Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 2, 2. Aufl. (Version 2010), Kapitel 3

8 Matrizen

Abschnitt 8.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 181 (1.6.2011) :

Man berechne die Produkte von je zwei der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, soweit sie definiert sind.

Lösung: Das Produkt zweier Matrizen ist genau dann definiert, wenn die Spaltenzahl des linken Faktors gleich der Zeilenzahl der rechten Faktors ist. Dies ist hier nur der Fall für

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

•

Abschnitt 8.A, Aufg. 3, p. 181 (1.6.2011) :

Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t]$, die jeder Polynomfunktion ihre Ableitung zuordnet, gebe man die Matrix $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f) \in \mathrm{M}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(\mathbb{K})$ bzgl. der Basis $\mathfrak{v} = (t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ an. Man löse die entsprechende Aufgabe für die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t]$ mit $g(x(t)) = y(t)\cdot x(t)$, $x \in \mathbb{K}[t]$, wobei $y(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ eine feste Polynomfunktion ist, bzw. die $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $h : x(t) \mapsto x(t+1)$, $x \in \mathbb{K}[t]$.

Lösung: Wegen $'f(t^j) = j\,t^{j-1}$ ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f) = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{für } i \neq j-1 \\ j, & \text{für } i = j-1 \end{cases}$.

Wir setzen $a_k := 0$ für $k \in \mathbb{Z} - \{0, \ldots, n\}$. Wegen $g(t^j) = y(t)\,t^j = a_0 t^j + a_1 t^{j+1} + \cdots + a_n t^{j+n}$ ist dann $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(g) = (a_{i-j})_{i,j\in\mathbb{N}}$.

Wegen $h(t^j) = (t+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} t^i$ ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(h) = \left(\binom{j}{i}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 4, p. 181 (1.6.2011) :

Seien $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{I,J}(K)$ und $i \in I$, $j \in J$. Man berechne $e_i\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}e_j$, wobei $e_i \in K^{(I)}$ als Zeilenvektor und $e_j \in K^{(J)}$ als Spaltenvektor zu interpretieren ist.

Lösung: Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ und $e_{i_0} = (\delta_{i_0 i})_{i\in I}$. Dann ist $e_{i_0}\mathfrak{A} = \left(\sum_{i\in I} \delta_{i_0 i} a_{ij}\right)_{j\in J} = (a_{i_0 j})_{j\in J}$ die i_0-te Zeile von $\mathfrak{A}$. Für $e_{j_0} = (\delta_{j j_0})_{j\in J}$ ist ferner $\mathfrak{A}e_{j_0} = \left(\sum_{j\in J} a_{ij}\delta_{j j_0}\right)_{i\in I} = (a_{i j_0})_{i\in I}$ die j_0-te Spalte von $\mathfrak{A}$. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 5, p. 181 (1.6.2011) :

Man berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, \ldots, b_n),$$

wobei $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ Elemente eines Körpers sind.

Lösung: Offenbar gilt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} (b_1, \ldots, b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{pmatrix}.$$

•

Abschnitt 8.A, Aufg. 7, p. 181 (1.6.2011) :

Seien I, J endliche Mengen. Für eine Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{I,J}(K)$ berechne man $\mathfrak{E}_{ij}\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{E}_{rs}$, wobei $\mathfrak{E}_{ij} \in \mathrm{M}_I(K)$ und $\mathfrak{E}_{rs} \in \mathrm{M}_J(K)$ jeweils Elemente der Standardbasen sind.

Lösung: Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$. Mit $\mathfrak{E}_{i_0j_0} = (\delta_{i_0i}\delta_{j_0j})_{(i,j)\in I\times I}$ und $\mathfrak{E}_{r_0s_0} = (\delta_{r_0j}\delta_{s_0k})_{(j,k)\in J\times J}$ gilt dann:

$$\mathfrak{E}_{i_0j_0}\mathfrak{A} = \Big(\sum_{j\in J}\delta_{i_0i}\delta_{j_0j}a_{jk}\Big)_{(i,k)\in I\times J} = \Big(\sum_{j\in J}\delta_{i_0i}a_{j_0k}\Big)_{(i,k)\in I\times J}$$

ist die $I\times J$-Matrix, deren i_0-te Zeile gleich der j_0-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ ist und deren übrige Zeilen 0 sind.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E}_{r_0s_0} = \Big(\sum_{j\in J}a_{ij}\delta_{r_0j}\delta_{s_0k}\Big)_{(i,k)\in I\times J} = \Big(\sum_{j\in J}a_{ir_0}\delta_{s_0k}\Big)_{(i,k)\in I\times J}$$

ist die $I\times J$-Matrix, deren s_0-te Spalte gleich der r_0-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ ist und deren übrige Spalten 0 sind. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 8, p. 181 (1.6.2011) :

Sei $f: V \to W$ eine K-lineare Abbildung des n-dimensionalen Vektorraums V in den m-dimensionalen Vektorraum W. Dann gibt es Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W, bzgl. derer f durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$$

beschrieben wird. Die Anzahl der Einsen in dieser Matrix ist der Rang von f und daher eindeutig bestimmt.

Beweis: Wie der Beweis des Rangsatzes 5.E.1 zeigt, gibt es eine Basis $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ von V derart, dass $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von Kern f und $w_1 := f(v_1), \ldots, w_s := f(v_s)$ eine Basis von Bild f ist. Setzt man dann $v_{s+j} := u_j$ für $j = 1, \ldots, r$, so erhält man eine Basis $\mathfrak{v} := (v_1, \ldots, v_n)$, $n := r+s$. Außerdem ergänzen wir $w_1, \ldots, w_s$ zu einer Basis $\mathfrak{w} := (w_1, \ldots, w_m)$ von W. Dann gilt $f(v_j) = w_j$ für $j = 1, \ldots, r$ und $f(v_j) := 0$ für $j = r+1, \ldots, n$, d.h. $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(f)$ hat die angegebene Form. – Hat andererseits $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(f)$ diese Form bzgl. irgendwelcher Basen $\mathfrak{v}$ von V und $\mathfrak{w}$ von W, so hat Bild f die Basis $w_1, \ldots, w_s$, wo s die Anzahl der Einsen ist, und es gilt Rang f = Dim Bild $f = s$. •

Abschnitt 8.A, Teil von **Aufg. 9**, p. 182 (1.6.2011) :

Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f: V \to V$ ein K-linearer Operator auf V.

a) Genau dann ist f eine Projektion, wenn f in einer geeigneten Basis von V durch eine Matrix der folgenden Form (an den nicht gekennzeichneten Stellen stehen Nullen) beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)\,.$$

b) Sei $1+1 \neq 0$ in K, d.h. Char $K \neq 2$. Genau dann ist f eine Involution, wenn f in einer geeigneten Basis von V durch eine Matrix der folgenden Form (an den nicht gekennzeichneten Stellen stehen Nullen) beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)\,.$$

c) Genau dann ist f eine Scherung (vgl. 7.A, Aufg. 17), wenn f in einer geeigneten Basis von V durch eine Matrix der folgenden Form (an den nicht gekennzeichneten Stellen stehen Nullen) beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)\,.$$

d) Genau dann ist f eine Dilatation (vgl. 7.A, Aufg. 17), wenn f in einer geeigneten Basis von V durch eine Matrix der folgenden Form (an den nicht gekennzeichneten Stellen stehen Nullen) beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)\,, \qquad \lambda \in K,\ \lambda \neq 0, 1\,.$$

Beweis: a) Nach 5.G, Aufg. 25 ist f genau dann eine Projektion, wenn es eine Basis $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ von V gibt mit $f(x_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, r$, und $f(x_i) = 0$, $i = r+1, \ldots, n$. Dann ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{x}}(f)$ die angegebene Form hat.

b) **1. Beweis:** Genau dann ist f eine Involution von V, wenn $g := \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V - f)$ eine Projektion ist. $g^2 = g$ ist nämlich wegen $g^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_V - f)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{id}_V - 2f + f^2) = \frac{1}{4}(2\,\mathrm{id}_V - 2f) + \frac{1}{4}(f^2 - \mathrm{id}_V) = g + \frac{1}{4}(f^2 - \mathrm{id}_V)$ äquivalent zu $f^2 = \mathrm{id}_V$. Nach a) ist g genau dann eine Projektion, wenn es eine Basis $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ von V mit $g(x_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, r$, und $g(x_i) = 0$, $i = r+1, \ldots, n$, gibt, also wegen $f = \mathrm{id} - 2g$ mit $f(x_i) = x_i - 2x_i = -x_i$, $i = 1, \ldots, r$, und $f(x_i) = x_i - 0 = x_i$, $i = r+1, \ldots, n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix von f bzgl. der Basis $x_n, \ldots, x_1$ die angegebene Form hat.

2. Beweis: Sei $f^2 = \mathrm{id}_V$. Wir setzen $V_+ := \{x \in V \mid f(x) = x\}$ und $V_- := \{x \in V \mid f(x) = -x\}$. Dann gilt $V_+ \cap V_- = 0$, da für $x \in V_+ \cap V_-$ gilt $f(x) = x$ und $f(x) = -x$, d.h $2x = 0$ und somit $x = 0$. Ferner gilt $V_+ + V_- = V$, da für $x \in V$ gilt $x = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x))$ mit $\frac{1}{2}(x + f(x)) \in V_+$ wegen $f(x + f(x)) = (f(x) + f^2(x)) = f(x) + x$ und $\frac{1}{2}(x - f(x)) \in V_-$ wegen $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = f(x) - x = -(x - f(x))$. Nach Korollar 5.F.4 ist V nun die direkte Summe von V_+ und V_-. Nehmen wir eine Basis von V_+ und V_- zusammen, so erhalten wir eine Basis von V, bzgl. der f eine Matrixdarstellung der angegebenen Art hat. – Hat umgekehrt f eine solche Matrixdarstellung bzgl. einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, so ist $f(v_j) = \pm v_j$ und somit $f^2(v_j) = v_j$ für alle j, d.h. es ist $f^2 = \mathrm{id}_V$.

c) Definitionsgemäß ist f eine Scherung, wenn der Fixpunktraum $H := \{x \in V \mid f(x) = x\}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von V ist und wenn für ein (und damit für jedes) $x \in V - H$ die Spiegelungsrichtung $f(x) - x$ in H liegt.

Ist dies der Fall, so wählen wir ein $v_1 \in V - H$ und ergänzen $v_2 := f(x) - x \neq 0$ durch $v_3 \ldots, v_n$ zu einer Basis $v_2, \ldots, v_n$ von H. Dann ist $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und es gilt $f(v_1) = v_1 + (f(v_1) - v_1) = v_1 + v_2$ und $f(v_j) = v_j$ für $j = 2, \ldots, n$. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ hat also die angegebene Gestalt.

Hat umgekehrt f eine solche Matrixdarstellung bzgl. einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, so ist $(f(v_j) = v_j$ für alle $j = 2, \ldots, n$, und $f(v_1) = v_1 + v_2$, also $H := \{x \in V \mid f(x) = x\}$ $(n-1)$-dimensional und für $x := v_1 \notin H$ gilt $f(x) - x = v_2 \in H$, d.h. f ist eine Scherung.

d) Definitionsgemäß ist ein Automorphismus f eine Dilatation, wenn $H := \{x \in V \mid f(x) = x\}$ ein $(n-1)$-dimensionaler Unterraum von V ist und wenn für ein (und damit für jedes) $x \in V - H$ die Spiegelungsrichtung $f(x) - x$ nicht in H liegt.

Ist dies der Fall, so setzen wir $v_1 := f(x) - x$ und können v_1 durch eine Basis $v_2, \ldots, v_n$ von H zu einer Basis $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V ergänzen. Dann gilt $f|H = \mathrm{id}_H$, und ist $f(x) = \lambda x + h$ mit $h \in H$, so gilt $\lambda \neq 0$, da andernfalls Bild f im $(n-1)$-dimensionalen Unterraum H läge im Widerspruch zur Bijektivität von f, und ferner $\lambda \neq 1$, da andernfalls $f(x) - x$ in H läge. Außerdem erhält man $f(v_1) = f(f(x) - x) = f(\lambda x + h) - f(x) = \lambda f(x) + h - (\lambda x + h) = \lambda(f(x) - x) = \lambda v_1$ und $f(v_i) = v_i$ für $i = 2, \ldots, n$. Daher hat $\mathfrak{M}_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ die angegebene Gestalt. – Die Umkehrung ist wieder trivial. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 10, p. 182 (1.6.2011):

Seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f: V \to V$ ein linearer Operator. Genau dann stimmen die Matrizen von f für alle Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V überein, wenn f eine Homothetie $a\,\mathrm{id}_V$, $a \in K$, ist.

Beweis: Ist $f = a\,\mathrm{id}_V$, $a \in K$, und $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine beliebige Basis von V, so gilt stets $f(v_j) = av_j$ und somit $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(f) = a\mathfrak{E}_n$.

Stimmen umgekehrt die Matrizen von f für alle Basen von V überein, so sei $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(f) = (a_{ij})$. Es genügt zu zeigen, dass $a_{k\ell} = 0$ und $a_{kk} = a_{\ell\ell}$ ist für beliebige $k \neq \ell$. Dann ist $f(v_j) = av_j$ für alle j, also $f = a\,\mathrm{id}_V$, wo a der gemeinsame Wert der a_{kk} ist.

Definieren wir $w_i := v_i$ für $i \neq k$ und $w_k := v_k + v_\ell$, so sind die n Vektoren $w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_n$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von V (wegen $v_k = w_k - w_\ell$) und somit eine weitere Basis von V. Wir berechnen die k-te Spalte der Matrix (b_{ij}) von f bzgl. dieser Basis – nach Voraussetzung gilt $(a_{ij}) = (b_{ij})$ – durch

$$
\begin{aligned}
f(w_k) = f(v_k + v_\ell) = f(v_k) + f(v_\ell) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v_i + \sum_{i=1}^{n} a_{i\ell} v_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{ik} + a_{i\ell}) v_i \\
&= \sum_{i=1, i\neq k,\ell}^{n} (a_{ik} + a_{i\ell}) v_i + (a_{kk} + a_{k\ell})(v_k + v_\ell) + (a_{\ell k} + a_{\ell\ell} - a_{kk} - a_{k\ell}) v_\ell \\
&= \sum_{i=1, i\neq k,\ell}^{n} (a_{ik} + a_{i\ell}) w_i + (a_{kk} + a_{k\ell}) w_k + (a_{\ell k} + a_{\ell\ell} - a_{kk} - a_{k\ell}) w_\ell
\end{aligned}
$$

und erhalten insbesondere $a_{kk} = b_{kk} = a_{kk} + a_{k\ell}$ und $a_{\ell k} = b_{\ell k} = a_{\ell k} + a_{\ell\ell} - a_{kk} - a_{k\ell}$. Die erste Beziehung liefert $a_{k\ell} = 0$ und dann die zweite $a_{\ell\ell} = a_{kk}$, wie behauptet. •

Beweisvariante: Ist f keine Homothetie, so gibt es linear unabhängige Vektoren v_1, v_2 mit $f(v_1) = v_2$, vgl. 5.B, Aufg. 8. Bzgl. Basen $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ bzw. $v_1, v_1 + v_2, v_3, \ldots, v_n$ von V sind die ersten Spalten der zugehörigen Matrizen von f verschieden. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 11, p. 183 (1.6.2011):

Man folgere aus Aufg. 10 für einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V:

a) Das Zentrum $\mathrm{Z}(\mathrm{End}_K V)$ der Algebra $\mathrm{End}_K V$, d.h. die Unteralgebra derjenigen f aus $\mathrm{End}_K V$, die mit allen Elementen aus $\mathrm{End}_K V$ vertauschbar sind, ist gleich der Unteralgebra $\{a\,\mathrm{id}_V \mid a \in K\}$ der Homothetien von V.

b) Das Zentrum $\mathrm{Z}(\mathrm{Aut}_K V)$ der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_K V$ ist die Untergruppe der Homothetien $a\,\mathrm{id}_V$, $a \in K^\times$.

c) Man bestimme die Zentren der Matrizenalgebren $\mathrm{M}_I(K)$ bzw. der Gruppen $\mathrm{GL}_I(K)$, I endlich.

Beweis: a), b) Für beliebige $g \in \mathrm{End}_K V$ gilt $g\,(a\,\mathrm{id}_V) = ag = (a\,\mathrm{id}_V)\,g$, $a \in K$, d.h. das Zentrum enthält jeweils die angegebenen Homothetien.

Es genügt, die Umkehrung von b) zu beweisen. Sei dazu $f \in \mathrm{Z}(\mathrm{Aut}_K V)$ und sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ die Matrix von f bzgl. einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, d.h. es gelte $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Nach Aufg. 10 ist zu zeigen, dass f bzgl. einer beliebigen Basis $w_1, \ldots, w_n$ von V ebenfalls durch $\mathfrak{A}$ beschrieben wird. Gemäß Satz 5.D.3 (3) wird durch $g(v_i) := w_i$ für alle i ein Automorphismus von V beschrieben, der nach Voraussetzung mit f vertauschbar ist. Daher gilt $f(w_j) = fgg^{-1}(w_j) = gfg^{-1}(w_j) = gf(v_j) = g\big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i$, und $\mathfrak{A}$ ist auch die Matrix von f bzgl. der Basis $w_1, \ldots, w_n$. •

c) Die Zentren von $\mathrm{M}_I(K)$ bzw. $\mathrm{GL}_I(K)$, I endlich, bestehen genau aus den Vielfachen $a\mathfrak{E}_I$ der Einheitsmatrix mit $a \in K$ bzw. $a \in K^\times$. Dies folgt aus a) und b) mit Hilfe der Korrespondenz aus Satz 8.A.9. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 12, p. 183 (1.6.2011):

V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $u_1, \ldots, u_r$, $w_1, \ldots, w_s$ sei eine Basis von V. Es sei $U = Ku_1 + \cdots + Ku_r$ und $W = Kw_1 + \cdots + Kw_s$. Ferner sei $f: V \to V$ ein K-linearer Operator auf V.

a) Genau dann ist $f(U) \subseteq U$, d.h. U invariant unter f, wenn die Matrix von f bzgl. der angegebenen Basis von V die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rs} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{r+s}(K)\,.$$

In diesem Fall sind

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_r(K) \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_s(K)$$

die Matrix von $f|U$ bzgl. der Basis $u_1, \ldots, u_r$ von U bzw. die Matrix des von f auf dem Restklassenraum $\overline{V} := V/U$ induzierten Operators $\overline{f}$ bzgl. der (Restklassen-)Basis $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_s$ von $\overline{V}$.

b) Genau dann sind U und W beide invariant unter f, wenn die Matrix von f bzgl. der angegebenen Basis von V die Form aus a) hat, wobei zusätzlich die c_{ij} alle gleich 0 sind.

Beweis (von a) und b)): Ist $f(U) \subseteq U$, so ist $f(u_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij}u_i + \sum_{i=1}^s 0 \cdot w_i$, $j = 1, \ldots, r$, und die Matrix von f hat die angegebene Gestalt. Wegen $f(u_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij}u_i$, $j = 1, \ldots, r$, ist dann (a_{ij}) die Matrix von $f|U$ bzgl. $u_1, \ldots, u_r$. Ist ferner $f(w_j) = \sum_{i=1}^r c_{ij}u_i + \sum_{i=1}^s b_{ij}w_i$, $j = 1, \ldots, s$, so folgt $f(\overline{w}_j) = \sum_{i=1}^r c_{ij}\overline{u}_i + \sum_{i=1}^s b_{ij}\overline{v}_i = \sum_{i=1}^s b_{ij}\overline{w}_i$, $j = 1, \ldots, s$, durch Übergang zu Restklassen modulo U, und (b_{ij}) ist die Matrix von $\overline{f}: \overline{V} \to \overline{V}$ bzgl. der Basis $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_s$ von $\overline{V}$.

Gilt zusätzlich $f(W) \subseteq W$, so ist auch $f(w_j) = \sum_{i=1}^r 0 \cdot u_i + \sum_{i=1}^s b_{ij}w_i = \sum_{i=1}^s b_{ij}w_i$, $j = 1, \ldots, s$, und alle c_{ij} sind 0. – Umgekehrt implizieren Matrizen der angegebenen Form natürlich $f(u_j) \in U$ für alle j, also $f(U) \subseteq U$, und gegebenenfalls $f(w_j) \in W$ für alle j, also $f(W) \subseteq W$. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 13, p. 183 (1.6.2011):

Eine Matrix wie in Aufg. 12 schreiben wir in naheliegender Weise als Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{C} \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} \in \mathrm{M}_r(K)\,, \ \mathfrak{B} \in \mathrm{M}_s(K)\,, \ \mathfrak{C} \in \mathrm{M}_{r,s}(K)\,.$$

Genau dann ist eine solche Matrix invertierbar, wenn die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ invertierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{C} \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{-1} & -\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ invertierbar, so folgt die Behauptung mit Satz 8.A.11 aus

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{C} \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{-1} & -\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} & -\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1} + \mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_r & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}_s \end{pmatrix} = \mathfrak{E}_{r+s}\,.$$

Ist umgekehrt die angegebene Blockmatrix invertierbar und schreiben wir die inverse Matrix in der Form

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{C}' \\ \mathfrak{D}' & \mathfrak{B}' \end{pmatrix}, \quad \text{so gilt} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_r & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{C} \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{C}' \\ \mathfrak{D}' & \mathfrak{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}\mathfrak{A}' + \mathfrak{C}\mathfrak{D}' & \mathfrak{A}\mathfrak{C}' + \mathfrak{C}\mathfrak{B}' \\ \mathfrak{B}\mathfrak{D}' & \mathfrak{B}\mathfrak{B}' \end{pmatrix},$$

also $\mathfrak{B}\mathfrak{B}' = \mathfrak{E}_s$, und $\mathfrak{B}$ ist invertierbar. Ebenso folgt $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \mathfrak{E}_r$ und die Invertierbarkeit $\mathfrak{B}$ aus

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E}_r & 0 \\ 0 & \mathfrak{E}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{C}' \\ \mathfrak{D}' & \mathfrak{B}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{C} \\ 0 & \mathfrak{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}'\mathfrak{A} & \mathfrak{A}'\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'\mathfrak{B} \\ \mathfrak{D}'\mathfrak{A} & \mathfrak{D}'\mathfrak{C} + \mathfrak{B}'\mathfrak{B} \end{pmatrix}$$

•

Abschnitt 8.A, Aufg. 14, p. 183 (1.6.2011):

Genau dann ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(K)$ invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Ihr Inverses ist dann

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir verwenden Satz 8.A.11. Ist $ad - bc \neq 0$, so gilt

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-cb & dc-cd \\ -ba+ab & bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist umgekehrt $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ invertierbar mit inverser Matrix $\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}$, so gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & au+cv \\ bx+dy & bu+dv \end{pmatrix},$$

also insbesondere $ax + cy = 1$ und $bx + dy = 0$. Multipliziert man die erste dieser Gleichung mit d und die zweite mit $-c$ und addiert dann beide, so bekommt man $(ad - bc)\,x = d$. Multipliziert man jedoch die erste dieser Gleichung mit $-b$ und die zweite mit a und addiert dann beide, so bekommt man $(ad - bc)\,y = -b$. Wäre $ad - bc = 0$, so folgte $b = d = 0$ im Widerspruch zur sich ebenfalls oben ergebenden Gleichung $bu + dv = 1$. (Diese Aufgabe wird in Korollar 9.C.10 und Satz 9.D.13 verallgemeinert.) •

Abschnitt 8.A, Variante zu **Aufg. 15**, p. 184 (1.6.2011):

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + x_2 - x_3\,,\; -2x_1 - 3x_2 + x_3\,,\; x_1 - x_3)\,.$$

Geben Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sowie die Matrix von f bezüglich der Basis $v_1 := (1, 2, 5)\,,\; v_2 := (5, 3, 3)\,,\; v_3 := (1, 1, 2)$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung: Die Spalten der Matrix $\mathfrak{A} := \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)$ von f bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ sind die Koordinatenvektoren von $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ bezüglich der Basis e_1, e_2, e_3. Sie ist also gleich

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $\mathfrak{B}$ von der Standardbasis auf die Basis v_1, v_2, v_3 ist die inverse Matrix zur Matrix

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

deren Spalten (die Koordinatenvektoren bezüglich e_1, e_2, e_3 von) v_1, v_2, v_3 sind. Wir berechnen $\mathfrak{B}$ mit dem Verfahren aus Beispiel 8.B.7 durch elementare Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -22 & -3 \end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & -22 & -3 \end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{9}{7} & -\frac{22}{7} & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 9 & -22 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 9 & -22 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3}(f)$ von f bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 ist daher

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 9 & -22 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -131 & -19 \\ -3 & -55 & -8 \\ 20 & 411 & 59 \end{pmatrix}.$$

Abschnitt 8.A, Variante zu **Aufg. 15**, p. 184 (1.6.2011) :

Die lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x_1,x_2,x_3) := (x_1 - x_2 + x_3\,,\ \ -2x_1 + 3x_2 - x_3\,,\ \ x_1 + x_3)\ .$$

Geben Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sowie die Matrix von f bezüglich der Basis $v_1 := (1,1,2)\,,\ v_2 := (2,1,4)\,,\ v_3 := (1,1,3)$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Lösung: Die Spalten der Matrix $\mathfrak{A} := \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}$ von f bezüglich der Standardbasis e_1,e_2,e_3 von $\mathbb{R}^3$ sind die Koordinatenvektoren von $f(e_1)\,,\ f(e_2)\,,\ f(e_3)$ bezüglich der Basis e_1,e_2,e_3. Sie ist also gleich

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $\mathfrak{B}$ von der Standardbasis auf die Basis v_1,v_2,v_3 ist die inverse Matrix zur Matrix

$$\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

deren Spalten (die Koordinatenvektoren bezüglich e_1,e_2,e_3 von) v_1,v_2,v_3 sind. Wir berechnen $\mathfrak{B}$ durch elementare Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Bigg|\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathfrak{A}' = \mathfrak{M}^{v_1,v_2,v_3}_{v_1,v_2,v_3}(f)$ von f bezüglich der Basis v_1,v_2,v_3 ist daher

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & -5\\ 3 & 10 & 5\\ -1 & -4 & -2\end{pmatrix}.$$

Abschnitt 8.A, Aufg. 17, p. 184 (1.6.2011) :

Sei I eine endliche Menge. Die Abbildung $f:\mathfrak{A} \mapsto {}^t\mathfrak{A}^{-1}$, die jeder Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{GL}_I(K)$ die zu $\mathfrak{A}$ kontragrediente Matrix zuordnet, ist ein Automorphismus von $\mathrm{GL}_I(K)$, der zu sich selbst invers ist.

Beweis: Mit 8.A.18 (4) und Eigenschaft (4) vor 8.A.15 sieht man

$$f(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = {}^t(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = {}^t(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}) = {}^t\mathfrak{A}^{-1}\,{}^t\mathfrak{B}^{-1} = f(\mathfrak{A})\,f(\mathfrak{B})\,.$$

Ferner gilt $f\big(f(\mathfrak{A})\big) = {}^t\big({}^t\mathfrak{A}^{-1}\big)^{-1} = \big(\mathfrak{A}^{-1}\big)^{-1} = \mathfrak{A}$ wegen 8.A.18 (1) und 8.A.19, also $f^2 = \mathrm{id}$. Daher ist f ein zu sich selbst inverser Automorphismus von $\mathrm{GL}_I(K)$. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 18, p. 184 (1.6.2011) :

Für alle $a \in K^\times$ und alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt in $\mathrm{M}_n(K)$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & \binom{m}{1}a^{m-1} & \cdots & \binom{m}{n-2}a^{m-n+2} & \binom{m}{n-1}a^{m-n+1}\\ 0 & a^m & \cdots & \binom{m}{n-3}a^{m-n+3} & \binom{m}{n-2}a^{m-n+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a^m & \binom{m}{1}a^{m-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a^m\end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}_{n,1} := (\delta_{i+1,j})_{1\le i,j\le n} = (\delta_{i,j-1})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_n(K)$ die $(n\times n)$-Matrix, in deren erster Nebendiagonale oberhalb der Hauptdiagonale überall 1 steht und deren übrige Koeffizienten alle 0 sind. Allgemeiner sei $\mathfrak{D}_{n,k} := (\delta_{i+k,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{M}_n(K)$ die $(n\times n)$-Matrix, in deren k-ter Nebendiagonale oberhalb der Hauptdiagonale überall 1 steht und deren übrige Koeffizienten alle 0 sind. Dann ist $\mathfrak{D}_{n,0} = \mathfrak{E}_n$

die Einheitsmatrix, und für $k \in \mathbb{N}$ gilt $(\mathfrak{D}_{n,1})^k = \mathfrak{D}_{n,k}$. Der Induktionschluss von k auf $k+1$ folgt daraus, dass das Element in der i-ten Zeile und ℓ-ten Spalte von $(\mathfrak{D}_{n,1})^{k+1} = (\mathfrak{D}_{n,1})^k\, \mathfrak{D}_{n,1} = \mathfrak{D}_{n,k}\, \mathfrak{D}_{n,1}$ gleich $\sum_{j=1}^{n} \delta_{i+k,j}\, \delta_{j,\ell-1} = \delta_{i+k,\ell-1} = \delta_{i+k+1,\ell}$, also gerade das entsprechende Element von $\mathfrak{D}_{n,k+1}$ ist. Insbesondere ergibt sich $\mathfrak{D}^n_{n,1} = \mathfrak{D}_{n,n} = 0$. Die zu potenzierende Matrix ist $a\mathfrak{E}_n + \mathfrak{D}_{n,1}$. Wir können darauf Aufg. 1a) und b) aus Abschnitt 1.A anwenden und erhalten:

$$(a\mathfrak{E}_n + \mathfrak{D}_{n,1})^m = \sum_{k=1}^{n} \binom{m}{k} a^{m-k} (\mathfrak{E}_n)^{m-k}\, (\mathfrak{D}_{n,1})^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{m}{k} a^{m-k} \mathfrak{D}_{n,k}\,.$$

Dies ist gerade die als Potenz angegebene Matrix. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 19, p. 184 (1.6.2011):

In $\mathrm{M}_n(K)$ mit $n-1 \in K^\times$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2-n & \cdots & 1 & 1 \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die zu invertierende Matrix ist $\big(1-\delta_{n-i+1,j}\big)_{1\le i,j\le n}$. Es ist zu zeigen, dass ihr Inverses die Matrix $\big(\frac{1}{n-1} - \delta_{j,n-\ell+1}\big)_{1\le j,\ell\le n}$ ist. Dies folgt daraus, dass in der i-ten Zeile und ℓ-ten Spalte des Produkts der beiden Matrizen folgendes Element steht:

$$\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{n-i+1,j})\Big(\frac{1}{n-1} - \delta_{j,n-\ell+1}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\delta_{n-i+1,j} - \sum_{j=1}^{n}\delta_{j,n-\ell+1} + \sum_{j=1}^{n}\delta_{n-i+1,j}\,\delta_{j,n-\ell+1}$$
$$= \frac{n}{n-1} - \frac{1}{n-1} - 1 + \delta_{i\ell} = \delta_{i\ell}\,.$$ •

Abschnitt 8.A, Aufg. 20.a), p. 184 (1.6.2011):

(Binomische Umkehrformel) Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus den Gleichungen

$$(1+t)^j = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}t^i\,,\quad t^j = (1+t-1)^j = \sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}(1+t)^i\,,$$

$j = 0, \ldots, n$, folgere man, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \cdots & (-1)^n\binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{M}_{n+1}(K)$ zueinander invers sind.

Beweis: Da die Koeffizienten der Matrizen ganze Zahlen sind, genügt es, die Aussage für $K = \mathbb{Q}$ zu zeigen. Nach Transponieren sind die beiden Matrizen die Übergangsmatrizen von der Basis $1, 1+t, \ldots, (1+t)^n$ zur Basis $1, t, \ldots, t^n$ und umgekehrt von $\mathbb{Q}[t]_n$ und daher zueinander invers. – Will man über einem beliebigen Körper K rechnen, so hat man im Raum $K[X]_n$ der Polynome im Sinne von Abschnitt 10.A zu rechnen. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 20.b), p. 185 (1.6.2011):

(Fouriersche Umkehrformel) Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $\zeta \in K$ eine primitive n-te Einheitswurzel (d.h. ζ erzeuge in $K^\times$ eine Gruppe der Ordnung n, z.B. $\zeta := \exp(2\pi\mathrm{i}/n) \in \mathbb{C}$). Dann sind die Matrizen $(\zeta^{\mu\nu})_{0\le\mu,\nu<n}$ und $\frac{1}{n}(\zeta^{-\mu\nu})_{0\le\mu,\nu<n}$ zueinander invers. (Es ist $n \neq 0$ in K. Andernfalls wäre $n = mp$ mit $p = \mathrm{Char}\, K > 0$ und $\zeta^n - 1 = \zeta^{mp} - 1 = (\zeta^m - 1)^p$ und daher bereits $\zeta^m = 1$.)

Beweis: Wir haben $\sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta^{\mu\nu} \frac{1}{n} \zeta^{-\nu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$ zu zeigen. Für $\lambda = \mu$ gilt in der Tat $\sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta^{\mu\nu} \frac{1}{n} \zeta^{-\nu\mu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$.
Für $\lambda \neq \mu$ gilt $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} \zeta^{\mu\nu} \frac{1}{n} \zeta^{-\nu\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \big(\zeta^{\mu-\lambda}\big)^{\nu} = \frac{1}{n} \frac{1-\big(\zeta^{\mu-\lambda}\big)^n}{1-\zeta^{\mu-\lambda}} = \frac{1-\big(\zeta^{n}\big)^{\mu-\lambda}}{n\,(1-\zeta^{\mu-\lambda})} = \frac{1-1^{\mu-\lambda}}{n\,(1-\zeta^{\mu-\lambda})} = 0.$ •

(Wir zeigen noch, dass $n \neq 0$ ist in K. Andernfalls hätte K Primzahlcharakteristik $p = \operatorname{Char} K$, und p wäre ein Teiler von n, also $n = pm$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt, wie am Ende von Beispiel 5.A.8 bemerkt, $(\zeta^m - 1)^p = \zeta^{mp} - 1 = \zeta^n - 1 = 0$, also $\zeta^m - 1 = 0$ im Widerspruch dazu, dass ζ eine primitive n-te Einheitwurzel war.)

Abschnitt 8.A, Aufg. 22, p. 185 (1.6.2011):

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bzw. $\mu_1, \ldots, \mu_n$ jeweils paarweise verschiedene Elemente des Körpers K, für die überdies $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ ist für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Es sei $g(t) := (t+\mu_1)\cdots(t+\mu_n)$ und

$$f_j(t) = \frac{g(\lambda_j)\prod_{i\neq j}(t-\lambda_i)}{g(t)\prod_{i\neq j}(\lambda_j-\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij}}{t+\mu_i}\,.$$

Dann sind die Matrizen

$$\left(\frac{1}{\lambda_i+\mu_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1+\mu_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1+\mu_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_n+\mu_1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+\mu_n} \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{M}_n(K)$ zueinander invers. Man gebe die Elemente a_{ij} explizit an.

Lösung: Zur Berechnung der a_{ij} verwenden wir die in Band 1 im Anschluss an Satz 11.B.2 beschriebene Methode zur Berechnung der Koeffizienten a_{ij} von $1/(t+\mu_i)$ in der Partialbruchzerlegung von $f_j(t)$ und erhalten unter Verwendung des Polynoms $h(t) := (t+\lambda_1)\cdots(t+\lambda_n)$:

$$a_{ij} = \frac{g(\lambda_j)\prod_{\ell\neq j}(-\mu_i-\lambda_\ell)}{g'(-\mu_i)\prod_{\ell\neq j}(\lambda_j-\lambda_\ell)} = \frac{1}{(\mu_i+\lambda_j)}\,\frac{g(\lambda_j)}{g'(-\mu_i)}\,\frac{(-1)^{n-1}h(\mu_i)}{(-1)^{n-1}h'(-\lambda_j)} = \frac{1}{(\mu_i+\lambda_j)}\,\frac{g(\lambda_j)}{g'(-\mu_i)}\,\frac{h(\mu_i)}{h'(-\lambda_j)}\,.$$

Nach Wahl der a_{ij} ist das Element in der k-ten Zeile und j-ten Spalte des Produkts $\big(1/(\lambda_k+\mu_i)\big)\,(a_{ij})$ nun

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k+\mu_i}\cdot a_{ij} = f_j(\lambda_k) = \frac{g(\lambda_j)\prod_{i\neq j}(\lambda_k-\lambda_i)}{g(\lambda_k)\prod_{i\neq j}(\lambda_j-\lambda_i)} = \delta_{kj}\,,$$

da Zähler und Nenner des Bruchs für $k=j$ gleich sind und bei $k\neq j$ das Produkt im Zähler verschwindet. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 23, p. 185 (1.6.2011):

Man berechne die inverse Matrix zu einer H e i s e n b e r g - M a t r i x der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & c \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+2}(K)\,.$$

Lösung: Sei $v_0, \ldots, v_{n+1}$ eine Basis eine $(n+2)$-dimensionalen Vektorraums. Wir betrachten die gegebene Heisenberg-Matrix $\mathfrak{B}$ als die Übergangsmatrix von einer weiteren Basis $w_0, \ldots, w_{n+1}$ auf die Basis $v_0, \ldots, v_{n+1}$, d.h. es sei

$$w_0 = v_0 + a_0v_1 + \cdots + a_nv_n + cv_{n+1}\,,\quad w_i = v_i + b_iv_{n+1}\ \text{ für }\ i = 1, \ldots, n\,,\quad w_{n+1} = v_{n+1}\,.$$

Dann ist $\mathfrak{B}^{-1}$ die Übergangsmatrix von der Basis $w_0, \ldots, w_{n+1}$ auf die Basis $v_0, \ldots, v_{n+1}$, berechnet sich also aus $v_{n+1} = w_{n+1}$, $v_i = w_i - b_iv_{n+1} = w_i - b_iw_{n+1}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $v_0 = w_0 - a_1v_1 - \cdots - a_nv_n - cv_{n+1} = w_0 - a_1(w_1 - b_1w_{n+1}\cdots - a_n(w_n - b_nw_{n+1} - cw_{n+1} = w_0 - a_1w_1 - \cdots - a_nw_n + (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n - c)w_{n+1}$.

Die gesuchte inverse Matrix $\mathfrak{B}^{-1}$ ist also die Heisenbergmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n & d \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad d := a_1b_1 + \cdots + a_nb_n - c\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 8.A, Aufg. 24, p. 185 (1.6.2011):

Seien $\mathfrak{v} = (v_i)_{i\in I}$ und $\mathfrak{v}' = (v'_i)_{i\in I}$ Basen des endlichdimensionalen K-Vektorraums V und $\mathfrak{v}^*$ bzw. $\mathfrak{v}'^*$ die zugehörigen Dualbasen von V^*. Ist $\mathfrak{A}$ die Übergangsmatrix von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{v}'$, so ist die dazu kontragrediente Matrix ${}^t\mathfrak{A}^{-1}$ die Übergangsmatrix von $\mathfrak{v}^*$ nach $\mathfrak{v}'^*$.

Beweis: $\mathfrak{A}$ ist gleich $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}'}(\mathrm{id}_V)$ und die Übergangsmatrix von $\mathfrak{v}^*$ nach $\mathfrak{v}'^*$ ist $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}^*}_{\mathfrak{v}'^*}(\mathrm{id}_{V^*})$. Nach Satz 8.A.20 ist $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}^*}_{\mathfrak{v}'^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{v}^*}_{\mathfrak{v}'^*}\big((\mathrm{id}_V)^*\big) = {}^t\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}'}_{\mathfrak{v}}(\mathrm{id}_V)$. Wegen $\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}'}_{\mathfrak{v}}(\mathrm{id}_V) = \big(\mathfrak{M}^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}'}(\mathrm{id}_V)\big)^{-1}$ ist dies die Behauptung. •

Abschnitt 8.A, Aufg. 26, p. 186 (1.6.2011):

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ seien zueinander inverse Matrizen, deren Koeffizienten alle ≥ 0 sind. Dann haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in jeder Zeile und Spalte jeweils nur einen von 0 verschiedenen Koeffizienten.

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ und $\mathfrak{B} = (b_{jk})$. Dann gilt $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = \delta_{jk}$ für alle i,k. Ist $b_{jk} = 0$ für festes k und alle j, verschwindet also die ganze k-te Spalte von $\mathfrak{B}$, so bekommt man den Widerspruch $1 = \delta_{kk} = \sum_{j=1}^n a_{kj}b_{jk} = 0$. Analog sieht man, dass nicht eine ganze Zeile von $\mathfrak{A}$ verschwinden kann. Aus $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$ bekommt man dann entsprechend, dass nicht eine ganze Spalte von $\mathfrak{A}$ oder eine ganze Zeile von $\mathfrak{B}$ verschwinden kann. Sei nun $b_{j_k k} \neq 0$ für ein j_k. Da nach Voraussetzung alle Summanden ≥ 0 sind in $\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$, folgt für alle $i \neq k$ bereits $a_{ij_k} = 0$. Wäre auch noch $b_{j_k k'} \neq 0$ für ein weiteres $k' \neq k$, so erhielte man genauso $a_{ij_k} = 0$ für alle $i \neq k'$, also insbesondere $a_{kj_k} = 0$, und die ganze j_k-te Spalte von $\mathfrak{A}$ würde verschwinden. Damit ist gezeigt, dass es in der j_k-ten Zeile von $\mathfrak{B}$ genau ein Element $\neq 0$ gibt. Wir folgern daraus, dass $j_{k'} \neq j_k$ sein muss, wenn wir in entsprechender Weise zu $k' \neq k$ ein $b_{j_{k'}k'} \neq 0$ wählen. Die so erhaltene Abbildung $k \mapsto j_k$ von $\{1,\dots,n\}$ in $\{1,\dots,n\}$ ist daher injektiv, also auch surjektiv. Aus dem Gezeigten folgt somit, dass es in jeder Spalte und dann, da keine Zeile von $\mathfrak{B}$ verschwindet, auch in jeder Zeile von $\mathfrak{B}$ genau ein Element $\neq 0$ gibt. Die ensprechende Aussage über $\mathfrak{A}$ folgt durch Betrachten von $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_n$. •

Abschnitt 8.B, Teil von **Aufg. 1a)**, p. 191 (1.6.2011):

Man bestimme den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$.

Lösung: Wir benutzen, dass sich der Rang bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen nicht ändert. Zunächst addieren wir das (-1)-fache der ersten Zeile zur zweiten, das (-2)-fache der ersten Zeile zur dritten und das (-3)-fache der ersten Zeile zur vierten. Dann addieren wir das 3-fache der zweiten Zeile zur dritten und das 1-fache der zweiten Zeile zur vierten. Schließlich vertauschen wir noch die beiden letzten Zeilen und die dritte und vierte Spalte. Dadurch erhalten wir bereits Dreiecksgestalt (mit 3 Zeilen $\neq 0$):

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -8 & -8 \end{pmatrix} = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 8.B, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 191 (1.6.2011) :

Man bestimme den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{Q}$

Lösung: Wir benutzen, dass sich der Rang bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen nicht ändert. Zunächst vertauschen wir die erste und vierte Zeile, addieren dann das (-3)-fache der ersten Zeile zur zweiten, das (-7)-fache der ersten Zeile zur dritten und das (-5)-fache der ersten Zeile zur vierten. Schließlich addieren wir das (-2)-fache der zweiten Zeile zur dritten und das $(-\frac{3}{2})$-fache der zweiten Zeile zur vierten. Dadurch erhalten wir bereits Dreiecksgestalt (mit 2 Zeilen $\neq 0$) :

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 & -7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & -5 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 8 & 2 & 18 & 26 \\ 0 & 16 & 4 & 36 & 52 \\ 0 & 12 & 3 & 27 & 39 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 8 & 2 & 18 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 8.B, Variante zu **Aufg. 4**, p. 191 (1.6.2011) :

Man berechne zu den folgenden beiden invertierbaren Matrizen die inversen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})\,, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\,, \quad n \geq 2\,.$$

Lösung: Es ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{4,4}(\mathbb{R})$.

Indem man links und rechts dieselben elementaren Zeilenumformungen durchführt, erhält man nämlich:

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} -15 & 4 & 20 & -12 \\ -22 & 5 & 30 & -18 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} -12 & 4 & 14 & -9 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left|\left(\begin{matrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{matrix}\right)\right. .$$

Ferner gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

Indem man links und rechts dieselben elementaren Zeilenumformungen durchführt, erhält man nämlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -n+2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\ -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} .$$

Zu dieser letzten Matrix siehe auch 8.A, Aufg. 19. •

Abschnitt 8.B, Zusatzaufgabe, p. 191 (1.6.2011) :

Man begründe, dass die Matrix $\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar ist.

Beweis: Die Summe aus erster und dritter Zeile von $\mathfrak{A}$ ist gleich dem Doppelten der zweiten Zeile. Daher sind die Zeilen von $\mathfrak{A}$ linear abhängig, und $\mathfrak{A}$ ist nicht invertierbar. •

Abschnitt 8.B, Zusatzaufgabe, p. 191 (1.6.2011) :

Man begründe, dass die lineare Abbildung f aus der zweiten Variante zu 8.A, Aufg. 15 bijektiv ist, und geben die Umkehrabbildung f^{-1} zu f an.

Lösung: Die Matrix $\mathfrak{A} := \mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)$ von f bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ ist die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sie ist invertierbar mit einer inversen Matrix, die wir folgendermaßen durch elementare Umformungen berechnen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{matrix}\right)\left|\left(\begin{matrix}1&0&0\\-1&0&1\\2&1&0\end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow \left(\begin{matrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)\left|\left(\begin{matrix}1&0&0\\-1&0&1\\3&1&-1\end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{matrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)\left|\left(\begin{matrix}2&1&1\\-1&0&1\\3&1&-1\end{matrix}\right)\right. \Longrightarrow \left(\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right)\left|\left(\begin{matrix}-3&-1&2\\-1&0&1\\3&1&-1\end{matrix}\right)\right. .$$

Daher ist f bijektiv, und es ist $f^{-1}(x_1,x_2,x_3)=(-3x_1-x_2+2x_3\,,\,-x_1+x_3\,,\,3x_1+x_2-x_3)$ wegen

$$\mathfrak{A}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\-1&0&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x_1-x_2+2x_3\\-x_1+x_3\\3x_1+x_2-x_3\end{pmatrix}.$$ •

Abschnitt 8.B, Zusatzaufgabe, p. 191 (1.6.2011) :

Für die folgenden $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen f bestimme man jeweils die Dimensionen von Kern und Bild und stelle fest, ob sie injektiv oder surjektiv sind:

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x_1,x_2,x_3):=(x_1-x_2+2x_3\,,\,2x_1+x_2-x_3\,,\,x_1+5x_2-8x_3)$.

b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ mit $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3\;,\;3x_1+x_2+7x_3\;,\;-2x_1+2x_2-2x_3\;,\;x_1-2x_2)$.

c) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+2x_2+3x_3\;,\;2x_1+5x_2+4x_3-3x_4\;,\;3x_1+4x_2+6x_3+6x_4)$.

d) $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+3x_2-2x_3+x_4\;,\;-x_1+x_2+2x_3-2x_4\;,\;x_1+7x_2-x_3)$.

Lösung: a) f ist nicht surjektiv wegen $\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f<\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3=3$. Es ist nämlich

$$\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=\operatorname{Rang} f=\operatorname{Rang}\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3}(f)=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&-1\\1&5&-8\end{pmatrix}=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-5\\0&6&-10\end{pmatrix}$$
$$=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=2\,.$$

Der Rangsatz liefert $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3-\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=3-2=1>0$, d.h. f ist auch nicht injektiv.

b) f ist nicht surjektiv wegen $\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f<\operatorname{Dim}\mathbb{R}^4=4$. Es ist nämlich

$$\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=\operatorname{Rang} f=\operatorname{Rang}\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3}_{e_1,e_2,e_3,e_4}(f)=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&1&7\\-2&2&-2\\1&-2&0\end{pmatrix}=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&4&4\\0&0&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$
$$=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&4&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2\,.$$

Der Rangsatz liefert $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3-\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=3-2=1>0$, d.h. f ist auch nicht injektiv.

c) f ist surjektiv wegen $\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3=3$. Es ist nämlich

$$\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=\operatorname{Rang} f=\operatorname{Rang}\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3,e_4}_{e_1,e_2,e_3}(f)=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&5&4&-3\\3&4&6&6\end{pmatrix}=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-2&-3\\0&-2&-3&6\end{pmatrix}$$
$$=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-2&-3\\0&0&-7&0\end{pmatrix}=3\,.$$

Der Rangsatz liefert $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^4-\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=4-3=1>0$, d.h. f ist nicht injektiv.

d) f ist nicht surjektiv wegen $\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f<\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3=3$. Es ist nämlich

$$\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=\operatorname{Rang} f=\operatorname{Rang}\mathfrak{M}^{e_1,e_2,e_3,e_4}_{e_1,e_2,e_3}(f)=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\-1&1&2&-2\\1&7&-2&0\end{pmatrix}=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\0&4&0&-1\\0&4&0&-1\end{pmatrix}$$
$$=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\0&4&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2\,.$$

Der Rangsatz liefert $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^4-\operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f=4-2=2>0$, d.h. f ist nicht injektiv. •

Abschnitt 8.B, Zusatzaufgabe, p. 191 (1.6.2011) :

Man stelle fest, für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Matrizen invertierbar sind, und berechne dafür jeweils die inverse Matrix:

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) Indem man links und rechts dieselben elementaren Zeilenumformungen durchführt, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1-a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1-a \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Genau dann ist der Rang der gegebenen 3×3-Matrix also gleich 3 und damit die Matrix invertierbar, wenn $a+2 \neq 0$ ist, d..h. $a \neq -2$. In diesem Fall können wir mit der Rechnung fortfahren:

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a+2} & -\frac{1}{a+2} & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{2}{a+2} & \frac{a}{a+2} & -\frac{a}{a+2} \\ -\frac{1}{a+2} & \frac{1}{a+2} & \frac{a+1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} & -\frac{1}{a+2} & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte inverse Matrix ist dann $\dfrac{1}{a+2}\begin{pmatrix} 2 & a & -a \\ -1 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Indem man links und rechts dieselben elementaren Zeilenumformungen durchführt, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Genau dann ist der Rang der gegebenen 3×3-Matrix also gleich 3 und damit die Matrix invertierbar, wenn $1-a \neq 0$ ist, d..h. $a \neq 1$. In diesem Fall können wir mit der Rechnung fortfahren:

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ -\frac{a}{1-a} & 0 & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a} & -\frac{1}{1-a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-a} & -\frac{1}{1-a} \\ -\frac{a}{1-a} & 0 & \frac{1}{1-a} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte inverse Matrix ist dann $\dfrac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Indem man links und rechts dieselben elementaren Zeilenumformungen durchführt, erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Genau dann ist der Rang der gegebenen 3×3-Matrix also gleich 3 und damit die Matrix invertierbar, wenn $a-2 \neq 0$ ist, d..h. $a \neq 2$. In diesem Fall können wir mit der Rechnung fortfahren:

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a-2} & 0 & \frac{1}{a-2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{4-a}{a-2} & -1 & \frac{2}{2-a} \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2-a} & 0 & \frac{1}{a-2} \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte inverse Matrix ist dann $\begin{pmatrix} \frac{4-a}{a-2} & -1 & \frac{2}{2-a} \\ 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2-a} & 0 & \frac{1}{a-2} \end{pmatrix}$. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 8, p. 192 (1.6.2011) :

Man beweise unter Verwendung von 8.A, Aufg. 8:

Satz 8.B.3 Seien I und J endliche Mengen und $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{I,J}(K)$ eine $I \times J$-Matrix. Dann gilt

$$\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Rang}\,{}^t\mathfrak{A}\,,$$

d.h. der (Spalten-)Rang von $\mathfrak{A}$ ist gleich dem Zeilenrang von $\mathfrak{A}$.

Beweis: Sei $f : K^J \to K^I$ definiert durch $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ die Matrix von f bzgl. der Standardbasen von K^J bzw. K^I. Nach 8.A, Aufg. 8 gibt es Basen $\mathfrak{v}$ von K^J und $\mathfrak{w}$ von K^I derart, dass die Matrix $\mathfrak{D}$ bzgl. dieser Basen ausser r Einsen in der Hauptdiagonale nur Nullen als Koeffizienten hat, wobei $r = \mathrm{Rang}\, f = \mathrm{Rang}\,\mathfrak{A}$ ist. Sind $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ die zugehörigen Übergangsmatrizen (mit $\mathfrak{v}$ als Spalten von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{w}$ als Spalten von $\mathfrak{C}$), so gilt $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ nach 8.A.14. Mit 8.A.18 und 8.A.19 erhält man $\mathfrak{D} = {}^t\mathfrak{D} = {}^t\mathfrak{B}\,{}^t\mathfrak{A}\,{}^t\mathfrak{C}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{D}$ und ${}^t\mathfrak{A}$ beschreiben die gleiche lineare Abbildung $K^I \to K^J$, nur bzgl. verschiedener Basen. Wieder mit der obigen Aufgabe folgert man $r = \mathrm{Rang}\,{}^t\mathfrak{A}$, was zu beweisen war. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 9, p. 192 (1.6.2011) :

Zwei Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathrm{M}_{I,J}(K)$, I, J endlich, haben genau dann denselben Rang, wenn es invertierbare Matrizen $\mathfrak{B} \in \mathrm{GL}_I(K)$ und $\mathfrak{C} \in \mathrm{GL}_J(K)$ gibt mit $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$.

Beweis: Seien $f, g : K^J \to K^I$ die durch $f(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ und $f'(\mathfrak{x}) := \mathfrak{A}'\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ Spaltenvektor in K^J, definierten linearen Abbildungen, deren Matrizen bezüglich der Standardbasen also $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}'$ sind. Sei $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Rang}\,\mathfrak{A}' = r$, also $\mathrm{Rang}\, f = \mathrm{Rang}\, f' = r$. Nach dem Beweis des Rangsatzes gibt es dann eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von K^J und eine Basis $v'_1, \ldots, v'_n$ von K^J derart, dass $w_1 := f(v_1), \ldots, w_r := f(v_r)$ eine Basis von Bild f und $w'_1 := f(v'_1), \ldots, w'_r := f(v'_r)$ eine Basis von Bild f' ist und dass $v_{r+1}, \ldots, v_n$ und $v'_{r+1}, \ldots, v'_n$ Basen von Kern f bzw. Kern f' sind. Wir ergänzen noch jeweils $w_1, \ldots, w_r$ und $w'_1, \ldots, w'_r$ zu Basen $w_1, \ldots, w_m$ bzw. $w'_1, \ldots, w'_m$ von K^I. Nun definieren wir Isomorphismen $h : K^J \to K^J$ und $g : K^I \to K^I$ durch $h(v_i) := v'_i$, $i = 1, \ldots, n$, und $g(w_i) := w'_i$, $i = 1, \ldots, m$. Nach Konstruktion gilt dann $g(f(v_i)) = g(w_i) = w'_i = f'(v'_i) = f'(h(v_i))$ für $i = 1, \ldots, r$ und $g(f(v_i)) = g(0) = 0 = f'(v'_i) = f'(h(v_i))$ für $i = r{+}1, \ldots, n$, also insgesamt $g \circ f = f' \circ h$, wobei die Matrizen $\mathfrak{C}' := \mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(h)$ und $\mathfrak{B} := \mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(g)$ invertierbar sind. Es folgt $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(g)\,\mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(f) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(g \circ f) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(f' \circ h) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(f')\,\mathfrak{M}^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{e}}(h) = \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ und somit $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C} := (\mathfrak{C}')^{-1}$.

Definiert man beim Beweis der Umkehrung die Isomorphismen g und h wie oben durch $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}^{-1}$, so ist natürlich $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Dim\,Bild}\, f = \mathrm{Dim\,Bild}\, g \circ f = \mathrm{Dim\,Bild}\, f' \circ h = \mathrm{Dim\,Bild}\, f' = \mathrm{Rang}\,\mathfrak{A}'$. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 10, p. 192 (1.6.2011) :

$\mathfrak{A}$ sei eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K. Genau dann ist $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} \le r$, wenn es eine $m \times r$-Matrix $\mathfrak{B}$ und eine $r \times n$-Matrix $\mathfrak{C}$ über K gibt, so dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist. Genau dann ist dabei $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} = r$, wenn $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{B} = \mathrm{Rang}\,\mathfrak{C} = r$ ist.

Beweis: Sei $f : K^n \to K^m$ die durch $f(x) := \mathfrak{A}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ Spaltenvektor in K^n, definierte lineare Abbildung, deren Matrix bezüglich der Standardbasen also $\mathfrak{A}$ ist. Sei $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} = r$, also $\mathrm{Dim\,Bild}\, f = \mathrm{Rang}\, f = r$, und sei $w_1, \ldots, w_r$ eine Basis von Bild f. Die lineare Abbildung $h : K^n \to \mathrm{Bild}\, f$ mit $h(x) := f(x)$ ist dann surjektiv, also $\mathrm{Bild}\, h = \mathrm{Bild}\, f$, und die lineare Abbildung $g : \mathrm{Bild}\, f \to K^m$ mit $g(y) := y$ ist injektiv, also $\mathrm{Kern}\, g = 0$. Ferner gilt $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = h(x) = f(x)$ für alle $x \in K^n$, d.h. $g \circ h = f$. $\mathfrak{B}$ und C seien die $m \times r$-Matrix $\mathfrak{B} := \mathfrak{M}^{v_1,\ldots,v_r}_{e_1,\ldots,e_m}(g)$ bzw. die $r \times n$-Matrix $\mathfrak{C} := \mathfrak{M}^{e_1,\ldots,e_n}_{v_1,\ldots,v_r}(h)$, die g bzw. h bzgl. der Standardbasen von K^n bzw. K^m bzw. der Basis $v_1, \ldots, v_r$ von Bild f beschreiben. Nach dem Rangsatz ist $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{B} = \mathrm{Rang}\, g = \mathrm{Dim\,Bild}\, f - \mathrm{Dim\,Kern}\, g = \mathrm{Dim\,Bild}\, f = r$. Ferner ist $\mathrm{Rang}\, h = \mathrm{Dim\,Bild}\, h = \mathrm{Dim\,Bild}\, f = r$, und es gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^{e_1,\ldots,e_n}_{e_1,\ldots,e_m}(f) = \mathfrak{M}^{e_1,\ldots,e_n}_{e_1,\ldots,e_m}(g \circ h) = \mathfrak{M}^{v_1,\ldots,v_r}_{e_1,\ldots,e_m}(g)\,\mathfrak{M}^{e_1,\ldots,e_n}_{v_1,\ldots,v_r}(h) = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Sei umgekehrt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ mit einer $m \times r$-Matrix $\mathfrak{B}$ vom Rang r und einer $r \times n$-Matrix $\mathfrak{C}$ vom Rang r. Mit g bezeichnen wir die durch $g(y) := \mathfrak{B}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y}$ Spaltenvektor in K^r, definierte lineare Abbildung $g : K^r \to K^m$ und mit h die durch $h(x) := \mathfrak{C}\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}$ Spaltenvektor in K^n, definierte lineare Abbildung $h : K^n \to K^r$. Die Matrizen von g und h bzgl. der Standardbasen sind also $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{A}$ beschreibt die Abbildung $g \circ h$ bzgl. dieser Basen. Dann ist $\mathrm{Dim\,Bild}\, h = \mathrm{Rang}\, h = \mathrm{Rang}\,\mathfrak{C} = r$, also $\mathrm{Bild}\, h = K^r$. Ferner ist g nach Konstruktion injektiv. Nach dem Rangsatz gilt $\mathrm{Dim\,Bild}\, g = \mathrm{Dim}\, K^r - \mathrm{Kern}\, g = r - 0 = r$. Es folgt $\mathrm{Rang}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Rang}(g \circ h) = \mathrm{Dim\,Bild}(g \circ h) = \mathrm{Dim}\, g(\mathrm{Bild}\, h) = \mathrm{Dim}\, g(K^r) = \mathrm{Dim\,Bild}\, g = r$. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 11, p. 192 (1.6.2011):

Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n \in K^n$ Spaltenvektoren. Genau dann bilden die $n \times n$-Matrizen $\mathfrak{a}_i\,{}^t\mathfrak{a}_j \in \mathrm{M}_n(K)$, $1 \le i, j \le n$, eine K-Basis von $\mathrm{M}_n(K)$, wenn $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ eine Basis von K^n ist.

Beweis: Sei zunächst $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ eine Basis von K^n. Dann gibt es für jedes $r \in \{1, \ldots, n\}$ Koeffizienten $\lambda_{ir} \in K$ derart, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_{ir}\mathfrak{a}_i = \mathfrak{e}_r$ der r-te Standardbasisvektor von K^n ist. Wegen $\operatorname{Dim} \mathrm{M}_n(K) = n^2$ genügt es zu zeigen, das die n^2 Matrizen $\mathfrak{a}_i\,{}^t\mathfrak{a}_j$ ganz $\mathrm{M}_n(K)$ erzeugen. Sei dazu $\mathfrak{A} = (a_{rs}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Dann gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\lambda_{ir}\lambda_{js}\Big)\,\mathfrak{a}_i\,{}^t\mathfrak{a}_j = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ir}\mathfrak{a}_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{js}\,{}^t\mathfrak{a}_j\Big) = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\,\mathfrak{e}_r\,{}^t\mathfrak{e}_s = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\mathfrak{E}_{rs} = \mathfrak{A}\,.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{a}_i\,{}^t\mathfrak{a}_j$ eine Basis von $\mathrm{M}_n(K)$, so genügt es zu zeigen,dass die n Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, linear unabhängig sind in K^n. Aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i\mathfrak{a}_i = 0$ folgt aber $\sum_{i=1}^n \lambda_i\mathfrak{a}_i\,{}^t\mathfrak{a}_j = 0$ für jedes feste j. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{a}_i\,{}^t\mathfrak{a}_j$ erhält man so $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, was zu zeigen war. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 12, p. 192 (1.6.2011):

Seien $P_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$, $j = 1, \ldots, n$, Punkte des affinen Raumes $\mathbb{A}^m(K) = K^m$. Die Dimension des von den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ erzeugten affinen Unterraums von $\mathbb{A}^m(K)$ ist der um 1 verminderte Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,n}(K)\,.$$

Beweis: Indem man zuerst die 1. Spalte und dann geeignete Vielfache der 1. Zeile von jeweils allen anderen subtrahiert, sieht man

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} &= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}-a_{m1} & \cdots & a_{mn}-a_{m1} \end{pmatrix} \\ = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12}-0 & \cdots & a_{1n}-a_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}-a_{m1} & \cdots & a_{mn}-a_{m1} \end{pmatrix} &= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} a_{12}-a_{11} & \cdots & a_{1n}-a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m2}-a_{m1} & \cdots & a_{mn}-a_{m1} \end{pmatrix} + 1 \\ = \operatorname{Dim}_K\big(K\overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + K\overrightarrow{P_1P_n}\big) + 1 = \operatorname{Dim}_K F + 1\,, \end{aligned}$$

wo F der von den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ erzeugte affine Unterraum von K^m ist. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 13, p. 192 (1.6.2011):

Die Lösungsräume der Gleichungssysteme $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{x} = \mathfrak{b}'$ mit $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $\mathfrak{A}' \in \mathrm{M}_{m',n}(K)$ und Spaltenvektoren $\mathfrak{b} \in K^m$, $\mathfrak{b}' \in K^{m‘}$, $m, m', n \in \mathbb{N}$, seien nichtleere affine Unterräume von K^n. Genau dann sind diese Unterräume parallel, wenn die Block-Matrix $\binom{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} \in \mathrm{M}_{m+m',n}(K)$ den Rang $\operatorname{Max}(\operatorname{Rang}\mathfrak{A}, \operatorname{Rang}\mathfrak{A}')$ hat.

Beweis: Genau dann sind diese affinen Unterräume parallel, wenn die zugehörigen Untervektorräume, also die Lösungsräume U und U' von $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$ bzw. $\mathfrak{A}'\mathfrak{x} = 0$ ineinander enthalten sind. Ist etwa $\operatorname{Rang}\mathfrak{A} \le \operatorname{Rang}\mathfrak{A}'$, gilt also $\operatorname{Dim} U = n - \operatorname{Rang}\mathfrak{A} \ge n - \operatorname{Rang}\mathfrak{A}' = \operatorname{Dim} U'$, vgl. Beispiel 8.B.8, so ist dies genau dann der Fall, wenn man $U \supseteq U'$ hat. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn das zusammengenommene Gleichungssystem $\binom{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'}\mathfrak{x} = 0$ ganz U' als Lösungsmenge hat, also wenn $\operatorname{Rang}\binom{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = n - \operatorname{Dim} U' = \operatorname{Rang}\mathfrak{A}' = \operatorname{Max}(\operatorname{Rang}\mathfrak{A}, \operatorname{Rang}\mathfrak{A}')$ gilt. •

Abschnitt 8.B, Aufg. 14, p. 192 (1.6.2011) :

Seien $r \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_s(K)$. Genau dann gibt es zu jeder Matrix $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{s,r}(K)$ und jedem Spaltenvektor $\mathfrak{x} \in K^r$ einen Spaltenvektor $\mathfrak{y} \in K^s$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\mathfrak{y} = 0$, wenn $\mathfrak{B}$ invertierbar ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{y} = -\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ zu wählen.

Beweis: Ist $\mathfrak{B}$ invertierbar, so gilt offenbar $\mathfrak{A}\mathfrak{x} + \mathfrak{B}\bigl(-\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{x}\bigr) = \mathfrak{A}\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{B}$ nicht invertierbar, also $\operatorname{Rang}\mathfrak{B} < s$, so hat die Abbildung $g : K^s \to K^s$ mit $g(\mathfrak{y}) = \mathfrak{B}\mathfrak{y}$ den Rang $\operatorname{Rang}\mathfrak{B} < s$, ist also nicht surjektiv. Sei $\mathfrak{z} \in K^s - \operatorname{Bild} g$. Definieren wir irgendeine lineare Abbildung $f : K^r \to K^s$ so, dass $f(\mathfrak{x}) := -\mathfrak{z}$ ist, und ist $\mathfrak{A}$ die Matrix, die f bzgl. der Standardbasen beschreibt, so lässt sich also $-\mathfrak{A}\mathfrak{x} = -f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{z}$ nicht in der Form $g(\mathfrak{y}) = \mathfrak{B}\mathfrak{y}$ schreiben, was zu zeigen war. •

9 Determinanten

Abschnitt 9.A, Teil von **Aufg. 1**, p. 214 (1.6.2011) :

Für die folgende Permutation σ gebe man die kanonische Zyklendarstellung, eine Darstellung als Produkt von Transpositionen, die Anzahl der Fehlstände, das Signum und die Ordnung an:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 2 & 9 & 10 & 8 & 12 & 4 & 6 & 1 & 11 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$.

Lösung: a) Die kanonische Zyklenzerlegung von σ ist $\sigma = \langle 1, 3, 9\rangle\langle 2\rangle\langle 4, 10, 11, 7\rangle\langle 5, 8, 6, 12\rangle$, und die resultierende Darstellung als Produkt von Transpositionen ist

$$\sigma = \langle 1, 3\rangle\langle 3, 9\rangle\langle 4, 10\rangle\langle 10, 11\rangle\langle 11, 7\rangle\langle 5, 8\rangle\langle 8, 6\rangle\langle 6, 12\rangle .$$

Daher ist $\operatorname{Sign}\sigma = (-1)^8 = 1$. σ besitzt 24 die Fehlstände $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(3, 7)$, $(3, 8)$, $(3, 9)$, $(3, 11)$, $(3, 12)$, $(4, 5)$, $(4, 7)$, $(4, 8)$, $(4, 9)$, $(4, 11)$, $(4, 12)$, $(5, 7)$, $(5, 8)$, $(5, 9)$, $(5, 11)$, $(5, 12)$, $(7, 9)$, $(8, 9)$, $(8, 12)$, $(10, 11)$, $(10, 12)$, $(11, 12)$. Damit bekommt man ebenfalls $\operatorname{Sign}\sigma = (-1)^{24} = 1$. Schließlich ist $\operatorname{Ord}\sigma = \operatorname{kgV}(3, 1, 4, 4) = 12$. •

Abschnitt 9.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 214 (1.6.2011) :

Für die folgenden Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_{20}$ gebe man die kanonische Zyklendarstellung, eine Darstellung als Produkt von Transpositionen, das Signum, die inverse Permutation σ^{-1}, die Ordnung von σ und die Potenz σ^{100} an:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 15 & 8 & 17 & 4 & 7 & 14 & 20 & 19 & 18 & 13 & 10 & 6 & 11 & 5 & 3 & 12 & 1 & 9 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 19 & 11 & 6 & 12 & 2 & 20 & 8 & 10 & 18 & 1 & 13 & 5 & 15 & 9 & 4 & 3 & 14 & 16 & 7 \end{pmatrix}$.

Lösung: a) Die kanonische Zyklenzerlegung von σ ist

$$\sigma = \langle 1, 15, 3, 17\rangle\langle 2, 8, 19\rangle\langle 5, 7, 20, 16, 12, 6, 14\rangle\langle 9, 18\rangle\langle 10, 13, 11\rangle ,$$

und die resultierende Darstellung als Produkt von Transpositionen ist

$$\sigma = \langle 1, 15\rangle\langle 15, 3\rangle\langle 3, 17\rangle\langle 2, 8\rangle\langle 8, 19\rangle\langle 5, 7\rangle\langle 7, 20\rangle\langle 20, 16\rangle\langle 16, 12\rangle\langle 12, 6\rangle\langle 6, 14\rangle\langle 9, 18\rangle\langle 10, 13\rangle\langle 13, 11\rangle .$$

Da dies 14 Transpositionen sind, ist $\operatorname{Sign}\sigma = (-1)^{14} = 1$. (Dies ergibt sich natürlich auch direkt gemäß der Definition 9.A.4.) Ferner liefert die kanonische Zyklenzerlegung

$$\sigma^{-1} = \langle 17, 3, 15, 1\rangle\langle 19, 8, 2\rangle\langle 14, 6, 12, 16, 20, 7, 5\rangle\langle 9, 18\rangle\langle 11, 13, 10\rangle .$$

Nach Beispiel 9.A.2 ist $\operatorname{Ord}\sigma = \operatorname{kgV}(4, 3, 7, 2, 3) = 84$. Schließlich ist

$$\begin{aligned}\sigma^{100} &= \langle 1, 15, 3, 17\rangle^{100}\langle 2, 8, 19\rangle^{100}\langle 5, 7, 20, 16, 12, 6, 14\rangle^{100}\langle 9, 18\rangle^{100}\langle 10, 13, 11\rangle^{100} \\ &= \langle 2, 8, 19\rangle\langle 5, 7, 20, 16, 12, 6, 14\rangle^2\langle 10, 13, 11\rangle = \langle 2, 8, 19\rangle\langle 5, 20, 12, 14, 7, 16, 6\rangle\langle 10, 13, 11\rangle .\end{aligned}$$

b) Die kanonische Zyklenzerlegung von σ ist

$$\sigma = \langle 1, 17, 3, 11\rangle\langle 2, 19, 16, 4, 6\rangle\langle 5, 12, 13\rangle\langle 7, 20\rangle\langle 9, 10, 18, 14, 15\rangle ,$$

und die resultierende Darstellung als Produkt von Transpositionen ist

$$\sigma = \langle 1, 17\rangle\langle 17, 3\rangle\langle 3, 11\rangle\langle 2, 19\rangle\langle 19, 16\rangle\langle 16, 4\rangle\langle 4, 6\rangle\langle 5, 12\rangle\langle 12, 13\rangle\langle 7, 20\rangle\langle 9, 10\rangle\langle 10, 18\rangle\langle 18, 14\rangle\langle 14, 15\rangle .$$

Da dies 14 Transpositionen sind, ist $\operatorname{Sign}\sigma = (-1)^{14} = 1$, was ebenso aus Definition 9.A.4 folgt. Ferner liefert die kanonische Zyklenzerlegung

$$\sigma^{-1} = \langle 11, 3, 17, 1\rangle\langle 6, 4, 16, 19, 2\rangle\langle 13, 12, 5\rangle\langle 20, 7\rangle\langle 15, 14, 18, 10, 9\rangle .$$

Ferner ist $\operatorname{Ord}\sigma = \operatorname{kgV}(4, 5, 3, 2, 5) = 60$. Schließlich ist

$$\sigma^{100} = \langle 1, 17, 3, 11\rangle^{100}\langle 2, 19, 16, 4, 6\rangle^{100}\langle 5, 12, 13\rangle^{100}\langle 7, 20\rangle^{100}\langle 9, 10, 18, 14, 15\rangle^{100} = \langle 5, 12, 13\rangle .$$ •

Abschnitt 9.A, Teil von **Aufg. 2**, p. 214 (1.6.2011) :

Für die folgende Permutationen σ gebe man die Anzahl der Fehlstände, das Signum und die Ordnung an.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & \dots & 2n-1 & 2 & \dots & 2n \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{2n}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & \dots & 2n & 1 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{2n}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n-r+1 & n-r+2 & \dots & n \\ r & \dots & n & 1 & \dots & r-1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{n},\ 1 \le r \le n$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n \\ 1 & 2n & 3 & 2(n-1) & 5 & 2(n-2) & \dots & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{2n}$.

Lösung: a) Es gibt keinen Fehlstand der Form $(1, j)$, genau einen Fehlstand der Form $(2, j)$, nämlich $(2, n+1)$, genau zwei Fehlständ der Form $(3, j)$, nämlich $(3, n+1)$ und $(3, n+2)$, usw. , schließlich $n-1$ Fehlstände der Form (n, j) und keine Fehlstände der Form (i, j) mit $i > n+1$. Zusammen sind dies $1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ Fehlstände. Also ist das Signum gleich $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

b) Es gibt genau einen Fehlstand der Form $(1, j)$, nämlich $(1, n+1)$, genau zwei Fehlständ der Form $(2, j)$, nämlich $(2, n+1)$ und $(2, n+2)$, usw. , schließlich n Fehlstände der Form (n, j) . Zusammen sind dies $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ Fehlstände. Also ist das Signum gleich $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

c) Die Permutation besitzt genau die $r-1$ Fehlstände der Form (i, j) mit $j = n-r+2, \dots, n$ für jedes $i = 1, \dots, n-r+1$ und keine Fehlstände der Form (i, j) mit $i > n-r+1$. Also gibt es genau $(r-1)(n-r+1)$ Fehlstände, und das Signum der Permutation ist folglich $(-1)^{(r-1)(n-r+1)}$.

d) Es gibt keine Fehlständ der Form $(2i+1, 2j+1)$. Jedes Paar der Form $(2i, 2j)$ mit $1 \le i < j \le n$ ist ein Fehlstand der Permutation. Dies sind genau $\binom{n}{2}$ Stück.

Wir zählen noch die Fehlstände (r, s), bei denen eine Komponente gerade und die andere ungerade ist. Es gibt 0 solche Fehlstände der Form $(1, 2j)$, die 2 Fehlstände $(2, 3)$ und $(3, 2n)$, bei denen eine 3 beteiligt ist, und die 2 Fehlstände $(2, 2n-1)$ und $(2n-1, 2n)$, bei denen $2n-1$ beteiligt ist. Ist $m = [n/2]$ die größte ganze Zahl $\le n/2$, so gibt es allgemein für $k = 1, \dots, m$ die $2k$ Fehlstände $(2, 2k+1), \dots, (2k, 2k+1)$ und $(2k+1, 2n-2(k-1)), \dots, (2k+1, 2n)$, bei denen $2k+1$ beteiligt ist, und außerdem die $2k$ Fehlstände $(2, 2n-2k+1), \dots, (2k, 2n-2k+1)$ und $(2n-2k+1, 2n-2(k-1)), \dots, (2n-2k+1, 2n)$, bei denen $2n-2k+1$ beteiligt ist. Im Fall $n = 2m$ und $k = m$ sind dabei allerdings die $2m$ Fehlstände $(2, 2m+1), \dots, (2m, 2m+1)$, $(2m+1, 2m+2), \dots, (2m+1, 2n)$, bei denen $2m+1$ beteiligt ist, doppelt aufgeführt worden. Ist $n = 2m$ gerade, so ist daher die Gesamtzahl der Fehlstände gleich

$$\binom{n}{2} + \Big(\sum_{k=1}^{m} 4k\Big) - 2m = \frac{2m(2m-1)}{2} + 2m(m+1) - 2m = 4m^2 - m = n^2 - \frac{1}{2}n\,.$$

Ist jedoch $n = 2m+1$ ungerade, so ist die Gesamtzahl der Fehlstände gleich

$$\binom{n}{2} + \sum_{k=1}^{m} 4k = \frac{(2m+1)2m}{2} + 2m(m+1) = 4m^2+3m = n^2 - \frac{1}{2}(n+1)\,.$$

Damit ergibt sich für das Signum der Permutation bei $n = 2m$ der Wert $(-1)^{4m^2-m} = (-1)^m = (-1)^{[n/2]}$ und bei $n = 2m+1$ der Wert $(-1)^{4m^2+3m} = (-1)^m = (-1)^{[n/2]}$. •

Bemerkung: Wesentlich einfacher und übersichtlicher lässt sich das Signum der Permutation in d) mit Hilfe der kanonischen Zyklendarstellung, die hier schon eine Zerlegung in Transpositionen ist, bekommen: Bei $n = 2m$ ist die Permutation einfach das Produkt der m Transpositionen $\langle 2, 2n\rangle, \dots, \langle 2m, 2m+2\rangle$ und bei $n = 2m+1$ das Produkt der m Transpositionen $\langle 2, 2n\rangle, \dots, \langle 2m, 2m+4\rangle$, wobei jedesmal nur gerade Zahlen vorkommen. In jedem Fall ist also das Signum gleich $(-1)^m = (-1)^{[n/2]}$. •

Abschnitt 9.A, Teil von **Aufg. 2**, p. 214 (1.6.2011):

Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ mit $J = \{j_1,\ldots,j_m\}$, $j_1 < \cdots < j_m$, sei σ_J die Permutation

$$\sigma_J = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & m & m+1 & \ldots & n \\ j_1 & \ldots & j_m & i_1 & \ldots & i_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n ,$$

wobei die Zahlen $i_1 < \cdots < i_{n-m}$ die Elemente des Komplements von J in $\{1,\ldots,n\}$ sind. Dann ist die Anzahl der Fehlstände von σ_J gleich

$$F(\sigma_J) = \Big(\sum_{k=1}^{m} j_k\Big) - \binom{m+1}{2}$$

und somit $\operatorname{Sign}(\sigma_J) = (-1)^{F(\sigma_J)}$.

Beweis: Es gibt keine Fehlstände (i,j) von σ_J mit $i,j \in \{1,\ldots,m\}$ und keine mit $i,j \in \{m+1,\ldots,n\}$.

Setzen wir $j_0 := 0$, so liegen genau $j_\ell - j_{\ell-1} - 1$ natürliche Zahlen echt zwischen $j_{\ell-1}$ und j_ℓ. Daher gibt es für $k = 1,\ldots,m$ genau $\sum_{\ell=1}^{k}(j_\ell - j_{\ell-1} - 1) = j_k - k$ der $i_1,\ldots,i_{n-m}$, die kleiner als j_k sind und damit Fehlstände der Form (k,r), $r \in \{m+1,\ldots,n\}$ liefern. Zusammen ergeben diese die

$$\sum_{k=1}^{m}(j_k - k) = \Big(\sum_{k=1}^{m} j_k\Big) - \frac{m(m+1)}{2} = \Big(\sum_{k=1}^{m} j_k\Big) - \binom{m+1}{2}$$

Fehlstände von σ_J. •

Abschnitt 9.A, Teil von **Aufg. 4**, p. 215 (1.6.2011):

Eine Untergruppe der Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$, die eine ungerade Permutation enthält, enthält gleich viele ungerade wie gerade Permutationen.

Beweis: Sei $\varphi \in U$ eine ungerade Permutation in der Untergruppe U von $\mathfrak{S}_n$. Die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma\varphi$ von U auf sich ist bijektiv. Sie bildet nach Satz 9.A.7 gerade Permutationen auf ungerade Permutationen ab und ungerade Permutationen auf gerade. Dies liefert die Behauptung. •

Abschnitt 9.A, Teil von **Aufg. 5**, p. 215 (1.6.2011):

a) Eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ungerader Ordnung ist gerade.

b) Das Quadrat σ^2 einer Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ist eine gerade Permutation.

Beweis: a) Hat σ ungerade Ordnung, so haben alle Zyklen in der kanonischen Zyklendarstellung von σ ungerade Ordnung, da die Ordnung von σ das kgV dieser Ordnungen ist. Sie haben dann alle ungerade Länge, sind also alle gerade Permutationen. Dies gilt dann auch für ihr Produkt σ.

b) Es ist $\operatorname{Sign}\sigma^2 = (\operatorname{Sign}\sigma)^2 = (\pm 1)^2 = 1$. •

Bemerkung: Aus b) folgt a): Ein Element σ einer Gruppe von ungerader Ordnung m ist stets ein Quadrat: $\sigma = \sigma^{m+1} = \tau^2$ mit $\tau := \sigma^{(m+1)/2}$.

Abschnitt 9.A, Aufg. 6, p. 215 (1.6.2011):

Sei m_i für $1 \le i < n$ die Anzahl der Fehlstände (i,j), $i < j \le n$, in der Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und sei $\sigma_i := \langle i+m_i, i+m_i-1\rangle \cdots \langle i+1, i\rangle$. Dann ist $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}$. (Dies beweist erneut 9.A.10 und rekonstruiert die Permutation σ aus ihren Fehlständen. Genauer: Die Permutation σ ist durch das $(n-1)$-Tupel $(m_1,\ldots,m_{n-1})$ mit $0 \le m_i \le n-i$ eindeutig bestimmt, und jedes solche Tupel bestimmt ein $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Diese Kodierung der Elemente von $\mathfrak{S}_n$ wird recht häufig benutzt.)

Beweis: Es ist $\sigma_i := \langle i+m_i, i+m_i-1\rangle \cdots \langle i+1, i\rangle = \langle i+m_i, i+m_i-1, \ldots, i+1, i\rangle$. Daraus ergibt sich $\sigma_i^{-1} := \langle i, i+1, \ldots, i+m_i-1, i+m_i\rangle$.

Ist der Wirkungsbereich $W(\sigma)$ von σ leer, so ist $\sigma = \mathrm{id}$ und es gibt keine Fehlstände. Daher sind alle $m_i = 0$, alle $\sigma_i = \mathrm{id}$, und die Behauptung ist richtig.

Sei also $W(\sigma) \ne \emptyset$, und sei i_σ das kleinste Element von $W(\sigma)$. Dann ist $\sigma_i(i) = i$, d.h. $m_i = 0$ und somit $\sigma_i = \mathrm{id}$ für $i < i_\sigma$, d.h. wir haben $\sigma = \sigma_{i_\sigma} \cdots \sigma_{n-1}$ zu zeigen.

Wir verwenden Induktion über $n-i_\sigma$. Der Fall $n-i_\sigma = 0$, d.h. $n = i_\sigma$ ist nicht möglich, da nichtleere Wirkungsbereiche mindestens 2 Elemente enthalten. Bei $n-i_\sigma = 1$, also $i_\sigma = n-1$, ist $W(\sigma) = \{n-1, n\}$. Daraus folgt $\sigma = \langle n-1, n\rangle$ und $\sigma_{n-1} = \langle n, n-1\rangle$, d.h. die Behauptung ist richtig.

Jedes i mit $i_\sigma \le i < \sigma(i_\sigma)$ führt zu genau einem Fehlstand der Form (i_σ, j) von σ. Daher ist $m_{i_\sigma} = \sigma(i_\sigma)-i_\sigma$ und folglich $i' := \sigma(i_\sigma) = i_\sigma + m_{i_\sigma}$. Wir wollen die Induktionsvoraussetzung auf $\sigma' := \sigma_{i_\sigma}^{-1}\sigma$ anwenden. In der Tat ist $\sigma'(i_\sigma) = \sigma_{i_\sigma}^{-1}\sigma(i_\sigma) = \sigma_{i_\sigma}^{-1}(i_\sigma + m_{i_\sigma}) = i_\sigma$ sowie $\sigma'(i) = \sigma(i) = i$ für $i = 1, \ldots, i_\sigma - 1$, und somit $i_{\sigma'} > i_\sigma$, also $n-i_{\sigma'} < n-i_\sigma$. Für alle $i > i_\sigma$ mit $\sigma(i) < i'$ gilt $\sigma'(i) = \sigma_{i_\sigma}^{-1}(\sigma(i)) = \sigma(i)+1$ und für solche mit $\sigma(i) > i'$ gilt $\sigma'(i) = \sigma_{i_\sigma}^{-1}\big(\sigma(i)\big) = \sigma(i)$. Man beachte, dass wegen $\sigma(i_\sigma) = i'$ für $i > i_\sigma$ der Fall $\sigma(i) = i'$ nicht auftreten kann.

Wir betrachten nun ein Paar (i, j) mit $i_0 < i < j \le n$. Bei $\sigma(i), \sigma(j) < i'$ gilt dann $\sigma'(i) = \sigma(i)+1 > \sigma(j)+1 = \sigma'(j)$ genau dann, wenn $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist, und (i, j) ist genau dann ein Fehlstand für σ', wenn es dies für σ ist. Bei $\sigma(i), \sigma(j) > i'$ gilt dann $\sigma'(i) = \sigma(i)$ und $\sigma'(j) = \sigma(j)$, und (i, j) ist genau dann ein Fehlstand für σ', wenn es dies für σ ist. Bei $\sigma(i) < i'$ und $\sigma(j) > i'$ ist (i, j) kein Fehlstand für σ und wegen $\sigma'(i) = \sigma(i)+1 \le i' < \sigma(j) = \sigma'(j)$ auch nicht für σ'. Bei $\sigma(i) > i'$ und $\sigma(j) < i'$ ist (i, j) ein Fehlstand für σ und wegen $\sigma'(i) = \sigma(i) > i' \ge \sigma(j)+1 = \sigma'(j)$ auch für σ'. Damit ist gezeigt, dass für $i > i_0$ die Zahl m_i der Fehlstände der Form (i, j) von σ gleich der von σ' ist. Die Induktionsvoraussetzung liefert jetzt $\sigma_{i_\sigma}^{-1}\sigma = \sigma' = \sigma_{i_0+1}\cdots\sigma_{n-1}$, also $\sigma = \sigma_{i_\sigma}\sigma_{i_0+1}\cdots\sigma_{n-1}$, wie behauptet. •

Abschnitt 9.A,, Aufg. 11d), p. 216 (1.6.2011) :

Die Transpositionen $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \ldots, \langle n-1, n\rangle$ sowie $\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \ldots, \langle 1, n\rangle$ bilden jeweils ein minimales Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}_n$.

Beweis: Wir zeigen durch Induktion über j, dass jede Transposition $\langle i, j\rangle$, $i < j$, ein Produkt von Transpositionen der Form $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \ldots, \langle n-1, n\rangle$ ist: Beim Induktionsanfang $j = i+1$ gehört die Permutation $\langle i, j\rangle = \langle i, i+1\rangle$ selbst zu diesen Transpositionen. Der Induktionsschluss folgt aber (mit Hilfe von Beispiel 9.A.13) sofort aus $\langle j, j+1\rangle\langle i, j\rangle\langle j, j+1\rangle = \langle i, j+1\rangle$. Da sich jede Permutation nach Lemma 9.A.3 als Produkt von Transpositionen schreiben lässt, ergibt sich daraus, dass die zuerst angegebenen Permutationen $\mathfrak{S}_n$ erzeugen. Fehlt eine davon, etwa $\langle i, i+1\rangle$, so bilden die übrigen die Mengen $\{1, \ldots, i\}$ und $\{i+1, \ldots, n\}$ jeweils in sich ab. Eine Permutation, die i und $i+1$ vertauscht, lässt sich damit also nicht darstellen. Dies beweist die Minimalität des Erzeugendensytems.

Auch die zweite Folge von Transpositionen erzeugt $\mathfrak{S}_n$, da jede Transposition $\langle i, j\rangle$, $i < j$, ein Produkt der angegebenen Transpositionen ist: Es ist nämlich $\langle 1, i\rangle\langle 1, j\rangle\langle 1, i\rangle = \langle i, j\rangle$. Fehlt eine davon, etwa $\langle 1, i\rangle$, so lassen die übrigen das Element i fest. Eine Permutation aus $\mathfrak{S}_n$, in deren Wirkungsbereich i liegt, lässt sich also damit nicht darstellen. •

Abschnitt 9.A,, Aufg. 13a), p. 216 (1.6.2011) :

Die beiden Zyklen $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, \ldots, n\rangle$ erzeugen die Gruppe $\mathfrak{S}_n$, $n \ge 2$.

Beweis: Zunächst ist $\mathrm{Ord}\langle 2, 3, \ldots, n\rangle = n-1$, also $\langle 2, 3, \ldots, n\rangle^{n-1} = \mathrm{id}$ und somit $\langle 2, 3, \ldots, n\rangle^{n-2} = \langle 2, 3, \ldots, n\rangle^{-1}$. Wegen Aufg. 11d) genügt es nun zu zeigen, dass sich jede Transposition der Form $\langle 1, j\rangle$ mit Hilfe der beiden angegebenen Zyklen schreiben lässt. Dies beweist man durch Induktion über j, wobei beim Induktionsanfang $j = 2$ diese Transposition zu den beiden gegebenen gehört. Der Induktionsschluss folgt aus $\langle 1, j+1\rangle = \langle 2, 3, \ldots, n\rangle\langle 1, j\rangle\langle 2, 3, \ldots, n\rangle^{-1} = \langle 2, 3, \ldots, n\rangle\langle 1, j\rangle\langle 2, 3, \ldots, n\rangle^{n-2}$. •

Abschnitt 9.A,, Aufg. 13b), p. 216 (1.6.2011) :

Die beiden Zyklen $\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 2, \ldots, n\rangle$ erzeugen die Gruppe $\mathfrak{S}_n$, $n \ge 2$.

Beweis: Zunächst ist $\mathrm{Ord}\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle = n$, also $\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle^n = \mathrm{id}$ und somit $\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle^{n-1} = \langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle^{-1}$. Wegen Aufg. 11d) genügt es zu nun zeigen, dass sich jede Transposition der Form $\langle i, i+1\rangle$ mit Hilfe der beiden angegebenen Zyklen schreiben lässt. Dies beweist man durch Induktion über i, wobei beim Induktionsanfang $i = 1$ diese Transposition zu den beiden gegebenen gehört. Der Induktionsschluss folgt aus

$$\langle i+1, i+2\rangle = \langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle\langle i, i+1\rangle\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle^{-1} = \langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle\langle i, i+1\rangle\langle 1, 2, 3, \ldots, n\rangle^{n-1}. \quad \bullet$$

Abschnitt 9.B, Aufg. 5, p. 222 (1.6.2011) :

Eine n-lineare Abbildung $f : V^n \to W$ von K-Vektorräumen ist bereits dann alternierend, wenn stets $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ist, falls in dem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ zwei *benachbarte* Komponenten übereinstimmen.

Beweis: Sei $f : V^n \to W$ eine n-lineare Abbildung der angegebenen Art. Wir zeigen durch Induktion über $d > 0$, dass dann bereits $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|i-j| = d$ gilt, falls in dem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ die beiden Komponenten an der i-ten und j-ten Stelle übereinstimmen.

Der Induktionsanfang $d = 1$ ist gerade die Voraussetzung. Bei Induktionsschluss wählen wir ein k echt zwischen i und j. Dann sind die Abstände $|i-k|$ und $|j-k|$ kleiner als d, und mit der Induktionsvoraussetzung erhält man aus

$$\begin{aligned} f(\ldots, x+y, \ldots, x+y, \ldots, x, \ldots) &= f(\ldots, x, \ldots, x, \ldots, x, \ldots) + f(\ldots, x, \ldots, x, \ldots, y, \ldots) \\ &\quad + f(\ldots, x, \ldots, y, \ldots, x, \ldots) + f(\ldots, y, \ldots, y, \ldots, x, \ldots), \end{aligned}$$

(wobei wir nur jeweils die i-te, k-te und j-te Komponente im Argument notiert haben und die übrigen Komponenten stets unverändert bleiben), dass darin alle Terme bis auf den Term $f(\ldots, x, \ldots, y, \ldots, x, \ldots)$ verschwinden, der dann ebenfalls gleich 0 sein muss. Dies beweist die Behauptung. •

Abschnitt 9.B, Aufg. 6, p. 222 (1.6.2011) :

Seien V und W K-Vektorräume und I eine endliche Indexmenge mit n Elementen. In K sei das Element $n! = n! \cdot 1_K$ von 0 verschieden, d.h. es sei Char $K = 0$ oder Char $K > n$. Dann sind die Abbildungen

$$f \mapsto \frac{1}{n!} Af \quad \text{und} \quad f \mapsto \frac{1}{n!} Sf$$

Projektionen des K-Vektorraums der multilinearen Abbildungen $V^I \to W$ auf die Unterräume der alternierenden bzw. der symmetrischen I-linearen Abbildungen.

Beweis: Nach Satz 9.B.7 ist die multilineare Abbildung $f \mapsto Af$ und damit auch $f \mapsto \frac{1}{n!} Af$ alternierend. Für alternierendes f und alle $\sigma \in S_n$ gilt definitionsgemäß $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (\operatorname{Sign} \sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$, d.h. $\frac{1}{n!} A(f)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{Sign} \sigma) f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, und somit $\frac{1}{n!} A(f) = f$. Beide Aussagen zusammen liefern sofort $\big(\frac{1}{n!} A\big)^2(f) = \frac{1}{n!} A\big(\frac{1}{n!} A(f)\big) = \frac{1}{n!} A(f)$, d.h. $\frac{1}{n!} A$ ist eine Projektion auf den Raum der alternierenden n-Linearformen.

Für symmetrisches f und alle $\sigma \in S_n$ gilt definitionsgemäß $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$, d.h. $\frac{1}{n!} S(f)(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, und somit $\frac{1}{n!} S(f) = f$. Außerdem ist $f \mapsto S(f)$ und damit auch $f \mapsto \frac{1}{n!} S(f)$ für beliebiges f stets symmetrisch: Ist nämlich $\varphi \in \mathfrak{S}_n$ und setzen wir $x'_i := x_{\varphi(i)}$, so gilt

$$\begin{aligned} S(f)(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}) = S(f)(x'_1, \ldots, x'_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x'_{\sigma(1)}, \ldots, x'_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x_{\varphi\sigma(1)}, \ldots, x_{\varphi\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} f(x_{\rho(1)}, \ldots, x_{\rho(n)}) = S(f)(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

da sich jede Permutation $\rho \in S_n$ wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{S}_n$ für das vorgegebene φ auf genau eine Weise als Produkt $\rho = \varphi\sigma$ mit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ schreiben lässt. Beide Aussagen zusammen liefern sofort $\big(\frac{1}{n!} S\big)^2(f) = \frac{1}{n!} S(f)$, d.h. $\frac{1}{n!} S$ ist eine Projektion auf den Raum der symmetrischen n-Linearformen. •

Abschnitt 9.B, Aufg. 7, p. 222 (1.6.2011) :

Seien V und W K-Vektorräume und Char $K \neq 2$. Dann ist der Raum der bilinearen Abbildungen $V \times V \to W$ die direkte Summe des Unterraums der alternierenden (d.h. schiefsymmetrischen) und des Unterraums der symmetrischen bilinearen Abbildungen. Die zugehörigen Projektionen sind $\frac{1}{2} A$ bzw. $\frac{1}{2} S$. (Eine bilineare

Abbildung $f: V \times V \to W$ lässt sich also in ihren schiefsymmetrischen Anteil $\frac{1}{2}Af$ und ihren symmetrischen Anteil $\frac{1}{2}Sf$ zerlegen.)

Beweis: Nach Aufg. 6 sind $\frac{1}{2}Af$ und $\frac{1}{2}Sf$ Projektionen des Raums X der bilinearen Abbildungen $V \times V \to W$ auf die Unterräume U_a der alternierenden bzw. U_s der symmetrischen n-Linearformen.

Für $f \in U_a \cap U_b$ und alle $x, y \in V$ gilt dann sowohl $f(y,x) = -f(x,y)$ als auch $f(y,x) = f(x,y)$. Wegen Char $K \neq 2$ folgt $f(x,y) = 0$, d.h. $f = 0$, und insgesamt $U_a \cap U_b = 0$.

Für $f \in X$ ist $\frac{1}{2}(Af)(x,y) + \frac{1}{2}(Sf)(x,y) = \frac{1}{2}\big(f(x,y) - f(y,x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x,y) + f(y,x)\big) = f(x,y)$. Es folgt $X = U_a + U_b$ und daher insgesamt $X = U_a \oplus U_b$ nach Korollar 5.F.4. •

Abschnitt 9.B, Aufg. 8, p. 222 (1.6.2011):

Sei $f: V^n \to K$ eine alternierende Multilinearform. Dann ist

$$(x_0, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, g(x_i)$$

für jede K-lineare Abbildung $g: V \to W$ eine alternierende K-multilineare Abbildung $V^{n+1} \to W$.

Beweis: Die angegebene Abbilldung ist offenbar multilinear. Nach Aufg. 5 genügt es zu zeigen, dass sie verschwindet, wenn zwei benachbarte Komponenten, etwa x_i und x_{i+1}, beide gleich x sind. Da f alternierend ist, verschwinden dann in der obigen Summe alle Summanden bis auf den i-ten und den $(i+1)$-ten. Übrig bleibt

$$\begin{aligned}&(-1)^i\, f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)\, g(x_i) + (-1)^{i+1}\, f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_n)\, g(x_{i+1})\\ &= (-1)^i \big(f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+2}, \ldots, x_n)\, g(x) - f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+2}, \ldots, x_n)\, g(x)\big) = 0.\end{aligned}$$

Daher ist auch die angegebene Abbildung alternierend. •

Abschnitt 9.B, Aufg. 9, p. 222 (1.6.2011):

Sei A ein K-Vektorraum der Dimension n mit einer K-$(n+1)$-linearen Abbildung $A^{n+1} \to A$, $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto x_0 \cdots x_n$. Dann gilt $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} (\operatorname{Sign} \sigma)\, x_{\sigma 0} \cdots x_{\sigma n} = 0$ für alle $x_0, \ldots, x_n \in A$.

Beweis: Nach Satz 9.B.7 ist $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} (\operatorname{Sign} \sigma)\, x_{\sigma 0} \cdots x_{\sigma n}$ eine alternierende $(n+1)$-lineare Abbildung, die nach Korollar 9.B.6 wegen $\operatorname{Dim} A = n$ die Nullabbildung ist. •

Abschnitt 9.C, Aufg. 1, p. 227 (1.6.2011):

Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Für jede Determinantenfunktion $\Delta: V^n \to K$ und beliebige $x_0, \ldots, x_n \in V$ ist $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\, \Delta(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)\, x_i = 0$.

Beweis: Die linke Seite der Formel ist nach 9.B, Aufg. 8 (mit $g = \mathrm{id}_V$ angewandt) eine alternierende multilineare Abbildung $V^{n+1} \to V$, verschwindet also wegen $\operatorname{Dim} V = n$ nach Korollar 9.B.6. •

Abschnitt 9.C, Aufg. 2, p. 227 (1.6.2011):

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K und sei $\operatorname{Det} \mathfrak{A}_{I,J}$ ein von 0 verschiedener r-Minor von $\mathfrak{A}$. Genau dann hat $\mathfrak{A}$ den Rang r, wenn jeder $(r+1)$-Minor $\operatorname{Det} \mathfrak{A}_{I',J'}$ mit $I \subset I'$ und $J \subset J'$ verschwindet.

Beweis: Wegen des Minorenkriteriums 9.C.11 ist die angegebene Bedingung sicher erfüllt, wenn $\mathfrak{A}$ den Rang r hat.

Zum Beweis der Umkehrung sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ mit den Zeilen $\mathfrak{z}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ und $\mathfrak{z}_i''$ seien die entsprechenden Zeilen von $\mathfrak{A}_{I,J}$. Wir zeigen, dass die Zeilen $\mathfrak{z}_i$, $i \in I$, eine Basis des Zeilenraums von $\mathfrak{A}$ bilden. Seien dazu $i' \in \{1, \ldots, m\} - I$ und $j' \in \{1, \ldots, n\} - J$ beliebig, und sei $I' := I \cup \{i'\}$, $J' := J \cup \{j'\}$. Wegen $\operatorname{Det} \mathfrak{A}_{I,J} \neq 0$ bilden die Zeilen $\mathfrak{z}_i''$, $i \in I$, von $\mathfrak{A}_{I,J}$ (wieder nach 9.C.11) eine Basis von K^r. Daher gibt es $\lambda_i \in K$, $i \in I$, $j \in J$, mit $\sum_{i \in I} \lambda_i a_{ij} = a_{i'j}$ für $j \in J$, und die λ_i sind dadurch eindeutig bestimmt. Wegen $\operatorname{Det} \mathfrak{A}_{I',J'} = 0$ sind die Zeilen $\mathfrak{z}_i'$, $i \in I'$, von $\mathfrak{A}_{I',J'}$ linear abhängig in K^{r+1}, wobei aber die Zeilen $\mathfrak{z}_i'$, $i \in I$, nach 9.C.11 linear unabhängig sind. Daher gibt es eine Darstellung $\mathfrak{z}_{i'}' = \sum_{i \in I} \lambda_i' \mathfrak{z}_i'$ mit $\lambda_i' \in K$, d.h. mit $\sum_{i \in I} \lambda_i' a_{ij} = a_{i'j}$ für $j \in J \cup \{j'\}$. Die obige Eindeutigkeitsaussage liefert nun $\lambda_i' = \lambda_i$ für $i \in I$. Da auch

$\sum_{i\in I} \lambda'_i a_{ij'} = a_{i'j'}$ gilt und $j' \in \{1,\dots,n\} - J$ beliebig war, folgt $\mathfrak{z}_{i'} = \sum_{i\in I} \lambda_i \mathfrak{z}_i$. Der Zeilenraum von $\mathfrak{A}$ hat daher $\mathfrak{z}_i$, $i \in I$, als Basis, d.h. es ist $\operatorname{Rang} \mathfrak{A} = r$. •

Abschnitt 9.D, Variante zu **Aufg. 1**, p. 236 (1.6.2011) :

Man berechne die folgenden Determinanten sowohl durch elementare Umformungen als auch mit Hilfe des Entwicklungssatzes:

$$\textbf{a)}\quad \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{b)}\quad \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -6 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\textbf{c)}\quad \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{d)}\quad \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ -9 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: a) Wir verwenden zunächst elementare Zeilen- und Spaltenumformungen. Wir addieren im ersten Schritt das (-1)-fache der ersten Zeile zur 3-ten und das (-2)-fache der 1-ten Zeile zur 4-ten Zeile. Dann addieren wir das 1-fache der 2-ten Zeile zur 3-ten Zeile und erhalten

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0\,,$$

da eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen entstanden ist.

Entwickeln nach der vierten Zeile und dann Anwenden der Sarrusschen Regel liefert andererseits

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -2\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -2\,(-2) - 3\,\big(-(-1)\big) + (1-2) = 4 - 3 - 1 = 0\,.$$

b) Wir vertauschen im ersten Schritt die 1. Zeile mit der 3. ten Zeile und addieren dann das 2-fache der 1-ten Zeile zur 3-ten und das (-3)-fache der 1-ten Zeile zur 4-ten Zeile. Dann addieren wir das 1-fache der 2-ten Zeile zur 3-ten Zeile und erhalten

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -6 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & -4 & 3 \\ 9 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0\,,$$

da eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen entstanden ist.

Entwickeln nach der dritten Spalte und dann Anwenden der Sarrusschen Regel liefert andererseits

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -6 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} = -4\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$- 6\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -6 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -4\cdot 27 + 2\cdot 54 - 6\cdot 0 = 0\,.$$

c) Wir verwenden zunächst elementare Zeilen- und Spaltenumformungen. Zur Berechnung der ersten Determinante addieren wir im ersten Schritt das 1-fache der ersten Zeile zur 2-ten, das (-4)-fache der ersten Zeile zur 3-ten und das (-7)-fache der ersten Zeile zur 4-ten Zeile. Dann dividieren wir die 2-te Zeile durch 2 und addieren anschließend das (-3)-fache der 2-ten Zeile zur 4-ten Zeile. Im folgenden Schritt dividieren wir die 3-te Zeile durch (-10) und addieren dann das $\frac{43}{2}$-fache der 3-ten Zeile zur 4-ten. Dadurch entsteht eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 3 & -14 & -6 \end{pmatrix} = 2\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 3 & -14 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= 2\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{43}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} = 2\,(-10)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 2\,(-10)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{20} \end{pmatrix} = 2\,(-10)\,(-\tfrac{21}{20}) = 21\,.$$

Entwickeln nach der zweiten Spalte und dann Anwenden der Sarrusschen Regel liefert

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +2\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\big(-2+14-(-14)-8\big) + 3\big(3+2-12-(-2)\big) = 36-15 = 21\,,$$

d) Wir verwenden elementare Zeilen- und Spaltenumformungen. Zur Berechnung der ersten Determinante vertauschen wir wir zunächst die erste und die vierte Zeile und addieren dann das 9-fache der 1-ten Zeile zur 2-ten und das (-2)-fache der 1-ten Zeile zur 3-ten. Im nächsten Schritt addieren wir das (-3)-fache der 2-ten Zeile zur 3-ten Zeile und das (-4)-fache der 2-ten Zeile zur 4-ten Zeile. Im folgenden Schritt dividieren wir die 3-te Zeile durch (-12) und addieren dann das 17-fache der 3-ten Zeile zur 4-ten. Dadurch entsteht eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ -9 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -9 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & -12 & -80 \\ 0 & 0 & -17 & -100 \end{pmatrix} = -(-12)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -17 & -100 \end{pmatrix}$$

$$= 12\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{40}{3} \end{pmatrix} = 12\cdot\tfrac{40}{3} = 160\,.$$

Entwickeln nach der ersten Zeile und dann Anwenden der Sarrusschen Regel liefert

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ -9 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -4\cdot\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -9 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} -9 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -4\,(-4-16) + (-1)\,(-54-1-21-4) = 160\,,$$ •

Abschnitt 9.D, Variante zu **Aufg. 1**, p. 236 (1.6.2011) :

Man entscheide, für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzen, und löse sie in diesem Fall mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{aligned} ax_1 + \;\; x_2 + \;\; x_3 &= b_1 \\ x_1 + ax_2 + \;\; x_3 &= b_2 \\ x_1 + \;\; x_2 + ax_3 &= b_3\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + \;\; x_2 - \;\; x_2 &= b_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_2 &= b_2 \\ x_1 + ax_2 + 3x_2 &= b_3\,. \end{aligned}$$

Lösung: Die Gleichungssysteme besitzen genau dann genau eine Lösung, wenn ihre Determinanten

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2) \qquad \text{bzw.}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} = 9 + a - 2a + 3 - a^2 - 6 = 6 - a - a^2 = -(a-2)(a+3)$$

nicht verschwinden. Denn die durch die quadratischen Matrizen der Gleichungssysteme beschriebenen linearen Abbildungen müssen notwendigerweise injektiv und dann sogar bijektiv sein. Dies ist beim ersten Gleichungssystem für $a \notin \{1, -2\}$ und beim zweiten Gleichungssystem für $a \notin \{2, -3\}$ der Fall. Die Lösungen sind dann

$$x_1 = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} b_1 & 1 & 1 \\ b_2 & a & 1 \\ b_3 & 1 & a \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}} = \frac{b_1(a^2-1) - (b_2+b_3)(a-1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{b_1(a+1) - b_2 - b_3}{(a-1)(a+2)}\,,$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b_1 & 1 \\ 1 & b_2 & 1 \\ 1 & b_3 & a \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}} = \frac{b_2(a^2-1) - (b_1+b_3)(a-1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{b_2(a+1) - b_1 - b_3}{(a-1)(a+2)}\,,$$

$$x_3 = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & 1 & b_1 \\ 1 & a & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}} = \frac{b_3(a^2-1) - (b_1+b_2)(a-1)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{b_3(a+1) - b_1 - b_2}{(a-1)(a+2)}$$

beim ersten Gleichungssystem, sowie beim zweiten

$$x_1 = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} b_1 & 1 & -1 \\ b_2 & 3 & a \\ b_3 & a & 3 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}} = \frac{-b_1(a^2-9) - (b_2-b_3)(a+3)}{-(a-2)(a+3)} = \frac{b_1(a-3) + b_2 - b_3}{a-2}\,,$$

$$x_2 = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & b_1 & -1 \\ 2 & b_2 & a \\ 1 & b_3 & 3 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}} = \frac{b_1(a-6) + 4b_2 - b_3(a+2)}{-(a-2)(a+3)}\,,$$

$$x_3 = \frac{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & a & b_3 \end{pmatrix}}{\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}} = \frac{b_1(2a-3) - b_2(a-1) + b_3}{-(a-2)(a+3)}\,.$$

•

Abschnitt 9.D, Aufg. 5, p. 237 (1.6.2011) :

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ invertierbare $n \times n$-Matrizen über dem Körper K. Dann gilt:

a) $\operatorname{Adj}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{Adj}\mathfrak{B} \cdot \operatorname{Adj}\mathfrak{A}$. **b)** $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}^{-1} = (\operatorname{Adj}\mathfrak{A})^{-1}$.
c) $\operatorname{Det}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-1}$. **d)** $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-2}\,\mathfrak{A}$.

Beweis: a) Nach Satz 9.D.12 ist $\operatorname{Adj}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{Det}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1}$. Die Produktformel aus 9.D.5 liefert $\operatorname{Det}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \operatorname{Det}\mathfrak{A} \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{B}$, mit Formel (4) vor Satz 8.B.10 bekommt man $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}$. Wieder mit Satz 9.D.12 ergibt sich so $\operatorname{Adj}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A} \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{B})\,(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}^{-1} \cdot (\operatorname{Det}\mathfrak{A})\,\mathfrak{A}^{-1} = \operatorname{Adj}\mathfrak{B} \cdot \operatorname{Adj}\mathfrak{A}$.

b) Nach a) gilt $(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) \cdot (\operatorname{Adj}\mathfrak{A}^{-1}) = \operatorname{Adj}(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}) = \operatorname{Adj}\mathfrak{E}_n = (\operatorname{Det}\mathfrak{E}_n)\,(\mathfrak{E}_n)^{-1} = 1 \cdot \mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_n$, also $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}^{-1} = (\operatorname{Adj}\mathfrak{A})^{-1}$.

c) Wir wenden zunächst die Produktformel 9.D.15 und dann Satz 9.D.13 an und erhalten so:
$\operatorname{Det}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) \cdot \operatorname{Det}\mathfrak{A} = \operatorname{Det}\big((\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) \cdot \mathfrak{A}\big) = \operatorname{Det}\big((\operatorname{Det}\mathfrak{A})\mathfrak{E}_n\big) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^n$, also $\operatorname{Det}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-1}$.

d) Satz 9.D.13 für $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ statt $\mathfrak{A}$ und c) liefern $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) \cdot (\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) = \operatorname{Det}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A})\,\mathfrak{E}_n = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-1}\,\mathfrak{E}_n$.
Es folgt $\operatorname{Adj}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-1}\,(\operatorname{Adj}\mathfrak{A})^{-1} = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-2}\,\big((\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{-1} \cdot \operatorname{Adj}\mathfrak{A}\big)^{-1} = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{n-2}\,\mathfrak{A}$. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 6, p. 237 (1.6.2011) :

Sei $\mathfrak{A}$ eine nichtinvertierbare $n \times n$-Matrix über dem Körper K, $n \ge 1$. Dann ist der Rang der adjungierten Matrix $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ gleich 1, wenn $\operatorname{Rang}\mathfrak{A} = n-1$ ist, und gleich 0, wenn $\operatorname{Rang}\mathfrak{A} < n-1$ ist. Ist $\operatorname{Rang}\mathfrak{A} = n-1$, so erzeugt jede von 0 verschiedene Spalte von $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ den Kern von $\mathfrak{A}$, d.h. den Raum der $\mathfrak{x} \in K^n$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = 0$.

Beweis: Ist $\operatorname{Rang}\mathfrak{A} = n-1$, so gibt es $n-1$ Spalten von $\mathfrak{A}$, die linear unabhängig sind. Die $n \times (n-1)$-Matrix aus diesen $n-1$ Zeilen hat wegen Spaltenrang = Zeilenrang auch $n-1$ linear unabhängige Zeilen. Der zugehörige Minor liefert einen Koeffizienten $\neq 0$ von $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ und somit ist $\operatorname{Rang}(\operatorname{Adj}\mathfrak{A}) \ge 1$. (Dies folgt auch sofort aus dem Minorenkriterium.) Da $\mathfrak{A}$ nicht den Rang n hat, ist $\mathfrak{A}$ nicht invertierbar und es folgt $\operatorname{Det}\mathfrak{A} = 0$. Dies liefert $\mathfrak{A} \cdot \operatorname{Adj}\mathfrak{A} = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})\,\mathfrak{E}_n = 0$. Sind $f, g : K^n \to K^n$ die durch $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}$ beschriebenen linearen Abbildungen, so ist dann $g \circ f = 0$ und mit 5.E, Aufg. 1 erhält man $\operatorname{Rang} f + \operatorname{Rang} g \le n$, d.h. $\operatorname{Rang}\operatorname{Adj}\mathfrak{A} + \operatorname{Rang}\mathfrak{A} \le n$, und somit $\operatorname{Rang}\operatorname{Adj}\mathfrak{A} \le n - \operatorname{Rang}\mathfrak{A} = n-(n-1) = 1$. Zusammen ergibt sich so $\operatorname{Rang}\operatorname{Adj} A = 1$. Wegen $\mathfrak{A} \cdot \operatorname{Adj}\mathfrak{A} = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})\,\mathfrak{E}_n = 0$ liegt jede Spalte von $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ im Kern von $\mathfrak{A}$. Da der Kern von $\mathfrak{A}$ nach dem Rangsatz 1- dimensional ist, ist jede Spalte $\neq 0$ von $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ bereits eine Basis dieses Kerns.

Ist $\operatorname{Rang}\mathfrak{A} < n-1$, so verschwinden alle Minoren der Ordnung $n-1$ von $\mathfrak{A}$ nach dem Minorenkriterium. Daher ist $\operatorname{Adj}\mathfrak{A} = 0$, also $\operatorname{Rang}\operatorname{Adj}\mathfrak{A} = 0$. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 7, p. 237 (1.6.2011) :

Die $n \times n$-Matrix $\mathfrak{A}' = (a'_{ij})$ entstehe aus der $n \times n$-Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ durch Spiegeln an der Nebendiagonalen, d.h. es sei $a'_{ij} = a_{n-j+1,\,n-i+1}$. Dann gilt $\operatorname{Det}\mathfrak{A}' = \operatorname{Det}\mathfrak{A}$.

Beweis: Nach Satz 9.D.1 haben $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ und die transponierte Matrix ${}^t\mathfrak{A} = (a_{ji})$ dieselbe Determinante. Vertauscht man die Zeilen oder Spalten einer Matrix gemäß der Permutation $\sigma : \{1, \ldots, , n\} \to \{1, \ldots, , n\}$ mit $\sigma(i) := n-i+1$, so multipliziert sich die Determinante nach Regel (3) vor 9.D.2 mit $\operatorname{Sign}\sigma$. Dies liefert

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\mathfrak{A}' &= \operatorname{Det}(a'_{ij}) = \operatorname{Det}(a_{n-j+1,\,n-i+1}) = \operatorname{Det}(a_{n-j+1,\,\sigma(i)}) = (\operatorname{Sign}\sigma)\operatorname{Det}(a_{n-j+1,\,i}) \\ &= (\operatorname{Sign}\sigma)\operatorname{Det}(a_{\sigma(j),\,i}) = (\operatorname{Sign}\sigma)^2\operatorname{Det}(a_{ji}) = \operatorname{Det}(a_{ji}) = \operatorname{Det}(a_{ij}) = \operatorname{Det}\mathfrak{A}.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 9.D, Aufg. 8, p. 237 (1.6.2011) :

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $n \times n$-Matrizen mit den Spalten $x_1, \ldots, x_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_n$. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ bezeichne $\mathfrak{C}_J$ die $n \times n$-Matrix mit den Spalten $z_1^{(J)}, \ldots, z_n^{(J)}$, wobei

$$z_i^{(J)} := \begin{cases} x_i\,, & \text{falls } i \in J\,, \\ y_i\,, & \text{falls } i \notin J\,, \end{cases}$$

ist. Dann gilt $\displaystyle \operatorname{Det}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\}} \operatorname{Det}\mathfrak{C}_J$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Det}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}) = \Delta_{\mathfrak{e}}(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)\\
&= \Delta_{\mathfrak{e}}(x_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+\Delta_{\mathfrak{e}}(y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\
&= \Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(\{1\})},x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)+\Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(\emptyset)},x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)\\
&= \Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(\{1,2\})},z_2^{(\{1,2\})},\ldots,x_n+y_n)+\Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(1)},z_2^{(1)},\ldots,x_n+y_n)+\\
&\quad+\Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(\{2\})},z_2^{(\{2\})},\ldots,x_n+y_n)+\Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(\emptyset)},z_2^{(\emptyset)},\ldots,x_n+y_n)=\;\cdots\;=\\
&= \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n\}}\Delta_{\mathfrak{e}}(z_1^{(J)},\ldots,z_n^{(J)}) = \sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n\}}\operatorname{Det}\mathfrak{C}_J\,.
\end{aligned}$$

•

Abschnitt 9.D, Aufg. 9, p. 237 (1.6.2011):

a) Eine Spalte (oder eine Zeile) der $n\times n$-Matrix $\mathfrak{A}$ bestehe nur aus Einsen. Für die Kofaktoren $(-1)^{i+j}A_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$, von $\mathfrak{A}$ gilt dann $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}=\operatorname{Det}\mathfrak{A}$.

b) Sei $\mathfrak{A}=(a_{ij})$ eine $n\times n$-Matrix über dem Körper K mit den Kofaktoren $(-1)^{i+j}A_{ij}$, $i,j=1,\ldots,n$. Ferner sei

$$\mathfrak{I} := \begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_n(K)$$

die Matrix, deren Koeffizienten alle gleich 1 sind. Dann gilt

$$\operatorname{Det}(\mathfrak{A}+a\mathfrak{I}) = \operatorname{Det}\mathfrak{A}+a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\,.$$

Beweis: a) Besteht etwa die j_0-te Spalte der Matrix $\mathfrak{A}$ nur aus Einsen, so liefert 9.D.11 durch Entwickeln nach der j_0-Spalte $\operatorname{Det}\mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}\,1\cdot A_{ij_0}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}A_{ij_0}$. Entsteht $\mathfrak{A}^{(j)}$ für $j\neq j_0$ dadurch, dass man die j-te Spalte von $\mathfrak{A}$ durch lauter Einsen ersetzt, so hat $\mathfrak{A}^{(j)}$ zwei gleiche Spalten, also die Determinante 0, und für $j\neq j_0$ sind die Kofaktoren $(-1)^{i+j}A_{ij}$, $i\in I$, von $\mathfrak{A}$ gleich denen von $\mathfrak{A}^{(j)}$. Durch Entwickeln nach der j-ten Spalte folgt $0=\operatorname{Det}\mathfrak{A}^{(j)}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}1\cdot A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}$ für $j\neq j_0$. Addition der erhaltenen Gleichungen liefert nun $\operatorname{Det}\mathfrak{A}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j_0}A_{ij_0}+\sum_{j=1,\,j\neq j_0}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}$. •

b) Wir verwenden Aufg. 8 mit $a\mathfrak{I}$ statt $\mathfrak{B}$ und mit den dort dazu eingeführten Matrizen $\mathfrak{C}_J$. Enthält J höchstens $n-2$ Elemente, so sind zwei verschiedene Spalten von $\mathfrak{C}_J$ gleich ${}^t(a,\ldots,a)$ und wir erhalten $\operatorname{Det}\mathfrak{C}_J=0$. Bei $J=\{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n\}$ stimmt $\mathfrak{C}_J$ mit $\mathfrak{A}$ bis auf die j-te Spalte überein, die nur a als Koeffizienten enthält. Entwickeln nach dieser Spalte liefert $\operatorname{Det}\mathfrak{C}_J=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}aA_{ij}$. Schließlich ist $\mathfrak{C}_J=\mathfrak{A}$ für $J=\{1,\ldots,n\}$. Nun bekommt man mit Aufg. 8:

$$\operatorname{Det}(\mathfrak{A}+a\mathfrak{I})=\sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n\}}\operatorname{Det}\mathfrak{C}_J=\operatorname{Det}\mathfrak{A}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}aA_{ij}\,.$$

•

Abschnitt 9.D, Aufg. 10, p. 237 (1.6.2011):

Sei $\mathfrak{A}=(a_{ij})\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten a_{ij}. Genau dann sind die Koeffizienten der inversen Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ ebenfalls ganzzahlig, wenn $\operatorname{Det}\mathfrak{A}=\pm1$ ist.

Beweis: Wegen $a_{ij}\in\mathbb{Z}$ ist $\operatorname{Det}\mathfrak{A}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{Sign}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ eine ganze Zahl. Sind auch die Koeffizienten von $\mathfrak{A}^{-1}$ ganze Zahlen, so ist aus demselben Grund $\operatorname{Det}\mathfrak{A}^{-1}\in\mathbb{Z}$. Der Determinantenproduktsatz liefert nun $(\operatorname{Det}\mathfrak{A})(\operatorname{Det}\mathfrak{A}^{-1}) = \operatorname{Det}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}) = \operatorname{Det}\mathfrak{E}_n = 1$. Ist jedoch das Produkt zweier ganzer Zahlen gleich 1, so ist jede von ihnen gleich 1 oder gleich -1.

Ist umgekehrt $\operatorname{Det}\mathfrak{A} = \pm 1$, so ist $\mathfrak{A}^{-1} = (\operatorname{Det}\mathfrak{A})^{-1})\operatorname{Adj}\mathfrak{A} = \pm\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$. Die Koeffizienten von $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ sind aber als $(n-1)\times(n-1)$-Unterdeterminanten einer Matrix mit ganzen Koeffizienten mit derselben Begründung wie oben ebenfalls ganze Zahlen. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 11, p. 238 (1.6.2011) :

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann sind auch $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ und, falls $\mathfrak{A}$ invertierbar ist, $\mathfrak{A}^{-1}$ obere Dreiecksmatrizen.

Beweis: Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij})$. Dann gilt $a_{ij} = 0$ für $n \ge i > j \ge 1$. Wir zeigen, dass auch $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Sei dazu $i_0 > j_0$. Dann ist das Element in der i_0-ten Zeile und j_0-ten Spalte von $\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ bis auf das Vorzeichen die Determinante $A_{j_0 i_0}$ derjenigen Matrix (a'_{ij}), die aus (a_{ij}) durch Streichen der j_0-ten Zeile und i_0-ten Spalte hervorgeht. Wir haben $A_{j_0 i_0} = 0$ zu zeigen. Nach Satz 9.D.2 genügt es dazu zu beweisen, dass (a'_{ij}) eine obere Dreiecksmatrix ist, bei der an einer Stelle der Hauptdiagonale eine 0 steht. Sei nun $i > j$. Wir zeigen $a'_{ij} = 0$ sowie $a'_{i_0-1,i_0-1} = 0$:

Im Fall $i < j_0,\ j < i_0$ gilt $a'_{ij} = a_{ij} = 0$ wegen $i > j$.
Im Fall $i \ge j_0,\ j < i_0$ gilt $a'_{ij} = a_{i+1,j} = 0$ wegen $i+1 > j$.
Der Fall $i < j_0,\ j \ge i_0$ kann nicht auftreten, da dafür $i < j_0 < i_0 < j$ wäre.
Im Fall $i \ge j_0,\ j \ge i_0$ gilt $a'_{ij} = a_{i+1,j+1} = 0$ wegen $i+1 > j+1$.
Wegen $i_0 > j_0$, also $i_0 - 1 \ge j_0$ gilt schließlich $a'_{i_0-1,i_0-1} = a_{i_0,i_0-1} = 0$.

Ist $\mathfrak{A}$ invertierbar, so ist nach dem Bewiesenen mit $\mathfrak{A}$ auch $\mathfrak{A}^{-1} = (\mathrm{Det})^{-1}\operatorname{Adj}\mathfrak{A}$ obere Dreiecksmatrix. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 12, p. 238 (1.6.2011) :

Seien f_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, differenzierbare Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_{11} & \cdots & f'_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Beweis: Mit der Formel aus Definition 9.C.6, vgl. auch den Anfang von Abschnitt 9.D, und der Produktregel aus Band 1, 13.A, Aufg. 9a) erhält man:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}' &= \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(I)} \operatorname{Sign}(\sigma)\, f_{\sigma(1),1}\cdots f_{\sigma(n),n}\Big)' = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(I)} \operatorname{Sign}(\sigma)\,(f_{\sigma(1),1}\cdots f_{\sigma(n),n})' \\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(I)} \operatorname{Sign}(\sigma) \sum_{i=1}^{n} f_{\sigma(1),1}\cdots f_{\sigma(i-1),1-1} f'_{\sigma(i),i} f_{\sigma(i+1),i+1}\cdots f_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(I)} \operatorname{Sign}(\sigma)\, f_{\sigma(1),1}\cdots f_{\sigma(i-1),1-1} f'_{\sigma(i),i} f_{\sigma(i+1),i+1}\cdots f_{\sigma(n),n} \\ &= \begin{vmatrix} f'_{11} & \cdots & f'_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f'_{21} & \cdots & f'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{n1} & \cdots & f'_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

•

Abschnitt 9.D, Aufg. 13, p. 238 (1.6.2011):

Ist $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ eine Permutation der endlichen Indexmenge I, so sei $\mathfrak{P}_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)}) \in \mathrm{M}_I(K)$ die Permutationsmatrix zu σ. Sie entsteht aus der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_I$ dadurch, dass man die Spalten dieser Matrix gemäß σ permutiert: Die j-te Spalte von $\mathfrak{P}_\sigma$ ist $e_{\sigma(j)}$, vgl. auch Beispiel 8.C.6. Dann gilt für $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(I)$:

a) $\mathrm{Det}\,\mathfrak{P}_\sigma = \mathrm{Sign}\,\sigma$. **b)** $\mathfrak{P}_{\sigma\tau} = \mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{P}_\tau$. **c)** $(\mathfrak{P}_\sigma)^{-1} = \mathfrak{P}_{\sigma^{-1}} = {}^t(\mathfrak{P}_\sigma)$.

Beweis: a) Mit Formel (3) vor 9.D.2 sieht man $\mathrm{Det}\,\mathfrak{P}_\sigma = (\mathrm{Sign}\,\sigma)\ \mathrm{Det}\,\mathfrak{E}_I = (\mathrm{Sign}\,\sigma)\cdot 1 = \mathrm{Sign}\,\sigma$.

b) Es ist $\mathfrak{P}_\sigma = (\delta_{i,\sigma j}) = (\delta_{\sigma^{-1}i,j})$, $\mathfrak{P}_\tau = (\delta_{j,\tau k})$. In der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $\mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{P}_\tau$ steht dann dasselbe Element $\sum_{j=1}^n \delta_{\sigma^{-1}i,j}\delta_{j,\tau k} = \delta_{\sigma^{-1}i,\tau k} = \delta_{i,\sigma\tau k}$ wie bei $\mathfrak{P}_{\sigma\tau}$.

c) Nach b) ist $\mathfrak{P}_\sigma\mathfrak{P}_{\sigma^{-1}} = \mathfrak{P}_{\sigma\sigma^{-1}} = \mathfrak{P}_{\mathrm{id}} = \mathfrak{E}_I$, also $(\mathfrak{P}_\sigma)^{-1} = \mathfrak{P}_{\sigma^{-1}}$. Außerdem steht in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von ${}^t\mathfrak{P}_\sigma$ dasselbe Element $\delta_{j,\sigma i} = \delta_{\sigma^{-1}j,i} = \delta_{i,\sigma^{-1}j}$ wie bei $\mathfrak{P}_{\sigma^{-1}}$. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 14, p. 238 (1.6.2011):

Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_I(K)$ eine schiefsymmetrische Matrix (I endliche Indexmenge), d.h. es gelte ${}^t\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}$. Ist $|I|$ ungerade und ist $\mathrm{Char}\,K \neq 2$, d.h. $2 = 2\cdot 1_K \neq 0$ in K, so ist $\mathrm{Det}\,\mathfrak{A} = 0$.

Beweis: Mit Satz 9.D.1 und der anschließenden Regel (2) sieht man $\mathrm{Det}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Det}\,{}^t\mathfrak{A} = \mathrm{Det}\,(-\mathfrak{A}) = (-1)^{|I|}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A} = -\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}$, da $|I|$ ungerade ist. Es folgt $2\cdot\mathrm{Det}\,\mathfrak{A} = 0$, also $\mathrm{Det}\,\mathfrak{A} = 0$. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 15, p. 238 (1.6.2011):

Sei $\mathfrak{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ mit $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\,j\neq i}^n |a_{ij}|$. Dann ist $a_{11}\cdots a_{nn}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A} > 0$.

Beweis: Wir betrachten auf dem Intervall $[0,1]$ die stetige Polynomfunktion

$$f(t) := \begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & ta_{13} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & ta_{23} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n-1,1} & ta_{n-1,2} & ta_{n-1,3} & \cdots & ta_{n-1,n} \\ ta_{n1} & ta_{n2} & ta_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nach Voraussetzung gilt $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \geq \sum\limits_{j=1,\,j\neq i}^{n} |t\,a_{ij}|$ für $|t| < 1$. Aus 3.B, Aufg. 26 ergibt sich, dass die Spalten der f definiernden Matrix eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden, also die Determinante $f(t)$ dieser Matrix für kein t verschwindet. Der Zwischenwertsatz liefert nun, dass $f(0) = \mathrm{Det}\,\mathrm{Diag}(a_{11},\ldots,a_{nn}) = a_{11}\cdots a_{nn}$ und $f(1) = \mathrm{Det}\,\mathfrak{A}$ dasselbe Vorzeichen haben müssen, das Produkt $f(0)\,f(1)$ also positiv ist. •

Abschnitt 9.D, Variante zu **Aufg. 15**, p. 238 (1.6.2011):

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei (a_{ij}) eine reelle $n\times n$-Matrix. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t \end{pmatrix} = 0\,.$$

Beweis: Die Determinante ist ein Polynom des ungeraden Grades n in t, hat also nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 16, p. 238 (1.6.2011):

Seien K ein Körper und $\mathfrak{A} \in \mathrm{M}_r(K)$, $\mathfrak{B} \in \mathrm{M}_s(K)$, $\mathfrak{C} \in \mathrm{M}_{r,s}(K)$. Dann gilt

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \mathfrak{C} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{rs}\,\mathrm{Det}\,\mathfrak{A}\cdot\mathrm{Det}\,\mathfrak{B}\,.$$

Beweis: Indem man jede der hinteren r Spalten der Matrix mit jeder der vorderen s Spalten vertauscht, also rs Spaltenvertauschungen durchführt und dann den Blockmatrizensatz 9.D.4 anwendet, bekommt man

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathfrak{C} & \mathfrak{A}\\ \mathfrak{B} & 0\end{pmatrix} = (-1)^{rs}\operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathfrak{A} & \mathfrak{C}\\ 0 & \mathfrak{C}\end{pmatrix} = (-1)^{rs}\operatorname{Det}\mathfrak{A}\cdot\operatorname{Det}\mathfrak{B}\,.$$ •

Abschnitt 9.D, Aufg. 17, p. 238 (1.6.2011):

Seien $f_1,\ldots,f_n$ Funktionen auf der Menge D mit Werten im Körper K. Genau dann sind die $f_1,\ldots,f_n$ linear unabhängig in K^D, wenn die Funktion

$$(t_1,\ldots,t_n)\longmapsto\begin{vmatrix} f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_n(t_1) & \cdots & f_n(t_n)\end{vmatrix}$$

auf D^n nicht die Nullfunktion ist. (Determinanten der angegebenen Form heißen Alternanten oder (besonders in der Physik) Slatersche Determinanten. Beispiele sind die Vandermondesche Determinante zu $f_i := t^{i-1}$, $i=1,\ldots,n$, $D:=K$, vgl. Aufg. 19, und die Cauchyschen Doppelalternanten, vgl. Aufg. 20.)

Beweis: nach Satz 5.G.17 (1) $\Leftrightarrow$ (2) sind die Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ genau dann linear unabhängig in K^D, wenn Elemente $t_1,\ldots,t_n\in D$ existieren derart, dass die Spalten der angegebenen Matrix linear unabhängig sind. Nach Satz 9.C.9 ist dies geau dann der Fall, wenn ihre Determinante nicht verschwindet, also die angegebene Funktion nicht die Nullfunktion ist. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 18, p. 239 (1.6.2011):

K sei ein Körper, und $f_1,\ldots,f_n$ seien Polynomfunktionen vom Grad $< n-1$, $n\in\mathbb{N}^*$. Für alle $t_1,\ldots,t_n\in K$ ist dann

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_n(t_1) & \cdots & f_n(t_n)\end{vmatrix} = 0\,.$$

Beweis: Die Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ liegen in einem $(n-1)$-dimensionalen Vektorraum, sind also linear abhängig. Aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$, wobei nicht alle $\lambda_i\in K$ gleich 0 sind, folgt aber sofort $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t_j) = 0$ für alle j und damit die lineare Abhängigkeit der Spalten der zu betrachtenden Determinante, die somit verschwindet. (Natürlich hätte man auch direkt Aufg. 17 anwenden können.) •

Abschnitt 9.D, Aufg. 19, p. 239 (1.6.2011):

(Vandermondesche Determinante) Für Elemente $a_0,\ldots,a_n$ eines Körpers K ist

$$\mathrm{V}(a_0,\ldots,a_n) := \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_0^{n-2} & a_1^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2}\\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i)\,.$$

Beweis: Bei $n=0$ ist $\mathrm{V}(a_0)=1$ gleich dem leeren Produkt auf der rechten Seite. Zum Schluss von $n-1$ auf n subtrahieren wir (unten beginnend) das a_n-fache einer jeden Zeile von derjenigen darunter, entwickeln dann nach der letzten Spalte und klammern schließlich für $i=0,\ldots n-1$ jeweils a_i-a_n aus der i-ten Spalte aus. Dann wenden wir die Induktionsvoraussetzung an:

$$\mathrm{V}(a_0,\ldots,a_n) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_0-a_n & a_1-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_0^{n-2}-a_na_0^{n-3} & a_1^{n-2}-a_na_1^{n-3} & \cdots & a_{n-1}^{n-2}-a_na_{n-1}^{n-3} & 0\\ a_0^{n-1}-a_na_0^{n-2} & a_1^{n-1}-a_na_1^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_na_{n-1}^{n-2} & 0\end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+2}\prod_{i=0}^{n-1}(a_i-a_n)\,\mathrm{V}(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{0\le i<j\le n-1}(a_j-a_i) = \prod_{0\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$ •

Abschnitt 9.D, Aufg. 20, p. 239 (1.6.2011) :

(Cauchysche Doppelalternante) Seien $a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots,b_n$ Elemente eines Körpers K mit $a_i+b_j\neq 0$ für alle $i,\ j=1,\ldots,n$. Dann gilt

$$\operatorname{Det}\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\le i,j\le n}\right)=\frac{\prod\limits_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod\limits_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}\,.$$

1. Beweis: Wir bezeichnen die Matrix, deren Determinante zu berechnen ist, mit $\mathfrak{A}_n$ und verwenden Induktzion über n. Für $n=1$ ist die rechte Seite der Gleichung $\dfrac{1}{a_1+b_1}=\operatorname{Det}\mathfrak{A}_1$.

Beim Schluss von $n-1$ auf n subtrahieren wir zunächst die n-te Spalte von jeder der vorherigen Spalten, wobei wir $\dfrac{1}{a_i+b_j}-\dfrac{1}{a_i+b_n}=\dfrac{b_n-b_j}{(a_i+b_j)(a_i+b_n)}$ benutzen und klammern dann für $j=1,\ldots,n-1$ aus der j-Spalte jeweils den Faktor b_n-b_j und aus jeder i-ten Zeile den Faktor $1/(a_i+b_n)$ aus:

$$\operatorname{Det}\mathfrak{A}_n=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_j} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{a_i+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_i+b_j} & \cdots & \dfrac{1}{a_i+b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_j} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \dfrac{b_n-b_j}{(a_1+b_j)(a_1+b_n)} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{b_n-b_1}{(a_i+b_1)(a_i+b_n)} & \cdots & \dfrac{b_n-b_j}{(a_i+b_j)(a_i+b_n)} & \cdots & \dfrac{1}{a_i+b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \cdots & \dfrac{b_n-b_j}{(a_n+b_j)(a_n+b_n)} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_n)}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_j} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dfrac{1}{a_i+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_i+b_j} & \cdots & \dfrac{1}{a_i+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_j} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}.$$

Nun subtrahieren wir unter Verwendung von $\dfrac{1}{a_i+b_j}-\dfrac{1}{a_n+b_j}=\dfrac{a_n-a_i}{(a_i+b_j)(a_n+b_j)}$ die n-te Zeile von jeder der vorhergehenden Zeilen, klammern dann für $i=1,\ldots,n-1$ aus der i-Zeile jeweils den Faktor a_n-a_1 und für $j=1,\ldots,n-1$ aus der j-ten Zeile den Faktor $1/(a_n+b_j)$ aus, entwickeln dann nach der letzten Spalte und nutzen die Induktionsvoraussetzung:

$$\operatorname{Det}\mathfrak{A}_n=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_n)}\begin{vmatrix}\frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_j}{(a_1+b_j)(a_n+b_j)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{a_1+b_{n-1}} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{a_n-a_1}{(a_i+b_j)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_j}{(a_i+b_j)(a_n+b_j)} & \cdots & \frac{a_n-a_{n-1}}{(a_i+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_j} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_n)\prod_{j=1}^{n-1}(a_n+b_j)}\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_j} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{a_i+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_i+b_j} & \cdots & \frac{1}{a_i+b_{n-1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_j} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)}{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_n)\prod_{j=1}^{n-1}(a_n+b_j)}\cdot\frac{\prod_{1\le i<j\le n-1}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le n-1}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1}^{n-1}(a_i+b_j)}$$

$$=\frac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}\,. \qquad \bullet$$

2. Beweis: Indem wir für alle i die i-te Zeile von $\mathfrak{A}_n$ mit dem Produkt $\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)$ der dort auftretenden Nenner multiplizieren, erhalten wir $\operatorname{Det}\mathfrak{A}_n=\dfrac{\operatorname{Det}(a'_{ik})}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}$ mit $a'_{ik}=\prod_{j=1,\,j\ne k}^{n}(a_i+b_j)$ und haben noch $\operatorname{Det}(a'_{ij})=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)$ zu zeigen.

Gemäß Beispiel 10.B.3 genügt es, diese Formel zu beweisen, wenn die a_i und b_j Unbestimmte über K sind. Dann sind alle a'_{ij} Polynome vom Grad $n-1$ über K, und folglich ist $\operatorname{Det}(a'_{ij})$ ein Polynom vom Grad $n(n-1)$. Setzt man nun für b_k die Unbestimmte $b_{k'}$ mit $k\ne k'$ ein, so sind a'_{ik} und $a'_{ik'}$ für alle i gleich und die Determinante hat zwei gleiche Spalten, verschwindet also. Setzt man noch $X+b_k$ für $b_{k'}$ ein, so hat das entstehende Polynom in X eine Nullstelle für $X=0$, ist also durch $X=b_{k'}-b_k$ teilbar. Setzt man ebenso für a_i die Unbestimmte $a_{i'}$ mit $i\ne i'$ ein, so sind a'_{ik} und $a'_{i'k}$ für alle k gleich und die Determinante hat zwei gleiche Zeilen, verschwindet also. Folglich ist $\operatorname{Det}\mathfrak{A}_n$ auch durch alle $a_{i'}-a_i$ teilbar. Sämtliche Polynome $a_{i'}-a_i$ und $b_{k'}-b_k$ sind paarweise teilerfremde Primpolynome. (Zum Begriff des Primelements in einem Integritätsbereich vgl. die Bemerkung in 10.A, Aufg. 27b).) Daher ist $\operatorname{Det}(a'_{ij})$ auch durch das Produkt $\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)$ teilbar, das als Polynom wie $\operatorname{Det}(a'_{ij})$ den Grad $n(n-1)$ hat, und somit ist $\operatorname{Det}(a'_{ij})=C\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)$ mit einer Konstanten $C\in K$.

Zur Bestimmung der Konstanten C setzen wir für jedes b_j den Wert $-a_j$ ein und erhalten für alle $i\ne k$ $a'_{ik}=\prod_{j=1,\,j\ne k}^{n}(a_i-a_j)=0$ sowie $a'_{ii}=\prod_{j=1,\,j\ne i}^{n}(a_i-a_j)$. Dies zeigt, dass $\operatorname{Det}(a'_{ij})$ eine Diagonalmatrix mit der Determinante $\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1,\,j\ne i}^{n}(a_i-a_j)=-1^{n(n-1)/2}\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2$ ist. Die rechte Seite der Formel wird

aber $C\cdot \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)\prod_{1\le i<j\le n}(-a_j-a_i) = C\cdot -1^{n(n-1)/2}\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2$. Daraus folgt $C=1$, was noch zu beweisen war. •

Bemerkung: In ähnlicher Weise lässt sich auch die Formel für die Vandermondesche Determinante aus Aufg. 19 beweisen.

Abschnitt 9.D, Aufg. 21, p. 238 (1.6.2011):

Für $t_1,\ldots,t_n,\ u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{C}$ berechne man

$$\begin{vmatrix} \sin(t_1+u_1) & \sin(t_1+u_2) & \cdots & \sin(t_1+u_n)\\ \sin(t_2+u_1) & \sin(t_2+u_2) & \cdots & \sin(t_2+u_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sin(t_n+u_1) & \sin(t_n+u_2) & \cdots & \sin(t_n+u_n)\end{vmatrix}.$$

Lösung: Für $n\ge 3$ wenden wir das Additionstheorem des Sinus und die Produktformel 9.D.3 an und erhalten

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \sin(t_1+u_1) & \sin(t_1+u_2) & \cdots & \sin(t_1+u_n)\\ \sin(t_2+u_1) & \sin(t_2+u_2) & \cdots & \sin(t_2+u_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sin(t_n+u_1) & \sin(t_n+u_2) & \cdots & \sin(t_n+u_n)\end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Det}\left(\begin{pmatrix} \sin t_1 & \cos t_1 & 0 & \cdots & 0\\ \sin t_2 & \cos t_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sin t_n & \cos t_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos u_1 & \cos u_2 & \cdots & \cos u_n\\ \sin u_1 & \sin u_2 & \cdots & \sin u_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} \sin t_1 & \cos t_1 & 0 & \cdots & 0\\ \sin t_2 & \cos t_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sin t_n & \cos t_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \cos u_1 & \cos u_2 & \cdots & \cos u_n\\ \sin u_1 & \sin u_2 & \cdots & \sin u_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = 0\cdot 0 = 0\,.$$

Für $n=1$ ist die Determinante gleich $\sin(a_1+b_1)$, und bei $n=2$ bekommt man als Determinante

$$\begin{aligned}
&\sin(t_1+u_1)\ \sin(t_2+u_2) - \sin(t_1+u_2)\ \sin(t_2+u_1)\\
&= (\sin t_1\ \cos u_1 - \cos t_1\ \sin u_1)(\sin t_2\ \cos u_2 - \cos t_2\ \sin u_2)\\
&\quad - (\sin t_1\ \cos u_2 - \cos t_1\ \sin u_2)(\sin t_2\ \cos u_1 - \cos t_2\ \sin u_1)\\
&= -\sin t_1\ \cos u_1\ \cos t_2\ \sin u_2 - \cos t_1\ \sin u_1\ \sin t_2\ \cos u_2\\
&\quad + \sin t_1\ \cos u_2\ \cos t_2\ \sin u_1 + \cos t_1\ \sin u_2\ \sin t_2\ \cos u_1\\
&= (\sin t_1\ \cos t_2 - \cos t_1\ \sin t_2)\ (\sin u_1\ \cos u_2 - \cos u_1\ \sin u_2) = \sin(t_1-t_2)\ \sin(u_1-u_2)\,.
\end{aligned}$$ •

Abschnitt 9.D, Variante zu **Aufg. 21**, p. 238 (1.6.2011):

Sei K ein Körper und $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots b_n\in K$. Man berechne die folgende $n\times n$-Determinante:

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n\\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n\end{pmatrix}.$$

Lösung: Bei $n=1$ ist die Determinante gleich $1+a_1b_1$, und bei $n=2$ erhält man

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2\\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2\end{pmatrix} = (1+a_1b_1)(1+a_2b_2)-(1+a_2b_1)(1+a_1b_2) =$$

$$= a_1b_1+a_2b_2-a_2b_1-a_1b_2 = (a_1-a_2)(b_1-b_2)\,.$$

Bei $n \geq 3$ verwenden wir die Produktformel 9.D.5:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & \cdots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & 1+a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 0 \cdot 0 = 0\,.$$

•

Abschnitt 9.D, Aufg. 24, p. 240 (1.6.2011):

a) Seien $P_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$, $i = 0, \ldots, n$, Punkte im affinen Raum $\mathbb{A}^n(K) = K^n$. Genau dann sind die P_i affin abhängig, wenn gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0\,.$$

b) Seien $P_i = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$, $i = 1, \ldots, n$, affin unabhängige Punkte in $\mathbb{A}^n(K) = K^n$. Die Gleichung der affinen Hyperebene H in $\mathbb{A}^n(K)$, die von den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ erzeugt wird, ist dann

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0\,,$$

d.h. der Punkt $P = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ liegt also genau dann in H, wenn seine Komponenten die obige (affine) Gleichung erfüllen.

Beweis: a) Genau dann sind die Punkte $P_0, \ldots, P_n$ affin unabhängig, wenn der von ihnen erzeugte affine Unterraum die Dimension n hat. Nach 8.B, Aufg. 12 ist dies genau dann der Fall, wenn die angegebene Matrix den (maximal möglichen) Rang $n+1$ hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist.

b) Der Punkt P liegt genau dann in H, wenn die Punkte $P, P_1, \ldots, P_n$ afin abhängig sind. Nach a) ist dies genau dann der Fall, wenn die angegebene Determinante verschwindet. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 25, p. 240 (1.6.2011):

Seien $P_1 = (a_{11}, a_{21})$, $P_2 = (a_{12}, a_{22})$, $P_3 = (a_{13}, a_{23})$ drei Punkte in $\mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_1^2 + x_2^2 & a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{12}^2 + a_{22}^2 & a_{13}^2 + a_{23}^2 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kreises durch P_1, P_2, P_3.

Beweis: Setzt man für (x_1, x_2) die Koordinaten (a_{1i}, a_{2i}) des Punktes P_i ein, so sind 2 Spalten der angegebenen Determinante gleich, und sie ist verschwindet, d.h. die Gleichung ist erfüllt. Entwickeln der Determinante nach der ersten Spalte liefert die Gleichung $-D_3(x_1^2+x_2^2) + D_2x_2 - D_1x_1 + D_0 = 0$ mit

$$D_3 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad D_2 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}^2+a_{21}^2 & a_{12}^2+a_{22}^2 & a_{13}^2+a_{23}^2 \end{vmatrix},$$

$$D_1 := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}^2+a_{21}^2 & a_{12}^2+a_{22}^2 & a_{13}^2+a_{23}^2 \end{vmatrix}, \quad D_0 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}^2+a_{21}^2 & a_{12}^2+a_{22}^2 & a_{13}^2+a_{23}^2 \end{vmatrix}.$$

Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, ist $D_3 \neq 0$ nach Aufg. 24a). Die Gleichung bekommt dann die Form $(x_1^2+x_2^2) - (D_2/D_3)x_2 + (D_1/D_3)x_1 - (D_0/D_3) = 0$, d.h.

$$\big(x_1 + (D_1/2D_3)\big)^2 + \big(x_2 - (D_2/2D_3)\big)^2 = (D_0/D_3) + (D_1/2D_3)^2 + (D_2/2D_3)^2 .$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Radius $\sqrt{(D_0/D_3) + (D_1/2D_3)^2 + (D_2/2D_3)^2}$ und Mittelpunkt $\big(-(D_1/2D_3)\,, (D_2/2D_3)\big)$. •

Abschnitt 9.D, Aufg. 26, p. 241 (1.6.2011):

Seien (a_{ij}) und (b_{ij}) zwei $n \times n$-Matrizen über dem Körper K. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Beweis: Sind $(-1)^{i+j}A_{ij}$ die Kofaktoren von (a_{ij}), so bekommt man durch Entwickeln nach der i-ten Zeile bzw. der j-ten Spalte die Gleichheit der beiden Ausdrücke:

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} b_{ij}A_{ij}\,, \qquad \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} b_{ij}A_{ij}\,. \bullet$$

Abschnitt 9.D, Aufg. 27, p. 241 (1.6.2011):

Man berechne die folgenden $n \times n$-Determinanten über $\mathbb{Q}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

Lösung: Indem man die letzte Spalte der **ersten** Determinante von allen anderen Spalten subtrahiert, bekommt man eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante mit Satz 9.D.2 berechnet wird:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n!\,.$$

Indem man die zweite Spalte der **zweiten** Determinante von allen anderen Spalten subtrahiert und dann das Doppelte der ersten Spalte zur zweiten addiert, bekommt man eine untere Dreiecksmatrix, deren Determinante wieder das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} = (-2)(n-2)!\,.$$

Indem man – unten anfangend – jede Zeile der **dritten** Determinante von der Zeile darunter subtrahiert, dann noch einmal – unten anfangend – jede Zeile ab der zweiten von der Zeile darunter subtrahiert, sodann die erste Spalte zu allen anderen Spalten addiert, schließlich die letzte Spalte mit den $n-1$ Spalten davor vertauscht, bekommt man eine obere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} n+1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n+1)\,2^{n-2}\,.$$

Zunächst addieren wir alle anderen Zeilen der **vierten** Determinante zur ersten Zeile und erhalten überall in der ersten Zeile den Eintrag $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, den wir vor die Determinante ziehen. Dann subtrahieren wir – hinten anfangend – jede Spalte von der nachfolgenden Spalte und Entwickeln nach der ersten Zeile und wenden schließlich Aufg. 28 an (mit $1-n$ statt a, 1 statt b und der Zeilenzahl $n-1$ statt $n+1$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\, \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,\big((1-n)+(n-2)\cdot 1\big)\big((1-n)-1\big)^{n-2} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\, n^{n-1}\,\frac{(n+1)}{2}.$$

•

Abschnitt 9.D, Variante zu **Aufg. 27**, p. 241 (1.6.2011) :

Sei $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Man berechne die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Lösung: Indem wir zunächst alle Spalten zur ersten addieren, dann nach der ersten Spalte entwickeln, als nächstes die 1. Spalte mit der n-ten, die 2. mit der $(n-1)$-ten usw. vertauschen, sodann wieder alle Spalten zur ersten addieren und schließlich die erste Spalte zu allen anderen addieren, erhalten wir eine untere Dreiecksmatrix, bei der die Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n(n+1)/2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}\,(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,\frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,(-1)\,(-n)^{n-2}\,\frac{n(n+1)}{2} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\frac{n+1}{2}\,n^{n-1}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.D, Aufg. 28, p. 241 (1.6.2011) :

Man bestätige die folgenden Determinantenformeln für $(n+1)\times(n+1)$-Matrizen mit Koeffizienten aus einem Körper K. (An den mit $*$ gekennzeichneten Stellen dürfen beliebige Elemente von K stehen.)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+nb)(a-b)^n\,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ * & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ * & * & b_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix} = (a_1-b_1)\cdots(a_n-b_n)\,,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & * & \cdots & * \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = b_1\cdots b_n\,.$$

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n(n+1)\,a_1\cdots a_n\,.$$

Beweis: Indem wir zunächst alle n hinteren Spalten der **ersten** Determinante zur ersten Spalte addieren, erhalten wir überall in der ersten Zeile den Eintrag $a+nb$, den wir vor die Determinante ziehen. Dann subtrahieren wir das b-fache der ersten Spalte von alle anderen Spalten und erhalten so eine untere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+nb & b & b & \cdots & b \\ a+nb & a & b & \cdots & b \\ a+nb & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+nb & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+nb) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+nb) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a+nb)\,(a-b)^n\,.$$

Indem wir – hinten anfangend – jede Spalte von der nachfolgenden Spalte subtrahieren, erhalten wir bei der **zweiten** Determinante eine untere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ * & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ * & * & b_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1-b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & a_2-b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & a_n-b_n \end{vmatrix} = (a_1-b_1)\cdots(a_n-b_n)\,.$$

Indem man die oberste Zeile der **dritten** Determinante von jeder Zeile darunter subtrahiert, erhält man eine untere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & * & \cdots & * \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} = b_1\cdots b_n\,.$$

Indem wir – vorne anfangend – jede Spalte zur nachfolgenden Spalte addieren, erhalten wir bei der **vierten** Determinante eine untere Dreiecksmatrix, deren Determinante das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist:

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (n+1)\,(-a_1)\cdots(-a_n) = (-1)^n(n+1)\,a_1\cdots a_n\,.$$ •

Abschnitt 9.D, Aufg. 30.c), p. 242 (1.6.2011) :

Seien $a_1,\ldots,a_n$ Elemente eines Körpers K. Man beweise

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}+a_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n}\prod_{i\neq k} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_n\,.$$

Lösung: Wir verwenden Induktion über n und bezeichnen die zu berechnende Determinante mit D_n. Bei $n=0$ sind beide Seiten definitionsgemäß gleich 1 und bei $n=1$ ist $D_1 = a_0+a_1 = \sum_{k=0}^{1}\prod_{i\neq k} a_i$.

Beim Induktionsschluss liefert die Induktionsvoraussetzung $D_{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-2}$ und $D_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-1}$. Indem man zunächst nach der letzten Spalte entwickelt und dann bei der ersten der entstehenden Unterdeterminanten noch einmal nach der ersten Zeile entwickelt, bekommt man daraus die Induktionsbehauptung:

$$D_n := \operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ a_1 & a_1+a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}+a_{n-2} & a_{n-2} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{pmatrix}$$

$$= -a_{n-1}\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & a_1+a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}+a_{n-2} & a_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$+\,(a_{n-1}+a_n)\operatorname{Det}\begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & a_1+a_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}+a_{n-2} & a_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= -a_{n-1}^2 D_{n-2} + (a_{n-1}+a_n)D_{n-1} = -a_{n-1}^2\sum_{k=0}^{n-2} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-2} + (a_{n-1}+a_n)\sum_{k=0}^{n-1} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-1}$$

$$= -a_{n-1}^2\sum_{k=0}^{n-2} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-2} + a_{n-1}^2\sum_{k=0}^{n-2} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-2} + a_0\cdots a_{n-2}a_{n-1} + a_n\sum_{k=0}^{n-1} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_{n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_0\cdots\widehat{a_k}\cdots a_n\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.D, Aufg. 31, p. 243 (1.6.2011):
Man zeige die folgenden Determinantenformeln durch Induktion:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1\\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2\\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \cdots & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = a_1\cdots a_n + \sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{i\neq k} a_i\Big) b_k\,,$$

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n\,,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots\\ 0 & \cdots & a_n & b_n & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & b_n & a_n & \cdots & 0\\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n}(a_k^2-b_k^2)\,.$$

Beweis: Für $n=1$ hat die **erste** Determinante ebenso wie die angegebene Formel den Wert a_1+b_1. Beim Schluss von $n-1$ auf n subtrahieren wir die erste Spalte von allen anderen und erhalten

$$D_n := \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \cdots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & -a_1 & -a_1 & \cdots & -a_1 \\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Enwickeln nach der letzten Spalte liefert zusammen mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^{n+1}(-a_1) \begin{vmatrix} b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} + a_n\, D_{n-1} \\ &= -(-1)^{n+1}\,(-1)^{n-2}\, a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n \end{vmatrix} + a_n\, a_1\cdots a_{n-1} + a_n \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\prod_{i\neq k} a_i\Big) b_k \\ &= a_1a_2\cdots a_{n-1}b_n + a_1\cdots a_n + a_n \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\prod_{i\neq k} a_i\Big) b_k = a_1\cdots a_n + \sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{i\neq k} a_i\Big) b_k\,. \end{aligned}$$

•

Im Fall $n=1$ besteht die **zweite** Determinante nur aus dem Element $x+a_1$ oben links in der Ecke, das gleich x^1+a_1 ist. Beim Schluss von $n-1$ auf n liefert die Induktionsvoraussetzung

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\,.$$

Durch Entwickeln nach der letzten Spalte bekommt man daraus die Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Det}\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{n+1}a_n \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2n} x \operatorname{Det}\begin{pmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{n+1}a_n\,(-1)^{n-1} + x(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\,. \end{aligned}$$

Bei $n=1$ ist die **letzte** Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - b_1^2$ wie die angegebene Formel. Beim Schluss von $n-1$ auf n entwickeln wir die Determinante zunächst nach der n-ten Spalte und dann beide entstehenden

$(2n-1)\times(2n-1)$-Determinanten nach der n-ten Zeile und erhalten mit der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & b_n & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & b_n & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} = a_n \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} - b_n \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= a_n^2 \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix} - b_n^2 \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_n^2-b_n^2)\prod_{k=1}^{n-1}(a_k^2-b_k^2) = \prod_{k=1}^{n}(a_k^2-b_k^2)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.D, Aufg. 32, p. 243 (1.6.2011):

Man zeige $\begin{vmatrix} 1^n & 2^n & 3^n & \cdots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & 4^n & \cdots & (n+2)^n \\ 3^n & 4^n & 5^n & \cdots & (n+3)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & (n+3)^n & \cdots & (2n+1)^n \end{vmatrix} = (-1)^{\binom{n+1}{2}}\,(n!)^{n+1}\,.$

Beweis: Der Binomische Lehrsatz liefert für das Element in der i-ten Zeile und j-Spalte, $i,\ j=1,\dots,n+1$, der gegebenen Determinante

$$\big(i+(j-1)\big)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,i^k(j-1)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\,i^{k-1}(j-1)^{n+1-k}\,.$$

Dies ist das Element in der i-ten Zeile und j-Spalte des Produkts der beiden Matrizen $\Big(\binom{n}{k-1}\,i^{k-1}\Big)_{i,k=1,\dots,n+1}$ und $\big((j-1)^{n+1-k}\big)_{k,j=1,\dots,n+1}$. Wir wenden die Produktformel an, entwickeln die zweite Matrix nach der ersten Spalte und ziehen dann jeweils aus der j-ten Spalte der ersten bzw. zweiten Matrix den Faktor $\binom{n}{j-1}$ bzw. j heraus. Die (nach Transponieren und Vertauschen von Zeilen) entstehenden Vandermondeschen Determinanten lassen sich dann mit Aufg. 19 berechnen.

$$\begin{vmatrix} 1^n & 2^n & 3^n & \cdots & (n+1)^n \\ 2^n & 3^n & 4^n & \cdots & (n+2)^n \\ 3^n & 4^n & 5^n & \cdots & (n+3)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n+1)^n & (n+2)^n & (n+3)^n & \cdots & (2n+1)^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1}1^1 & \binom{n}{2}1^2 & \cdots & \binom{n}{n}1^n \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1}2^1 & \binom{n}{2}2^2 & \cdots & \binom{n}{n}2^n \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1}3^1 & \binom{n}{2}3^2 & \cdots & \binom{n}{n}3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1}(n+1)^1 & \binom{n}{2}(n+1)^2 & \cdots & \binom{n}{n}(n+1)^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1^n & 2^n & \cdots & n^n \\ 0 & 1^{n-1} & 2^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \\ 0 & 1^{n-2} & 2^{n-2} & \cdots & n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{0\le i<j\le n}\big((j+1)-(i+1)\big)\ \cdot\ (-1)^{n+2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,n!\prod_{0\le i<j\le n-1}\big((j+1)-(i+1)\big)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\prod_{k=1}^{n}k!\ \ n!\prod_{k=1}^{n-1}k! = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\,(n!)^{n+1}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.D, Zusatzaufgabe, p. 243 (1.6.2011) :
Man berechne die folgende $n\times n$-Determinante über einem Körper K:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}.$$

Lösung: Sind alle $a_i=0$, so handelt es sich um die Einheitsmatrix mit der Determinante 1. Andernfalls ist o.B.d.A. $a_n\neq 0$. Indem man zunächst für $i=1,\ldots,n-1$ das $-a_ia_n^{-1}$-fache der n-ten Zeile zur i-ten Zeile und dann das $-a_nb_i$-fache der i-ten Zeile zur letzten Zeile addiert, bekommt man eine obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & -a_1a_n^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2a_n^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & -a_1a_n^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & -a_2a_n^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+\sum_{i=1}^n a_ib_i \end{vmatrix}$$
$$= 1+\sum_{i=1}^n a_ib_i\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.D, Zusatzaufgabe, p. 243 (1.6.2011) :
Man löse das folgende lineare Gleichungssystem unter Verwendung der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rcl} x_2+x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n &=& 1 \\ x_1 \quad\;\; +x_3+\cdots+x_{n-1}+x_n &=& 1 \\ x_1+x_2 \quad\;\; +\cdots+x_{n-1}+x_n &=& 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-1} \qquad &=& 1\,. \end{array}$$

Lösung: Die Cramersche Regel liefert $x_k=\dfrac{D_k}{D}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(-1)^{n-1}(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}$ für $k=1,\ldots,n$. Zur Berechnung der Nennerdeterminante D verwenden wir die erste Determinante aus Aufg. 28 mit n statt $n+1$, 0 statt a und 1 statt b und erhalten

$$D=\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\,.$$

Zur Berechnung der Zählerdeterminante D_k ziehen wir die k-te Spalte von den übrigen ab und addieren dann zur k-ten Spalte alle übrigen Spalten, wodurch wir eine Diagonalmatrix bekommen:

$$D_k=\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{Det}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.E, Aufg. 1, p. 246 (1.6.2011):

V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man berechne die Determinante der linearen Abbildung $f: V \to V$ in den folgenden Fällen:

a) f ist die Homothetie $a\,\mathrm{id}_V$. **b)** f ist eine Projektion. **c)** f ist eine Involution.
d) f ist eine Scherung (= Transvektion) oder Dilatation.

Lösung: Sei $n := \mathrm{Dim}\, V$. Bei b), c) und d) verwenden die Matrixdarstellungen aus 8.A, Aufg. 9.

a) In jeder Basis von V wird $a\,\mathrm{id}_V$ durch die Matrix $a\mathfrak{E}_n$ beschrieben. Daher ist $\mathrm{Det}\, a\,\mathrm{id}_V = \mathrm{Det}\, a\mathfrak{E}_n = a^n$.

b) In einer geeigneten Basis von V wird eine Projektion f durch eine Diagonalmatrix mit $\mathrm{Rang}\, f$ Einsen und sonst 0 in der Hauptdiagonalen beschrieben. Daher ist $\mathrm{Det}\, f = 0$ bei $\mathrm{Rang}\, f < n$ und $\mathrm{Det}\, f = 1$ bei $\mathrm{Rang}\, f = n$, also $f = \mathrm{id}_V$.

c) In einer geeigneten Basis von V wird eine Involution f durch eine Diagonalmatrix mit m Einsen und $n-m$ Minus-Einsen in der Hauptdiagonalen beschrieben. Daher ist $\mathrm{Det}\, f = (-1)^{n-m}$.

d) In einer geeigneten Basis von V wird eine Scherung f durch eine Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen beschrieben. Daher ist $\mathrm{Det}\, f = 1$. In einer geeigneten Basis von V wird eine Dilatation f durch eine Diagonalmatrix mit einem Eintrag λ, dem Streckungsfaktor, und sonst nur Einsen in der Hauptdiagonalen beschrieben. Daher ist $\mathrm{Det}\, f = \lambda$. •

Abschnitt 9.E, Aufg. 2, p. 247 (1.6.2011):

Sei $f: V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus des n-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann ist $\mathrm{Det}\,(a\,\mathrm{id}_V + f) = a^n$ für alle $a \in K$, allgemeiner ist $\mathrm{Det}\,(g+f) = \mathrm{Det}\, g$ für jeden Operator g auf V, der mit f vertauschbar ist.

Beweis: Nach Beispiel 8.C.5 wird f in einer geeigneten Basis von V durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben, deren Hauptdiagonalelemente alle 0 sind. Da $a\,\mathrm{id}_V$ durch $a\mathfrak{E}_n$ beschrieben wird, ist die Matrix von $a\,\mathrm{id}_V + f$ in dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle a sind. Mit Satz 9.D.2 erhält man $\mathrm{Det}\,(a\,\mathrm{id}_V + f) = a^n$.

Da f nilpotent ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$. Ist $\mathrm{Det}\, g = 0$, also g nicht injektiv, so gibt es ein $x \in V$, $x \neq 0$, mit $g(x) = 0$. Wegen $f^0(x) = \mathrm{id}_V(x) = x \neq 0$ und $f^m(x) = 0$ gibt es ein maximales $k \in \mathbb{N}$ mit $f^k(x) = 0$, also $f^{k-1}(x) \neq 0$. Mit der Voraussetzung $fg = gf$ erhält man daraus $(g+f)\bigl(f^{k-1}(x)\bigr) = gf^{k-1}(x) + f^k(x) = f^{k-1}\bigl(g(x)\bigr) = f^{k-1}(0) = 0$, d.h. $g+f$ ist auch nicht injektiv und somit ist $\mathrm{Det}\,(g+f) = 0 = \mathrm{Det}\, g$.

Ist jedoch $\mathrm{Det}\, g \neq 0$, so ist g ein Isomorphismus, und aus $fg = gf$ folgt $g^{-1}f = fg^{-1}$ durch Multiplikation mit g^{-1} von links und rechts. Aus $f^m = 0$ folgt daher $(g^{-1}f)^m = (g^{-1})^m f^m = 0$. Somit ist auch $g^{-1}f$ nilpotent, und mit dem anfangs Bewiesenen erhält man

$$\mathrm{Det}\,(g+f) = \mathrm{Det}\,\bigl(g\,(\mathrm{id}_V + g^{-1}f)\bigr) = (\mathrm{Det}\, g)\cdot \mathrm{Det}\,(\mathrm{id}_V + g^{-1}f) = \mathrm{Det}\, g \cdot 1^n = \mathrm{Det}\, g\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.E, Aufg. 7, p. 247 (1.12.2011):

Seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f: V \to V$ ein $\mathbb{C}$-linearer Operator auf V. Fassen wir V als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, so ist f erst recht ein $\mathbb{R}$-linearer Operator, dessen Determinante wir mit $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} f$ bezeichnen. Man zeige $\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} f = |\mathrm{Det}\, f|^2$.

Beweis: Ist $\mathfrak{A} + \mathrm{i}\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} = (a_{ij})$, $\mathfrak{B} = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, die Matrix von f bzgl. der $\mathbb{C}$-Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, so gilt $f(v_j) = \sum\limits_{i=1} a_{ij} v_i + \sum\limits_{i=1} b_{ij}\,\mathrm{i}\,v_i$ und dann $f(\mathrm{i}v_j) = \mathrm{i}f(v_j) = -\sum\limits_{i=1} b_{ij} v_i + \sum\limits_{i=1} a_{ij}\,\mathrm{i}\,v_i$. Daher ist $\begin{pmatrix} \mathfrak{A} & -\mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{A} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R})$ die Matrix von f bzgl. der $\mathbb{R}$-Basis $v_1, \ldots, v_n$, $\mathrm{i}v_1, \ldots, \mathrm{i}v_n$ von V. Addiert man zunächst das i-fache der hinteren n Spalten dieser Matrix zu den vorderen n Spalten und dann das $-$i-fache der oberen n Zeilen zu den unteren n Zeilen, so bekommt man mit dem Blockmatrizensatz 9.D.4:

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}_{\mathbb{R}} f &= \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & -\mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} - \mathrm{i}\,\mathfrak{B} & -\mathfrak{B} \\ \mathfrak{B} + \mathrm{i}\,\mathfrak{A} & \mathfrak{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} - \mathrm{i}\,\mathfrak{B} & -\mathfrak{B} \\ 0 & \mathfrak{A} + \mathrm{i}\,\mathfrak{B} \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\,(\mathfrak{A} - \mathrm{i}\,\mathfrak{B}) \cdot \mathrm{Det}\,(\mathfrak{A} + \mathrm{i}\,\mathfrak{B}) \\ &= \overline{\mathrm{Det}\, f} \cdot \mathrm{Det}\, f = |\,\mathrm{Det}\, f|^2\,. \end{aligned} \qquad \bullet$$

Abschnitt 9.F, Aufg. 2a), p. 252 (1.6.2011) :

Sei V ein orientierter n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation. Repräsentiert die Basis $v_1, \ldots, v_n$ die Orientierung von V, so repräsentiert $v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}$ genau dann die Orientierung von V, wenn σ gerade ist. Die Basis $v_n, \ldots, v_1$ repräsentiert genau dann die Orientierung von V, wenn $n \equiv 0$ oder $n \equiv 1$ modulo 4 ist.

Beweis: Genau dann repräsentieren zwei Basen dieselbe Orientierung von V, wenn die Determinante der Übergangsmatrix zwischen den beiden Basen positiv ist. Dies ist hier die $n \times n$-Permutationsmatrix $\mathfrak{P}_\sigma$, die nach 9.D, Aufg. 13a) die Determinante $\operatorname{Sign}\sigma$ hat. Sie ist genau dann positiv, wenn σ gerade ist.

Im angegebenen Spezialfall hat man

$$\operatorname{Det}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Die angegebene Permutation hat nämlich $n-1$ Fehlstände der Form $(1, j)$, $n-2$ Fehlstände der Form $(2, j)$, usw., schließlich noch einen Fehlstand der Form $(n-1, j)$, nämlich $(n-1, n)$. Zusammen sind dies aber $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ Fehlstände. Genau dann ist diese Zahl gerade und damit $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ positiv, wenn n oder $n-1$ durch 4 teilbar sind. •

Abschnitt 9.F, Variante zu **Aufg. 2**, p. 252 (1.6.2011) :

V sei ein orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $v_1, \ldots, v_n$, und sei $1 \le r \le n$. Zeigen Sie, dass die Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n, v_1, v_2 \ldots, v_{r-1}$ genau dann dieselbe Orientierung von V repräsentieren, wenn r oder n ungerade ist.

Beweis: Die vorstehende Aufgabe zeigt, dass die beiden Basen genau dann dieselbe Orientierung von V repräsentieren, wenn $\operatorname{Sign}\sigma$ positiv ist. Nach 9.A, Aufg. 2c) ist $\operatorname{Sign}\sigma = (-1)^{(r-1)(n-r+1)}$. Dieses Vorzeichen ist genau dann positiv, wenn r oder n ungerade ist. •

Abschnitt 9.G, Teil von **Aufg. 4**, p. 259 (1.6.2011) :

Sei $f_1, \ldots, f_n$ eine Basis des Raumes der Linearformen auf dem $\mathbb{R}^n$. Die Übergangsmatrix zur Dualbasis $e_1^*, \ldots, e_n^*$ der Standardbasis sei die Matrix $\mathfrak{A} := (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann ist also $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i^*$, und $f_1, \ldots, f_n$ ist die Dualbasis zur Basis $v_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i$, $j = 1, \ldots, n$, wobei $\mathfrak{B} := (b_{ij}) = {}^t\mathfrak{A}^{-1}$ die zu $\mathfrak{A}$ kontragrediente Matrix ist (vgl. 8.A, Aufg. 24). Sei $d := |\operatorname{Det}\mathfrak{A}|$.

a) Für $c_1, \ldots, c_n \ge 0$ ist das Volumen von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_i(x)| \le c_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ gleich $2^n c_1 \cdots c_n / d$.

b) Für $c \ge 0$ ist das Volumen von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n |f_i(x)| \le c\}$ gleich $2^n c^n / n!\, d$.

Beweis: Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\big)$ wird bzgl. der Standardbasis durch ${}^t\mathfrak{A}$ beschrieben. Daher ist $\operatorname{Det} f = \operatorname{Det}{}^t\mathfrak{A} = \operatorname{Det}\mathfrak{A} = d$ und somit $|\operatorname{Det} f^{-1}| = d^{-1}$. Mit Satz 9.G.2 und den nachfolgenden Bemerkungen erhält man dann $\lambda^n\big(f^{-1}(M)\big) = \lambda^n(M)/d$. für jede Menge M, für die $\lambda^n(M)$ definiert ist.

a) Da das Volumen des Quaders $Q := [-c_1, c_2] \times \cdots \times [-c_n, c_n]$ gleich dem Produkt $(2c_1) \cdots (2c_n) = 2^n c_1 \cdots c_n$ der Kantenlängen ist, folgt

$$\begin{aligned} \lambda^n(Q) &= \lambda^n\big(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_1(x)| \le c_1, \ldots, |f_n(x)| \le c_n\}\big) = \lambda^n\big(f^{-1}([-c_1, c_2] \times \cdots \times [-c_n, c_n])\big) \\ &= 2^n c_1 \cdots c_n / d . \end{aligned}$$

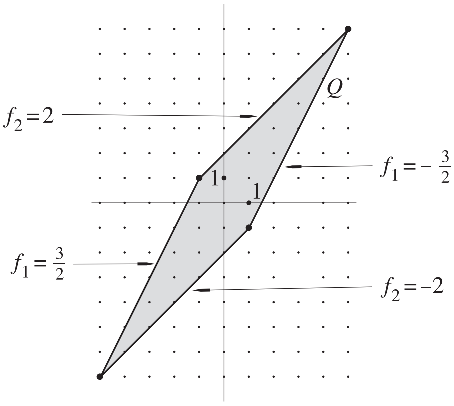
b) Da das Volumen des Simplex $\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid y_1 + \cdots + y_n \le c\}$ nach 9.G.4 gleich $c^n/n!$ ist, hat $M := \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid |y_1| + \cdots + |y_n| \le c\}$ das Volumen $2^n c^n / n!$. Es folgt

$$\lambda^n(M) = \lambda^n\big(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_1(x)| + \cdots + |f_n(x)| \le c\}\big) = \lambda^n\big(f^{-1}(M)\big) = 2^n c^n / d\, n! .$$ •

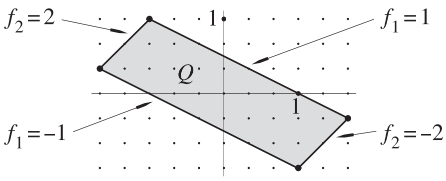
Abschnitt 9.G, Zusatzaufgabe, p. 259 (1.6.2011) :

Man verwende die vorstehende Aufgabe, um die Flächeninhalte der folgenden Parallelogramme zu berechnen:

a) $Q := \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x_1 - \tfrac{1}{2}x_2| \le \tfrac{3}{2}\,,\; |-x_1 + x_2| \le 2\right\}.$



b) $Q := \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x_1 + 2x_2| \le 1\,,\; |x_1 - x_2| \le 2\right\}.$



Lösung: a) Es ist $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, also $d := \frac{1}{2}$ und somit $\lambda^2(Q) = 2^2 \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 2 \Big/ \dfrac{1}{2} = 24\,.$

b) Es ist $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, also $\operatorname{Det} \mathfrak{A} = -3$ und $d := 3$, also $\lambda^2(Q) = 2^2 \cdot 1 \cdot 2/3 = 8/3\,.$