Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 2, 2. Aufl. (Version 2010), Kapitel 2

5 Lineare Abbildungen

Abschnitt 5.A, Aufg. 2, p. 67 (1.5.2011) :

G sei eine Gruppe. Dann sind äquivalent: (1) G ist kommutativ. (2) Die Inversenbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist ein Automorphismus von G. (3) Das Quadrieren $x \mapsto x^2$ ist ein Endomorphismus von G.

Beweis: (1) $\Leftrightarrow$ (2) Die Inversenbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist sicher bijektiv mit der Inversenabbildung selbst als Umkehrabbildung. Genau dann ist sie ein Homomorphismus, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. Wegen $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ ist dies äquivalent zu $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Da sich jedes Element x von G als Inverses schreiben lässt (nämlich von x^{-1}) ist dies genau dann der Fall, wenn G kommutativ ist.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Das Quadrieren $x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $(xy)^2 = x^2y^2$, d.h. $xyxy = xxyy$. Die ist genau dann der Fall, wenn $yx = xy$ gilt, wie man durch Multiplikation von links mit x^{-1} und von rechts mit y^{-1} sieht (bzw. mit x von links und mit y von rechts). •

Abschnitt 5.A, Aufg. 3, p. 67 (1.5.2011) :

G sei eine Gruppe. Für $a \in G$ heißt die Abbildung $\kappa_a : x \mapsto axa^{-1}$, $x \in G$, die K o n j u g a t i o n von G mit a. Zeigen Sie:

a) Für jedes $a \in G$ ist κ_a ein Automorphismus von G.

b) Die Abbildung $\kappa : G \to \operatorname{Aut} G$ mit $\kappa(a) := \kappa_a$ ist ein Homomorphismus der Gruppe G in ihre Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} G$ mit dem Z e n t r u m $\mathrm{Z}(G) := \{a \in G \mid ax = xa$ für alle $x \in G\}$ als Kern.

Beweis: a) Für $x, y \in G$ gilt offenbar $\kappa_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \kappa_a(x)\,\kappa_a(y)$, d.h. κ_a ist ein Homomorphismus von Gruppen. Außerdem ist κ_a bijektiv und somit insgesamt ein Isomorphismus von Gruppen, da κ_a die Umkehrabbildung $\kappa_{a^{-1}}$ besitzt: Ist $x \in G$, so gilt nämlich $\kappa_a \circ \kappa_{a^{-1}} = \mathrm{id}_G$ wegen $(\kappa_a \circ \kappa_{a^{-1}})(x) = \kappa_a\big(a^{-1}x(a^{-1})^{-1}\big) = aa^{-1}x(a^{-1})^{-1}a^{-1} = exe = x$ (wo e das neutrale Element von G ist) und analog $\kappa_{a^{-1}} \circ \kappa_a = \mathrm{id}_G$.

b) Für $a, b \in G$ ist $\kappa(a) \circ \kappa(b) = \kappa(ab)$, da für alle $x \in G$ gilt: $\big(\kappa(a) \circ \kappa(b)\big)(x) = (\kappa_a \circ \kappa_b)(x) = \kappa_a(bxb^{-1}) = abxb^{-1}a^{-1} = (ab)x(ab)^{-1} = \kappa_{ab}(x) = \kappa(ab)(x)$. Daher ist κ ein Homomorphismus.

Genau dann ist $a \in \operatorname{Kern} f$, wenn $\kappa(a) = \kappa_a$ gleich dem neutralen Element id_G von $\operatorname{Aut} G$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\kappa_a(x) = \mathrm{id}_G(x)$, d.h. $axa^{-1} = x$, gilt für alle $x \in G$. Dies ist aber äquivalent zu $ax = xa$ für alle $x \in G$, d.h. zu $a \in \mathrm{Z}(G)$. •

Abschnitt 5.A, Aufg. 4, p. 67 (1.5.2011) :

Die additive Gruppe $(K, +)$ und die multiplikative Gruppe $(K^\times, \cdot)$ eines Körpers K sind niemals isomorph.

Beweis: Angenommen, es gäbe einen Isomorphismus $f : (K - \{0\}, \cdot) \to (K, +)$. Dann ist $f(1) = 0$. Für $a := f(-1)$ gilt $a + a = f(-1) + f(-1) = f\big((-1)^2\big) = f(1) = 0$. Bei $a \neq 0$ existiert a^{-1}, und es folgt $1 + 1 = a^{-1}a + a^{-1}a = a^{-1}(a + a) = a^{-1} \cdot 0 = 0$. Bei $a = 0$ ist $f(-1) = a = 0 = f(1)$, und aus der Injektivität von f folgt ebenfalls $1 = -1$, d.h. $1 + 1 = 0$. Für jedes $x \in K - \{0\}$ folgt nun $f(x^2) = f(x) + f(x) = f(x)(1+1) = f(x) \cdot 0 = 0 = f(1)$. Die Injektivität von f liefert $x^2 = 1$ für jedes $x \neq 0$. In einem Körper hat $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ aber höchstens zwei Lösungen. daher kann der Körper K höchstens 3 Elemente enthalten. Bei endlichen Körpern können die beiden Gruppen aber nicht isomorph sein, da $K^\times$ ein Element weniger als K enthält. •

Abschnitt 5.B, Variante zu **Aufg. 2**, p. 74 (1.5.2011) :

Man untersuche die folgenden Abbildungen f des Raumes $\mathrm{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ der unendlich oft differenzierbaren $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ in sich auf $\mathbb{R}$-Linearität und bestimme gegebenenfalls Kern f und Bild f.

a) $f(x) := \dot{x} - 3tx^2$. **b)** $f(x) := \dot{x} - 3t^2x$.

Lösung: a) f ist nicht linear. Für $x \equiv 1$ ist beispielsweise $2f(x) = 2f(1) = 2 \cdot (-3t) = -6t$, aber $f(2 \cdot x) = f(2 \cdot 1) = f(2) = -3t \cdot 2^2 = -12t$.

b) f ist linear. Für $x,\, y \in \mathrm{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$ ist nämlich $f(x+y) = (x+y)^{\cdot} - 3t^2(x+y) = \dot{x} - 3t^2 x + \dot{y}' - 3t^2 y = f(x) + f(y)$ und $f(ax) = (ax)^{\cdot} - 3t^2(ax) = a(\dot{x} - 3t^2 x) = af(x)$.

Kern f_1 besteht aus den Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung $\dot{x} = 3t^2 x$, ist also die Menge der Funktionen $t \mapsto c\,\exp\big(\int 3t^2 dt\big) = c\, e^{t^3}$, $c \in \mathbb{R}$. – Zu jeder C^∞-Funktion g gibt es eine Lösung x der inhomogenen linearen Differenzialgleichung $\dot{x} = 3t^2 x + g(t)$. Die Lösungsformel aus Bd. 1, 19.B.1, liefert zum Beispiel $x = e^{t^3} \int e^{-t^3} g(t)\, dt$. Daher ist Bild $f = \mathrm{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. •

Abschnitt 5.B, Teil von **Aufg. 4**, p. 74 (1.5.2011) :

Man berechne für die folgenden linearen Abbildungen f jeweils Basen für Kern f und Bild f.

b) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4,\, x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4,\, 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4)$.

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 + 3x_2 + 3x_3,\, -2x_1 - 3x_3,\, -x_1 + x_2 - x_3,\, 3x_1 - x_2 + 4x_3)$.

Lösung: b) Wir berechnen Kern f nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$, $2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 0$.

Subtraktion der ersten von der zweiten und des 2-fachen der ersten von der dritten Gleichung liefert nun $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, $x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$, $-3x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0$. Die dritte Gleichung ist dann einfach das (-3)-fache der zweiten und kann daher weggelassen werden. Addiert man noch das (-3)-fache der zweiten zur ersten Gleichung, so bekommt man $x_1 - 5x_3 - 5x_4 = 0$, $x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$. Folglich ist

$$\begin{aligned}\text{Kern } f &= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \;\big|\; x_1 = 5x_3 + 5x_4\,,\, x_2 = -x_3 - 2x_4\,,\;\; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\big\}\\ &= \big\{(5x_3 + 5x_4\,, -x_3 - 2x_4\,, x_3\,, x_4) \;\big|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x_3(5, -1, 1, 0) + x_4(5, -2, 0, 1) \;\big|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\big\}\\ &= \mathbb{R}(5, -1, 1, 0) + \mathbb{R}(5, -2, 0, 1)\end{aligned}$$

und somit $(5, -1, 1, 0)$, $(5, -2, 0, 1)$ ein Erzeugendensystem von Kern f. Die beiden Vektoren sind offenbar linear unabhängig, wie die Betrachtung der beiden letzten Komponenten zeigt.

Die vier Vektoren $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2)$, $f(0, 1, 0, 0) = (3, 4, 3)$, $f(0, 0, 1, 0) = (-2, -1, -7)$, $f(0, 0, 0, 1) = (1, 3, -4)$ sind als Bild einer Basis von $\mathbb{R}^4$ offenbar ein Erzeugendensystem von Bild f bilden. Wir bestimmen mit Hilfe der Gaußschen Eliminationsverfahrens nicht triviale Linearkombinationen dieser Vektoren, die verschwinden: Es ist $5(1, 1, 2) - 2(3, 4, 3) + (1, 3, -4) = 0$. Also lässt sich etwa der letzte dieser vier Vektoren als Linearkombination der übrigen drei schreiben. Wenn wir ihn weglassen, bilden diese drei immer noch eion Erzeigendensystem von Bild f. Die Relation $5(1, 1, 2) - (3, 4, 3) + (-2, -1, -7) = 0$ liefert, dass wir auch noch den vorletzten der vier Vektoren weglassen können und immer noch ein Erzeugendensystem von Bild f haben. Die verbleibenden beiden Vektoren $(1, 1, 2)$ und $(3, 4, 3)$ sind offenbar linear unabhängig (da keiner ein Vielfaches des anderen ist), bilden also eine Basis von Bild f. •

c) Wir berechnen Kern f nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$, $-2x_1 - 3x_3 = 0$, $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$. Addition des Doppelten der 1. zur 2., der 1. zur 3. und des (-3)-fachen der 1. zur 4. Gleichung liefert nun $6x_2 + 3x_3 = 0$, $4x_2 + 2x_3 = 0$, $-10x_2 - 5x_2 = 0$. Die beiden letzten Gleichungen sind dann einfach Vielfache der zuerst erhaltenen Gleichung und können daher weggelassen werden. Addiert man noch das $(-\frac{1}{2})$-fache von $6x_2 + 3x_3 = 0$ zur 1. Gleichung, so bekommt man $x_1 + \frac{3}{2}x_3 = 0$. Folglich ist

$$\text{Kern } f = \big\{(x_1, x_2, x_3) \;\big|\; x_1 = -\tfrac{3}{2}x_3\,,\, x_2 = -\tfrac{1}{2}x_3\,,\;\; x_3, x_4 \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}(-\tfrac{3}{2}\,, -\tfrac{1}{2}\,, 1),\,.$$

Daher wird Kern f von $(-\frac{3}{2}\,, -\frac{1}{2}\,, 1)$ erzeugt. Dieser Vektor ist eine Basis von Kern f, da er als Vektor $\neq 0$ linear unabhängig ist.

Als Bilder einer Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden offenbar die drei Vektoren $f(1, 0, 0) = (1, -2, -1, 3)$, $f(0, 1, 0) = (3, 0, 1, -1)$, $f(0, 0, 1) = (3, -3, -1, 4)$, ein Erzeugendensystem von Bild f. Die beiden ersten dieser Vektoren sind linear unabhängig, da keiner ein Vielfaches des anderen ist. Für den dritten gilt $(3, -3, -1, 4) = \frac{3}{2}(1, -2, -1, 3) + \frac{1}{2}(3, 0, 1, -1)$. Die beiden ersten Vektoren bilden also eine Basis Bild f. •

Abschnitt 5.B, Aufg. 6, p. 74 (1.5.2011) :

Sei $h : D \to D'$ eine beliebige Abbildung. Für jeden Körper K ist die Abbildung $h^* : K^{D'} \to K^D$ mit $g \mapsto g \circ h$ K-linear. Man beschreibe die Funktionen aus Kern h^* und Bild h^*. Genau dann ist h^*injektiv (bzw. surjektiv), wenn h surjektiv (bzw. injektiv) ist.

Beweis: Für alle $x \in D$, $g, \tilde{g} : D' \to K$ und $a \in K$ gilt

$$\big(h^*(g+\tilde{g})\big)(x) = (g+\tilde{g})(h(x)) = g(h(x) + \tilde{g}(h(x)) = h^*(g)(x) + h^*(\tilde{g})(x) = \big(h^*(g) + h^*(\tilde{g})\big)(x),$$

also $h^*(g+\tilde{g}) = h^*(g) + h^*(\tilde{g})$, und ferner $h^*(ag)(x) = (ag)(h(x)) = a(g(h(x)) = a(h^*(g))(x)$, also $h^*(ag) = ah^*(g)$. Daher ist h^* K-linear.

Kern h^* besteht aus denjenigen $g : D' \to K$ mit $h^*(g)(x) = g(h(x)) = 0$ für alle $x \in D$. Daher gilt: Kern $h^* = \big\{g : D' \to K \;\big|\; g|\,\mathrm{Bild}\, h = 0\big\} \subseteq K^{D'}$.

Ist h surjektiv, so ist Bild h ganz D' und eine Abbildung $g : D' \to K$, die auf Bild h verschwindet, ist bereits die Nullabbildung. Daher ist dann Kern $h^* = 0$ und h^* injektiv.

Ist h nicht surjektiv, so gibt es ein $x'_0 \in D'$ mit $x'_0 \notin$ Bild h. Die Abbildung $g : D' \to K$ mit $g(x'_0) := 1$ und $g(x') := 0$ für $x' \in D'$, $x' \neq x'_0$, ist dann nicht die Nullabbildung, aber es ist $h^*(g) = g \circ h = 0$ wegen $g|\,\mathrm{Bild}\, h = 0$. Daher ist Kern $h^* \neq 0$, und somit h^* nicht injektiv.

Bild h^* besteht genau aus den $f : D \to K$, zu denen es ein $g : D' \to K$ mit $h \circ g = h^*(g) = f$ gibt. Wir zeigen, dass dies genau die $f : D \to K$ mit folgender Eigenschaft sind: Für alle $x_1, x_2 \in D$ folgt aus $h(x_1) = h(x_2)$ stets $f(x_1) = f(x_2)$. Ist diese Eigenschaft für ein f erfüllt, so ist die Abbildung $g : D' \to K$ durch $g(x') := 0$ für $x' \notin$ Bild h und $g(x') := g(h(x)) := f(x)$ für alle $x' = h(x)$ unabhängig von der speziellen Auswahl des $x \in D$ mit $h(x) = x'$ definiert, und es gilt $h^*(g)(x) = g(h(x)) = f(x)$, also $h^*(g) = f$. Ist jedoch diese Eigenschaft nicht erfüllt und gilt $h(x_1) = h(x_2)$, aber $f(x_1) \neq f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in D$, so kann es kein $g : D' \to K$ mit $h^*(g) = f$ geben, da sonst $f(x_1) = h^*(g)(x_1) = g(h(x_1)) = g(h(x_2)) = h^*(g)(x_2) = f(x_2)$ wäre im Widerspruch zu $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ist h injektiv, so ist die angegebene Eigenschaft für jedes $f : D \to K$ erfüllt, da für $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ nie $h(x_1) = h(x_2)$ gilt. Daher ist dann Bild $h^* = K^{D'}$, und h^* surjektiv.

Ist h nicht injektiv und ist $h(x_1) = h(x_2)$ für $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$, so hat jede Abbildung $f : D' \to K$ mit $f(x_1) \neq f(x_2)$ sicher kein Urbild unter h^*, da die obige Eigenschaft dafür nicht erfüllt ist. Daher ist dann h^* nicht surjektiv. •

Abschnitt 5.B, Aufg. 8, p. 75 (1.5.2011) :

Sei V ein K-Vektorraum mit $\mathrm{Dim}_K V \geq 2$ (d.h. V enthalte zwei linear unabhängige Vektoren). Dann ist jede additive Abbildung $f : V \to V$ mit $f(Kx) \subseteq Kx$ für alle $x \in V$ eine Homothetie von V.

Beweis: Seien x, y zwei beliebige linear unabhängige Vektoren aus V. Dann gilt nach Voraussetzung $f(Kx) \subseteq Kx$ und $f(Ky) \subseteq Ky$, es gibt also $a, b \in K$ mit $f(x) = ax$ und $f(y) = by$. Es genügt, $a = b$ zu zeigen, da dann f die Multiplikation mit a ist. Nach Voraussetzung gilt auch $f\big(K(x+y)\big) \subseteq K(x+y)$, es gibt also ein $c \in K$ mit $f(x+y) = c(x+y)$. Da f additiv ist, folgt $0 = f(x+y) - f(x) - f(y) = c(x+y) - ax - by = (c-a)x + (c-b)y$, woraus sich in der Tat $c-a = 0$ und $c-b$, d.h. $a = c = b$, wegen der linearen Unabhängigkeit von x und y ergibt. •

Abschnitt 5.B, Aufg. 11, p. 75 (1.5.2011) :

Seien $f_1 : V \to V_1$ und $f_2 : V \to V_2$ Homomorphismen von K-Vektorräumen. Die K-lineare Abbildung $f : V \to V_1 \times V_2$ mit $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn f_1 surjektiv und $f_2|\mathrm{Kern}\, f_1 : \mathrm{Kern}\, f_1 \to V_2$ bijektiv ist.

Beweis: Sei zunächst f_1 surjektiv und $f_2|\,\mathrm{Kern}\, f_1 : \mathrm{Kern}\, f_1 \to V_2$ bijektiv.

Ist dann $f(x) = (0, 0)$ für ein $x \in V$, so folgt $f_1(x) = 0$, also $x \in \mathrm{Kern}\, f_1$, und $f_2(x) = 0$. Da $f_2|\,\mathrm{Kern}\, f_1$ nach Voraussetzung aber injektiv ist, folgt $x = 0$. Daher ist Kern $f = 0$ und somit f injektiv.

Ist $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, so gibt es wegen der Surjektivität von f_1 ein $x \in V$ mit $f_1(x) = v_1$. Zu $v_2 - f_2(x) \in V_2$ gibt es wegen der Surjektivität von $f_2|\,\mathrm{Kern}\, f_1 : \mathrm{Kern}\, f_1 \to V_2$ ein $y \in \mathrm{Kern}\, f_1$ mit $f_2(y) = v_2 - f_2(x)$. Dann gilt $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y) = v_1 + 0 = v_1$ und $f_2(x+y) = f_2(x) + f_2(y) = f_2(x) + v_2 - f_2(x) = v_2$, also $f(x+y) = \big(f_1(x+y), f_2(x+y)\big) = (v_1, v_2)$. Daher ist f auch surjektiv.

Sei umgekehrt f ein Isomorphismus. Zu $v_1 \in V_1$ gibt es dann ein $x \in V$ mit $\big(f_1(x), f_2(x)\big) = (v_1, 0)$, insbesondere also $f_1(x) = v_1$. Daher ist f_1 surjektiv. Sei dann $x \in \mathrm{Kern}\, f_1$ und $f_2(x) = 0$. Dann ist $(f_1, f_2)(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big) = (0, 0)$, und es folgt $x = 0$ wegen der Injektivität von (f_1, f_2). Daher ist $\mathrm{Kern}\,\big(f_2|\,\mathrm{Kern}\, f_1\big) = 0$, und $f_2|\,\mathrm{Kern}\, f_1 : \mathrm{Kern}\, f_1 \to V_2$ injektiv.

Sei schließlich $v_2 \in V_2$. Zu $(0, v_2) \in V_1 \times V_2$ gibt es wegen der Surjektivität von f ein $x \in V$ mit $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big) = (0, v_2)$, d.h. mit $x \in \operatorname{Kern} f_1$ und $f_2(x) = v_2$. Daher ist $f_2|\operatorname{Kern} f_1 : \operatorname{Kern} f_1 \to V_2$ auch surjektiv. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 1, p. 83 (1.5.2011) :

Man untersuche, ob es jeweils eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung f gibt mit den angegebenen Eigenschaften.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $f(1,2) = (1,0,0)$, $f(2,1) = (0,1,0)$, $f(-1,4) = (0,0,1)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $f(1,2) = (1,0,0)$, $f(2,1) = (0,1,0)$, $f(-1,4) = (3,-2,0)$.

Lösung: Die Vektoren $v_1 := (1,2)$ und $v_2 := (2,1)$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Wegen $\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2 = 2$ genügt es, die lineare Unabhängigkeit der beiden Vektoren zu zeigen. Aus $r(1,2) + s(2,1) = (0,0)$ folgt aber $r + 2s = 0$, d.h. $r = -2s$, und $2r + s = 0$, d.h. $s = -2r$. Einsetzen liefert $s = 4s$ und somit $s = 0$, $r = 0$.

Da v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, gibt es genau eine lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(1,2) = (1,0,0)$ und $h(2,1) = (0,1,0)$. Wir lösen nun das lineare Gleichungssystem $r(1,2) + s(2,1) = (-1,4)$ und erhalten $r = 3$, $s = -2$. Es folgt $h(-1,4) = h\big(3(1,2) + (-2)(2,1)\big) = 3h(1,2) + (-2)h(2,1) = 3(1,0,0) + (-2)(0,1,0) = (3,-2,0)$. Daher gibt es eine lineare Abbildung f mit den unter c) angegebenen Eigenschaften (nämlich h). Folglich kann es keine lineare Abbildung f mit den in c) angegebenen Eigenschaften geben. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 3, p. 84 (1.5.2011) :

Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume.

a) Genau dann gibt es einen injektiven K-Homomorphismus von V auf W, wenn gilt: $\operatorname{Dim}_K V \le \operatorname{Dim}_K W$. (Folgerung: Ein homogenes lineares Gleichungssystem über K mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat stets eine nichttriviale Lösung.)

b) Genau dann gibt es einen surjektiven K-Homomorphismus von V auf W, wenn gilt: $\operatorname{Dim}_K V \ge \operatorname{Dim}_K W$. (Folgerung: Ist bei einem linearen Gleichungssystem über K die Anzahl der Unbekannten kleiner als die Anzahl der Gleichungen, so ist das Gleichungssystem nicht für jede Wahl der „rechten Seite" lösbar.)

Beweis: a) Ist $f : V \to W$ ein injektiver K-Homomorphismus und ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so sind die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ nach Satz 5.D.3 (2) linear unabhängig, lassen sich also nach dem Steinitzschen Austauschsatz 3.B.2 zu einer Basis von V ergänzen. Daher ist $\operatorname{Dim}_K W \ge n = \operatorname{Dim}_K V$.

Für die Umkehrung wählen wir Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W und definieren bei $n \le m$ eine lineare Abbildung $f : V \to W$ durch $f(v_i) := w_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist f injektiv, da f die Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V auf linear unabhängige Elemente von W abbildet.

Betrachten wir nun ein homogenes lineares Gleichungssystem $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, und die zugehörige lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ mit $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \big(\sum_{j=1}^n a_{i1}x_i, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_i\big)$, Ist die Anzahl $n = \operatorname{Dim}_K K^n$ der Unbekannten größer als die Anzahl $m = \operatorname{Dim}_K K^m$ der Gleichungen, so kann f nach dem Bewiesenen nicht injektiv sein, d.h. der Lösungsraum $\operatorname{Kern} f$ des homogenen Gleichungssystems besteht nicht nur aus 0.

b) Ist $f : V \to W$ ein surjektiver K-Homomorphismusund ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so sind die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ nach Satz 5.D.3 (1) ein Erzeugendensystem, enthalten also nach Satz 3.A.15 eine Basis von W. Es folgt $\operatorname{Dim}_K V \ge \operatorname{Dim}_K W$.

Für die Umkehrung wählen wir Basen $v_1, \ldots, v_n$ von V und $w_1, \ldots, w_m$ von W und definieren bei $n \ge m$ eine lineare Abbildung $f : V \to W$ durch $f(v_i) := w_i$, $i = 1, \ldots, m$, und $f(v_i) := 0$ für $i = m+1, \ldots, n$. f ist nach 5.D.3 (1) surjektiv, da f die Basis $v_1, \ldots, v_m$ von V auf ein Erzeugendensystem von W abbildet.

Betrachten wir nun ein homogenes lineares Gleichungssystem $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, und die zugehörige lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ mit $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \big(\sum_{j=1}^n a_{i1}x_i, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_i\big)$, Ist die Anzahl $n = \operatorname{Dim}_K K^n$ der Unbekannten kleiner als die Anzahl $m = \operatorname{Dim}_K K^m$ der Gleichungen, so kann f nach dem Bewiesenen nicht surjektiv sein, d.h. nicht zu jeder rechten Seite $b_1, \ldots, b_m$ gibt es Lösungen $x_1, \ldots, x_n$. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 4, p. 84 (1.5.2011) :

Genau dann hat ein homogenes lineares Gleichungssystem mit gleich vielen Unbekannten wie Gleichungen eine nichttriviale Lösung, wenn wenigstens eines der zugehörigen inhomogenen Gleichungssysteme nicht lösbar ist.

Beweis: Wir verwenden die im Beweis der vorangehenden Aufgabe benutzten Bezeichnungen. Genau dann hat das dort betrachtete homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung, wenn die Abbildung $f:\mathbb{K}^n\to K^m$ nicht injektiv ist. Da nach Voraussetzung die Anzahl n der Unbekannten gleich der Anzahl m der Gleichungen ist, ist dies nach Satz 5.D.6 genau dann der Fall, wenn f auch nicht surjektiv ist. Dies bedeutet aber gerade, dass es für bestimmte rechte Seiten $b_1,\ldots,b_n$ keine Lösung des zugehörigen inhomogenen Gleichungssystems gibt. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 5, p. 84 (1.5.2011) :

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und U, W Unterräume von V gleicher Dimension. Dann gibt es einen K-Automorphismus f von V mit $f(U)=W$.

Beweis: Wir ergänzen gemäß Satz 3.B.10 (2) Basen $u_1,\ldots,u_m$ von U und $w_1,\ldots,w_m$ von W durch Vektoren $u_{m+1},\ldots,u_n$ bzw. $w_{m+1},\ldots,w_n$ zu Basen $u_1,\ldots,u_n$ und $w_1,\ldots,w_n$ von V und definieren eine lineare Abbildung $f:V\to V$ durch $f(u_i):=w_i$, $i=1,\ldots,n$, vgl. Satz 5.D.3. Diese ist nach Konstruktion bijektiv, also ein K-Automorphismus von V, und bildet U auf W ab. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 6, p. 84 (1.5.2011) :

Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $f:V\to V$ ein Endomorphismus von V. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist *kein* Automorphismus von V. (2) Es gibt einen K-Endomorphismus $g\neq 0$ von V mit $g\circ f=0$. (2′) Es gibt einen K-Endomorphismus $g'\neq \mathrm{id}_V$ von V mit $g'\circ f=f$. (3) Es gibt einen K-Endomorphismus $h\neq 0$ von V mit $f\circ h=0$. (3′) Es gibt einen K-Endomorphismus $h'\neq \mathrm{id}_V$ von V mit $f\circ h'=f$.

Beweis: Sei (1) erfüllt. Da f nach Satz 5.D.6 nicht injektiv ist, ist Kern $f\neq 0$, und da f ebenso nicht surjektiv ist, ist Bild $f\neq V$. Wir ergänzen gemäß Satz 3.B.10 (2) Basen $u_1,\ldots,u_m$, von Kern f und $w_1,\ldots,w_\ell$ von Bild f durch Vektoren $u_{m+1},\ldots,u_n$ bzw. $w_{\ell+1},\ldots,w_n$ zu Basen $u_1,\ldots,u_n$ und $w_1,\ldots,w_n$ von V und definieren gemäß Satz 5.D.3 lineare Abbildungen $g,g',h,h':V\to V$ durch

$$\begin{aligned}
g(w_i)&:=0 \text{ für } i=1,\ldots,\ell \text{ und } g(w_i):=w_i \text{ für } i=\ell+1,\ldots,n,\\
g'(w_i)&:=w_i \text{ für } i=1,\ldots,\ell \text{ und } g'(w_i):=0 \text{ für } i=\ell+1,\ldots,n,\\
h(u_i)&:=u_i \text{ für } i=1,\ldots,m \text{ und } h(u_i):=0 \text{ für } i=m+1,\ldots,n,\\
h'(u_i)&:=0 \text{ für } i=1,\ldots,m \text{ und } h'(u_i):=u_i \text{ für } i=m+1,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Wegen $\ell<n$ ist dann $g\neq 0$ und $g'\neq \mathrm{id}_V$, wegen $m\geq 1$ ist ferner $h\neq 0$ und $h'\neq \mathrm{id}_V$. Nach Konstruktion ist $g|\,\text{Bild } f=0$, also $g\circ f=0$, ferner $g'|\,\text{Bild } f=\mathrm{id}_{\text{Bild } f}$, also $g'\circ f=f$. Daher sind (2) und (2′) erfüllt.

Für $i=1,\ldots,\ell$ gilt $(f\circ h)(u_i)=f(u_i)=0$ und $(f\circ h')(u_i)=f()=0$, für $i=\ell+1,\ldots,n$ gilt ferner $(f\circ h)(u_i)=f(0)=0$ und $(f\circ h')(u_i)=f(u_i)$. Wir erhalten $f\circ h=0$ und $f\circ h'=f$, also die Aussagen (3) und (3′) .

Sei umgekehrt f ein Automorphismus mit der Umkehrabbildung f^{-1}.
Bei (2) folgt dann aus $g\circ f=0$ der Widerspruch $g=g\circ\mathrm{id}_V=g\circ(f\circ f^{-1})=(g\circ f)\circ f^{-1}=0\circ f=0$.
Bei (3) folgt aus $f\circ h=0$ der Widerspruch $h=\mathrm{id}_V\circ h=(f^{-1}\circ f)\circ h=f^{-1}\circ(f\circ h)=f^{-1}\circ 0=0$.
Bei (2′) folgt aus $g'\circ f=f$ der Widerspruch $g'=g'\circ(f\circ f^{-1})=(g'\circ f)\circ f^{-1}=f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_V$.
Bei (3′) folgt aus $f\circ h'=f$ der Widerspruch $h'=(f^{-1}\circ f)\circ h'=f^{-1}\circ(f\circ h')=f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_V$. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 7, p. 84 (1.5.2011) :

Seien f und g Endomorphismen des endlichdimensionalen Vektorraums V. Ist $g\circ f$ ein Automorphismus von V, so sind g und f beide Automorphismen von V.

Beweis: Ist $g\circ f$ ein Automorphismus von V, so ist $g\circ f$ injektiv und surjektiv. Nach Band 1, Abschnitt 1.B, Aufg. 7a) und b) (vgl. auch die Lösung zu Aufg. 8 unten) ist dann f injektiv und g surjektiv. Daraus folgt mit Satz 5.D.6, dass dann f und g bijektiv sind, also auch Automorphismen. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 8, p. 84 (1.5.2011):

Sei $f: V \to W$ ein Homomorphismus von endlichdimensionalen K-Vektorräumen.

a) Genau dann ist f injektiv, wenn ein Homomorphismus $g: W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ existiert.

b) Genau dann ist f surjektiv, wenn ein Homomorphismus $h: W \to V$ mit $f \circ h = \mathrm{id}_W$ existiert.

Beweis: a) Zunächst sei $f: V \to W$ injektiv. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so sind dann die Vektoren $w_1 := f(v_1), \dots, w_n := f(v_n)$ linear unabhängig, lassen sich also durch weitere Vektoren $w_{n+1}, \dots, w_m \in W$ zu einer Basis von W ergänzen. Die lineare Abbildung $g: W \to V$ werde durch $g(w_i) := v_i$ für $i = 1, \dots, n$ und $g(w_i) := 0$ für $i = n+1, \dots, m$ definiert. Dann gilt $(g \circ f)(v_i) = g(w_i) = v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und somit $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Sei umgekehrt $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Für $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$ folgt dann $v_1 = g\bigl(f(v_1)\bigr) = g\bigl(f(v_2)\bigr) = v_2$, d.h. f ist injektiv.

b) Zunächst sei $f: V \to W$ surjektiv. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so wird W dann nach Satz 5.D.3 (1) von den Vektoren $w_1 := f(v_1), \dots, w_n := f(v_n)$ erzeugt. Nach Satz 3.A.15 enthält $w_1, \dots, w_n$ eine Basis von W. Nach Umnummerieren der v_i bzw. w_i können wir annehmen, dass dies $w_1, \dots, w_m$ ist, $m \le n$. Die lineare Abbildung $h: W \to V$ werde durch $h(w_i) := v_i$ für $i = 1, \dots, m$ definiert. Dann ist $(f \circ g)(w_i) = f(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ und somit $f \circ h = \mathrm{id}_W$.

Sei umgekehrt $f \circ h = \mathrm{id}_W$. Für $w \in W$ gilt dann $f\bigl(h(w)\bigr) = (f \circ h)(w) = \mathrm{id}_W(w) = w$, d.h. w ist das Bild von $h(w)$, und f ist surjektiv. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 12, p. 85 (1.10.2011):

Seien η eine positive reelle Zahl und V_η der von den Funktionen $e^{\mathrm{i}\omega t}$, $\omega \in\,]-\eta, \eta[$, erzeugte $\mathbb{C}$-Unterraum im Raum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Die angegebenen Funktionen bilden eine $\mathbb{C}$-Basis von V_η. Gleiches gilt für die (reellwertigen) Funktionen 1; $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $0 < \omega < \eta$. Die reellwertigen Funktionen in V_η sind genau die (endlichen) Summen von konstanten reellen Funktionen und von harmonischen Schwingungen zur Kreisfrequenz $< \eta$, vgl. Bd. 1, Beispiel 12.E.6.

b) Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $V_\eta \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ mit $f \mapsto \bigl(f(n\pi/\eta)\bigr)_{n \in \mathbb{N}}$ ist injektiv.

Beweis: a) Da V_η definitionsgemäß von den angegebenen Funktionen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass diese linear unabhängig sind. Dazu genügt es nachzuweisen, dass die Funktionen $e^{\mathrm{i}\omega_j t}$ sogar für paarweise verschiedene $\omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{C}$ stets linear unabhängig sind. Dazu verwenden wir Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial.

Sei also $\sum_{j=1}^{n} a_j\, e^{\mathrm{i}\omega_j t} = 0$ für $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}\omega_n a_j\, e^{\mathrm{i}\omega_j t} = 0$. Differenzieren liefert andererseits $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}\omega_j a_j\, e^{\mathrm{i}\omega_j t} = 0$, also $\sum_{j=1}^{n-1} \mathrm{i}(\omega_n - \omega_j) a_j e^{\mathrm{i}\omega_j t} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}\omega_n a_j\, e^{\mathrm{i}\omega_j t} - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{i}\omega_j a_j\, e^{\mathrm{i}\omega_j t} = 0$. Da die Funktionen $e^{\mathrm{i}\omega_j t}$, $j = 1, \dots, n-1$, nach Induktionsvoraussetzung linear unabhängig sind, erhält man daraus $\mathrm{i}(\omega_n - \omega_j)\, a_j = 0$, also $a_j = 0$ wegen $\omega_n \ne \omega_j$, für $j = 1, \dots, n-1$. Der Fall $n = 1$ liefert dann auch $a_n = 0$.

Mit $e^{\mathrm{i}\omega t} = \cos \omega t + \mathrm{i} \sin \omega t$ sieht man, dass auch die Funktionen 1; $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $0 < \omega < \eta$, den Vektorraum V_η erzeugen. Sie sind ferner linear unabhängig. Denn für paarweise verschiedene $\omega_1, \dots, \omega_n \in\,]-\eta, \eta[$ erzeugen die Funktionen 1; $\sin \omega_i t$, $\cos \omega_i t$, $i = 1, \dots, n$, denselben $(2n+1)$-dimensionalen komplexen Unterraum von V_η wie 1; $e^{\mathrm{i}\omega_i t}$, $e^{-\mathrm{i}\omega_i t}$, $i = 1, \dots, n$.

b) Sei $f = \sum_{-\eta < \omega < \eta} a_\omega\, e^{\mathrm{i}\omega t} \in V_\eta$ und $f(n\pi/\eta) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir $\lambda_\omega := e^{\mathrm{i}\omega\pi/\eta}$, so erhalten wir $\sum_{-\eta < \omega < \eta} a_\omega\, \lambda_\omega^n = \sum_{-\eta < \omega < \eta} a_\omega\, e^{\mathrm{i}n\omega\pi/\eta} = 0$ für alle n. Dabei sind die λ_ω wegen $-\pi < \omega\pi/\eta < \pi$ paarweise verschieden. Mit 3.A, Aufg. 19 ergibt sich $a_\omega = 0$ für alle ω, d.h. $f = 0$. Daher ist der Kern der betrachteten Abbildung gleich 0 und diese somit injektiv. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 14, p. 86 (1.5.2011):

Sei A eine endlichdimensionale K-Algebra. Ist das Element $x \in A$ in A invertierbar, so liegt das Inverse x^{-1} bereits in der K-Unteralgebra $K[x]$.

Beweis: Sei x in A invertierbar. Die unendlich vielen Potenzen x^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, von $x^{-1} \in A$ sind wegen $\mathrm{Dim}_K A < \infty$ linear abhängig, d.h. es gilt $a_0 + a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \cdots + a_nx^{-n} = 0$ mit Koeffizienten $a_i \in K$, die nicht alle 0 sind. Dabei können wir $a_n \neq 0$ annehmen. Multiplikation mit $a_n^{-1}x^{n-1}$ liefert

$$\begin{aligned} x^{-1} &= a_n^{-1}x^{n-1} \cdot a_nx^{-n} = -a_n^{-1}x^{n-1}(a_0 + a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \cdots + a_{n-1}x^{-(n-1)}) \\ &= -(a_n^{-1}a_0x^{n-1} + a_n^{-1}a_1x^{n-2} + a_n^{-1}a_2x^{n-3} + \cdots + a_n^{-1}a_{n-1}) \in K[x]\,. \end{aligned}$$

Beweisvariante: Die Multiplikation $\lambda_x : K[x] \to K[x]$ mit x ist injektiv und damit bijektiv, da $K[x] \subseteq A$ endlichdimensional ist. Es gibt also ein $f(x) \in K[x]$ mit $xf(x) = 1$. Man bemerke auch: Jeder Links- oder Rechtsnichtnullteiler in A ist bereits eine Einheit. •

Abschnitt 5.D, Aufg. 16, p. 86 (1.5.2011) :

Seien V ein K-Vektorraum mit der Basis x_i , $i \in I$, und $f : V \to K$ eine Linearform $\neq 0$ auf V mit $f(x_i) = a_i \in K$, $i \in I$. Man gebe eine Basis von Kern f an.

Beweis: Sind alle a_i gleich 0, so ist f identisch 0, also $V = \mathrm{Kern}\, f$. Dann ist x_i , $i \in I$, die gesuchte Basis. Sei also $a_{i_0} \neq 0$ für ein $i_0 \in I$. Wir zeigen, dass $z_i := a_{i_0}x_i - a_ix_{i_0}$, $i \in I - \{i_0\}$, eine Basis von Kern f bilden. Wegen $f(z_i) = f(a_{i_0}x_i - a_ix_{i_0}) = a_{i_0}a_i - a_ia_{i_0} = 0$ liegen die z_i, $i \in I - \{i_0\}$, in Kern f.
Sei $\sum_{i \neq i_0} r_iz_i = 0$ mit $(r_i) \in K^{(I)}$. Dann gilt $0 = \sum_{i \neq i_0} a_{i_0}r_ix_i - \big(\sum_{i \neq i_0} r_ia_i\big)\, x_{i_0}$. Da die x_i, $i \in I$, linear unabhängig sind, folgt $a_{i_0}r_i = 0$ für $i \neq i_0$, also $r_i = 0$ wegen $a_{i_0} \neq 0$. Daher sind die z_i $i \in I$, linear unabhängig.
Sei nun $z \in \mathrm{Kern}\, f$. Es gibt $(r_i) \in K^{(I)}$ mit $z = \sum_{i \in I} r_ix_i$, da die x_i eine Basis von V bilden. Dafür gilt $0 = f(z) = f\big(\sum_{i \in I} r_ix_i\big) = \sum_{i \in I} r_ia_i$, also $r_{i_0}a_{i_0} = -\sum_{i \neq i_0} r_ia_i$. Es folgt

$$\begin{aligned} z = \sum_{i \in I} r_ix_i = \sum_{i \neq i_0} r_ix_i + a_{i_0}^{-1}(r_{i_0}a_{i_0})\, x_{i_0} &= \sum_{i \neq i_0} a_{i_0}^{-1}r_ia_{i_0}x_i - \sum_{i \neq i_0} a_{i_0}^{-1}r_i\, a_i\, x_{i_0} \\ &= \sum_{i \neq i_0} a_{i_0}^{-1}r_i\,(a_{i_0}x_i - a_ix_{i_0}) = \sum_{i \neq i_0} (a_{i_0}^{-1}r_i)\, z_i\,. \end{aligned}$$

Daher wird Kern f auch von den z_i, $i \in I - \{i_0\}$ erzeugt. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 1, p. 88 (1.5.2011) :

Seien f und g Endomorphismen des endlichdimensionalen Vektorraumes V mit $g \circ f = 0$. Dann gilt: $\mathrm{Rang}\, f + \mathrm{Rang}\, g \leq \mathrm{Dim}\, V$. Insbesondere folgt aus $f^2\ (= f \circ f) = 0$ die Ungleichung $\mathrm{Rang}\, f \leq \frac{1}{2}\, \mathrm{Dim}\, V$.

Beweis: Aus $g \circ f = 0$ folgt $\mathrm{Bild}\, f \subseteq \mathrm{Kern}\, g$, also $\mathrm{Rang}\, f = \mathrm{Dim\,Bild}\, f \leq \mathrm{Dim\,Kern}\, g$. Der Rangsatz liefert dann $\mathrm{Dim}\, V = \mathrm{Dim\,Kern}\, g + \mathrm{Dim\,Bild}\, g = \mathrm{Dim\,Kern}\, g + \mathrm{Rang}\, g \geq \mathrm{Rang}\, f + \mathrm{Rang}\, g$. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 2, p. 88 (1.5.2011) :

Seien $g : V \to W$ linear und V' ein Unterraum von V. Ist V endlichdimensional, so gilt

$$\mathrm{Dim}\, V - \mathrm{Dim}\, V' \geq \mathrm{Rang}\, g - \mathrm{Rang}\,(g|V')\,.$$

Beweis: Der Rangsatz liefert $\mathrm{Dim}\, V = \mathrm{Dim\,Kern}\, g + \mathrm{Rang}\, g$ und $\mathrm{Dim}\, V' = \mathrm{Dim\,Kern}\,(g|V') + \mathrm{Rang}\,(g|V')$. Wegen $\mathrm{Kern}\, g \supseteq \mathrm{Kern}\,(g|V')$, also $\mathrm{Dim\,Kern}\, g - \mathrm{Dim\,Kern}(g|V') \geq 0$, folgt daraus durch Subtraktion $\mathrm{Dim}\, V - \mathrm{Dim}\, V' = \mathrm{Dim\,Kern}\, g - \mathrm{Dim\,Kern}(g|V') + \mathrm{Rang}\, g - \mathrm{Rang}\,(g|V') \geq \mathrm{Rang}\, g - \mathrm{Rang}\,(g|V')$. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 3, p. 88 (1.5.2011) :

Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. U und V seien endlichdimensionale Vektorräume. Dann gilt $\mathrm{Rang}\, f + \mathrm{Rang}\, g - \mathrm{Dim}\, V \leq \mathrm{Rang}\,(gf) \leq \mathrm{Min}\,(\mathrm{Rang}\, f,\ \mathrm{Rang}\, g)$.

Beweis: Wir verwenden Aufg. 2 mit $V' := \mathrm{Bild}\, f$, also $\mathrm{Dim}\, V' = \mathrm{Rang}\, f$, und (wegen $\mathrm{Bild}(g|\,\mathrm{Bild}\, f) = \mathrm{Bild}\,(g \circ f)$ mit $\mathrm{Rang}\,(g|V') = \mathrm{Dim\ Bild}(g|\,\mathrm{Bild}\, f) = \mathrm{Rang}\,(g \circ f)$, und erhalten

$$\mathrm{Dim}\, V - \mathrm{Rang}\, f \geq \mathrm{Rang}\, g - \mathrm{Rang}\,(g \circ f)\,.$$

Dies ergibt die linke Ungleichung. – Wegen $\operatorname{Bild}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Bild} g$ gilt $\operatorname{Rang}(g \circ f) \le \operatorname{Rang} g$. Ferner gilt $\operatorname{Rang}(g \circ f) = \operatorname{Rang}(g|V') = \operatorname{Dim} V' - \operatorname{Dim} \operatorname{Kern}(g|V') \le \operatorname{Dim} V' = \operatorname{Rang} f$, wobei wir den Rangsatz wie in Aufg. 2 benutzt haben. Dies liefert die rechte Ungleichung. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 4, p. 88 (1.5.2011):

Seien $f: U \to V$, $g: V \to W$ und $h: W \to X$ lineare Abbildungen, U, V und W seien endlichdimensionale Vektorräume. Dann gilt $\operatorname{Rang}(hg) + \operatorname{Rang}(gf) \le \operatorname{Rang} g + \operatorname{Rang}(hgf)$.

Beweis: Wir wenden Aufg. 3 auf die Abbildungen $g|\operatorname{Bild} f : \operatorname{Bild} f \to W$ und $h|\operatorname{Bild} g : \operatorname{Bild} g \to X$ an (in der Rolle der Abbildungen $f: U \to V$ und $g: V \to W$ in Aufg. 3). Die linke Seite der dortigen Ungleichung bekommt dann die Gestalt

$$\operatorname{Rang}(g|\operatorname{Bild} f) + \operatorname{Rang}(h|\operatorname{Bild} g) - \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} g \le \operatorname{Rang}\big((h|\operatorname{Bild} g) \circ (g|\operatorname{Bild} f)\big)$$

Wegen $\operatorname{Rang}(g|\operatorname{Bild} f) = \operatorname{Rang}(g \circ f)$, $\operatorname{Rang}(h|\operatorname{Bild} g) = \operatorname{Rang}(h \circ g)$, $\operatorname{Dim} \operatorname{Bild} g = \operatorname{Rang} g$ und $\operatorname{Rang}\big((h|\operatorname{Bild} g) \circ (g|\operatorname{Bild} f)\big) = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild}(h \circ g \circ f) = \operatorname{Rang}(hgf)$ liefert das die zu beweisende Ungleichung. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 5, p. 88 (1.5.2011):

Sei f ein Operator auf dem endlichdimens. Vektorraum V ungerader Dimension. Dann ist $\operatorname{Bild} f \ne \operatorname{Kern} f$.

Beweis: Bei $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Bild} f$ wäre $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f + \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = 2 \operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f$ nach dem Rangsatz gerade. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 6, p. 88 (1.5.2011):

Sei f ein Operator auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V. Dann sind äquivalent:
(1) $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Bild} f$. (2) $f^2 = 0$ und $\operatorname{Dim} V = 2 \cdot \operatorname{Rang} f$.

Beweis: Sei zunächst $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Bild} f$. Der Rangsatz liefert dann $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f + \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f + \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = 2 \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = 2 \operatorname{Rang} f$. Für alle $x \in V$ gilt ferner $f(x) \in \operatorname{Bild} f = \operatorname{Kern} f$ und somit $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = 0$, d.h. es ist $f^2 = 0$.

Sei umgekehrt $f^2 = 0$. Dann folgt $f(\operatorname{Bild} f) = 0$ und somit $\operatorname{Bild} f \subseteq \operatorname{Kern} f$. Um $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Kern} f$ zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass die Dimensionen der beiden Vektorräume gleich sind. Dies folgt aber aus $\operatorname{Dim} V = 2 \operatorname{Rang} f$ mit dem Rangsatz: $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f = \operatorname{Dim} V - \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = 2 \operatorname{Rang} f - \operatorname{Rang} f = \operatorname{Rang} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f$. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 7, p. 88 (1.5.2011):

Sei f ein Operator auf dem endlichdimensionalen Vektorraum V. Dann sind äquivalent:
(1) $\operatorname{Rang} f = \operatorname{Rang} f^2$. (1′) $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f^2$. (2) $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f^2$. (2′) $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} f^2$.
(3) $\operatorname{Bild} f \cap \operatorname{Kern} f = 0$. (4) $\operatorname{Bild} f + \operatorname{Kern} f = V$.
(3) und (4) zusammen bedeuten, dass V die direkte Summe von $\operatorname{Bild} f$ und $\operatorname{Kern} f$ ist, vgl. Korollar 5.F.4.

Beweis: (1) ⇔ (1′) Trivialerweise gilt stets $\operatorname{Bild} f^2 \subseteq \operatorname{Bild} f$. Daher hat man $\operatorname{Rang} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f^2 = \operatorname{Rang} f^2$ genau dann, wenn $\operatorname{Bild} f^2 = \operatorname{Bild} f$ ist.

(2) ⇔ (2′) Trivialerweise gilt stets $\operatorname{Kern} f^2 \supseteq \operatorname{Kern} f$. Daher hat man $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f^2$ genau dann, wenn $\operatorname{Kern} f^2 = \operatorname{Kern} f$ ist.

(1) ⇔ (2) Nach dem Rangsatz gilt $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f + \operatorname{Rang} f = \operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f^2 + \operatorname{Rang} f^2$. Genau dann gilt also $\operatorname{Rang} f = \operatorname{Rang} f^2$, wenn $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f^2$ ist

(1′) ⇔ (4) Sei $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f^2$. Trivialerweise gilt $\operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f \subseteq V$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $v \in V$. Dann ist $f(v) \in \operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f^2$, und es gibt ein $w \in V$ mit $f(v) = f^2(w)$. Es folgt $f\big(v - f(w)\big) = f(v) - f^2(w) = 0$, d.h. $v - f(w) \in \operatorname{Kern} f$ und somit $v = \big(v - f(w)\big) + f(w) \in \operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f$, also $V \subseteq \operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f$ und insgesamt $V = \operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f$.

Sei umgekehrt $V = \operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f$. Trivialerweise gilt stets $\operatorname{Bild} f^2 \subseteq \operatorname{Bild} f$. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $w = f(v) \in \operatorname{Bild} f$. Nach Voraussetzung besitzt v eine Darstellung $v = u + w'$ mit $u \in \operatorname{Kern} f$ und $w' \in \operatorname{Bild} f$, also $w' = f(v')$ für ein $v' \in V$. Es folgt $w = f(v) = f(u + w') = f(u) + f(w') = 0 + f\big(f(v')\big) = f\big(f(v')\big) \in \operatorname{Bild} f^2$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Der Rangsatz liefert $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f + \operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f$. Mit der Dimensionsformel, vgl. Beispiel 5.E.3, sieht man dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} f \cap \operatorname{Bild} f) &= \operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f + \operatorname{Dim}\operatorname{Bild} f - \operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f)\\ &= \operatorname{Dim} V - \operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f)\,.\end{aligned}$$

Genau dann ist also $\operatorname{Kern} f \cap \operatorname{Bild} f = 0$, d.h. $\operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} f \cap \operatorname{Bild} f) = 0$, wenn gilt $\operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f)$, d.h. $V = \operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f$. •

Abschnitt 5.E, Aufg. 15 , p. 90 (1.10.2011) :

Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und K ein Körper. Eine $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \in K^{\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,n\}}$$

mit Elementen $a_{ij} \in K$ heiße m a g i s c h , wenn ihre Zeilensummen $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ und ihre Spaltensummen $\sum_{i=1}^n a_{ij}$ alle übereinstimmen. Sie heiße s u p e r m a g i s c h , wenn zusätzlich noch die beiden Diagonalensummen $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ und $\sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i}$ gleich der gemeinsamen Summe in den Zeilen und Spalten sind. Man zeige, dass die magischen bzw. die supermagischen $n \times n$-Matrizen jeweils einen K-Unterraum aller $n \times n$-Matrizen über K bilden, und bestimme die Dimension dieser Vektorräume.

Beweis: Wir verwenden das Unterraumkriterium 1.C.8. Offenbar ist die Nullmatrix sowohl magisch als auch supermagisch. Sind $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ und $\mathfrak{B} = ((b_{ij})$ magisch, so gibt es $s, t \in K$ mit $\sum_{j=1}^n a_{ij} = s$ und $\sum_{j=1}^n b_{ij} = t$, also $\sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = s + t$ für alle $i = 1, \dots, n$ sowie $\sum_{i=1}^n a_{ij} = s$ und $\sum_{i=1}^n b_{ij} = t$, also $\sum_{i=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) = s + t$ für alle $j = 1, \dots, n$. Daher ist auch $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (a_{ij} + b_{ij})$ magisch. Für $a \in K$ folgt ferner $\sum_{j=1}^n a\,a_{ij} = a\sum_{j=1}^n a_{ij} = as$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\sum_{i=1}^n a\,a_{ij} = a\sum_{i=1}^n a_{ij} = as$ für alle $j = 1, \dots, n$, d.h. $a\mathfrak{A} = (aa_{ij})$ ist ebenfalls magisch. Die magischen $n \times n$-Matrizen über K bilden also einen Unterraum des Vektorraums aller $n \times n$-Matrizen, den wir hier mit $\operatorname{Mag}_n(K)$ bezeichnen.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sogar supermagisch, so gilt zusätzlich $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i} = s$ und $\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n b_{i,n+1-i} = t$ für $i = 1, \dots, n$, also $\sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = s + t$ sowie $\sum_{i=1}^n aa_{ii} = a\sum_{i=1}^n a_{ii} = as$ und $\sum_{i=1}^n aa_{i,n+1-i} = a\sum_{i=1}^n a_{i,n+1-i} = as$ für $i = 1, \dots, n$. Daher sind dann $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $a\mathfrak{A}$ ebenfalls supermagisch.

Für eine $n \times n$-Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ sei $z_i := \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}$ die Summe der ersten $n-1$ Elemente in der i-ten Zeile, $i = 1, \dots, n-1$, und $s_j := \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}$ die Summe der ersten $n-1$ Elemente in der j-ten Spalte, $j = 1, \dots, n-1$, von $\mathfrak{A}$ und ferner $a := \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} z_i = \sum_{j=1}^{n-1} s_j$. Die Matrix $\mathfrak{A}$ ist genau dann magisch mit Zeilen- und Spaltensumme s, wenn gilt $a_{in} = s - z_i$ für $i = 1, \dots, n-1$, $a_{nj} = s - s_j$ für $j = 1, \dots, n-1$ und schließlich $a_{nn} = a - (n-2)s$. Die Wahl der a_{in} und a_{nj} ist notwendig und hinreichend dafür, dass die Zeilensumme und die Spaltensumme für die ersten $n-1$ Zeilen bzw. Spalten von $\mathfrak{A}$ jeweils gleich s ist. Die Summe der Elemente in der n-ten Zeile ist genau dann ebenfalls s, wenn dann $\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n-1}(s - s_j) + a_{nn} = (n-1)s - a + a_{nn} = s$ ist, d.h. $a_{nn} = a - (n-2)s$. In diesem Fall ist automatisch auch die Summe der Elemente in der n-ten Spalte gleich s wegen $\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1}(s - z_i) + a - (n-2)s = (n-1)s - a + a - (n-2)s = s$. Die allgemeine Gestalt einer magischen Matrix mit Zeilen- und Spaltensumme s ist also

$$f(a_{11}, \dots, a_{1,\,n-1}, \dots, a_{n-1,\,1}, \dots, a_{n-1,\,n-1},\ s) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,\,n-1} & s - z_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,\,1} & \cdots & a_{n-1,\,n-1} & s - z_{n-1}\\ s - s_1 & \cdots & s - s_{n-1} & a - (n-2)s\end{pmatrix},$$

wobei die z_i, s_j, $i, j = 1, \dots, n-1$, und a wie oben definiert sind. Die Abbildung $f : K^{(n-1)^2+1} \to \operatorname{Mag}_n(K)$ ist offenbar K-linear und nach Obigem surjektiv. Ist $f(a_{11}, \dots, a_{1,\,n-1}, \dots, a_{n-1,\,1}, \dots, a_{n-1,\,n-1},\ s) = 0$, so sind zunächst alle auftretenden a_{ij} gleich 0, dann die z_i, s_j und a und schließlich auch s. Daher ist $\operatorname{Kern} f = 0$ und f somit injektiv, also insgesamt ein Isomorphismus. Nach Satz 5.D.5 ist daher $\operatorname{Dim}_K \operatorname{Mag}_n(K) = (n-1)^2 + 1$.

Eine Basis von $\mathrm{Mag}_n(K)$ bekommt man als f-Bilder der Standardbasis von $K^{(n-1)^2+1}$, vgl. Satz 5.D.3 (3). Dies sind die folgenden $(n-1)^2$ Matrizen, bei denen die $(n-1)\times(n-1)$-Untermatrix in der linken oberen Ecke nur in der p-ten Zeile und q-ten Spalte eine 1 hat und ihre übrigen Koeffizienten alle 0 sind, $p, q = 1, \ldots n-1$,

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die $n\times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun noch die supermagischen Matrizen. Bei $n = 1$ ist jede Matrix supermagisch, bei $n = 2$ sind offenbar genau die Matrizen supermagisch, deren Koeffizienten alle gleich sind. In beiden Fällen ist der Raum dieser Matrizen 1-dimensional.

Sei von nun an also $n \geq 3$. Genau dann ist $f(a_{11}, \ldots, a_{1,n-1}, \ldots, a_{n-1,1}, \ldots, a_{n-1,n-1}, s)$ supermagisch, wenn gilt

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} + a - (n-2)s = s \quad \text{und} \quad s - z_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n-i+1} + s - s_1 = s\,,$$

d.h. wenn $(a_{11}, \ldots, a_{1,n-1}, \ldots, a_{n-1,1}, \ldots, a_{n-1,n-1}, s)$ im Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} - (n-1)s = 0\,, \quad s - \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i1} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n-i+1} = 0$$

liegt. Dieser Lösungsraum hat nach dem Rangsatz 5.E.2 die Dimension $\mathrm{Dim}_K \operatorname{Kern} g = (n-1)^2 + 1 - r$, $r := \mathrm{Dim}_K \operatorname{Bild} g$, wo die lineare Abbildung $g : K^{(n-1)^2+1} \to K^2$ definiert ist durch

$$\begin{aligned} &g(a_{11}, \ldots, a_{1,n-1}, \ldots, a_{n-1,1}, \ldots, a_{n-1,n-1}, s) := \\ &\textstyle\big(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} - (n-1)s\,,\, s - \sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i1} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{i,n-i+1}\big)\,. \end{aligned}$$

Setzt man alle $a_{ij} = 0$ und $s = 1$, so bekommt man $g(0, \ldots, 0, 1) = (1-n\,,1) \neq 0$, d.h. $\operatorname{Bild} g$ hat mindestens die Dimension 1. Setzt man hingegen $s = 0$ und alle $a_{ij} = 0$ bis auf $a_{12} = -1$, so bekommt man $g(0, -1, 0, \ldots, 0, 0) = (-1\,, 1)$. Bei $n = 3$ sind aber die beiden erhaltenen Bilder $(-2, 1)$ und $(-1, 1)$ wegen $-2 \neq -1$ sicher linear unabhängig, d.h. es ist $r = \operatorname{Dim}\operatorname{Bild} g = 2$ und der Raum der supermagischen Matrizen hat die Dimension $5 - 2 = 3$. Bei $n = 4$ und $\operatorname{Char} K \neq 2$ sind die beiden Bilder $(-3, 1)$ und $(-1, 1)$ wegen $-3 \neq -1$ ebenfalls linear unabhängig, d.h. es ist $r = \operatorname{Dim}\operatorname{Bild} g = 2$ und der Raum der supermagischen Matrizen hat dann die Dimension $10 - 2 = 8$. Bei $n = 4$ und $\operatorname{Char} K = 2$ jedoch gilt wegen $2 = 0$, also $-a_{ij} = a_{ij}$ und $-3s = s$,

$$\begin{aligned} g(a_{11}, \ldots, a_{33}, s) = \big(&2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{23} + a_{31} + a_{32} - 3s\,, \\ &s - 2a_{11} - a_{12} - a_{13} - a_{21} - a_{31} + a_{23} + a_{32}\big) = (s + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{31} + a_{23} + a_{32})(1, 1)\,, \end{aligned}$$

d.h. $\operatorname{Bild} g$ ist nur 1-dimensional und der Raum der supermagischen 4×4-Matrizen hat bei $\operatorname{Char} K = 2$ die Dimension $3^2 + 1 - 1 = 9$. Sei nun $n \geq 5$. Dann ist der Index $(2, 3)$ wegen $n-2+1 \geq 4$ keiner der Indizes $(i\,, n-i+1)$. Setzen man jetzt $s = 0$ und alle $a_{ij} = 0$ bis auf $a_{23} = 1$, so bekommt man $g(0, \ldots, 0, 0, 0, 1, \ldots, 0, \ldots, 0, \ldots, 0,\ 0) = (1, 0)$. Da $g(0, \ldots, 0, 1) = (1-n\,, 1)$ und $(1, 0)$ stets linear unabhängig sind, ist dann $r = 2$, und der Raum der supermagischen $n\times n$-Matrizen hat bei $n \geq 5$ stets die Dimension $(n-1)^2 + 1 - 2 = n(n-2)$. •

Abschnitt 5.E, Zusatzaufgabe, p. 90 (1.5.2011) :

Man bestimme jeweils eine Basis von Kern f und Bild f für die folgenden K-linearen Abbildungen f:

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit $f(x_1,x_2,x_3):=(x_1+2x_2-x_3\,,\,2x_1-x_2+3x_3\,,\,-x_1+8x_2-9x_3)$ über $K:=\mathbb{R}$.

b) $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ mit $f(z_1,z_2):=\big((1+\mathrm{i})z_1+2\mathrm{i}z_2\,,\,-2\mathrm{i}z_1+(2-2\mathrm{i})z_2\big)$ über $K:=\mathbb{C}$.

c) $f:\mathbf{K}_3^3\to\mathbf{K}_3^3$ mit $f(x_1,x_2,x_3):=(x_1+x_2+\overline{2}x_3\,,\,\overline{2}x_1+x_3\,,\,x_1+\overline{2}x_2+\overline{2}x_3)$ über $K=\mathbf{K}_3:=\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$.

Lösung: a) Um Kern f zu bestimmen, haben wir ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2-\ x_3&=0\\ 2x_1-\ x_2+3x_3&=0\\ -x_1+8x_2-9x_3&=0\,, \end{aligned}\qquad \begin{aligned} x_1+\ 2x_2-\ x_3&=0\\ -5x_2+\ 5x_3&=0\\ 10x_2-10x_3&=0\,, \end{aligned}\qquad \begin{aligned} x_1+\ 2x_2-x_3&=0\\ x_2-x_3&=0\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich $x_2=x_3$ und dann $x_1=-x_3$, d.h. es ist Kern $f=\mathbb{R}(-1,1,1)$, und $(-1,1,1)\neq 0$ ist eine Basis von Kern f. Mit dem Rangsatz folgt Rang $f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3-\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=3-1=2$. Irgendzwei linear unabhängige unter den Vektoren $f(e_1)=(1,2,-1)$, $f(e_2)=(2,-1,8)$, $f(e_3)=(-1,3,-9)$ bilden also eine Basis von Bild f. Beispielsweise sind dies $(1,2,-1)$ und $(2,-1,8)$, da keiner dieser Vektoren ein Vielfaches des anderen ist.

b) Um Kern f zu bestimmen, haben wir ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} (1+\mathrm{i})\,z_1+\qquad 2\mathrm{i}\,z_2&=0\\ -2\mathrm{i}\,z_1+(2-2\mathrm{i})\,z_2&=0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert $z_1=(2-2\mathrm{i})/2\mathrm{i}\,z_2=(-1-\mathrm{i})\,z_2$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $-(1+\mathrm{i})^2z_2+2\mathrm{i}\,z_2=0$, also – wegen $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ – keine weitere Bedingung. Diebeiden Gleichungen sind also linear abhängig, d.h. es ist Kern $f=\{(z_1,z_2)\mid z_1=-(1+\mathrm{i})\,z_2\}=\mathbb{C}\big(-(1+\mathrm{i})\,,\,1\big)$ und $\big(-(1+\mathrm{i})\,,\,1\big)\neq 0$ ist eine Basis von Kern f. Mit dem Rangsatz folgt Rang $f=\operatorname{Dim}\mathbb{C}^2-\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=2-1=1$. Jeder Vektor $\neq 0$ unter den Vektoren $f(e_1)=(1+\mathrm{i},2\mathrm{i})$, $f(e_2)=(2\mathrm{i},2-2\mathrm{i})$ bildet also eine Basis von Bild f.

b) Um Kern f zu bestimmen, haben wir ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\overline{2}x_3&=0\\ \overline{2}x_1\qquad\ +\ x_3&=0\\ x_1+\overline{2}x_2+\overline{2}x_3&=0\,, \end{aligned}\qquad \begin{aligned} x_1+x_2+\overline{2}x_3&=0\\ x_2\qquad&=0\\ x_2\qquad&=0\,, \end{aligned}$$

Es ergibt sich $x_1=x_3$ und $x_2=0$, d.h. es ist Kern $f=\mathbb{R}(\overline{1},0,\overline{1})$, und $(\overline{1},0,\overline{1})\neq 0$ ist eine Basis von Kern f. Mit dem Rangsatz folgt Rang $f=\operatorname{Dim}\mathbb{R}^3-\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} f=3-1=2$. Irgendzwei linear unabhängige unter den Vektoren $f(e_1)=(\overline{1},\overline{2},\overline{1})$, $f(e_2)=(\overline{1},0,\overline{2})$, $f(e_3)=(\overline{2},\overline{1},\overline{2})$ bilden also eine Basis von Bild f. In K_3 gilt zwar $f(e_3)=(\overline{2},\overline{1},\overline{2})=(\overline{2},\overline{4},\overline{2})=\overline{2}(\overline{1},\overline{2},\overline{1})=\overline{2}f(e_1)$, aber $f(e_1)$ und $f(e_2)$ sind offenbar linear unabhängig. •

Abschnitt 5.F, Aufg. 7, p. 94 (1.10.2011) :

Seien K ein Körper mit wenigstens n Elementen und $U_1,\ldots,U_n$ Unterräume gleicher Dimension eines endlichdimensionalen K-Vektorraums V. Dann besitzen $U_1,\ldots,U_n$ ein gemeinsames Komplement in V.

Beweis: Sei $r:=\operatorname{Dim}_K U_i$ für $i=1,\ldots,n$. Nach 3,B, Aufg. 29 gibt es $m:=\operatorname{Dim}_K V-r$ Elemente $x_1,\ldots,x_m$, die für $i=1,\ldots,n$ Basen von U_i zu Basen von V ergänzen. Dann ist $W:=Kx_1+\cdots+Kx_m$ ein Unterraum von V mit $V=U_i\oplus W$ für alle i. •

Abschnitt 5.F, Spezialfall von **Aufg. 13**, p. 95 (1.5.2011) :

p und q seien Projektionen des K-Vektorraums V mit $pq=qp$. Dann ist pq ebenfalls eine Projektion von V ist, und es gilt

$$\operatorname{Bild}(pq)=\operatorname{Bild}p\cap\operatorname{Bild}q\qquad\text{und}\qquad\operatorname{Kern}(pq)=\operatorname{Kern}p+\operatorname{Kern}q\,.$$

Beweis: Wegen $pq=qp$ ist $(pq)^2=pqpq=p^2q^2=pq$, also pq eine Projektion.

Trivialerweise ist $x=pq(y)=qp(y)\in\operatorname{Bild}pq$ in $\operatorname{Bild}p$ und $\operatorname{Bild}q$ enthalten. Sei umgekehrt $x=p(u)=q(v)$ aus $\operatorname{Bild}p\cap\operatorname{Bild}q$. Dann ist $x=p(u)=p^2(u)=p\big(p(u)\big)=p(x)=p\big(q(v)\big)\in\operatorname{Bild}pq$.

Trivialerweise sind $\operatorname{Kern}p$ und $\operatorname{Kern}q$ in $\operatorname{Kern}(pq)$ enthalten. Sei umgekehrt $x\in\operatorname{Kern}pq$, d.h. $pq(x)=0$. Dann ist $q(x)\in\operatorname{Kern}p$ und $q\big(x-q(x)\big)=q(x)-q^2(x)=q(x)-q(x)=0$, d.h. $x-q(x)\in\operatorname{Kern}q$ und $x=q(x)+\big(x-q(x)\big)\in\operatorname{Kern}p+\operatorname{Kern}q$. •

Abschnitt 5.F, **Aufg. 15a)**, p. 95 (1.5.2011) :

Seien p und q Projektionen des K-Vektorraums V. Sei Char $K \neq 2$, d.h. $2 = 1_K + 1_K \neq 0$ in K. Genau dann ist $p+q$ eine Projektion von V, wenn $pq = qp = 0$ ist. In diesem Fall ist

$$\operatorname{Bild}(p+q) = \operatorname{Bild} p \oplus \operatorname{Bild} q\,, \qquad \operatorname{Kern}(p+q) = (\operatorname{Kern} p) \cap (\operatorname{Kern} q)\,.$$

Beweis: Stets gilt $(p+q)^2 = p^2 + qp + pq + q^2 = p + q + pq + qp$. Ist $pq = qp = 0$, so ist also $p+q$ eine Projektion. Ist umgekehrt $p+q$ eine Projektion, so folgt $pq + qp = 0$, also wegen $p^2 = p$ auch $pq = -qp = -qp^2 = pqp = -p^2q = -pq$ und somit $2pq = 0$, also $pq = 0$ wegen $2 \neq 0$, und dann auch $qp = 0$.

Sei nun $pq = qp = 0$, und sei $x \in \operatorname{Bild} p \cap \operatorname{Bild} q$. Dann gibt es $u, v \in V$ mit $x = p(u)$ und $x = q(v) = q^2(v) = q\big(q(v)\big) = q(x) = q\big(p(u)\big) = 0$ wegen $qp = 0$. Also ist $\operatorname{Bild} p \cap \operatorname{Bild} q = 0$.

$\operatorname{Bild}(p+q) \subseteq \operatorname{Bild} p + \operatorname{Bild} q$ ist trivial. Wir beweisen die umgekehrte Inklusion. Wegen $pq = qp = 0$ gilt $p(x) + q(y) = p^2(x) + q\big(p(x)\big) + p\big(q(y)\big) + q^2(y) = (p+q)\big(p(x) + q(y)\big) \in \operatorname{Bild}(p+q)$ für ein beliebiges Element von $\operatorname{Bild} p + \operatorname{Bild} q$, d.h. es ist $\operatorname{Bild}(p+q) = \operatorname{Bild} p + \operatorname{Bild} q$, insgesamt also $\operatorname{Bild}(p+q) = \operatorname{Bild} p \oplus \operatorname{Bild} q$.

$\operatorname{Kern}(p+q) \supseteq \operatorname{Kern} p + \operatorname{Kern} q$ ist trivial. Wir beweisen die umgekehrte Inklusion. Sei $x \in \operatorname{Kern}(p+q)$, also $p(x) + q(x) = 0$. Mit $pq = 0$ folgt $p(x) = p^2(x) + pq(x) = p\big(p(x) + q(x)\big) = p(0) = 0$, d.h. $x \in \operatorname{Kern} p$. Analog zeigt man auch $x \in \operatorname{Kern} q$. Es folgt $\operatorname{Kern}(p+q) = (\operatorname{Kern} p) \cap (\operatorname{Kern} q)$. •

Abschnitt 5.F, **Aufg. 25**, p. 97 (1.5.2011) :

V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ sei ein Operator auf V. Genau dann ist f eine Projektion von V, wenn es eine Basis $x_1, \ldots, x_n$ von V gibt mit $f(x_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, r$, und $f(x_i) = 0$, $i = r+1, \ldots, n$.

Beweis. Ist f eine Projektion von V, so ist $V = \operatorname{Bild} f \oplus \operatorname{Kern} f$ und $f(x) = f(f(y)) = f^2(y) = f(y) = x$, falls $x = f(y) \in \operatorname{Bild} f$. Ergänzt man also eine Basis $x_1, \ldots, x_r$ von $\operatorname{Bild} f$ durch eine Basis $x_{r+1}, \ldots, x_n$ von $\operatorname{Kern} f$, so erhält man die gesuchte Basis $x_1, \ldots, x_n$.

Hat man umgekehrt eine Basis der angegebenen Art, so gilt $f^2(x_i) = f(x_i)$ für $i = 1, \ldots, r$ und $f^2(x_i) = f(0) = 0 = f(x_i)$ für $i = r+1, \ldots, n$. Somit ist $f^2(x_i) = f(x_i)$ für alle i und daher $f^2 = f$. •

Abschnitt 5.F, **Aufg. 26**, p. 97 (1.5.2011) :

V sei ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ sei ein beliebiger Operator auf V. Dann gibt es einen Automorphismus g und Projektionen p, q von V mit $f = pg = gq$.

Beweis. Der Beweis des Rangsatzes zeigt, dass es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt derart, dass die Vektoren $w_1 := f(v_1), \ldots, w_r := f(v_r)$ eine Basis von $\operatorname{Bild} f$ bilden, die wir zu einer Basis $w_1, \ldots, w_n$ von V ergänzen können, wobei $v_{r+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von $\operatorname{Kern} f$ ist. Wir definieren nun einen Endomorphismus g von V durch $g(v_i) := w_i$ für $i = 1, \ldots, n$, einen Endomorphismus p von V durch $p(w_i) := w_i$ für $i = 1, \ldots, r$ und $p(w_i) := 0$ für $i = r+1, \ldots, n$, schließlich einen Endomorphismus q von V durch $q(v_i) := v_i$ für $i = 1, \ldots, r$, und $q(v_i) := 0$ für $i = r+1, \ldots, n$.

Dann gilt $p(g(v_i)) = p(w_i) = w_i = f(v_i)$ für $i = 1, \ldots, r$ und $p(g(v_i)) = p(w_i) = 0 = f(v_i)$ für $i = r+1, \ldots, n$, also $pq = f$. Ferner gilt $g(q(v_i)) = g(v_i) = w_i = f(v_i)$ für $i = 1, \ldots, r$ und $g(q(v_i)) = g(0) = 0 = f(v_i)$ für $i = r+1, \ldots, n$, also $gq = f$.

g bildet eine Basis von V auf eine Basis von V ab, ist also ein Automorphismus von V. Außerdem sind p und q nach Aufg. 25 Projektionen.

Abschnitt 5.G, **Aufg. 12**, p. 105 (1.5.2011) :

Eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ von K-Vektorräumen ist genau dann injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, wenn die duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*$ surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist. (Der Leser mag voraussetzen, dass V und W endlichdimensional sind, obschon dies nicht nötig ist.)

Beweis: Wir wollen zunächst voraussetzen, dass V und W endlichdimensional sind.

Genau dann ist f injektiv, wenn $\operatorname{Kern} f = 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f = 0$ ist. Da nach dem Rangsatz stets $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f + \operatorname{Rang} f = \operatorname{Dim} V$ gilt, ist dies äquivalent zu $\operatorname{Rang} f = \operatorname{Dim} V$. Nach Satz 5.G.19 ist $\operatorname{Rang} f^* = \operatorname{Rang} f$, und nach Satz 5.G.4 gilt $\operatorname{Dim} V^* = \operatorname{Dim} V$. Die angegebene Bedingung ist also zu $\operatorname{Rang} f^* = \operatorname{Dim} V^*$, d.h. zu $\operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f^* = \operatorname{Dim} V^*$ äquivalent. Wegen $\operatorname{Bild} f^* \subseteq V^*$ ist dies wiederum äquivalent zu $\operatorname{Bild} f^* = V^*$, d.h. zur Surjektivität von f^*.

Genau dann ist f surjektiv, wenn $\operatorname{Bild} f = W$ ist. Da stets $\operatorname{Bild} f \subseteq W$ gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Rang} f = \operatorname{Dim} \operatorname{Bild} f = \operatorname{Dim} W$ ist. Nach Satz 5.G.19 ist $\operatorname{Rang} f^* = \operatorname{Rang} f$ (5.G.19), und nach Satz 5.G.4 gilt $\operatorname{Dim} W^* = \operatorname{Dim} W$. Die angegebene Bedingung ist also zu $\operatorname{Rang} f^* = \operatorname{Dim} W^*$ äquivalent. Dies ist wiederum äquivalent zu $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f^* = 0$ und damit zu $\operatorname{Kern} f^* = 0$, d.h. der Injektivität von f^*, da nach dem Rangsatz stets $\operatorname{Dim} \operatorname{Kern} f^* + \operatorname{Rang} f^* = \operatorname{Dim} W^*$ gilt. •

Beweisvariante: Benutzen wir den kanonischen Isomorphismus $\sigma_V : V \to V^{**}$, der $x \in V$ auf die Linearform $L_x \in V^{**}$ abbildet, die jedem $\varphi \in V^*$ den Wert $\varphi(x)$ zuordnet, und analog $\sigma_W : W \to W^{**}$, so genügt es, zu zeigen, dass aus der Injektivität (bzw. Surjektivität) von f die Surjektivität (bzw. Injektivität) von f^* folgt, was relativ einfach ist (siehe die nächste Beweisvariante). Zunächst gilt $\sigma_W f = f^{**}\sigma_V$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle \sigma_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_W} \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

Ist nämlich $x \in V$, so sind $\sigma_W\big(f(x)\big) = L_{f(x)}$ und $f^{**}\big(\sigma_V(x)\big) = f^{**}(L_x) = L_x \circ f^*$ gleich, da für $\varphi \in V^*$ gilt: $L_{f(x)}(\varphi) = \varphi\big(f(x)\big)$ und $(L_x \circ f^*)(\varphi) = L_x\big(f^*(\varphi)\big) = L_x(\varphi \circ f) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi\big(f(x)\big)$.
Ist nun f^* surjektiv (bzw. injektiv), so ist nach der bereits bekannten Richtung f^{**} injektiv (bzw. surjektiv) und damit auch $f = \sigma_W^{-1} f^{**}\sigma_V$. •

Beweisvariante: Seien nun V und W nicht notwendig endlichdimensional.

Ist f surjektiv und ist $\varphi \in \operatorname{Kern} f^*$, so gilt $\varphi \circ f = f^*(\varphi) = 0$. Daraus folgt aber $\varphi = 0$, d.h. die Injektivität von f^*: Wegen der Surjektivität von f gibt es nämlich zu jedem $w \in W$ ein $v \in V$ mit $f(v) = w$, also $\varphi(w) = \varphi\big(f(v)\big) = 0$.

Ist umgekehrt f nicht surjektiv, so lässt sich eine Basis w_i, $i \in I_0$, von $\operatorname{Bild} f$ zu einer Basis w_i, $i \in I$, $I_0 \subset I$, von W ergänzen. Bei $\operatorname{Dim} W = \infty$ hat man dazu Satz 3.A.16 oder sogar die Verallgemeinerung im Anschluss an Satz 3.A.18 zu benutzen. Für die Linearform $\psi \in W^*$ mit $\psi(w_i) = 0$ für $i \in I_0$ und $\psi(w_i) = 1$ für $i \in I - I_0$ gilt dann $\psi \,|\, \operatorname{Bild} f = 0$, also $f^*(\psi) = \psi \circ f = 0$, und $\psi \neq 0$, d.h. f^* ist nicht injektiv.

Ist f injektiv und ist v_i, $i \in I_0$, eine Basis von V, so sind die $w_i := f(v_i)$, $i \in I_0$, nach Satz 5.D.3 (2) linear unabhängig und lassen sich wie oben zu einer Basis w_i, $i \in I$, $I_0 \subseteq I$, von W ergänzen. Zu vorgegebenem $\varphi \in V^*$ definieren wir $\psi \in W^*$ durch $\psi(w_i) := \varphi(v_i)$ für $i \in I_0$ und $\psi(w_i) := 0$ für $i \notin I_0$. Dann gilt $\big(f^*(\psi)\big)(v_i) = \psi\big(f(v_i)\big) = \psi(w_i) = \varphi(w_i)$ für $i \in I_0$, d.h. es ist $f^*(\psi) = \varphi$, und f^* ist surjektiv.

Ist umgekehrt f nicht injektiv, so kann man wie oben eine Basis v_i, $i \in I_0$, von $\operatorname{Kern} f \neq 0$ zu einer Basis v_i, $i \in I$, $I_0 \subseteq I$, von V ergänzen. Die Linearform $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_i) := 1$ für $i \in I_0$ und $\varphi(v_i) := 0$ für $i \in I - I_0$ lässt sich dann nicht in der Form $f^*(\psi) = \psi \circ f$ mit einem $\psi \in W^*$ schreiben, da $\psi \circ f$ auf $\operatorname{Kern} f$ verschwindet. Daher ist dann f^* auch nicht surjektiv.

Die Aussagen über die Bijektivität von f und f^* erhält man jeweils, indem man die über die Injektivität und Surjektivität zusammennimmt. Schließlich sei darauf hingewiesen, dass sich aus Beispiel 6.C.6 ein weiterer Beweis der Aussagen (mit exakten Sequenzen) ergibt. •

Abschnitt 5.G, Aufg. 15 , p. 106 (1.10.2011) :

Seien $x_1, \ldots, x_n$ von 0 verschiedene Vektoren eines Vektorraums V über dem Körper K, der mindestens n Elemente besitze. Dann gibt es eine Hyperebene in V, die keinen der Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ enthält.

Beweis: Indem man x_i zu einer Basis von V ergänzt, sieht man, dass es Linearformen $f_i \in V^*$ gibt mit $f_i(x_i) = 1 \neq 0$. Daher ist der Raum $(Kx_i)^\circ$ der auf x_i verschwindenden Linearformen ein echter Unterraum von V^*. Nach Lemma 1.C.12 ist dann auch die Vereinigung $(Kx_1)^\circ \cup \cdots \cup (Kx_n)^\circ$ von V^* verschieden, d.h. es gibt eine Linearform $f \in V^*$ mit $f(x_i) \neq 0$ für alle i. Somit ist $H := \operatorname{Kern} f$ eine Hyperebene von V, die keinen der Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ enthält. •

Bemerkung: Man hätte im Fall eines endlichdimensionalen Vektorraums V auch so argumentieren können: Nach 5.F, Aufg. 7 gibt es zu den Unterräumen $Kx_1, \ldots, Kx_n$ von V ein gemeinsames Komplement W in V mit $Kx_i \oplus W = V$ für alle i. Dann ist $\mathrm{Dim}_K W = \mathrm{Dim}_K V - 1$ und somit W eine Hyperebene, die keinen der Vektoren x_i enthält. •