F(f)$ besitzt die Umkehrabbildung $S(f)$.

Haben umgekehrt F und μ_f einen nicht konstanten gemeinsamen Teiler Q mit $F = RQ$ und $\mu_f = SQ$, $R, S \in K[X]$, so ist $\mathrm{Grad}\, S < \mathrm{Grad}\, \mu_f$, also $S(f) \neq 0$. Aus $Q(f)\,S(f) = \mu_f(f) = 0$ folgt dann, dass $Q(f)$ nicht injektiv ist. Dann kann aber auch $F(f) = R(f)\,Q(f)$ nicht injektiv sein. •

Abschnitt 11.A, Aufg. 43, p. 312 (1.11.2011):

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n.

a) Seien f und g invertierbare Operatoren auf V. Genau dann sind alle Operatoren $\lambda f - \mu g$, $(\lambda, \mu) \in K^2 - \{(0, 0)\}$, invertierbar, wenn das charakteristische Polynom $\chi_{f^{-1}g}$ von $f^{-1}g$ keine Nullstelle, d.h. $f^{-1}g$ keinen Eigenwert besitzt.

b) Sei $\Phi: V \times V \to V$ bilinear. Ist K algebraisch abgeschlossen und $n \geq 2$, so besitzt Φ Nullteiler, d.h. es gibt $x, y \in V$ mit $x \neq 0 \neq y$ und $\Phi(x, y) = 0$. Ist $K = \mathbb{R}$ und n ungerade und ≥ 3, so besitzt Φ Nullteiler.

Beweis: a) Da f invertierbar ist, ist $\lambda f + \mu g$ bei $\mu = 0$ genau dann invertierbar, wenn $\lambda \neq 0$ ist. Sei also $\mu \neq 0$. Dann ist $\lambda f - \mu g$ genau dann invertierbar, wenn dies für $\lambda f - \mu g = \mu f(\lambda\mu^{-1}\,\mathrm{id} - f^{-1}g)$ gilt. Da μf nach Voraussetzung invertierbar ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Det}(\lambda\mu^{-1}\,\mathrm{id} - f^{-1}g) = \chi_{f^{-1}g}(\lambda\mu^{-1})$ nicht 0 ist, d.h. wenn $\lambda\mu^{-1}$ kein Eigenwert von $f^{-1}g$ ist. Für alle $(\lambda, \mu) \in K^2 - \{(0, 0)\}$ ist dies genau dann der Fall, wenn $f^{-1}g$ überhaupt keine Eigenwerte besitzt.

b) Wegen $n \geq 2$ können wir linear unabhängige Vektoren $x_1, x_2 \in V$ wählen. Dann sind $x_1, x_2 \neq 0$. Dazu betrachten wir die linearen Operatoren $f_{x_1}: V \to V$ und $f_{x_2}: V \to V$ mit $f_{x_1}(y) := \Phi(x_1, y)$ und $f_{x_2}(y) := \Phi(x_2, y)$ für alle $y \in V$. Gibt es kein $y \neq 0$ mit $\Phi(x_1, y) = 0$ oder mit $\Phi(x_2, y) = 0$, so sind f_{x_1} und f_{x_2} injektiv, also auch invertierbar. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, so besitzt das charakteristische Polynom von $f_{x_1}^{-1}f_{x_2}$ sicher eine Nullstelle in K. Das Gleiche gilt, wenn $K=\mathbb{R}$ und n ungerade ist, da dann das charakteristische Polynom von $f_{x_1}^{-1}f_{x_2}$ als Polynom ungeraden Grades über $\mathbb{R}$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle besitzt, vgl. Band 1, Satz 11.A.6. In beiden Fällen existiert also ein Eigenwert von $f_{x_1}^{-1}f_{x_2}$. Nach a) gibt es somit $(\lambda,\mu)\in K^2-\{(0,0)\}$, für die $\lambda f_{x_1}-\mu f_{x_2}$ nicht invertierbar, also auch nicht injektiv ist. Daher gibt es ein $y\neq 0$ in V mit $0=(\lambda f_{x_1}-\mu f_{x_2})(y)=\lambda\Phi(x_1,y)-\mu\Phi(x_2,y)=\Phi(\lambda x_1-\mu x_2\,,y)$. Es ist somit $\Phi(x,y)=0$ für $x:=\lambda x_1-\mu x_2$. Dabei ist $x\neq 0$, da x_1,x_2 linear unabhängig sind und λ,μ nicht beide gleich 0.

•

Abschnitt 11.A, Zusatzaufgabe, p. 313 (1.10.2011):

V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und E sei affiner Raum über K. $f:E\to E$ sei eine affine Abbildung. Ist 1 Eigenwert des linearen Anteils $f_0:V\to V$ von f, so besitzt f keinen Fixpunkt oder mindestens zwei verschiedene Fixpunkte. Ist umgekehrt 1 kein Eigenwert von f_0, so besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweis: Ist 1 Eigenwert von f_0, so ist die Abbildung id_V-f_0 nicht injektiv und wegen $\mathrm{Dim}_K V<\infty$ auch nicht surjektiv. Zu einem $P\in E$ gibt es also bei $\overrightarrow{P\,f(P)}\in \mathrm{Bild}\,(\mathrm{id}_V-f_0)$ mindestens zwei verschiedene $x,y\in V$ mit $(\mathrm{id}_V-f_0)(x)=\overrightarrow{P\,f(P)}$, d.h. mit $x-\overrightarrow{P\,f(P)}=f_=(x)$ und folglich

$$f(x+P)=f_0(x)+f(P)=x-\overrightarrow{P\,f(P)}+f(P)=x+\overrightarrow{f(P)\,P}+f(P)=x+P$$

sowie mit $(\mathrm{id}_V-f_0)(y)=\overrightarrow{P\,f(P)}$, d.h. mit $f(y+P)=y+P$. Dann sind $x+P$ und $y+P$ zwei verschiedene Fixpunkte von f.

Besitzt f andererseits einen Fixpunkt $x+P$, $x\in V$, so gilt

$$x+P=f(x+P)=f_0(x)+f(P)=f_0(x)+\overrightarrow{P\,f(P)}+P$$

also $x=f_0(x)+\overrightarrow{P\,f(P)}$. Dann ist $\overrightarrow{P\,f(P)}=x-f_0(x)=(\mathrm{id}_V-f_0)\in \mathrm{Bild}\,(\mathrm{id}_V-f_0)$.

Ist schließlich 1 kein Eigenwert von f_0, so ist die Abbildung id_V-f_0 injektiv und wegen $\mathrm{Dim}_K V<\infty$ auch surjektiv. Fixieren wir wieder $P\in V$, so gibt es also zu $\overrightarrow{P\,f(P)}$ genau ein $x\in V$ mit $(\mathrm{id}_V-f_0)(x)=\overrightarrow{P\,f(P)}$, d.h. mit $f(x+P)=f_0(x)+f(P)=x-\overrightarrow{P\,f(P)}+f(P)=x+\overrightarrow{f(P)\,P}+f(P)=x+P$, und $x+P$ ist der einzige Fixpunkt von f.

(Zu dieser Aufgabe vergleiche auch 7.A, Aufg. 10.) •

Abschnitt 11.B, Teil von **Aufg. 1**, p. 322 (1.10.2011) :

Man untersuche, ob die folgende Matrix $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar sind. Ist dies der Fall, so gebe man eine Basis aus Eigenvektoren an und eine invertierbare Matrix $\mathfrak{B}$, mit der $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Außerdem gebe man dann die Spektralzerlegung von $\mathfrak{A}$ an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom $\chi_{\mathfrak{A}} = \operatorname{Det}(X\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A}) = (X-1)(X+1)(X-2)$ von $\mathfrak{A}$ hat die paarweise verschiedenen Nullstellen $1, -1, 2$, zerfällt also in einfache Linearfaktoren. Daher ist $\mathfrak{A}$ nach Korollar 11.B.6 diagonalisierbar.

Die Eigenräume zu diesen Eigenwerten berechnen sich als Lösungsmengen der drei Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

sind also gleich $\mathbb{R}\,{}^t(1,0,0)$ bzw. $\mathbb{R}\,{}^t(-1,1,0)$ bzw. $\mathbb{R}\,{}^t(8,1,3)$. Wir schreiben nun die zugehörige Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen $\mathfrak{B}$ als deren Inverses:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Mit der Diagonalmatrix $\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt dann $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

$\mathfrak{D}$ besitzt die Spektralzerlegung $\mathfrak{D} = 1\cdot\mathfrak{E}_{11} + (-1)\cdot\mathfrak{E}_{22} + 2\cdot\mathfrak{E}_{33}$ mit den Matrizen $\mathfrak{E}_{ij}$ aus Abschnitt 8.A. Die Spektralzerlegung von $\mathfrak{A}$ ist also $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B} = 1\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{E}_{11}\mathfrak{B} + (-1)\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{E}_{22}\mathfrak{B} + 2\cdot\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{E}_{33}\mathfrak{B}$. Durch Ausmultiplizieren erhält man als Spektraldarstellung von $\mathfrak{A}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.B, Variante zu **Aufg. 1**, p. 322 (1.10.2011) :

Man untersuche, ob die folgenden Matrizen $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar sind. Ist dies der Fall, so gebe man eine Basis aus Eigenvektoren an und eine invertierbare Matrix $\mathfrak{B}$, mit der $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist. Außerdem geben man dann für jedes $n\in\mathbb{N}$ (und bei invertierbarem $\mathfrak{A}$ für jedes $n\in\mathbb{Z}$) die Matrix $\mathfrak{A}^n$ an:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Durch Entwickeln nach der zweiten Spalte berechnet man für die erste Matrix das charakteristische Polynom

$$\chi_{\mathfrak{A}} = \operatorname{Det}(X\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A}) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} X-3 & 0 & 2 \\ 8 & X+1 & -4 \\ -4 & 0 & X+3 \end{pmatrix} = (X+1)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} X-3 & 2 \\ -4 & X+3 \end{pmatrix} = (X+1)(X^2-1)$$
$$= (X-1)(X+1)^2\,.$$

Es hat die Nullstellen 1 und -1. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 2 \\ 8 & 1+1 & -4 \\ -4 & 0 & 1+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{rrr} -2x_1 & & +2x_3 = 0 \\ 8x_1 + & 2x_2 & -4x_3 = 0 \\ -4x_1 & & +4x_3 = 0\,. \end{array}$$

Es folgt $x_1 = x_3$ und dann $x_2 = -2x_3$, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist gleich $\mathbb{R}\,{}^t(1,-2,1)$.

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1-3 & 0 & 2 \\ 8 & -1+1 & -4 \\ -4 & 0 & -1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \,, \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} -4x_1 + 2x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_3 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Daher ist x_2 beliebig und $x_3 = 2x_1$, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist gleich $\mathbb{R}\,{}^t(0,1,0) + \mathbb{R}\,{}^t(1,0,2)$.

Für beide Eigenwerte stimmen also wegen $\alpha_{\mathfrak{A}}(1) = 1 = \gamma_{\mathfrak{A}}(1)$ und $\alpha_{\mathfrak{A}}(-1) = 2 = \gamma_{\mathfrak{A}}(-1)$ die algebraische und die geometrische Multiplizität überein, d.h. die Matrix ist nach Satz 11.B.5 diagonalisierbar.

Wir schreiben die erhaltene Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen $\mathfrak{B}$ als deren Inverses:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \,, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,.$$

Es gilt dann $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{D} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Daraus folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^n &= (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B})^n = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\cdots\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}^n\mathfrak{B} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1)^n & 0 & -1+(-1)^n \\ -4+4(-1)^n & (-1)^n & 2-2(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & 0 & -1+2(-1)^n \end{pmatrix} \,. \end{aligned}$$

Durch Entwickeln nach der dritten Spalte oder mit Hilfe des Blockmatrizensatzes berechnet man das charakteristische Polynom der zweiten Matrix:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathfrak{A}} &= \operatorname{Det}(X\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A}) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} X-5 & 6 & 0 \\ -3 & X+4 & 0 \\ 3 & -6 & X-2 \end{pmatrix} = (X-2)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} X-5 & 6 \\ -3 & X+4 \end{pmatrix} = \\ &= (X-2)(X^2-X-2) = (X-2)^2(X+1) \,. \end{aligned}$$

Es hat die Nullstellen 2 und -1. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 6 & 0 \\ -3 & 2+4 & 0 \\ 3 & -6 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \,, \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} -3x_1 + 6x_2 &= 0 \\ -3x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 0 \end{aligned} \,.$$

Es folgt also $x_1 = 2x_2$, wohingegen x_3 beliebig ist, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist der Raum $\mathbb{R}\,{}^t(2,1,0) + \mathbb{R}\,{}^t(0,0,1)$.

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1-5 & 6 & 0 \\ -3 & -1+4 & 0 \\ 3 & -6 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \,, \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 \phantom{{}-3x_3} &= 0 \\ -3x_1 + 3x_2 \phantom{{}-3x_3} &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \,.$$

Es folgt $x_1 = x_2 = -x_3$, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist gleich $\mathbb{R}\,{}^t(-1,-1,1)$.

Für beide Eigenwerte stimmen also wegen $\alpha_{\mathfrak{A}}(2) = 2 = \gamma_{\mathfrak{A}}(2)$ und $\alpha_{\mathfrak{A}}(-1) = 1 = \gamma_{\mathfrak{A}}(-1)$ die algebraische und die geometrische Multiplizität überein, d.h. die Matrix ist nach Satz 11.B.5 diagonalisierbar.

Wir schreiben nun die zugehörige Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix B^{-1} und berechnen B als deren Inverses:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Es gilt dann $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{D} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, also

$$\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B})^n = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}\cdots\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}^n\mathfrak{B} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-(-1)^n & -2^{n+1}+2(-1)^n & 0 \\ 2^n-(-1)^n & -2^n+2(-1)^n & 0 \\ -2^n+(-1)^n & 2^{n+1}-2(-1)^n & 2^n \end{pmatrix}. \bullet$$

Abschnitt 11.B, Teil von **Aufg. 2**, p. 322 (1.10.2011) :

Man untersuche, ob die folgenden Matrizen $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar sind. Ist dies der Fall. so gebe man eine Basis an, bzgl. der die Matrix des durch $\mathfrak{A}$ beschriebenen Operators eine obere Dreiecksmatrix ist, sowie eine invertierbare Matrix $\mathfrak{B}$, mit der $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 10 & 20 & -2 & -10 \\ -3 & -6 & 1 & -1 \\ 9 & 14 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Indem man zunächst die letzte Spalte zur ersten und dritten addiert sowie von der zweiten abzieht, dann die dritte Zeile von der vierten subtrahiert, als Nächstes nach der dritten Spalte entwickelt und schließlich das (-1)-fache der ersten Zeile sowie die zweite Zeile zur dritten Zeile addiert, berechnet man das charakteristische Polynom der ersten Matrix:

$$\chi_{\mathfrak{A}} := \begin{vmatrix} X & -1 & 1 & -1 \\ 1 & X-2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 & 0 \\ X & -X & X-1 & X-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & X-1 & 0 \\ X-1 & -(X-1) & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ X-1 & -(X-1) & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^4 .$$

Da das charakteristische Polynomvon $\mathfrak{A}$ in Linearfaktoren zerfällt, ist $\mathfrak{A}$ nach Satz 11.B.9 trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$ (und erst recht über $\mathbb{R}$). Da das Minimalpolynom von $\mathfrak{A}$ dieselben Primteiler wie das charakteristische Polynom hat und da das Minimalpolynom eines diagonalisierbaren Operators in paarweise verschieden Linearfaktoren zerfällt, müsste $\mu_{\mathfrak{A}} = X-1$ sein, wenn $\mathfrak{A}$ diagonalisierbar wäre. Dann wäre aber $0 = \mu_A(A) = \mathfrak{A} - \mathfrak{E}_4$, d.h. $\mathfrak{A}$ wäre die Einheitsmatrix. Daher ist $\mathfrak{A}$ nicht diagonalisierbar.

Für jeden der Eigenwerte von A, also hier nur für 1, berechnen wir nun der Reihe nach die höheren Eigenräume mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, wobei wir die gefundene Basis von U_1 zu einer Basis von U_2 ergänzen, dann diese Basis von U_2 zu einer solchen von U_3 usw., bis die Folge stationär wird:

$$U_1 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (1\cdot\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = 0\} = \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix} \right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U_2 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (1\cdot\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2\mathfrak{x} = 0\} = \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \mathbb{Q}^4 .$$

Ergänzt man die beiden Erzeugenden von U_1 durch ${}^t(1,0,0,0)$ und ${}^t(0,0,1,0)$ zu einer Basis von $U_2=\mathbb{Q}^4$, so bekommt man schon die Spalten einer möglichen Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$, berechnet daraus $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}^{-1})^{-1}$ und erhält

$$\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&0&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&2&-1&1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Indem man im ersten Schritt das (-1)-fache der ersten und das 1-fache der dritten Zeile zur letzten addiert und in der vierten Zeile $(X+2)$ ausklammert, danach das 1-fache der vierten Spalte zur ersten und das (-1)-fache der vierten Spalte zur dritten addiert und den Blockmatrizensatz anwendet, bei der entstehenden 3×3-Matrix das $(-\frac{1}{2})$-fache der zweiten und das 1-fache der dritten Spalte zur ersten addiert, wieder $(X+2)$ ausklammert (aus der ersten Spalte) und schließlich das $\frac{1}{2}$-fache der ersten Zeile zur zweiten und das (-1)-fache der ersten Zeile zur dritten addiert und den Blockmatrizensatz anwendet, sieht man für das vharakteristische Polynom der zweiten Matrix:

$$\begin{aligned}\chi_{\mathfrak{A}}(X)&=\operatorname{Det}\begin{pmatrix}X-10&-20&2&10\\3&X+6&-1&1\\-9&-14&X+4&4\\-3&-6&0&X+8\end{pmatrix}=\operatorname{Det}\begin{pmatrix}X-10&-20&2&10\\3&X+6&-1&1\\-9&-14&X+4&4\\-X-2&0&X+2&X+2\end{pmatrix}=\\&=(X+2)\ \operatorname{Det}\begin{pmatrix}X-10&-20&2&10\\3&X+6&-1&1\\-9&-14&X+4&4\\-1&0&1&1\end{pmatrix}=(X+2)\ \operatorname{Det}\begin{pmatrix}X&-20&-8&10\\4&X+6&-2&1\\-5&-14&X&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\\&=(X+2)\ \operatorname{Det}\begin{pmatrix}X&-20&-8\\4&X+6&-2\\-5&-14&X\end{pmatrix}=(X+2)\ \operatorname{Det}\begin{pmatrix}X+2&-20&-8\\-\frac{1}{2}X-1&X+6&-2\\X+2&-14&X\end{pmatrix}=\\&=(X+2)^2\ \operatorname{Det}\begin{pmatrix}1&-20&-8\\-\frac{1}{2}&X+6&-2\\1&-14&X\end{pmatrix}=(X+2)^2\ \operatorname{Det}\begin{pmatrix}1&-20&-8\\0&X-4&-6\\0&6&X+8\end{pmatrix}=\\&=(X+2)^2\big((X-4)(X+8)+36\big)=(X+2)^4\ .\end{aligned}$$

Für jeden der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, also hier nur für -2, berechnen wir nun der Reihe nach die höheren Eigenräume mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, wobei wir die gefundene Basis von U_1 zu einer Basis von U_2 ergänzen, dann diese Basis von U_2 zu einer solchen von U_3 usw.:

$$\begin{aligned}U_1&:=\{\mathfrak{x}\in\mathbb{Q}^4\mid(-2\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})x=0\}=\left\{\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^4\,\middle|\,\begin{pmatrix}-12&-20&2&10\\3&4&-1&1\\-9&-14&2&4\\-3&-6&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\right\}=\\&=\left\{\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^4\,\middle|\,\begin{array}{r}-12x_1-20x_2+2x_3+10x_4=0\\3x_1+4x_2-x_3+x_4=0\\-9x_1-14x_2+2x_3+4x_4=0\\-3x_1-6x_2+6x_4=0\end{array}\right\}=\mathbb{Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\0\end{pmatrix}+\mathbb{Q}\begin{pmatrix}0\\1\\5\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_2&:=\{\mathfrak{x}\in\mathbb{Q}^4\mid(-2\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})^2x=0\}=\left\{\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^4\,\middle|\,\begin{pmatrix}36&72&0&-72\\-18&-36&0&36\\36&72&0&-72\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0\right\}=\\&=\left\{\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^4\,\middle|\,\begin{array}{r}36x_1+72x_2-72x_4=0\\-18x_1-36x_2+36x_4=0\\36x_1+72x_2-72x_4=0\end{array}\right\}=\mathbb{Q}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\\0\end{pmatrix}+\mathbb{Q}\begin{pmatrix}0\\1\\5\\1\end{pmatrix}+\mathbb{Q}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Schließlich berechnet man $(-2\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})^3=0$, d.h. es ist $U_3:=\{x\in\mathbb{Q}^4\mid(-2\mathfrak{E}_4-\mathfrak{A})^3x=0\}=\mathbb{Q}^4$, und wir ergänzen die gefundene Basis von U_2 etwa durch den Standardbasisvektor e_4 zu einer Basis von U_3. Wir schreiben die vier so erhaltenen Vektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen mit dem üblichen Verfahren die dazu inverse Matrix $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -5 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte obere Dreiecksmatrix ist dann $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -5 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 20 & -2 & -10 \\ -3 & -6 & 1 & -1 \\ 9 & 14 & -4 & -4 \\ 3 & 6 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Abschnitt 11.B, Variante zu **Aufg. 2**, p. 322 (1.10.2011) :

Man gebe zu den folgenden Matrizen $\mathfrak{A}$ eine invertierbare Matrix $\mathfrak{B}$ an derart, dass $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Mit Hilfe des Blockmatrizensatzes (für untere Dreiecksmatrizen) berechnen wir das charakteristische Polynom der ersten Matrix:

$$\chi_{\mathfrak{A}}(X) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} X-5 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & X+3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & X-2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & X \end{pmatrix} = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} X-5 & 2 \\ -8 & X+3 \end{pmatrix} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X \end{pmatrix} =$$
$$= \big((X-5)(X+3)+16\big)\big((X-2)X+1\big) = (X-1)^4 .$$

Für jeden der Eigenwerte λ von $\mathfrak{A}$, also hier nur für $\lambda = 1$, berechnen wir nun der Reihe nach die Kerne $U_1, U_2, \ldots$ von $\lambda\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A} = \mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A}$, $(\lambda\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2 = (\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2, \ldots$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, wobei wir die gefundene Basis von U_1 zu einer Basis von U_2 ergänzen, dann diese Basis von U_2 zu einer solchen von U_3 usw.:

$$U_1 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = 0\} = \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,\middle|\, \begin{array}{rl} -4x_1 + 2x_2 & = 0 \\ -8x_1 + 4x_2 & = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \end{array} \right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U_2 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2\mathfrak{x} = 0\} = \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \,\middle|\, 4x_1 - 2x_2 = 0 \,,\; x_3, x_4 \in \mathbb{Q} \text{ beliebig} \right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnet man $(\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^3 = 0$, d.h. es ist $U_3 := \{x \in \mathbb{Q}^4 \mid (\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^3 x = 0\} = \mathbb{Q}^4$, und wir ergänzen die gefundene Basis von U_2 etwa durch den Standardbasisvektor e_1 zu einer Basis von U_3. Wir schreiben die vier so erhaltenen Vektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen mit dem üblichen Verfahren die dazu inverse Matrix $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchte obere Dreiecksmatrix ist dann

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Übrigens ist die Matrix $\mathfrak{A}$ nicht diagonalisierbar, da die algebraische Multiplizität des Eigenwertes 1 gleich 4 ist, seine geometrische Multiplizität aber nur gleich 2.

Mit Hilfe des Blockmatrizensatzes berechnen wir das charakteristische Polynom der zweiten Matrix:

$$\chi_{\mathfrak{A}}(X) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} X & -1 & 3 & 3 \\ 4 & X-4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & X-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & X-3 \end{pmatrix} = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} X & -1 \\ 4 & X-4 \end{pmatrix} \operatorname{Det} \begin{pmatrix} X-1 & 1 \\ -1 & X-3 \end{pmatrix} =$$
$$= \big(X(X-4)+4\big)\big((X-1)(X-3)+1\big) = (X-2)^4 .$$

Für jeden der Eigenwerte λ von $\mathfrak{A}$, also hier nur für $\lambda = 1$, berechnen wir nun der Reihe nach die Kerne $U_1, U_2, \ldots$ von $\lambda\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A} = 2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A}$, $(\lambda\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2 = (2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2, \ldots$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, wobei wir die gefundene Basis von U_1 zu einer Basis von U_2 ergänzen, dann diese Basis von U_2 zu einer solchen von U_3 usw.:

$$U_1 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})\mathfrak{x} = 0\} = \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$U_2 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^2\mathfrak{x} = 0\} = \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4 \;\middle|\; x_3 + x_4 = 0 \text{ , } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \right\} = \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Schließlich berechnet man $(2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^3 = 0$, d.h. es ist $U_3 := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid (2\mathfrak{E}_4 - \mathfrak{A})^3\mathfrak{x} = 0\} = \mathbb{Q}^4$, und wir ergänzen die gefundene Basis von U_2 etwa durch den Standardbasisvektor e_3 zu einer Basis von U_3. Wir schreiben die vier so erhaltenen Vektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen mit dem üblichen Verfahren die dazu inverse Matrix $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchte obere Dreiecksmatrix ist dann $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Abschnitt 11.B, Variante zu **Aufg. 1** und **Aufg. 2**, p. 322 (1.10.2011) :

Für die Matrizen $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ bestimme man jeweils eine invertierbare Matrix $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ derart, dass $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine Diagonalmatrix oder obere Dreiecksmatrix ist, und berechne damit die Potenzen $\mathfrak{A}^n$, $n \in \mathbb{N}$, falls

a) $\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, **b)** $\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, **c)** $\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung: a) Wegen $\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X-3 & 1 \\ -2 & X \end{vmatrix} = X(X-3)+2 = (X-1)(X-2)$ hat $\mathfrak{A}$ die Eigenwerte 1 und 2 mit den Eigenräumen $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. Insbesondere ist $\mathfrak{A}$ diagonalisierbar. Wir schreiben die erhaltenene Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak{B}^{-1}$ sowie $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^n &= (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B})(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B})\cdots(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}^n\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 1-2^n \\ -2+2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wegen $\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X+3 & -2 \\ -2 & X \end{vmatrix} = X(X+3)-4 = (X-1)(X+4)$ hat $\mathfrak{A}$ die Eigenwerte 1 und -4 mit den Eigenräumen $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1+3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} -4+3 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert -4. Insbesondere ist $\mathfrak{A}$ diagonalisierbar. Wir schreiben die erhaltenene Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak{B}^{-1}$ sowie $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Es folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, also

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^n &= (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B})(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B})\cdots(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{D}^n\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}+\frac{4}{5}(-4)^n & \frac{2}{5}-\frac{2}{5}(-4)^n \\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5}(-4)^n & \frac{4}{5}+\frac{1}{5}(-4)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Wegen $\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ 1 & X \end{vmatrix} = X(X-2)+1 = (X-1)^2$ hat $\mathfrak{A}$ nur den Eigenwert 1 mit dem Eigenraum $\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 0$ ergänzen wir $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, etwa durch

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$ und bilden die Matrix $\mathfrak{B}^{-1} := \begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak{B}^{-1}$ sowie die Trigonalisierung $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$. Mit $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-(n+1)\\0&1\end{pmatrix}$ bekommt man sofort $\mathfrak{C}^n = \begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}$ durch Induktion über n. Schließlich ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, also

$$\mathfrak{A}^n = (\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B})\cdots(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}^n\mathfrak{B} = \begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-n\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n+1&n\\-n&1-n\end{pmatrix}. \qquad \bullet$$

Abschnitt 11.B, Teil von **Aufg. 3**, p. 323 (1.10.2011) :

Man untersuche, ob die folgenden beiden Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{Q}$ jeweils simultan diagonalisierbar sind, und gebe gegebenenfalls Basen aus gemeinsamen Eigenvektoren an:

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix}-1&0&3\\-12&12&4\\9&0&5\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} := \begin{pmatrix}-1&0&1\\-3&2&1\\3&0&1\end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix}4&4&-4\\0&2&0\\2&4&-2\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} := \begin{pmatrix}-3&-4&4\\4&5&-4\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

Lösung: Im ersten Fall sind die beiden charakteristischen Polynome $\chi_{\mathfrak{A}} = (X-12)(X+4)(X-8)$ und $\chi_{\mathfrak{B}} = (X-2)^2(X+2)$. Die Eigenräume von $\mathfrak{A}$ sind $V_{\mathfrak{A}}(12) = \mathbb{Q}(0,1,0)$, $V_{\mathfrak{A}}(-4) = \mathbb{Q}\,{}^t(1,1,-1)$ und $V_{\mathfrak{A}}(8) = \mathbb{Q}\,{}^t(1,0,3)$, und diejenigen von $\mathfrak{B}$ sind $V_{\mathfrak{B}}(2) = \mathbb{Q}\,{}^t(0,1,0) + \mathbb{Q}\,{}^t(1,0,3)$ und $V_{\mathfrak{B}}(-2) = \mathbb{Q}\,{}^t(1,1,-1)$. Die beiden Matrizen sind also nach Satz 11.B.5 diagonalisierbar, da jeweils die algebraischen gleich den geometrischen Multiplizitäten sind. Da außerdem $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ gilt, sind sie nach Satz 11.B.15 simultan diagonalisierbar. Offenbar ist bereits ${}^t(0,1,0)$, ${}^t(1,1,-1)$, ${}^t(1,0,3)$ eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ aus simultanen Eigenvekoren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Im zweiten Fall sind die beiden charakteristischen Polynome

$$\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix}X-4&-4&4\\0&X-2&0\\-2&-4&X+2\end{vmatrix} = (X-2)\big((X-4)(X+2)+8\big) = (X-2)^2X,$$

$$\chi_{\mathfrak{B}} = \begin{vmatrix}X+3&4&-4\\-4&X-5&4\\-2&-2&X+1\end{vmatrix} = (X+3)(X-5)(X+1) - 32 - 32 - 8(X-5) + 8(X+3) + 16(X+1) =$$
$$= (X-1)^2(X+1).$$

Die zugehörigen Eigenräume sind $V_{\mathfrak{A}}(2) = \mathbb{Q}\,{}^t(0,1,1) + \mathbb{Q}\,{}^t(2,-1,0)$ und $V_{\mathfrak{A}}(0) = \mathbb{Q}\,{}^t(1,0,1)$ sowie $V_{\mathfrak{B}}(-1) = \mathbb{Q}\,{}^t(2,-2,-1)$ und $V_{\mathfrak{B}}(1) = \mathbb{Q}\,{}^t(1,-1,0) + \mathbb{Q}\,{}^t(1,0,1)$. Die beiden Matrizen sind also nach Satz 11.B.5 diagonalisierbar, da jeweils die algebraischen gleich den geometrischen Multiplizitäten sind. Da außerdem $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ gilt, sind sie nach Satz 11.B.15 simultan diagonalisierbar. Es ist $V_{\mathfrak{A}}(0) \cap V_{\mathfrak{B}}(1) = \mathbb{Q}\,{}^t(1,0,1)$, $V_{\mathfrak{A}}(2) \cap V_{\mathfrak{B}}(1) = \mathbb{Q}\,{}^t(0,1,1)$ und $V_{\mathfrak{A}}(2) \cap V_{\mathfrak{B}}(-1) = \mathbb{Q}\,{}^t(2,-2,-1)$. Man erhält so die Basis ${}^t(1,0,1)$, ${}^t(0,1,1)$, ${}^t(2,-2,-1)$ von $\mathbb{Q}^3$ aus simultanen Eigenvektoren von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 4, p. 323 (1.10.2011) :

Ein Operator $f: V \to V$ auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V ist genau dann trigonalisierbar, wenn in jedem von 0 verschiedenen f-invarianten Unterraum von V ein Eigenvektor von f liegt.

Beweis: Sei f trigonalisierbar und $W \subseteq U$ ein f-invarianter Unterraum von V. Dann zerfällt das Minmalpolynom μ_f nach Satz 11.B.9 in Linearfaktoren. Nach Satz 11.A.8 (2) ist $\mu_{f|W}$ ein Teiler von μ_f, zerfällt also ebenfalls in Linearfaktoren, d.h. $f|W$ ist wieder nach Satz 11.B.9 trigonalisierbar.

Zum Beweis der Umkehrung verwenden wir Induktion über $n := \mathrm{Dim}_K V$. Liegt in jedem f-invarianten Unterraum von V ein Eigenvektor von f, so besitzt f zumindest in ganz V einen Eigenvektor und dazu einen Eigenwert. Nach Satz 11.A.16 gilt dies dann auch für den dualen Operator f^*, woraus mit Lemma 11.A.25 folgt, dass es eine f-invariante Hyperebene H von V gibt. Da in jedem f-invarianten Unterraum von V erst recht ein Eigenvektor von f liegt, ist $f|H$ nach Induktionsvoraussetzung trigonalisierbar, d.h. es gibt eine Fahne $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} = H$ f-invarianter Unterräume von H. Diese setzt sich zu einer f-invarianten Fahne $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$ fort, d.h. f ist trigonalisierbar. •

Bemerkung: Man hätte diese Umkehrung auch so beweisen können: Wegen Satz 11.B.9 ist nur zu zeigen, dass jeder normierte Primfaktor P von μ_f ein Linearfaktor ist. Nach Satz 11.A.12 gibt es aber einen f-invarianten Unterraum U von V mit $\chi_{f|U} = P$. Dieser enthält nach Voraussetzung einen Eigenvektor zu einem Eigenwert λ, d.h. λ ist Nullstelle von P und somit $X-\lambda$ ein Teiler von P. Da P ein Primpolynom ist, folgt $P = X-\lambda$.

Abschnitt 11.B, Aufg. 5, p. 323 (1.10.2011) :

Sei $f : V \to V$ ein Operator auf dem K-Vektorraum V.

a) Genau dann ist f eine Projektion, wenn f diagonalisierbar ist mit Spek $f \subseteq \{0, 1\}$.

b) Sei $2 \cdot 1_K \neq 0$. Genau dann ist f eine Involution, wenn f diagonalisierbar ist mit Spek $f \subseteq \{-1, 1\}$.

Beweis: a) Nach Aufg. 7a) ist f genau dann eine Projektion, wenn das Minimalpolynom von f ein Teiler von $X(X-1)$ ist, d.h. wenn es gleich X, $X-1$ oder $X(X-1)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt und höchstens 0 und 1 als Nullstellen hat. Nach Satz 11.B.5 ist dies dazu äquivalent, dass f diagonalisierbar ist mit Spek $f \subseteq \{0, 1\}$.

b) Nach Aufg. 7a) ist f genau dann eine Involution, wenn das Minimalpolynom von f ein Teiler von $(X+1)(X-1)$ ist, d.h. wenn es gleich $X+1$, $X-1$ oder $(X+1)(X-1)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt und höchstens -1 und 1 als Nullstellen hat. Nach Satz 11.B.5 ist dies dazu äquivalent, dass f diagonalisierbar ist mit Spek $f \subseteq \{-1, 1\}$. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 6, p. 323 (1.10.2011) :

Für einen diagonalisierbaren Operator $f : V \to V$ ist das Spektrum gleich der Menge der Eigenwerte.

Beweis: Jeder Eigenwert ist natürlich ein Spektralwert. Sei also $f : V \to V$ diagonalisierbar; nach 11.B.2 gilt dann $V = \sum_{\lambda\in K} V_f(\lambda)$. Ferner sei $\mu \in K$ kein Eigenwert, d.h. die Abbildung $\mu\,\mathrm{id}_V - f$ sei injektiv. Um nachzuweisen, dass μ kein Spektralwert ist, ist zu zeigen, das $\mu\,\mathrm{id}_V - f$ auch surjektiv ist. Sei dazu $y \in V = \sum_{\lambda\in K} V_f(\lambda)$. Dieses Element besitzt eine Darstellung $y = \sum_{\lambda\in K} y_\lambda$ mit $y_\lambda \in V_f(\lambda)$, d.h. $f(y_\lambda) = \lambda y_\lambda$, und $y_\lambda = 0$ für fast alle λ, insbesondere für $\lambda = \mu$. Für $x := \sum_{\lambda\in K,\,\lambda\neq\mu} (\mu-\lambda)^{-1} y_\lambda$ folgt nun

$$(\mu\,\mathrm{id}_V - f)(x) = (\mu\,\mathrm{id}_V - f)\Big(\sum_{\lambda\in K,\,\lambda\neq\mu} (\mu-\lambda)^{-1} y_\lambda\Big) = \sum_{\lambda\in K,\,\lambda\neq\mu} (\mu-\lambda)^{-1} (\mu\,\mathrm{id}_V - f)(y_\lambda)$$
$$= \sum_{\lambda\in K,\,\lambda\neq\mu} (\mu-\lambda)^{-1} (\mu y_\lambda - \lambda y_\lambda) = \sum_{\lambda\in K} y_\lambda = y\,,$$

d.h. $\lambda\,\mathrm{id}_V - f$ ist auch surjektiv, also λ kein Spektralwert. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 7, p. 323 (1.10.2011) :

Sei $f : V \to V$ ein Operator auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Genau dann ist f diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar, wenn der duale Operator $f^* : V^* \to V^*$ die entsprechende Eigenschaft hat.

Beweis: Nach Satz 11.B.5 bzw. Satz 11.B.9 ist f genau dann diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar, wenn das Minimalpolynom μ_f in einfache Linearfaktoren zerfällt bzw. in Linearfaktoren zerfällt. Da nach Satz 11.A.16 $\mu_f = \mu_{f^*}$ gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn das Minimalpolynom μ_{f^*} die entsprechende Eigenschaft hat, d.h. wenn f^* diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar ist.

Abschnitt 11.B, Aufg. 8, p. 323 (1.10.2011) :

Sei $f: V \to V$ ein Operator auf dem K-Vektorraum V. Die Elemente $x_1, \ldots, x_n \in V$ seien Eigenvektoren von f zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Ferner sei U der von den $x_1, \ldots, x_n$ erzeugte (n-dimensionale) Unterraum. Dann ist U f-invariant mit $\chi_{f|U} = \mu_{f|U} = \prod_{j=1}^n (X - \lambda_j)$.

Für $x := x_1 + \cdots + x_n$ ($\in U$) ist x, $f(x)$, $f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ ebenfalls eine Basis von U. Insbesondere ist U der kleinste f-invariante Unterraum von V, der x umfasst.

Beweis: Nach Lemma 11.B.2 sind die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig. Die $f^j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, sind dann wegen $f^j(x) = \sum_{i=1}^n f^j(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j x_i$ nach Lemma 8.A.12 ebenfalls linear unabhängig, da die Übergangsmatrix (λ_i^j) nach 8.A, Aufg. 21 invertierbar ist. Letzteres folgt auch mit Korollar 9.C.10, da die Vandermondesche Determinante $\operatorname{Det}(\lambda_i^j) = \prod_{0 \le i < j \le n-1} (\lambda_j - \lambda_i)$, vgl. 9.D, Aufg. 19, nach Voraussetzung über die λ_i nicht verschwindet. Wegen $\operatorname{Dim}_K V = n$ bilden die $f^j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, dann schon eine Basis von U. Der Unterraum U ist f-invariant, da $f^n(x)$ wegen $\operatorname{Grad} \mu_{f|U} = n$ wieder in U enthalten ist. •

Bemerkung: Die Aussage ergibt sich auch aus dem Beweis von 11.A, Aufg. 40d) im Spezialfall $V_{x_i} = Kx_i$.

Abschnitt 11.B, Aufg. 10, p. 324 (1.10.2011) :

Ist $f: V \to V$ diagonalisierbar und nilpotent, so ist $f = 0$.

Beweis: Wenn f diagonalisierbar ist, so gibt es nach Definition 11.B.1 eine Basis v_i, $i \in I$, aus Eigenvektoren von f, also mit $f(v_i) = \lambda_i v_i$ mit einem $\lambda_i \in K$ für alle i. Da f nilpotent ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k = 0$. Es folgt $0 = f^k(v_i) = f^{k-1}(f(v_i)) = f^{k-1}(\lambda_i v_i) = \lambda_i f^{k-1}(v_i) = \cdots = \lambda_i^k v_i$, also $\lambda_i = 0$, und folglich $f(v_i) = \lambda_i v_i = 0$ für alle i, d.h. $f = 0$. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 11, p. 324 (1.10.2011) :

Ist $f: V \to V$ ein Operator mit Rang $f = 1$, so ist f diagonalisierbar oder nilpotent (mit $f^2 = 0$).

Beweis: Nach dem Rangsatz gilt $n := \operatorname{Dim}_K V = \operatorname{Dim}_K \operatorname{Kern} f - \operatorname{Rang} f$, also $\operatorname{Dim}_K \operatorname{Kern} f = n-1$ bei Rang $f = 1$. Ergänzt man eine Basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ von Kern f durch einen Vektor v_n mit $f(v_n) = \sum_{i=1}^n a_{in} v_i$, $a_{ij} \in K$, zu einer Basis von V, so wird f in dieser Basis durch eine $n\times n$-Matrix beschrieben, deren erste $n-1$ Spalten 0 sind und deren letzte Spalte gleich ${}^t(a_{1n}, \ldots, a_{nn})$ ist. Bei $a_{nn} = 0$ gilt dann $f(v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} v_i \in$ Kern f, also $f^2 = 0$, und f ist nilpotent. Bei $a_{nn} \neq 0$ hat f das charakteristische Polynom $X^{n-1}(X - a_{nn})$ und a_{nn} ist ein weiterer Eigenwert von f, zu dem es einen Eigenvektor v_n' gibt. Dann ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n'$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f, und f ist diagonalisierbar. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 12, p. 324 (1.10.2011) :

Ein Operator $f: V \to V$ auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum $V \neq 0$ ist genau dann nilpotent, wenn f trigonalisierbar ist mit Spek $f = \{0\}$.

Beweis: Wenn f nilpotent ist, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k = 0$. Dann ist das Minimalpolynom μ_f von f ein Teiler von X^k, also von der Form X^m mit einem $m \in \mathbb{N}$ und zerfällt somit in Linearfaktoren. Nach Satz 11.B.9 ist f dann trigonalisierbar. Außerdem hat f dann nur 0 als Eigenwert, da Eigenwerte Nullstellen des Minimalpolynoms sind.

Ist umgekehrt f trigonalisierbar mit 0 als einzigem Eigenwert, so ist das charakteristische Polynom χ_f nach Satz 11.B.9 ein Produkt von Linearfaktoren, die alle gleich X sein müssen, da 0 die einzige Nullstelle von χ_f ist. Es folgt $\chi_f = X^n$ mit $n := \operatorname{Dim} V$ und somit $f^n = 0$ nach dem Satz von Cayley-Hamilton. •

Bemerkung: Ein direkter Beweis dieser Aufgabe wird in Beispiel 8.C.5 gegeben.

Abschnitt 11.B, Aufg. 13, p. 324 (1.10.2011) :

Sei $\mathfrak{A}$ eine reelle 2×2- oder 3×3-Matrix. Ist $\mathfrak{A}$ nicht trigonalisierbar über $\mathbb{R}$, so ist $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Beweis: Sei zunächst $\mathfrak{A}$ eine reelle 2×2-Matrix. Das charakteristische Polynom $\chi_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ hat die Form $\chi_A = X^2 + a_1X - a_0$ mit den Koeffizienten $a_0 := \operatorname{Det}\mathfrak{A}$, $a_1 := -\operatorname{Sp}\mathfrak{A} \in \mathbb{R}$ und den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}a_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}a_1^2 - a_0} \in \mathbb{C}$. Wenn $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist, so zerfällt $\chi_{\mathfrak{A}}$ über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren, d.h. mindestens eine der beiden Nullstellen liegt nicht in $\mathbb{R}$. Dann muss $\frac{1}{4}a_1^2 - a_0 \neq 0$ sein und folglich $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Nach Korollar 11.B.6 ist $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{C}$ nun sogar diagonalisierbar.

Sei nun $\mathfrak{A}$ eine reelle 3×3-Matrix. Das charakteristische Polynom $\chi_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ ist $\chi_A = X^3 + a_2X^2 + a_1X - a_0$ mit den Koeffizienten $a_0 := \operatorname{Det}\mathfrak{A}$, $a_1 := -\operatorname{Sp}\mathfrak{A}$, $a_2 \in \mathbb{R}$. Nach Band 1, Satz 11.A.6 besitzt χ_A als Polynom ungeraden Grades über $\mathbb{R}$ eine reelle Nullstelle λ_1. Folglich teilt der Linearfaktor $X - \lambda_1$ das Polynom χ_A, d.h. es gibt eine Darstellung $\chi_A = (X-\lambda_1)(X^2+b_1X+b_0)$ mit $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, und χ_A hat die weiteren komplexen Nullstellen $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}b_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}b_1^2 - b_0}$. Wenn $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist, so zerfällt $\chi_{\mathfrak{A}}$ über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren, d.h. mindestens eine der beiden Nullstellen liegt nicht in $\mathbb{R}$. Dann muss $\frac{1}{4}b_1^2 - b_0 \neq 0$ sein und folglich $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Ferner gilt dann $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\lambda_1 \neq \lambda_3$, wegen $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_2, \lambda_3 \notin \mathbb{R}$. Daher zerfällt $\chi_{\mathfrak{A}}$ über $\mathbb{C}$ in paarweise teilerfremde Linearfaktoren, und $\mathfrak{A}$ ist über $\mathbb{C}$ nach 11.B.6 diagonalisierbar. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 14, p. 324 (1.10.2011) :

Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $f : V \to V$ ein Operator mit $f^n = \mathrm{id}_V$ auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Dann ist f diagonalisierbar. (Diese Aussage gilt nach 11.C.3 auch dann, wenn der $\mathbb{C}$-Vektorraum V nicht endlichdimensional ist.)

Beweis: Wegen $f^n = \mathrm{id}_V$ ist das Minimalpolynom μ_f von f ein Teiler von $X^n - 1$. Die n komplexen Nullstellen $\zeta_n^j = e^{2\pi\,\mathrm{i}\,j/n}$, $j = 0, \ldots, n-1$, von $X^n - 1$ sind paarweise verschieden. Dies gilt dann auch für die Nullstellen von μ_f, und f ist nach Satz 11.B.9 trigonalisierbar. •

Abschnitt 11.B, Variante zu **Aufg. 14**, p. 324 (1.10.2011) :

Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $f : V \to V$ ein trigonalisierbarer Operator mit $f^3 = \mathrm{id}_V$ auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Dann ist $f = \mathrm{id}_V$.

Beweis: Wegen $f^3 = \mathrm{id}_V$ wird f durch das Polynom $X^3 - 1$ annulliert, d.h. das Minimalpolynom μ_f von f teilt $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$. Aus $x^2+x+1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass X^2+X+1 keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat, also über $\mathbb{R}$ unzerlegbar ist. Da aber f trigonalisierbar ist, muss μ_f Produkt von Linearfaktoren sein, und es folgt $\mu_f = X - 1$, also $f = \mathrm{id}_V$. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 15, p. 324 (1.10.2011) :

Eine endliche kommutative Untergruppe der Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist konjugiert zu einer Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen. Allgemein ist jede kommutative Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$, deren Elemente diagonalisierbar über dem Körper K sind, konjugiert zu einer Untergruppe der Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$.

Beweis: Ist m die Ordnung der endlichen Untergruppe, so liefert der Kleine Fermatsche Satz 6.A.6 $\mathfrak{A}^m = \mathfrak{E}_n$ für alle ihre Elemente $\mathfrak{A}$. Sie sind daher nach Aufg. 14 über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Da sie außerdem nach Voraussetzung kommutieren, sind sie nach Satz 11.B.15 simultan diagonalisierbar. Es gibt daher ein Matrix $\mathfrak{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ derart, dass alle $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ Diagonalmatrizen sind, d.h. die Gruppe ist konjugiert zu einer Gruppe von Diagonalmatrizen. – Ist $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ ein beliebige Untergruppe miteinander kommutierender diagonalisierbarer Matrizen, so sind die Elemente von G nach Bemerkung 11.B.16 simultan diagonalisierbar, da sie alle im n^2-dimensionalen Raum $\mathrm{M}_n(K)$ liegen. Daraus folgt die Behauptung wie oben. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 16, p. 324 (1.10.2011) :

Sei $f : V \to V$ ein trigonalisierbarer Operator auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Dann sind äquivalent: (1) f ist diagonalisierbar. (2) Für alle $\lambda \in K$ ist $V_f(\lambda) = \operatorname{Kern}(\lambda\,\mathrm{id} - f) = \operatorname{Kern}(\lambda\,\mathrm{id} - f)^2$. (3) Jeder f-invariante Unterraum von V besitzt ein f-invariantes Komplement.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Es gilt $V_f(\lambda) = \text{Kern}\,(\lambda\,\text{id} - f) \subseteq \text{Kern}\,(\lambda\,\text{id} - f)^2$. Wäre $V_f(\lambda) = \text{Kern}\,(\lambda\,\text{id} - f) \neq \text{Kern}\,(\lambda\,\text{id} - f)^2$, so hätte $f|\text{Kern}\,(\lambda\,\text{id} - f)^2$ das Minimalpolynom $(X-\lambda)^2$ und wäre nach 11.A.8 (2) ein Teiler von μ_f. Dann könnte aber f nach Satz 11.B.5 nicht diagonalisierbar sein.

(2) $\Rightarrow$ (1) Da f trigonalisierbar ist, zerfällt das Minimalpolynom μ_f in Linearfaktoren $\mu_f = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{k_i}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Angenommen, es sei $k_j \geq 2$. Dann liegt Bild $\big(\mu_F/(X-\lambda_j)^2\big)(f)$ im Kern der Abbildung $(\lambda_j\,\text{id} - f)^2$, also nach Voraussetzung in Kern $(\lambda_j\,\text{id} - f)$, und das Polynom $\mu_f/(X-\lambda_j)$ würde auch schon f annullieren. Widerspruch!

(1) $\Rightarrow$ (3) Sei U ein f-invarianter Unterraum von V. Da f diagonalisierbar ist, zerfällt das Minimalpolynom nach Satz 11.B.5 in einfache Linearfaktoren, was dann wegen 11.A.8 (2) auch für $f|U$ gilt, d.h. auch $f|U$ ist diagonalisierbar. Daher gilt $V = \sum_{\lambda\in K}^{\oplus} V_f(\lambda)$ und $U = \sum_{\lambda\in K}^{\oplus} V_{f|U}(\lambda)$, wobei jeweils nur endlich viele der direkten Summanden $\neq 0$ sind. Ergänzt man nun für jedes λ eine Basis von $V_{f|U}(\lambda)$ zu einer Basis von $V_f(\lambda)$, so erzeugen alle diese ergänzenden Vektoren zusammengenommen einen Unterraum von V, der ein Komplement von U ist und außerdem f-invariant, da er von Eigenvektoren erzeugt wird.

(3) $\Rightarrow$ (1) Wir konstruieren sukzessive linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$, $n := \text{Dim}_K V$, von f. Da f trigonalisierbar ist, zerfällt das Minimalpolynom μ_f in Linearfaktoren, besitzt also mindestens einen Eigenvektor v_1. Dann ist der Unterraum Kv_1 f-invariant, besitzt also nach (3) ein f-invariantes Komplement H. Da das Minimalpolynom von $f|H$ nach 11.A.8 (2) ein Teiler von μ_f ist, zerfällt auch $\mu_{f|H}$ in Linearfaktoren, d.h. $f|H$ ist trigonalisierbar und es gibt einen Eigenvektor $v_2 \in H$ von f derart, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind. Hat man bereits linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k$ von f mit $k<n$ erhalten, so besitzt der f-invariante Unterraum $Kv_1 + \cdots + Kv_k$ ein f-invariantes Komplement H', $f|H'$ ist ebenfalls trigonalisierbar und es gibt einen Eigenvektor $v_{k+1} \in H'$ von f. Dann sind auch $v_1, \ldots, v_{k+1}$ linear unabhängige Eigenvektoren von f. Nach n Schritten stoppt das Verfahren und liefert eine Basis von V aus Eigenvektoren von f, d.h. f ist diagonalisierbar. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 18, p. 324 (1.10.2011):

a) Jede Matrix $\mathfrak{A} \in \text{M}_2(\mathbb{C})$ ist entweder diagonalisierbar oder ähnlich zu einer Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Eine Matrix $\mathfrak{A} \in \text{M}_2(\mathbb{R})$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn $(\text{Sp}\,\mathfrak{A})^2 \geq 4\,\text{Det}\,\mathfrak{A}$

Beweis: a) Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ der durch $\mathfrak{A}$ bzgl. der Standardbasis beschriebene Operator. Es ist zu zeigen, dass f entweder diagonalisierbar ist oder in einer geeigneten Basis von $\mathbb{C}^2$ durch eine Matrix der angegebenen Form beschrieben wird.

Das Minimalpolynom μ_f zerfällt über $\mathbb{C}$ in höchstens zwei Linearfaktoren. Ist $\mu_f = X-\lambda$ oder ist $\mu_f = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so ist f nach Korollar 11.B.6 diagonalisierbar. Andernfalls ist μ_f von der Form $\mu_f = (X-\lambda)^2$. Dann gibt es ein $v_2 \in \mathbb{C}^2$ mit $v_2 \notin \text{Kern}(f - \lambda\,\text{id})$. Wegen $(f-\lambda\,\text{id})^2 = 0$ auf $\mathbb{C}^2$ ist aber $v_1 := (f-\lambda\,\text{id})(v_2) \in \text{Kern}(f-\lambda\,\text{id})$. Es folgt $f(v_2) = v_1 + \lambda v_2$ und $f(v_1) = \lambda v_1$, d.h. f wird in der Basis v_1, v_2 von $\mathbb{C}^2$ durch die angegebene Matrix beschrieben.

b) Das charakteristische Polynom $\chi_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ hat die Form $\chi_{\mathfrak{A}} = X^2 + a_1X + a_0$ mit den Koeffizienten $a_0 := \text{Det}\,\mathfrak{A}$, $a_1 := -\text{Sp}\,\mathfrak{A} \in \mathbb{R}$ und den komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}a_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_0}$. Genau dann ist $\mathfrak{A}$ in $\text{M}_2(\mathbb{R})$ nach Satz 11.B.9 trigonalisierbar, wenn χ_A über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ sind, wenn also die Diskriminante $a_1^2 - 4a_0 \geq 0$ ist. Dies bedeutet gerade $(\text{Sp}\,\mathfrak{A})^2 \geq 4\,\text{Det}\,\mathfrak{A}$. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 19, p. 324 (1.10.2011):

Sei $\mathfrak{A} \in \text{M}_n(K)$, $n \in \mathbb{N}^*$, und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von K mit der *geometrischen* Vielfachheit $\gamma_{\mathfrak{A}}(\lambda) = 1$ (was stets der Fall ist, wenn $\alpha_{\mathfrak{A}}(\lambda) = 1$ ist). Dann hat die Matrix Adj $(\lambda\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})$ den Rang 1, und jede von 0 verschiedene Spalte von Adj $(\lambda\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})$ erzeugt den 1-dimensionalen Eigenraum $V_{\mathfrak{A}}(\lambda)$.

Beweis: Die geometrische Multiplizität $\gamma_{\mathfrak{A}}$ ist die Dimension des Kerns $V_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ der Multiplikation mit $\lambda\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}$ auf K^n. Ist sie gleich 1, so liefert der Rangsatz Rang $(\lambda\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}) = n-1$. Mit 9.A, Aufg. 6 sieht man dann, dass Adj $(\lambda\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})$ den Rang 1 hat und jede von 0 verschiedene Spalte dieser Matrix $V_{\mathfrak{A}}(\lambda)$ erzeugt. •

Abschnitt 11.B, Aufg. 23, p. 325 (1.10.2011):
(C i r k u l a n t e n) Eine Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ heißt eine C i r k u l a n t e, wenn sie die folgende Gestalt hat

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

a) Ist $\mathfrak{P}_n$ die Cirkulante

$$\mathfrak{P}_n := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$\mathfrak{A} = a_0\mathfrak{E}_n + a_1\mathfrak{P}_n + a_2\mathfrak{P}_n^2 + \cdots + a_{n-1}\mathfrak{P}_n^{n-1} = F(\mathfrak{P}_n)$$

mit $F = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$. Die Cirkulanten bilden eine Unteralgebra von $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ der Dimension n. Bezeichnet ζ_n die n-te Einheitswurzel $\exp(2\pi\mathrm{i}/n)$, so ist $\chi_{\mathfrak{P}_n} = \mu_{\mathfrak{P}_n} = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \zeta_n^k)$.

b) Die Matrix $\mathfrak{P}_n$ ist diagonalisierbar mit den Eigenwerten ζ_n^k, $k = 0, \ldots, n-1$. Der Eigenraum zu ζ_n^k wird von $v_k := {}^t\big(\zeta_n^{(n-1)k}, \zeta_n^{(n-2)k}, \ldots, \zeta_n^k, 1\big)$, $k = 0, \ldots, n-1$, erzeugt. (Man beachte die Änderung gegenüber der Formulierung im Buch!)

c) Für die Cirkulante $\mathfrak{A}$ ist $\chi_{\mathfrak{A}} = \prod_{k=0}^{n-1}\big(X - F(\zeta_n^k)\big)$, insbesondere $\operatorname{Det}\mathfrak{A} = \prod_{k=0}^{n-1} F(\zeta_n^k)$; $\mathfrak{A}$ ist diagonalisierbar, und die Vektoren $v_0, \ldots, v_{n-1}$ aus b) bilden eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von $\mathfrak{A}$.

Beweis: a) Sei $\mathfrak{P}_n^m = (a_{ij}^{(m)})$. Wir zeigen durch Induktion über m, dass gilt: $a_{ij} = 1$ für $i \equiv j+m \mod n$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Im Fall $m = 0$ ist in der Tat $a_{ij} = \delta_{ij}$, d.h. $(a_{ij}^{(0)})$ ist die Einheitsmatrix $\mathfrak{P}_n^0$.
Beim Schluss von m auf $m+1$ steht in der i-ten Zeile und k-ten Spalte des Produkts $\mathfrak{P}_n^{m+1} = \mathfrak{P}_n^m\mathfrak{P}_n^1$ die Summe $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(m)}\, a_{ij}^{(1)}$, die nur $\neq 0$ ist, wenn es ein j mit $i = j+m$ und $j = k+1 \mod n$ gibt, also bei $i = k+m+1 \mod n$, und die dann auch nur aus dem Summanden für dieses j besteht, der gleich 1 ist. Dies liefert die Induktionsbehauptung. Offenbar gilt dann

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{n-1} a_m\mathfrak{P}_n^m = F(\mathfrak{P}_\mathfrak{n}).$$

Das charakteristische Polynom von $\mathfrak{P}_n$ ist nach Beispiel 11.A.23 gleich $\chi_{\mathfrak{P}_n}(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \zeta_n^k)$.

b) Da die n Einheitswurzeln ζ_n^k, $k = 0, \ldots, n-1$, paarweise verschieden sind, bilden (beliebige) Eigenvektoren zu den ζ_n^k eine Basis von $\mathbb{C}^n$, d.h. die Eigenräume sind alle 1-dimensional. In der i-ten Zeile des Spaltenvektors $\mathfrak{P}_n v_k$ steht die Summe $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)}\zeta_n^{(n-j)k}$, in der nur der Summand für $j = i-1 \mod n$ von 0 verschieden ist, und den Wert $\zeta_n^{(n-i+1)k} = \zeta_n^k\,\zeta_n^{(n-i)k}$ hat. Also ist der Spaltenvektor v_k, in dessen i-ter Zeile die Einheitswurzel $\zeta_n^{(n-i)k} = \zeta_n^{-ik}$ steht, ein Eigenvektor von $\mathfrak{P}_n$ zum Eigenwert ζ_n^k.

c) Mit Aufg. 17 folgert man sofort aus b), dass $\prod_{k=0}^{n-1}\big(X - F(\zeta_n^k)\big)$ das charakteristische Polynom $\chi_{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A} = F(\mathfrak{P}_n)$ ist. Insbesondere folgt $(-1)^n\operatorname{Det}\mathfrak{A} = \chi_{\mathfrak{A}}(0) = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}F(\zeta_n^k)$, also $\operatorname{Det}\mathfrak{A} = \prod_{k=0}^{n-1}F(\zeta_n^k)$.
Die n Vektoren aus b) bilden eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren, da sie als Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Insbesondere ist $\mathfrak{A}$ diagonalisierbar. •

Abschnitt 11.C, Teil von **Aufg. 5**, p. 331 (1.10.2011) :

Man gebe die kanonischen Zerlegungen gemäß 11.C.7 und gegebenenfalls 11.C.8 für die folgenden über $\mathbb{Q}$ trigonalisierbaren Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom der ersten Matrix $\mathfrak{A}$ und erhalten

$$\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X+2 & 1 & -2 \\ -1 & X-1 & 1 \\ 3 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -(X-1) \\ -1 & X-1 & 1 \\ 3 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & X-1 & 1 \\ 3 & 1 & X-3 \end{vmatrix} =$$
$$= (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & X-1 & 0 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} = X(X-1)^2 .$$

Für jeden der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, also hier nur für 1 und 0, berechnen wir nun der Reihe nach die höheren Eigenräume, d.h. die Kerne von $U_i(\lambda) := (\lambda\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^i$ zu den Eigenwerten $\lambda \in \{1, 0\}$, $i = 1, 2, \ldots$, mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, wobei wir die gefundenen Basen von $U_1(\lambda)$ jeweils zu einer Basis von $U_2(\lambda)$ ergänzen usw, bis die Folgen jeweils stationär werden, was spätestens bei der algebraischen Multiplizität des jeweiligen Eigenwerts der Fall ist:

$$U_1(1) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid (1\cdot\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = 0\} = \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$
$$= \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U_2(1) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid (1\cdot\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})^2\mathfrak{x} = 0\} = \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$
$$= \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U_1(0) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid (-\mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = 0\} = \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$
$$= \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{matrix}\right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben die erhaltenen Vektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}^{-1})^{-1}$:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Zerlegung von $\mathfrak{A}$ gemäß 11.C.7 ist somit $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{N}$ mit

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{B}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} := \mathfrak{A} - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine multiplikative Zerlegung gemäß 11.C.8 existiert nicht, da nicht alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ von 0 verschieden sind.

Wir berechnen nun das charakteristische Polynom der zweiten Matrix $\mathfrak{A}$ und erhalten

$$\chi_{\mathfrak{A}} = \begin{vmatrix} X-4 & -2 & -8 \\ -3 & X-2 & -7 \\ 3 & 1 & X+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -2 & -8 \\ 0 & X-1 & X-1 \\ 3 & 1 & X+6 \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-4 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & X+6 \end{vmatrix} =$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} X-4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X-1)\big((X-4)(X+5)+18\big) = (X-1)^2(X+2)\,.$$

Für jeden der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, also hier nur für 1 und -2, berechnen wir der Reihe nach die höheren Eigenräume mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, wobei wir wieder die gefundenen Basen von $U_1(\lambda)$ jeweils zu einer Basis von $U_2(\lambda)$ ergänzen usw., bis die Folgen jeweils stationär werden, was spätestens bei der algebraischen Multiplizität des jeweiligen Eigenwerts der Fall ist:

$$U_1(1) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid (1\cdot\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = 0\} = \left\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 \\ -3 & -1 & -7 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} -3x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - 7x_3 = 0 \end{matrix}\right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,,$$

$$U_2(1) = \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid (1\cdot\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})^2\mathfrak{x} = 0\} = \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ -9 & 0 & -18 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

$$U_1(-2) := \{\mathfrak{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid (-2\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{A})\,\mathfrak{x} = 0\} = \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} -6 & -2 & -8 \\ -3 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$= \left\{\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} -6x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{matrix}\right\} = \mathbb{Q}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Wir schreiben die erhaltenen Vektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ und berechnen $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}^{-1})^{-1}$:

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Es folgt $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Zerlegung ist somit $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} + \mathfrak{N}$ mit

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{B}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}\,, \quad \mathfrak{N} := \mathfrak{A} - \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Um die multiplikative Zerlegung von $\mathfrak{A}$ gemäß 11.C.8 zu bekommen, berechnen wir zunächst

$$\mathfrak{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \mathfrak{U} := \mathfrak{E}_3 + \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Dann sind $\mathfrak{D}$ der diagonalisierbare, $\mathfrak{N}$ der nilpotente und $\mathfrak{U}$ der unipotente Bestandteil von $\mathfrak{A}$.

Abschnitt 11.C, Zusatzaufgabe, p. 331 (1.10.2011) :

Diese Zusatzaufgabe behandelt in direkter Weise die Exponentialabbildung für endliche komplexe Matrizen. Die Exponentialabbildung wird in allgemeinerem Rahmen in Abschnitt 18.D behandelt.

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{A}^k = (a_{ij}^{(k)})$ die k-te Potenz von $\mathfrak{A}$. Ferner sei $M := \mathrm{Max}\,\big\{|a_{ij}^{(1)}| \,\big|\, 1 \le i, j \le n\big\}$.

a) Man zeige $|a_{ij}^{(k)}| \le (nM)^k$ durch Induktion über k, und folgere, dass die Reihen $e_{ij} := \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}/k!$ für alle i, j absolut konvergieren. Man definiert

$$e^{\mathfrak{A}} := \exp \mathfrak{A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^k}{k!} := (e_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})\,.$$

b) Ist $nM < 1$, so konvergiert die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}^k := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}\Big)_{1\le i,j\le n}$ gegen $(\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A})^{-1}$.

c) Für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ gilt das Additionstheorem der Exponentialfunktion: $e^{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{B}}$.

d) Ist $\mathfrak{B}$ invertierbar, so gilt $\mathfrak{B} e^{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}^{-1} = e^{\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}}$.

e) Für Diagonalmatrizen gilt $e^{\mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \mathrm{Diag}\,(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Allgemeiner: Für eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix $\mathfrak{A}$ ist $e^{\mathfrak{A}}$ eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix mit den Diagonalelementen $e^{a_{11}}, \ldots, e^{a_{nn}}$.

f) Es gilt $\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{A}} = e^{\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A}}$.

Beweis: a) Für $k=0$ ist $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}_n$ und folglich $|a_{ij}^{(0)}| = \delta_{ij} \le 1 = (nM)^0$. Der Induktionsschluss folgt aus

$$|a_{ij}^{(k+1)}| = \Big|\sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj}^{(k)}\Big| \le \sum_{r=1}^{n} |a_{ir}||a_{rj}^{(k)}| \le \sum_{r=1}^{n} M(nM)^k = (nM)^{k+1}.$$

Daraus ergibt sich die absolute Konvergenz von e_{ij} durch Vergleich mit der Exponentialreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{ij}|^{(k)}}{k!} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nM)^k}{k!} = e^{nM} < \infty\,.$$

b) Wegen $nM < 1$ ist die geometrische Reihe $\sum_k (nM)^k$ eine konvergente Majorante für alle Reihen $\sum_k |a_{ij}^{(k)}|$. Es gilt nun

$$(\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}) \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}^k - \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{A}^{k+1} = \mathfrak{E}_n\,.$$

c) Ist $\mathfrak{A}^k = (a_{ij}^{(k)})$, $\mathfrak{B}^k = (b_{jr}^{(k)})$, so erhält man wegen der absoluten Konvergenz, vgl. a), mit dem Großen Umordnungssatz 6.B.11 aus Band 1:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^k = \sum_{m=0}^{k} \frac{\mathfrak{A}^{k-m}}{(k-m)!}\,\frac{\mathfrak{B}^m}{m!}\,k! =: (c_{ir}^{(k)}) \quad \text{mit} \quad c_{ir}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=0}^{k} k!\,\frac{a_{ij}^{(k-m)}}{(k-m)!}\,\frac{b_{jr}^{(m)}}{m!}\,,$$

$$e^{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{ij}^{(k)}}{k!}\Big)_{ir} = \Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} \frac{a_{ij}^{(k-m)}}{(k-m)!}\,\frac{b_{jr}^{(m)}}{m!}\Big)_{ir} = \Big(\sum_{j=1}^{n} (e^{\mathfrak{A}})_{ij} (e^{\mathfrak{B}})_{jr}\Big)_{ir} = e^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{B}}\,.$$

d) Mit den offensichtlich gültigen Grenzwertrechenregeln für Addition und Mutiplikation von Matrizen (die auch schon in b) benutzt wurden) erhält man

$$\mathfrak{B} e^{\mathfrak{A}} \mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{B} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^k}{k!}\,\mathfrak{B}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{B} A^k \mathfrak{B}^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1})^k}{k!} = e^{\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}}\,.$$

e) Die Behauptung folgt sofort aus $\mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^k = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. Die Verallgemeinerung folgt daraus, dass mit $\mathfrak{A}$ auch die Potenzen $\mathfrak{A}^k$ obere (bzw. untere) Dreiecksmatrizen sind, und zwar mit den Diagonalelementen $a_{11}^k, \ldots, a_{nn}^k$.

f) Sei $\mathfrak{A}=\mathfrak{D}+\mathfrak{N}$ mit einer diagonalisierbaren Matrix $\mathfrak{D}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ und einer nilpotenten Matrix $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{D}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}\mathfrak{D}$ die additive kanonische Zerlegung von $\mathfrak{A}$. Dann gibt es invertierbare Matrizen $\mathfrak{B},\mathfrak{B}'\in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ derart, dass $\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{B}^{-1}=\mathrm{Diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist, in deren Hauptdiagonalen die Eigenwerte $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ von $\mathfrak{A}$ stehen, und $\mathfrak{B}'\mathfrak{N}\mathfrak{B}'^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix, in deren Hauptdiagonale überall 0 steht. Mit d) und e) folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{D}} &= (\mathrm{Det}\,\mathfrak{B})(\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{D}})(\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}^{-1})=\mathrm{Det}(\mathfrak{B}e^{\mathfrak{D}}\mathfrak{B}^{-1})=\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{B}^{-1}}=\mathrm{Det}\; e^{\mathrm{Diag}\,(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}\\ &=\mathrm{Det}\big(\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n})\big)=e^{\lambda_1}\cdots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}=e^{\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A}}\,.\end{aligned}$$

Außerdem ist $e^{\mathfrak{B}'\mathfrak{N}\mathfrak{B}'^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(\mathfrak{B}'\mathfrak{N}\mathfrak{B}'^{-1})^k}{k!}=\mathfrak{E}_n+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(\mathfrak{B}'\mathfrak{N}\mathfrak{B}'^{-1})^k}{k!}$ die Summe aus der Einheitsmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix, in deren Hauptdiagonale wie bei $\mathfrak{B}'\mathfrak{N}\mathfrak{B}'^{-1}$ überall 0 steht. Es ist also $\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{N}}=(\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}')(\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{N}})(\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}'^{-1})=\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{B}'\mathfrak{N}\mathfrak{B}'^{-1}}=1$ und somit wegen c)

$$\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{A}}=\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{D}+\mathfrak{N}}=\mathrm{Det}(e^{\mathfrak{D}}e^{\mathfrak{N}})=\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{D}}\;\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{N}}=e^{\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A}}\cdot 1=e^{\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A}}.$$

Zum Beweis der Aussage würde es wegen e) genügen, $\mathfrak{A}$ zu trigonalisieren: Es gibt eine invertierbare Matrix $\mathfrak{B}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ derart, dass $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix $\mathfrak{T}$ ist. Dann ist $\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{A}}=\mathrm{Det}\,(\mathfrak{B}e^{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}^{-1})=\mathrm{Det}\, e^{\mathfrak{T}}=e^{\mathrm{Sp}\,\mathfrak{T}}=e^{\mathrm{Sp}\,\mathfrak{A}}$. •

Bemerkung: Zu einer Anwendung verweisen wir auf die Bemerkung zu 11.E, Aufg. 5.

Abschnitt 11.C, Zusatzaufgabe, p. 331 (1.10.2011):

Man berechne $e^{\mathfrak{A}}$ für die Matrizen $\mathfrak{A}$ aus Aufg. 5.

Lösung: Wir verwenden die additiven kanonischen Zerlegungen, die in Aufg. 5 berechnet wurden, und erhalten mit Teil c) der vorstehenden Aufgabe für die erste der beiden Matrizen:

$$e^{\mathfrak{A}}=e^{\mathfrak{D}+\mathfrak{N}}=e^{\mathfrak{D}}\,e^{\mathfrak{N}}=\mathfrak{B}^{-1}\exp\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}^{-1}\exp\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathfrak{B}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac12\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^2+\cdots\right)\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2e+2&-e+1&2e-1\\e&e&-e\\-3e+2&-e+1&3e-1\end{pmatrix}.$$

Für die zweite Matrix ergibt sich entsprechend:

$$e^{\mathfrak{A}}=e^{\mathfrak{D}+\mathfrak{N}}=e^{\mathfrak{D}}\,e^{\mathfrak{N}}=\mathfrak{B}^{-1}\exp\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}^{-1}\exp\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\mathfrak{B}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&0&1/e^2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac12\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^2+\cdots\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e&0&0\\0&e&0\\0&0&1/e^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e-e^{-2}&2e&4e-2e^{-2}\\e-e^{-2}&2e&3e-2e^{-2}\\-e+e^{-2}&-e&-2e+2e^{-2}\end{pmatrix}.$$ •

Abschnitt 11.E, Variante zu **Aufg. 1**, p. 352 (1.10.2011) :
Man löse die folgenden Differenzialgleichungssysteme:

a) $\begin{aligned}\dot y_1 &= 2y_1 + y_2\\ \dot y_2 &= -2y_1 - y_2\end{aligned}$. **b**) $\begin{aligned}\dot y_1 &= - 2y_2\\ \dot y_2 &= y_1 + 3y_2\end{aligned}$. **c**) $\begin{aligned}\dot y_1 &= 3y_1 + y_2\\ \dot y_2 &= -y_1 + y_2\end{aligned}$.

d) $\begin{aligned}\dot y_1 &= 5y_1 - 2y_2 + 1\\ \dot y_2 &= 3y_1\end{aligned}$. **e**) $\begin{aligned}\dot y_1 &= 3y_1 + y_2 + e^{-t}\\ \dot y_2 &= -4y_1 - y_2\end{aligned}$.

Lösung: a) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak y} = \mathfrak A\mathfrak y$ mit $\mathfrak y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ und $\mathfrak A = \begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}$. Wegen $\chi_{\mathfrak A} = \begin{vmatrix}X-2&-1\\2&X+1\end{vmatrix} = X^2 - X = X(X-1)$ hat $\mathfrak A$ die Eigenwerte 0 und 1 mit den Eigenräumen $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}0-2&-1\\2&0+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb R\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 0 und $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}1-2&-1\\2&1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb R\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Insbesondere ist $\mathfrak A$ diagonalisierbar. Wir schreiben die erhaltenene Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak B^{-1} := \begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak B = \begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak B^{-1}$ sowie $\mathfrak D = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1} = \begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Für $\mathfrak z := \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = \mathfrak B\mathfrak y$ bekommt man so das entkoppelte System $\dot{\mathfrak z} = \mathfrak B\dot{\mathfrak y} = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak y = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1}\mathfrak B\mathfrak y = \mathfrak D\mathfrak z$, also $\begin{aligned}\dot z_1 &= 0\\ \dot z_2 &= z_2\end{aligned}$, mit den Lösungen $\mathfrak z = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\,e^t\end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb R$. Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \mathfrak y = \mathfrak B^{-1}\mathfrak z = \begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\,e^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c_1 - c_2\,e^t\\2c_1 + c_2\,e^t\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb R.$$

b) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak y} = \mathfrak A\mathfrak y$ mit $\mathfrak y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ und $\mathfrak A = \begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}$. Wegen $\chi_{\mathfrak A} = \begin{vmatrix}X&2\\-1&X-3\end{vmatrix} = X(X-3)+2 = (X-1)(X-2)$ hat $\mathfrak A$ die Eigenwerte 1 und 2 mit den Eigenräumen $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}1&2\\-1&1-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb R\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}2&2\\-1&2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb R\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. Insbesondere ist $\mathfrak A$ diagonalisierbar. Wir schreiben die erhaltenene Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak B^{-1} := \begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak B = \begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak B^{-1}$ sowie $\mathfrak D = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1} = \begin{pmatrix}-1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$. Für $\mathfrak z := \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = \mathfrak B\mathfrak y$ bekommt man so das entkoppelte System $\dot{\mathfrak z} = \mathfrak B\dot{\mathfrak y} = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak y = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1}\mathfrak B\mathfrak y = \mathfrak D\mathfrak z$, also $\begin{aligned}\dot z_1 &= z_1\\ \dot z_2 &= 2z_2\end{aligned}$, mit den Lösungen $\mathfrak z = \begin{pmatrix}c_1\,e^t\\c_2\,e^{2t}\end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb R$. Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \mathfrak y = \mathfrak B^{-1}\mathfrak z = \begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\,e^t\\c_2\,e^{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2c_1\,e^t - c_2\,e^{2t}\\c_1\,e^t + c_2\,e^{2t}\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb R.$$

c) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak y} = \mathfrak A\mathfrak y$ mit $\mathfrak y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ und $\mathfrak A = \begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}$. Wegen $\chi_{\mathfrak A} = \begin{vmatrix}X-3&-1\\1&X-1\end{vmatrix} = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ hat $\mathfrak A$ nur den Eigenwert 2 mit dem Eigenraum $\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}2-3&-1\\1&2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0\right\} = \mathbb R\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}^2 = 0$ ist der nächsthöhere Eigenraum der Matrix bereits ganz $\mathbb{R}^2$. Daher ergänzen wir $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ etwa durch $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$ und bilden die Matrix $\mathfrak{B}^{-1}:=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak{B}^{-1}$ sowie die Trigonalisierung $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$. Für $\mathfrak{z}:=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\mathfrak{B}\mathfrak{y}$ bekommt man so ein System in Dreiecksgestalt: $\dot{\mathfrak{z}}=\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{y}}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{y}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{y}=\mathfrak{C}\mathfrak{z}$, also $\begin{aligned}\dot z_1&=2z_1-z_2\\ \dot z_2&=2z_2\end{aligned}$. Wir erhalten als Lösung für z_2 dann $z_2=c_2\,e^{2t}$, $c_2\in\mathbb{R}$, und durch Einsetzen in die obere Gleichung $\dot z_1=2z_1-c_2\,e^{2t}$ mit der Lösung $z_1=e^{2t}\big(c_1+\int -c_2\,e^{2t}\,e^{-2t}\,dt\big)=(c_1-c_2t)\,e^{2t}$, $c_1\in\mathbb{R}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\mathfrak{y}=\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1-c_2t\\c_2\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}(-c_1+c_2t)\,e^{2t}\\(c_1+c_2-c_2t)\,e^{2t}\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

d) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak{y}}=\mathfrak{A}\mathfrak{y}+\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, $\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}5&-2\\3&0\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{g}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Wegen $\chi_{\mathfrak{A}}=\begin{vmatrix}X-5&2\\-3&X\end{vmatrix}=X^2-5X+6=(X-2)(X-3)$ hat $\mathfrak{A}$ die Eigenwerte 2 und 3 mit den Eigenräumen
$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{pmatrix}2-5&2\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\right\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2 und
$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{pmatrix}3-5&2\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\right\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ zum Eigenwert 3. Insbesondere ist $\mathfrak{A}$ diagonalisierbar. Wir schreiben die erhaltenene Basis aus Eigenvektoren als Spalten einer Matrix $\mathfrak{B}^{-1}:=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak{B}=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}$ als Inverses von $\mathfrak{B}^{-1}$ sowie $\mathfrak{D}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&-2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$. Für $\mathfrak{z}:=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\mathfrak{B}\mathfrak{y}$ bekommt man so das entkoppelte System $\dot{\mathfrak{z}}=\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{y}}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{y}+\mathfrak{B}\mathfrak{g}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{y}+\mathfrak{B}\mathfrak{g}=\mathfrak{D}\mathfrak{z}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, also $\begin{aligned}\dot z_1&=2z_1-1\\ \dot z_2&=3z_2+3\end{aligned}$, mit den Lösungen $\mathfrak{z}=\begin{pmatrix}c_1\,e^{2t}+\frac12\\c_2\,e^{3t}-1\end{pmatrix}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\mathfrak{y}=\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z}=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\,e^{2t}+\frac12\\c_2\,e^{3t}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{3t}\\3c_1\,e^{2t}+c_2\,e^{3t}+\frac12\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

e) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak{y}}=\mathfrak{A}\mathfrak{y}+\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, $\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}3&1\\-4&-1\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{g}=\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\end{pmatrix}$. Wegen $\chi_{\mathfrak{A}}=\begin{vmatrix}X-3&-1\\4&X+1\end{vmatrix}=X^2-2X+1=(X-1)^2$ hat $\mathfrak{A}$ nur den Eigenwert 1 mit dem Eigenraum
$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{pmatrix}1-3&-1\\4&1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\right\}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix}-2&-1\\4&2\end{pmatrix}^2=0$ ist der nächsthöhere Eigenraum der Matrix bereits ganz $\mathbb{R}^2$. Daher ergänzen wir $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ etwa durch $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$ und bilden die Matrix $\mathfrak{B}^{-1}:=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}$, berechnen $\mathfrak{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\mathfrak{B}^{-1}$ als Inverses von $\mathfrak{B}^{-1}$ sowie die Trigonalisierung $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$. Für $\mathfrak{z}:=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\mathfrak{B}\mathfrak{y}$ bekommt man so ein System in Dreiecksgestalt: $\dot{\mathfrak{z}}=\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{y}}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{y}+\mathfrak{B}\mathfrak{g}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{y}+\mathfrak{B}\mathfrak{g}=\mathfrak{C}\mathfrak{z}+\begin{pmatrix}-e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$, also $\begin{aligned}\dot z_1&=z_1-z_2-e^{-t}\\ \dot z_2&=z_2+\phantom{z_2-{}}e^{-t}\end{aligned}$. Wir erhalten als Lösung für z_2 dann $z_2=c_2\,e^t-e^{-t}$, $c_2\in\mathbb{R}$, und durch Einsetzen in die obere Gleichung $\dot z_1=z_1-c_2\,e^t$ mit der Lösung $z_1=(c_1-c_2t)\,e^t$, $c_1\in\mathbb{R}$. Damit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\mathfrak{y}=\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\,e^{2t}+\frac12\\c_2\,e^{3t}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(c_1-c_2t)\,e^t\\c_2\,e^t-e^{-t}\end{pmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$ •

Abschnitt 11.E, Variante zu **Aufg. 1**, p. 352 (1.10.2011) :
Man löse die folgenden Differenzialgleichungssysteme:

a) $\dot y_1 = 4y_1 + 6y_3 + 2t$, $\dot y_2 = 3y_1 + y_2 + 6y_3 + t - 1$, $\dot y_3 = -3y_1 - 5y_3 - t$.

b) $\dot y_1 = -2y_1 - y_2 + 2y_3$, $\dot y_2 = y_1 + y_2 - y_3$, $\dot y_3 = -3y_1 - y_2 + 3y_3$.

c) $\dot y_1 = 3y_1 + 8y_2 + 4y_3 + 4e^t + 1$, $\dot y_2 = 2y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 2e^t$, $\dot y_3 = -7y_1 - 14y_2 - 8y_3 - 7e^t - 1$.

d) $\dot y_1 = 4y_1 + 2y_2 + 8y_3$, $\dot y_2 = 3y_1 + 2y_2 + 7y_3$, $\dot y_3 = -3y_1 - y_2 - 6y_3$.

e) $\dot y_1 = 3y_1 - 2y_3 - 2e^t - 1$, $\dot y_2 = -8y_1 - y_2 + 4y_3 + e^t$, $\dot y_3 = 4y_1 - 3y_3 - e^t - 1$.

a) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak y} = \mathfrak A\mathfrak y + \mathfrak g(t)$ mit

$$\mathfrak A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 6\\ -3 & 0 & -5\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak g(t) = \begin{pmatrix} 2t\\ t-1\\ -t\end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_{\mathfrak A} = (X-1)^2(X+2)$, und Diagonalisieren liefert $\mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1} = \mathfrak D$ mit

$$\mathfrak B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Für $\mathfrak z := \mathfrak B\mathfrak y$ bekommt man das entkoppelte System $\dot{\mathfrak z} = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1}\mathfrak B\mathfrak y + \mathfrak B\mathfrak g(t) = \mathfrak D\mathfrak z + \mathfrak B\mathfrak g(t)$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_1 + t & z_1 &= -(t+1) + c_1e^t\\ \dot z_2 &= z_2 - 1 & z_2 &= 1 + c_2e^t\\ \dot z_3 &= -2z_3\,, & z_3 &= c_3e^{-2t}\,, \end{aligned} \qquad \mathfrak y = \mathfrak B^{-1}\mathfrak z = \begin{pmatrix} -2t-2\\ -t\\ t+1\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 2c_1\\ c_1+c_2\\ -c_1\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix} -c_3\\ -c_3\\ c_3\end{pmatrix}.$$

b) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak y} = \mathfrak A\mathfrak y$ mit

$$\mathfrak A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 3\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_{\mathfrak A} = X(X-1)^2$ mit $\{\mathfrak x\in\mathbb R^3 \mid \mathfrak A\mathfrak x = 0\} = \mathbb R\,{}^t(1,0,1)$, $\{\mathfrak x\in\mathbb R^3 \mid (\mathfrak A-\mathfrak E_3)\mathfrak x = 0\} = \mathbb R\,{}^t(1,-1,1)$, $\{\mathfrak x\in\mathbb R^3 \mid (\mathfrak A-\mathfrak E_3)^2\mathfrak x = 0\} = \mathbb R\,{}^t(1,-1,1) + \mathbb R\,{}^t(0,1,1)$, und Trigonalisieren liefert $\mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1} = \mathfrak T$ mit

$$\mathfrak B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Für $\mathfrak z := \mathfrak B\mathfrak y$ bekommt man das trigonalisierte System $\dot{\mathfrak z} = \mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1}\mathfrak B\mathfrak y = \mathfrak T\mathfrak z$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_1 + z_2 & z_1 &= (c_1 + c_2t)\,e^t\\ \dot z_2 &= z_2 & z_2 &= c_2e^t\\ \dot z_3 &= 0\,, & z_3 &= c_3\,, \end{aligned} \qquad \mathfrak y = \mathfrak B^{-1}\mathfrak z = \begin{pmatrix} (c_1+c_2t)e^t + c_3\\ (c_2 - c_1 + c_2t)e^t\\ (c_1 + c_2 + c_2t)e^t + c_3\end{pmatrix}.$$

c) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak y} = \mathfrak A\mathfrak y + \mathfrak g(t)$ mit

$$\mathfrak A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 2\\ -7 & -14 & -8\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak g(t) = \begin{pmatrix} 4e^t + 1\\ 2e^t\\ -7e^t - 1\end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_{\mathfrak A} = (X+1)^2X$, und Diagonalisieren liefert $\mathfrak B\mathfrak A\mathfrak B^{-1} = \mathfrak D$ mit

$$\mathfrak B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 7\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak B = \begin{pmatrix} -7 & -14 & -8\\ 2 & 3 & 2\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Für $\mathfrak{z} := \mathfrak{B}\mathfrak{y}$ bekommt man das entkoppelte System $\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{B}\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{D}\mathfrak{z} + \mathfrak{B}\mathfrak{g}(t)$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= -z_1 + 1 \\ \dot z_2 &= -z_2\,, \\ \dot z_3 &= -e^t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_1 &= 1 + c_1 e^{-t} \\ z_2 &= c_2 e^{-t}\,, \\ z_3 &= c_3 - e^t \end{aligned} \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 1+4e^t \\ 2e^t \\ -1-7e^t \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} c_1+2c_2 \\ -c_2 \\ -c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4c_3 \\ -2c_3 \\ 7c_3 \end{pmatrix}.$$

d) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_{\mathfrak{A}} = (X-1)^2(X+2)$ mit $\{\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathfrak{A}-\mathfrak{E}_3)\mathfrak{x} = 0\} = \mathbb{R}\,{}^t(2,1,-1)$, $\{\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathfrak{A}-\mathfrak{E}_3)^2\mathfrak{x} = 0\} = \mathbb{R}\,{}^t(2,1,-1) + \mathbb{R}\,{}^t(0,1,0)$, $\{\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\mathfrak{A}+2\mathfrak{E}_3)\mathfrak{x} = 0\} = \mathbb{R}\,{}^t(-1,-1,1)$, und Trigonalisieren liefert $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{T}$ mit

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für $\mathfrak{z} := \mathfrak{B}\mathfrak{y}$ bekommt man das trigonalisierte System $\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{y} = \mathfrak{T}\mathfrak{z}$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_1 + z_2 \\ \dot z_2 &= z_2 \\ \dot z_3 &= -2z_3\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_1 &= (c_1 + c_2 t)\,e^t \\ z_2 &= c_2 e^t \\ z_3 &= c_3 e^{-2t}\,, \end{aligned} \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} (2c_1+2c_2t)\,e^t - c_3e^{-2t} \\ (c_1+c_2+c_2t)\,e^t - c_3e^{-2t} \\ (-c_1-c_2t)\,e^t + c_3e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

e) Es handelt sich um das System $\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}\mathfrak{y} + \mathfrak{g}(t)$ mit

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad g(t) = \begin{pmatrix} -2e^t - 1 \\ e^t \\ -e^t - 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{D}$ mit

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{g}(t) = \begin{pmatrix} -3e^t - 1 \\ -5e^t - 2 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Für $\mathfrak{z} := \mathfrak{B}\mathfrak{y}$ bekommt man das entkoppelte System $\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{B}\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{y} + \mathfrak{B}\mathfrak{g}(t) = \mathfrak{D}\mathfrak{z} + \mathfrak{B}\mathfrak{g}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot z_1 &= z_1 - 3e^t - 1 \\ \dot z_2 &= -z_2 - 5e^t - 2\,, \\ \dot z_3 &= -z_3 + e^t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z_1 &= c_1e^t - 3te^t + 1 \\ z_2 &= c_2e^{-t} - \tfrac{5}{2}e^t - 2 \\ z_3 &= c_3e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t \end{aligned}\,,$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^t - 3te^t + 1 \\ c_2e^{-t} - \tfrac{5}{2}e^t - 2 \\ c_3e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_3e^{-t} - 3te^t + \tfrac{1}{2}e^t + 1 \\ -2c_1e^t + c_2e^{-t} + 6te^t - \tfrac{5}{2}e^t - 4 \\ c_1e^t + 2c_3e^{-t} - 3te^t + e^t + 1 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Abschnitt 11.E, Aufg. 4, p. 352 (1.10.2011):

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ eine $n \times n$-Matrix. Dann kommutiert $\mathfrak{A}$ mit der Fundamentalmatrix $\mathfrak{Y}$ zum System $\nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{y} = 0$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $\nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y} = 0$, also $D(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{A}\mathfrak{Y}$, und $\mathfrak{Y}(0) = \mathfrak{E}_n$. Sei $\mathfrak{K} := [\mathfrak{A}, \mathfrak{Y}] = \mathfrak{A}\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{A}$ der Kommutator von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Y}$. Da $\mathfrak{A}$ eine konstante Matrix ist, folgt

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}) &= D(\mathfrak{A}\mathfrak{Y}) - \mathfrak{Y}\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}D(\mathfrak{Y}) - D(\mathfrak{Y})\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2\mathfrak{Y} + \mathfrak{A}\mathfrak{Y}\mathfrak{A} \\ &= \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{Y} - \mathfrak{A}\mathfrak{Y}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2\mathfrak{Y} + \mathfrak{A}\mathfrak{Y}\mathfrak{A} = 0\,. \end{aligned}$$

Daher gibt es eine Matrix $\mathfrak{C} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ mit $\mathfrak{K} = \mathfrak{C}\mathfrak{Y}$. Dabei gilt $\mathfrak{K}(0) = \mathfrak{A}\mathfrak{Y}(0) - \mathfrak{Y}(0)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{E}_n - \mathfrak{E}_n\mathfrak{A} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{K}(0) = \mathfrak{C}\mathfrak{Y}(0) = \mathfrak{C}\mathfrak{E}_n = \mathfrak{C}$, also $\mathfrak{C} = 0$ und somit $\mathfrak{K} = 0$, d.h. $\mathfrak{A}\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}\mathfrak{A}$. $\bullet$

Abschnitt 11.E, Aufg. 5, p. 352 (1.10.2011) :

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ kommutierende Matrizen. Für die Fundamentalmatrizen $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}, \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}, \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$ der Systeme $\nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{y} = 0$, $\nabla_{\mathfrak{B}}\mathfrak{y} = 0$ bzw. $\nabla_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\mathfrak{y} = 0$ gilt dann $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}$.

Beweis: Wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ gilt

$$D(\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}D(\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}) - D(\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}})\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{A}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})$$

und somit $\nabla_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}) = D(\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}) = 0$. Daher gibt es ein $\mathfrak{C} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}$. Wegen $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}(0) = \mathfrak{E}_n$ ergibt sich $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}(0) = \mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}(0) - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}(0)\mathfrak{B} = \mathfrak{B} - \mathfrak{B} = 0$ und schließlich $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = 0 \cdot \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} = 0$, d.h. $\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}(\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}) &= D(\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}})\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} + \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}D(\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}) - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}) \\ &= \mathfrak{A}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} + \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} - (\mathfrak{A}+\mathfrak{B})\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} = 0\,. \end{aligned}$$

Es gibt also eine Matrix $\widetilde{\mathfrak{C}} \in \mathrm{M}_n(K)$ mit $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} = \widetilde{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$. Wegen $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}(0) = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}(0) = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}(0) = \mathfrak{E}_n$ ergibt sich $\widetilde{\mathfrak{C}} = \mathfrak{E}_n$, d.h. $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}$. Analog gilt $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}}\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}+\mathfrak{A}}$. Wegen $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{B}+\mathfrak{A}}$ folgt daraus die Behauptung. •

Bemerkung: Die in der Zusatzaufgabe zu Abschnitt 9.C eingeführte Exponentialreihe $e^{\mathfrak{A}t}$ konvergiert nach Teil a) der Aufgabe lokal gleichmäßig in t und ist somit gliedweise differenzierbar. Daher ist $D(e^{\mathfrak{A}t}) = \mathfrak{A}\,e^{\mathfrak{A}t}$. Da außerdem $e^{\mathfrak{A}\cdot 0} = e^0 = \mathfrak{E}_n$ gilt, erhält man die *folgende übersichtliche Darstellung der Fundamentalmatrix*: $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{A}}(t) = e^{\mathfrak{A}t}$. Die vorstehende Aufgabe liefert damit übrigens auch das Additionstheorem der Exponentialfunktion für kommutierende Matrizen. – Vgl. hierzu auch Abschnitt 18.D.

Abschnitt 11.E, Zusatzaufgabe p. 352 (1.10.2011) :

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ eine Matrix ohne reelle Eigenwerte, die über $\mathbb{C}$ den Eigenvektor $\begin{pmatrix} u_1 + \mathrm{i}w_1 \\ u_2 + \mathrm{i}w_2 \end{pmatrix}$ mit Komponenten $u_1, u_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ zum Eigenwert $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, besitzt. Dann haben alle reellen Lösungen von $\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ die Form $\mathfrak{y}(t) = c_1 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_1\cos\beta t - w_1\sin\beta t \\ u_2\cos\beta t - w_2\sin\beta t \end{pmatrix} + c_2 e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_1\sin\beta t + w_1\cos\beta t \\ u_2\sin\beta t + w_2\cos\beta t \end{pmatrix}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis: Ist $\mathfrak{v}$ der gegebene Eigenvektor, so liefert Konjugieren von $\mathfrak{A}\mathfrak{v} = \lambda\mathfrak{v}$ wegen $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, dass auch $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathfrak{v}}$ gilt. Dies ergibt über $\mathbb{C}$ die Basislösungen $e^{\lambda t}\mathfrak{v}$ und $e^{\overline{\lambda}t}\overline{\mathfrak{v}} = \overline{e^{\lambda t}\mathfrak{v}}$. Dann bilden die Funktionen $\mathrm{Re}\,(e^{\lambda t}\mathfrak{v}) = \mathrm{Re}\left(e^{\alpha t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\begin{pmatrix} u_1 + \mathrm{i}w_1 \\ u_2 + \mathrm{i}w_2 \end{pmatrix}\right) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_1\cos\beta t - w_1\sin\beta t \\ u_2\cos\beta t - w_2\sin\beta t \end{pmatrix}$ und analog $\mathrm{Im}\,(e^{\lambda t}v) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} u_1\sin\beta t + w_1\cos\beta t \\ u_2\sin\beta t + w_2\cos\beta t \end{pmatrix}$ eine Basis des Raums der reellwertigen Lösungen. •

Abschnitt 11.E, Aufg. 12, p. 352 (1.10.2011) :

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$.

a) Genau dann konvergiert jede Lösung von $\nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{y} = 0$ für $t \to \infty$ (komponentenweise) gegen 0, wenn alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ einen negativen Realteil haben. (Man sagt in diesem Fall, das System sei a s y m p t o t i s c h s t a b i l ; vgl. Bd. 1, 19.D, Aufg. 8a) .)

b) Genau dann sind alle Lösungen von $\nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{y} = 0$ auf $[0, \infty[$ beschränkt, wenn alle Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ einen nichtpositiven Realteil haben und wenn die rein-imaginären Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ diagonalisierbar sind. (Man sagt in diesem Fall, das System sei s t a b i l ; vgl. Bd. 1, 19.D, Aufg. 8b) .)

Beweis: Da $\mathfrak{A}$ über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar ist, gibt es eine invertierbare $n \times n$-Matrix $\mathfrak{B}$ über $\mathbb{C}$ derart, dass $\mathfrak{T} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Ist dann $\mathfrak{z} = {}^t(z_1, \ldots, z_n)$ eine Lösung von $\dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{T}\mathfrak{z}$, so ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z}$ eine Lösung von $\dot{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}\mathfrak{y}$ und umgekehrt. Genau dann konvergieren alle Komponenten von $\mathfrak{z} = \mathfrak{B}\mathfrak{y}$ gegen 0 für $t \to \infty$ (bzw. sind diese Komponenten beschränkt) , wenn dies für die Komponenten von $\mathfrak{y} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{z}$ gilt. Außerdem haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{T}$ die gleichen Eigenwerte. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathfrak{A}$ eine obere Dreiecksmatrix ist mit Eigenwerten λ_j, $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \geq \cdots \geq \mathrm{Re}\,\lambda_n$.

In diesem Fall löst man das Gleichungssystem von unten anfangend. Die j-te Komponente y_j von $\mathfrak{y}$ genügt einer Differenzialgleichung $\dot{y}_j = \lambda_j y_j + g$ mit einer Störfunktion g, die Linearkombination der bereits erhaltenen Lösungen $y_n, \ldots, y_{j+1}$ ist. Wir erhalten dafür als Lösung $y_j(t) = e^{\lambda_j t}(c + \int g(t)\,e^{-\lambda_j t}\,dt)$, $c \in \mathbb{C}$, wobei $g(t)$ eine Linearkombination von Pseudopolynomen der Form $f(t)\,e^{\lambda t}$ mit Polynomfunktionen $f(t)$ und $\mathrm{Re}\,\lambda \leq \mathrm{Re}\,\lambda_j$, also $\mathrm{Re}\,(\lambda - \lambda_j) \leq 0$ ist. Dann ist $\int g(t)\,e^{-\lambda_j t}\,dt$ eine Linearkombination von

Pseudopolynomen der Form $f(t)\,e^{\lambda t}$ mit $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ und wächst somit für $t \to \infty$ höchstens so stark wie Polynomfunktionen.

a) Haben alle Eigenwerte λ_j von $\mathfrak{A}$ einen negativen Realteil, so ist $\lim\limits_{t\to\infty} e^{\lambda_j t} = 0$, und folglich ist $\lim\limits_{t\to\infty} y_j(t) = 0$ für alle j, da sich das Verhalten der e-Funktion gegenüber dem von Polynomfunktionen im Unendlichen durchsetzt. Ist umgekehrt $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} \ge 0$ für ein j_0, so ist $\lim\limits_{t\to\infty} y_{j_0}(t)$ bei $c \ne 0$ sicher nicht 0.

b) Haben alle Eigenwerte λ_j von $\mathfrak{A}$ einen nichtpositiven Realteil, so ist $e^{\lambda_j t}$ für alle j beschränkt. Bei $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ ist y_j nach a) beschränkt. Bei $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ ist der Eigenwert λ_j diagonalisierbar, d.h. wir können $g(t) = 0$ annehmen und haben dann $y_j(t) = c\,e^{\lambda_j t}$, woraus ebenfalls die Beschränktheit von y_j folgt. Folglich sind alle $y_j(t)$ beschränkt, wenn die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. Ist umgekehrt $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0$ für ein j_0, so ist die zugehörige Lösung sicher nicht beschränkt. Wegen der Beschränktheit der $e^{\lambda_j t}$ sind die y_j bei nicht positivem λ_j ebenfalls dann nicht beschränkt, wenn die obigen Integrale nicht beschränkt sind, d.h. wenn die Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ nicht alle diagonalisierbar sind. •