Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 2, 2. Aufl. (Version 2010), Kapitel 1

1 Vektorräume

Abschnitt 1.A, Aufg. 1, p. 4 (1.5.2011):

Seien A ein Ring, $y \in A$ ein Element mit $y^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x \in A$ ein mit y vertauschbares Element.

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $(x+y)^m = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$.

b) Genau dann ist $x+y$ eine Einheit in A, wenn x eine Einheit in A ist. In diesem Fall gilt die Formel aus a) für alle $m \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $1+y$ eine Einheit.

Beweis: a) Wie in Band 1 im Anschluss an 4.C.2 bemerkt, gilt der Binomialsatz $(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$. Wegen $y^n = 0$ gilt auch $y^k = y^n y^{k-n} = 0$ für alle $k \geq n$. Daraus folgt die Behauptung bei $m \geq n$. Bei $m < n$ sind die Summanden mit $m < k \leq n-1$ gleich 0, da die darin auftretenden Binomialkoeffizienten verschwinden.

b) Sei zunächst $x+y$ eine Einheit in A. Dann gibt es ein $z \in A$ mit $(x+y)z = z(x+y) = 1$. Mit a) folgt

$$1 = (x+y)^n z^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k z^n = x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-1-k} y^k z^n \right),$$

$$1 = z^n (x+y)^n = z^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \left(z^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-1-k} y^k \right) x\,,$$

d.h. es gibt Elemente $r, s \in A$ mit $xr = 1$ und $sx = 1$. Es folgt $r = (sx)r = s(xr) = s$, und x ist ebenfalls eine Einheit in A mit $x^{-1} = r = s$.

Sei umgekehrt x eine Einheit in a mit $s := x^{-1}$. Dann gilt $sx = xs = 1$ und folglich wegen $xy = yx$ auch $sy = (sy)(xs) = s(yx)s = s(xy)s = (sx)(ys) = ys$.

Durch Induktion über $m \in \mathbb{N}$ zeigen wir $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{-m}{k} s^{m+k} y^k \right) (x+y)^m = 1$. Bei $m = 0$ ist in der Summe nur der Summand mit $k = 0$ von 0 verschieden, und zwar gleich 1, d.h. beide Faktoren des Produkts sind 1.

Der Schluss von m auf $m+1$ folgt mit der Regel vom Pascalschen Dreieck, vgl. Band 1, 2.B.9 (4), nach Indexwechsel aus $y^n = 0$ und der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{-(m+1)}{k} s^{m+1+k} y^k \right) (x+y)^{m+1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{-(m+1)}{k} s^{m+1+k} y^k \right) (x+y)\,(x+y)^m \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{-(m+1)}{k} s^{m+k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-(m+1)}{k} s^{m+1+k} y^{k+1} \right) (x+y)^m \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{-(m+1)}{k} s^{m+k} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{-(m+1)}{k-1} s^{m+k} y^k \right) (x+y)^m \\
&= \left(\binom{-(m+1)}{0} s^m y^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{-m}{k} s^{m+k} y^k + \binom{-(m+1)}{n-1} s^{m+n} y^n \right) (x+y)^m \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{-m}{k} s^{m+k} y^k \right) (x+y)^m = 1\,.
\end{aligned}$$

Wegen der Vertauschbarkeit von x, y und s gilt auch $(x+y)^m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{-m}{k} s^{m+k} y^k = 1$. Für $m = 1$ liefert dies die Invertierbarkeit von $x+y$. Ersetzt man in dem Bewiesenen m durch $-m$ mit $m<0$, so bekommt man wegen $s^{m+k} = x^{-m-k}$ gerade die Formel aus a) für negative m. •

Beweisvariante: Ist x eine Einheit, so ist auch $x+y$ eine Einheit mit $(x+y)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{-k-1} y^k$ wegen

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{-k-1} y^k\Big)(x+y) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{-k-1} y^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{-k} y^k = (-1)^0 x^0 y^0 + (-1)^{n-1} x^{-n} y^n = 1$$

und analog $(x+y)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{-k-1} y^k = 1$.

Ist umgekehrt $\tilde{x} := x+y$ eine Einheit und setzen wir $\tilde{y} := -y$, so gilt $\tilde{x}\tilde{y} = \tilde{y}\tilde{x}$ und $\tilde{y}^n = 0$ und nach dem soeben Bewiesenen ist auch $x = \tilde{x} + \tilde{y}$ eine Einheit. •

Abschnitt 1.C, Varianten zu **Aufg. 1**, p. 12 (1.4.2011) :

a) Nach Band 1, Satz 4.A.5 ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}31$ ein Körper. Man stelle fest, welche der beiden folgenden Teilmengen Untergruppen seiner multiplikativen Gruppe $G := (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}31 - \{\overline{0}\}, \cdot)$ sind:

$$H_1 := \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{18}, \overline{21}\}\ , \qquad H_2 := \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}\}\ .$$

b) Nach Band 1, Satz 4.A.5 ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}29$ ein Körper. Man stelle fest, welche der beiden folgenden Teilmengen Untergruppen seiner multiplikativen Gruppe $G := (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}29 - \{\overline{0}\}, \cdot)$ sind:

$$H_1 := \{\overline{1}, \overline{12}, \overline{17}, \overline{28}\}\ , \qquad H_2 := \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{20}, \overline{24}\}\ .$$

Lösung: a) H_1 ist keine Untergruppe, da beispielsweise $\overline{3}\cdot\overline{18} = \overline{54} = \overline{23}$ nicht in H_1 liegt für $\overline{3}, \overline{18} \in H_1$.

H_2 ist eine Untergruppe von G, da gilt: (1) Die Einträge in der folgenden Verknüpfungstafel liegen alle in H_2, d.h. die Einschränkung der Verknüpfung von G auf H_2 definiert eine Verknüpfung auf H_2.

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{16}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$

(2) H_2 enthält das neutrale Element $\overline{1}$ von G. (3) In jeder der fünf Zeilen (und Spalten) der Verknüpfungstafel kommt $\overline{1}$ genau einmal vor, d.h. zu jedem Element von H_2 liegt das Inverse in H_2.

b) H_1 ist eine Untergruppe von G, da gilt: (1) Die Einträge in der folgenden Verknüpfungstafel liegen alle in H_1, d.h. die Einschränkung der Verknüpfung von G auf H_1 definiert eine Verknüpfung auf H_1.

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{28}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{28}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{28}$	$\overline{1}$	$\overline{17}$
$\overline{17}$	$\overline{17}$	$\overline{1}$	$\overline{28}$	$\overline{12}$
$\overline{28}$	$\overline{28}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$

(2) H_1 enthält das neutrale Element $\overline{1}$ von G. (3) In jeder der vier Zeilen (und Spalten) kommt $\overline{1}$ genau einmal vor, d.h. zu jedem Element von H_1 liegt das Inverse in H_1.

H_2 ist keine Untergruppe, da beispielsweise $\overline{4}\cdot\overline{8} = \overline{32} = \overline{3}$ nicht in H_2 liegt für $\overline{4}, \overline{8} \in H_2$. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 2, p. 12 (1.5.2011) :

Man beweise Satz 1.C.6: Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}\,\mathrm{ggT}\,(a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathbb{Z}a_1 \cap \cdots \cap \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}\,\mathrm{kgV}\,(a_1, \ldots, a_n)$.

Beweis: Sei $b := \mathrm{kgV}(a_1, , \ldots, a_n)$. Dann gibt es $b_i \in \mathbb{Z}$ mit $b = b_i a_i \in \mathbb{Z}a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $zb \in \mathbb{Z}a_1 \cap \cdots \cap \mathbb{Z}a_n$ für alle $z \in \mathbb{Z}$. Es folgt $\mathbb{Z}b \subseteq \mathbb{Z}a_1 \cap \cdots \cap \mathbb{Z}a_n$.

Ist umgekehrt $z \in \mathbb{Z}a_1 \cap \cdots \cap \mathbb{Z}a_n$, so gibt es $c_i \in \mathbb{Z}$ mit $z = c_i a_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist z ein gemeinsames Vielfaches der a_i, also ein Vielfaches von $b := \mathrm{kgV}(a_1, , \ldots, a_n)$, und es folgt $z \in \mathbb{Z}b$. Daher ist $\mathbb{Z}a_1 \cap \cdots \cap \mathbb{Z}a_n \subseteq \mathbb{Z}b$. Insgesamt ergibt sich $\mathbb{Z}a_1 \cap \cdots \cap \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}b = \mathbb{Z}\,\mathrm{kgV}\,(a_1, \ldots, a_n)$.

Sei $c := \mathrm{ggT}(a_1, , \ldots, a_n)$. Dann gibt es $c_i \in \mathbb{Z}$ mit $a_i = c_i c$ für alle $i = 1, \ldots, n$, also $z_1 a_1 + \cdots + z_n a_n = (z_1 c_1 + \cdots + z_n c_n)c \in \mathbb{Z}c = \mathbb{Z}\,\mathrm{ggT}\,(a_1, \ldots, a_n)$ für $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}c$. Es folgt $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n \subseteq \mathbb{Z}c$.

Nach dem Lemma von Bezout, vgl. Band 1, Abschnitt 2.D, Aufg. 24, gibt es andererseits $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Z}$ mit $c = \mathrm{ggT}(a_1, , \ldots, a_n) = u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n \in \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n$, also mit $zc \in \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ und somit $\mathbb{Z}c \subseteq \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n$. Insgesamt ergibt sich $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}\,\mathrm{ggT}\,(a_1, \ldots, a_n)$.

Beweisvariante: Statt des Lemmas von Bezout kann man für den Beweis der zuletzt gezeigten Identität auch Satz 1.C.5 aus diesem Band verwenden. Danach gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}a$, und es genügt zu zeigen, dass a ein größter gemeinsamer Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ ist. Wegen $a_i \in \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n = \mathbb{Z}a$ ist a nun ein Teiler von a_i für $i = 1, \ldots, n$. Ist andererseits d ein beliebiger gemeinsamer Teiler von $a_1, \ldots, a_n$, also $a_i = d_i d$ mit $d_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, n$, so gibt es wegen $a \in \mathbb{Z}a = \mathbb{Z}a_1 + \cdots + \mathbb{Z}a_n$ Elemente $z_i \in \mathbb{Z}$ mit $a = z_1 a_1 + \cdots + z_n a_n = (z_1 d_1 + \cdots + z_n d_n)d$, d.h. d teilt auch a. Daher ist a der (bis auf Multiplikation mit -1 eindeutig bestimmte) größte gemeinsame Teiler der a_i. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 3, p. 12 (1.5.2011) :

Seien H_1 und H_2 Untergruppen der Gruppe G. Genau dann ist $H_1 \cup H_2$ ebenfalls eine Untergruppe von G, wenn $H_1 \subseteq H_2$ oder $H_2 \subseteq H_1$ ist.

Beweis: Bei $H_1 \subseteq H_2$ ist $H_1 \cup H_2 = H_2$ und bei $H_2 \subseteq H_1$ ist $H_1 \cup H_2 = H_1$, also ist $H_1 \cup H_2$ in jedem der beiden Fälle eine Untergruppe von G.

Sei umgekehrt $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G. Angenommen, es sei $H_1 \not\subseteq H_2$. Dann gibt es ein $x \in H_1$ mit $x \notin H_2$. Wir zeigen $H_2 \subseteq H_1$. Sei dazu $y \in H_2$. Wegen $x, y \in H_1 \cup H_2$ ist dann auch $xy \in H_1 \cup H_2$. Daher ist $xy = h_1 \in H_1$ oder $xy = h_2 \in H_2$. Im zweiten Fall wäre aber $x = h_2 y^{-1} \in H_2$ im Widerspruch zur Wahl von x. Also ist $xy = h_1 \in H_1$, d.h. $y = x^{-1}h_1 \in H_1$. Damit ist $H_2 \subseteq H_1$ gezeigt. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 4, p. 12 (1.5.2011) :

Sei A eine Teilmenge der Gruppe G. Dann erzeugt A oder aber $G - A$ die Gruppe G.

Beweis: Angenommen, A erzeuge die Gruppe G nicht. Dann gibt es definitionsgemäß eine Untergruppe H_1 von G mit $A \subseteq H_1$ und $H_1 \neq G$. Wir zeigen, dass $G - A$ die Gruppe G erzeugt. Sei dazu H_2 eine Untergruppe von G mit $G - A \subseteq H_2$. Wir haben $H_2 = G$ zu zeigen. Nun gilt $G = A \cup (G - A) \subseteq H_1 \cup H_2 \subseteq G$, d.h. $H_1 \cup H_2 = G$ ist eine Gruppe. Die vorstehende Aufg. 3 liefert $H_1 \subseteq H_2$, d.h. $G = H_1 \cup H_2 = H_2$, was zu zeigen war, oder aber $H_2 \subseteq H_1$, d.h. $G = H_1 \cup H_2 = H_1$, im Widerspruch zur Wahl von H_1. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 5, p. 12 (1.5.2011) :

Eine nichtleere endliche Teilmenge H einer Gruppe G ist bereits dann eine Untergruppe von G, wenn H mit je zwei Elementen von G auch deren Produkt enthält.

Beweis: Wegen $H \neq \emptyset$, gibt es ein Element $a \in H$. Nach Voraussetzung bildet die Abbildung $\lambda_a : G \to G$ mit $\lambda_a(x) := ax$ die Menge H in sich ab. Aus $\lambda_a(x) = \lambda_a(y)$, d.h. $ax = ay$ folgt $x = y$ durch Multiplikation von links mit a^{-1}. Daher ist λ_a injektiv. Als injektive Abbildung ist $\lambda_a|H : H \to H$ nach Band 1, Beispiel 2.B.5 auch surjektiv, da H endlich ist. Daher gibt es ein $x_0 \in H$ mit $\lambda_a(x_0) = ax_0 = a$. Multiplikation von links mit $a^{-1} \in G$ liefert $x = e$, also $e \in H$, wo e das neutrale Element von G ist.

Sei nun $h \in H$ beliebig. Wie oben ist die Multiplikation $\lambda_h|H : H \to H$ surjektiv. Zu $e \in H$ gibt es also ein $h' \in H$ mit $e = \lambda_h(h') = hh'$. Multiplikation von links mit $h^{-1} \in G$ liefert $h^{-1} = h^{-1}hh' = h' \in H$. •

Abschnitt 1.C, Variante zu **Aufg. 5**, p. 12 (1.5.2011) :

A und B seien Teilmengen einer endlichen Gruppe G . Für die Elementezahlen gelte $|A|+|B| > |G|$. Man zeige $G = AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

Beweis: Sei $x \in G$ beliebig. Da die Abbildungen $a \to a^{-1}$ von G in sich und die Multiplikation $\rho_x : G \to G$ mit x von rechts jeweils injektiv sind, haben $\{a^{-1}x \mid a \in A\}$ und A gleich viel Elemente. Dann gibt es wegen $|\{\{a^{-1}x \mid a \in A\}|+|B| = |A|+|B| > |G|$ ein Element $b \in B$ mit $b \in \{a^{-1}x \mid a \in A\}$, d.h. $b = a^{-1}x$ für ein $a \in A$. Es folgt $x = ab \in AB$. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 10, p. 13 (1.5.2011) :

Sei G eine Gruppe. Für Teilmengen $A, B \subseteq G$ bezeichnen wir mit AB die Menge der Produkte $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Seien nun F, H Untergruppen von G. Genau dann ist FH eine Untergruppe von G, wenn $FH = HF$ ist.

Beweis: Sei zunächst FH eine Untergruppe von G. Für $f \in F$ und $h \in H$ ist dann auch $(fh)^{-1} \in FH$, d.h. es gibt $f' \in F$ und $h' \in H$ mit $(fh)^{-1} = f'h'$, also $fh = \big((fh)^{-1}\big)^{-1} = (f'h')^{-1} = (h')^{-1}(f')^{-1} \in HF$. Daher ist $FH \subseteq HF$. Ferner gilt für $hf \in HF$ auch $hf = \big((hf)^{-1}\big)^{-1} = (f^{-1}h^{-1})^{-1} \in FH$, da FH eine Gruppe ist und $f^{-1}h^{-1}$ in FH liegt. Daher ist $HF \subseteq FH$ und insgesamt $FH = HF$.

Sei umgekehrt $FH = HF$. Für das neutrale Element e von G gilt dann $e \in F$, $e \in G$, also $e = e \cdot e \in FH$. Zu $fh \in FH$ mit $f \in F$ und $h \in H$ liegt auch das Inverse in FH wegen $(fh)^{-1} = h^{-1}f^{-1} \in HF = FH$. Sind schließlich fh und $f'h'$ mit $f, f' \in F$ und $h, h' \in H$ Elemente von FH, so gibt es wegen $FH = HF$ Elemente $h_1, h_2 \in H$ und $f_1, f_2 \in F$ mit $f'h' = h_1 f_1$ und dann $(hh_1)f_1 = f_2h_2$, also $(fh)(f'h') = (fh)(h_1 f_1) = f(hh_1)f_1 = ff_2h_2 \in FH$. Daher ist FH auch abgeschlossen. •

Abschnitt 1.C, Variante zu **Aufg. 11**, p. 13 (1.5.2011) :

Man stelle fest, welche der folgenden beiden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist:

$$U_1 := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 = 4y^2\big\} \ , \qquad U_2 := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2 = 4xy - 4y^2\big\} \ .$$

Lösung: $U_1 := \big\{(x, y) \bigm| x^2 - 4y^2 = 0\big\} = \big\{(x, y) \bigm| (x-2y)(x+2y) = 0\big\}$ ist die Vereinigung der beiden veschiedenen Geraden $\big\{(x, y) \bigm| y = \frac{1}{2}x\big\}$ und $\big\{(x, y) \bigm| y = -\frac{1}{2}x\big\}$ durch 0 und daher nach Lemma 1.C.12 kein Untervektorraum. Dies sieht man direkt auch so: Es ist $(2, 1) \in U_1$ und $(2, -1) \in U_1$ (wegen $2^2 = 4 \cdot 1^2 = 4 \cdot (-1)^2$), aber $(2, 1) + (2, -1) = (4, 0) \notin U_1$ (wegen $4^2 \neq 4 \cdot 0^2$).

Da das Quadrat $(x-2y)^2$ in $\mathbb{R}$ nur dann verschwindet , wenn dies für $x - 2y$ gilt, ist U_2 die Gerade $\big\{(x, y) \bigm| x^2 - 4xy + 4y^2 = 0\big\} = \big\{(x, y) \bigm| (x-2y)^2 = 0\big\} = \big\{(x, y) \bigm| x - 2y = 0\big\} = \big\{(x, y) \bigm| y = \frac{1}{2}x\big\}$ durch 0 und daher ein Unterraum. Dies sind man direkt auch so: Es ist $0 = (0, 0) \in U_2$ wegen $0 = 2 \cdot 0$. Sind (x, y) , $(x', y') \in U_2$ so ist $x - 2y = 0$ und $x' - 2y' = 0$, und es folgt $(x+x') - 2(y+y') = 0$, d.h. $(x+x', y+y') \in U_2$ sowie $rx - 2ry = 0$, d.h. $r(x, y) \in U_2$, für $r \in \mathbb{R}$. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 17, p. 14 (1.5.2011) :

Für Unterräume U, W eines K-Vektorraums V zeige man: Genau dann ist $V - (U - W)$ Unterraum von V, wenn $U = V$ oder $U \subseteq W$ ist.

Beweis: Wenn $U = V$ ist, ist $V - (U - W) = V - (V - W) = W$ ein Unterraum von V; wenn $U \subseteq W$ ist, ist $V - (U - W) = V$ ebenfalls ein Unterraum von V.

Sei umgekehrt $V - (U - W)$ ein Unterraum von V und $U \neq V$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $v \notin U$, also mit $v \in V - (U - W)$. Wir haben $U \subseteq W$ zu zeigen. Sei dazu $u \in U$. Angenommen, es sei $u \notin W$. Dann ist $u \in U - W$ und somit $u \notin V - (U - W)$. Es folgt $v+u \notin V - (U - W)$, da andernfalls $u = (v+u) + (-1) \cdot v$ Element des Unterraums $V - (U - W)$ wäre. Wegen $v+u \in V$ folgt nun $v+u \in U - W \subseteq U$. Dies liefert den Widerspruch $v = (v+u) + (-1) \cdot u \in U$, da U ein Unterraum von V ist. •

Abschnitt 1.C, Variante zu **Aufg. 17**, p. 14 (1.5.2011) :

Für Unterräume U, W eines K-Vektorraums V mit $U \subseteq W$ und $U \neq W$ zeige man: Genau dann ist $(V-W)\cup U$ Unterraum von V, wenn $W = V$ ist.

Beweis: Angenommen, es sei $W \neq V$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $v \notin W$, also $v \in V - W$. Wegen $U \subseteq W$ und $U \neq W$ gibt es ferner ein $w \in W$ mit $w \notin U$. Wir betrachten $v + w \in V$. Wäre $v + w \in W$, so läge auch $v = (v + w) - w$ im Unterraum W im Widerspruch zur Wahl von v. Also ist $v + w \notin W$ und somit $v + w \in V - W$. Dann lägen aber $v + w$ und v beide in $V - W$ und somit erst recht in $(V - W) \cup U$. Ist dies ein Unterraum, so liegt nun auch die Differenz $w = (v + w) - v$ darin und somit wegen $w \notin U$ in $V - W$, was aber im Widerspruch zu $w \in W$ steht. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 19, p. 14 (1.5.2011) :

Für Unterräume U_1, U_2, U_3 eines K-Vektorraums V mit $U_1 \subseteq U_2$ gilt

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = U_2 \cap (U_1 + U_3) \qquad (\text{Modulares Gesetz}).$$

Beweis: Wir zeigen zunächst $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq U_2 \cap (U_1 + U_3)$. Sei dazu $v \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Dann ist $v = u + u'$ mit $u \in U_1$ und $u' \in U_2 \cap U_3$, d.h. $u' \in U_2$ und $u' \in U_3$. Wegen $U_1 \subseteq U_2$ ist auch $u \in U_2$. Da U_2 ein Unterraum von V ist, folgt $v = u + u' \in U_2$. Außerdem ist $v = u + u' \in U_1 + U_3$ wegen $u \in U_1$ und $u' \in U_3$, also insgesamt $v \in U_2 \cap (U_1 + U_3)$.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion sei $v \in U_2 \cap (U_1 + U_3)$, d.h. $v \in U_2$ und $v = u + u'$ mit $u \in U_1$ und $u' \in U_3$. Wegen $U_1 \subseteq U_2$ ist auch $u \in U_2$ und folglich $u' = v + (-1) \cdot u \in U_2$, da U_2 ein Unterraum ist. Es folgt $u' \in U_2 \cap U_3$ und somit $v = u + u' \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. •

Abschnitt 1.C, Aufg. 20, p. 14 (1.5.2011) :

Für Unterräume U, W, U', W' eines K-Vektorraums V mit $U \cap W = U' \cap W'$ gilt

$$U = \big(U + (W \cap U')\big) \cap \big(U + (W \cap W')\big).$$

Beweis: Offenbar liegt U in dem Durchschnitt auf der rechten Seite. – Ist umgekehrt $x = u + w = u' + w'$ mit $u, u' \in U$ und $w \in W \cap U'$, $w' \in W \cap W'$ ein Element dieses Durchschnitts, so ist $u - u' = w' - w$ in U und in W als Differenz von Elementen dieser Unterräume, also auch in $U \cap W = U' \cap W'$. Insbesondere liegt $w' - w$ in U'. Wegen $w \in U'$ ist dann auch $w' = (w' - w) + w \in U'$. Da sowieso $w' \in W'$ gilt, ist somit $w' \in U' \cap W' = U \cap W$, d.h. $w' \in U$, und schließlich $x = u' + w' \in U$. Dies war zu zeigen. •

Abschnitt 1.C, Zusatzaufgabe, p. 14 (1.5.2011) :

Für Unterräume U und W eines K-Vektorraums V zeige man: Ist $U \cup W = U + W$, so ist $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$. (Vgl. dazu auch 1.C, Aufg. 3.)

Beweis: Sei $U \cup W = U + W$, aber $U \not\subseteq W$. Wir haben $W \subseteq U$ zu zeigen. Sei dazu $w \in W$. Wir zeigen $w \in U$: Nach Voraussetzung gibt es ein $u \in U$ mit $u \notin W$. Dann ist $u + w \in U + W = U \cup W$, d.h. es ist $u + w \in U$ oder $u + w \in W$. Im zweiten Fall wäre auch $u = (u + w) + (-1) \cdot w$ ein Element von W (da W ein Unterraum von V ist) im Widerspruch zur Wahl von u. Also ist $u + w \in U$ und somit $w = (u + w) + (-1) \cdot u \in U$, da U ein Unterraum von V ist. •

Beweisvariante: Bei $U \not\subseteq W$ und $W \not\subseteq U$ ist sicher $W \neq U + W$ und $U \neq U + W$, da U und W Unterräume von $U + W$ sind. Nach Lemma 1.C.12 (mit $U + W$ statt V angewandt) ist dann aber $U \cup W \neq U + W$. Widerspruch! •

2 Lineare Gleichungssysteme

Abschnitt 2.A, Teil von **Aufg. 2**, p. 19 (1.5.2011) :
Man bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 &= 2\,; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 1\,; \end{aligned}$$

Lösung: Wir verwenden für beide Gleichungssysteme das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Beim ersten Gleichungssystem subtrahieren wir zunächst die erste Gleichung von der dritten und das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten, subtrahieren dann die zweite Gleichung von der ersten und ihr $(a-1)$-faches von der dritten (unter Benutzung von $4-(a-1)(a+2) = -(a-2)(a+3)$).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 &= 2\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + (a+2)x_3 &= 1 \\ (a-1)x_2 + 4x_3 &= 1\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - (a+3)x_3 &= 0 \\ x_2 + (a+2)x_3 &= 1 \\ (a-2)(a+3)x_3 &= a-2, \end{aligned}$$

Bei $a = -3$ hat die dritte Gleichung die Form $0 = -5$, und das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Bei $a = 2$ ist das Gleichungssystem lösbar, und die Lösungsmenge ist wegen $x_1 = (a+3)x_3 = 5x_3$ sowie $x_2 = -(a+2)x_3+1 = -4x_3+1$ die Gerade

$$\begin{aligned} L &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \;\big|\; x_1 = 5x_3\,, x_2 = -4x_3+1\,,\ \ x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} \\ &= \big\{(5x_3, -4x_3+1, x_3) \;\big|\; x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} = (0,1,0) + \mathbb{R}(5,-4,1)\,. \end{aligned}$$

Bei $a \neq -3$ und $a \neq 2$ liefert die letzte Gleichung $x_3 = \frac{1}{a+3}$, dann die mittlere Gleichung $x_2 = 1 - \frac{a+2}{a+3} = \frac{1}{a+3}$, schließlich die erste Gleichung $x_1 = \frac{a+3}{a+3} = 1$.

Beim zweiten Gleichungssystem subtrahieren wir im ersten Schritt die erste Gleichung von der dritten und das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten, vertauschen dann die zweite und die dritte Gleichung, wobei wir die die neue zweite Gleichung gleichzeitig durch 2 teilen, und subtrahieren im dritten Schritt das a-fache der zweiten Gleichung von der dritten (unter Benutzung von $5 - \frac{1}{2}(a+3)a = -\frac{1}{2}(a-2)(a+5)$).

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + ax_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 0\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 1 \\ ax_2 + 5x_3 &= -1 \\ 2x_2 + (a+3)x_3 &= -1\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 + \tfrac{1}{2}(a+3)x_3 &= -\tfrac{1}{2} \\ ax_2 + 5x_3 &= -1\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 + \tfrac{1}{2}(a+3)x_3 &= -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2}(a-2)(a+5)x_3 &= \tfrac{1}{2}(a-2)\,. \end{aligned}$$

Bei $a = -5$ hat die dritte Gleichung die Form $0 = -\frac{7}{2}$, und das Gleichungssystem ist nicht lösbar. Bei $a = 2$ ist das Gleichungssystem lösbar, und die Lösungsmenge ist wegen $x_1 = 3x_3 + 1$, $x_2 = -\frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}$ die Gerade

$$\begin{aligned} L &= \big\{(x_1, x_2, x_3) \;\big|\; x_1 = 3x_3+1\,, x_2 = -\tfrac{5}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}\,,\ \ x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} \\ &= \big\{(3x_3+1, -\tfrac{5}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}, x_3) \;\big|\; x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} = (1, -\tfrac{1}{2}, 0) + \mathbb{R}(3, -\tfrac{5}{2}, 1)\,. \end{aligned}$$

Bei $a \neq -5$ und $a \neq 2$ liefert die letzte Gleichung $x_3 = -\frac{1}{a+5}$, dann die mittlere Gleichung $x_2 = \frac{1}{2}\frac{a+3}{a+5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{a+5}$, schließlich die erste Gleichung $x_1 = -\frac{3}{a+5} + 1 = \frac{a+2}{a+5}$. •

Abschnitt 2.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 19 (1.5.2011) :

Man bestimme die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{Q}$. (Der Fall $a=1$ des ersten Systems ist das zweite Gleichungssystem aus Aufg. 3.)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= a\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= a\,. \end{aligned}$$

Lösung: Wir verwenden für beide Gleichungssysteme das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Beim ersten System addieren wir das (-2)-fache der ersten Gleichung zur zweiten und das (-3)-fache der ersten Gleichung zur dritten. Im nächsten Schritt addieren wir das 2-fache der zweiten Gleichung zur dritten und sehen, dass das System genau dann lösbar ist, wenn $a = 17$ gilt.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= a\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -4 \\ -2x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= a-9, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + x_3 - 2x_4 &= 11 \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 0 &= a-17. \end{aligned}$$

Bei $a=17$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems somit die Ebene

$$\begin{aligned} L &= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \bigm| x_1 = -x_3+2x_4+11\,,\ x_2 = 2x_3-2x_4-4\,,\quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} \\ &= \big\{(-x_3+2x_4+11,\ 2x_3-2x_4-4,\ x_3,\ x_4) \bigm| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} \\ &= (11, -4, 0, 0) + \mathbb{R}(-1, 2, 1, 0) + \mathbb{R}(2, -2, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

Beim zweiten System vertauschen wir zunächst die beiden ersten Gleichungen und addieren dann das (-2)-fache der ersten Gleichung zur zweiten und das (-1)-fache der ersten Gleichung zur dritten. Im nächsten Schritt teilen wir die zweite Gleichung durch den Koeffizienten -5 von x_2, schließlich addieren wir das (-5)-fache der zweiten Gleichung von der dritten und sehen, dass das System genau dann lösbar ist, wenn $a = 5$ gilt. In diesem Fall addieren wir noch das (-2)-fache der zweiten Gleichung zur ersten:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= a\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= a\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ -5x_2 + 3x_3 - 7x_4 &= -3 \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= a-2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{7}{5}x_4 &= \tfrac{3}{5} \\ 5x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= a-2\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{7}{5}x_4 &= \tfrac{3}{5} \\ 0 &= a-5\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{6}{5}x_4 &= \tfrac{4}{5} \\ x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{7}{5}x_4 &= \tfrac{3}{5} \\ 0 &= a-5\,. \end{aligned}$$

Bei $a=5$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems somit die Ebene

$$\begin{aligned} L &= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \bigm| x_1 = -\tfrac{1}{5}x_3-\tfrac{6}{5}x_4+\tfrac{4}{5}\,,\ x_2 = \tfrac{3}{5}x_3-\tfrac{7}{5}x_4+\tfrac{3}{5}\,,\quad x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} \\ &= \big\{(-\tfrac{1}{5}x_3-\tfrac{6}{5}x_4+\tfrac{4}{5},\ \tfrac{3}{5}x_3-\tfrac{7}{5}x_4+\tfrac{3}{5},\ x_3,\ x_4) \bigm| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\big\} \\ &= (\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0, 0) + \mathbb{R}(-\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5}, 1, 0) + \mathbb{R}(-\tfrac{6}{5}, -\tfrac{7}{5}, 0, 1)\,. \end{aligned}$$

•

Abschnitt 2.A, Aufg. 7, p. 20 (1.5.2011) :

Die Menge der m-Tupel $(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$, für die ein lineares Gleichungssystem $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, über dem Körper K eine Lösung besitzt, ist ein K-Untervektorraum von K^m.

Beweis: Sei U die Menge der m-Tupel $(b_1, \ldots, b_m) \in K^m$, für die $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, eine Lösung in K besitzt.

Es ist $0 = (0, \ldots, 0) \in U$, da die Gleichungen bei rechter Seite 0 eine Lösung haben, nämlich 0.

Sind $b = (b_1, \ldots, b_m)\,, b' = (b'_1, \ldots, b'_m) \in U$, so gibt es $x = (x_1, \ldots, x_n)\,, x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in K^n$ mit $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i\,, \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j = b'_i\,, i = 1, \ldots, m$. Es folgt $\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j+x'_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j+x'_j) = b_i + b'_i$ und $\sum_{j=1}^n a_{ij}rx_j = rb_i\,, i = 1, \ldots, m$. Daher sind auch $b+b'$ und rb für $r \in K$ Elemente von U, und U ist ein Unterraum von K^m. •

Abschnitt 2.A, Variante zu **Aufg. 7**, p. 20 (1.5.2011) :

Seien a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, feste Elemente eines Körpers K. Die Menge U der n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, für die wenigstens eines der linearen Gleichungssysteme

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \ldots , \ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

mit Elementen $b_i \in K$, für die $b_1 + \cdots + b_m = 0$ gilt, die Lösung x besitzt, ist ein K-Unterraum von K^n.

Beweis: Es ist $0 = (0, \ldots, 0) \in U$, da die Gleichungen mit $b_i := 0$ die Lösung 0 haben und dafür $b_1 + \cdots + b_m = 0 + \cdots + 0 = 0$ gilt.

Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in U$, so gibt es $b = (b_1, \ldots, b_m)$, $b' = (b'_1, \ldots, b'_m) \in K^m$ mit $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j = b'_i$, $i = 1, \ldots, m$, und $\sum_{i=1}^m b_i = \sum_{i=1}^m b'_i = 0$. Es folgt $\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j + x'_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j + x'_j) = b_i + b'_i$ und $\sum_{j=1}^n a_{ij}rx_j = rb_i$, $i = 1, \ldots, m$, sowie $\sum_{i=1}^m (b_i + b'_i) = \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{i=1}^m b'_i = 0$ und $\sum_{i=1}^m (rb_i) = r\sum_{i=1}^m b_i = 0$. Daher sind auch $x + x'$ und rx für $r \in K$ Elemente von U, und U ist ein Unterraum von K^n. •

3 Basen und Dimension von Vektorräume

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 27 (1.5.2011):

Man zeige, dass die Vektoren $(1+\mathrm{i}\,,1)$, $(1\,,1-\mathrm{i})$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$ bilden.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind und $\mathbb{C}^2$ erzeugen.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $r, s \in \mathbb{C}$ mit $r(1+\mathrm{i}\,,1) + s(1\,,1-\mathrm{i}) = 0$. Es folgt $(1+\mathrm{i})r + s = 0$ und $r + (1-\mathrm{i})s = 0$. Die erste dieser Gleichungen liefert $r = -s/(1+\mathrm{i}) = (-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2})s$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2})s + (1-\mathrm{i})s = (\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2})s = 0$, d.h. $s=0$, und dann auch $r=0$. Die beiden Vektoren sind also in der Tat linear unabhängig.

Wir zeigen nun, dass die beiden Vektoren $\mathbb{C}^2$ erzeugen. Sei dazu $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Wir suchen $r, s \in \mathbb{C}$ mit $r(1+\mathrm{i}\,,1) + s(1\,,1-\mathrm{i}) = (a,b)$, also $(1+\mathrm{i})r + s = a$, $r + (1-\mathrm{i})s = b$. Die erste dieser Gleichungen liefert $s = a - (1+\mathrm{i})r$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $r + (1-\mathrm{i})\big(a - (1+\mathrm{i})r\big) = b$, d.h. $-r + (1-\mathrm{i})a = b$, $r = (1-\mathrm{i})a - b$, und dann $s = a - (1-\mathrm{i})r = a - (1+\mathrm{i})\big((1-\mathrm{i})a - b\big) = -a + (1+\mathrm{i})b$. Die angegebenen Vektoren erzeugen also auch $\mathbb{C}^2$ und bilden insgesamt eine Basis von $\mathbb{C}^2$.

Beweisvariante: Da $\mathbb{C}^2$ nach Beispiel 3.B.5 (1) die Dimension 2 hat, liefert Satz 3.B.7, dass 2 Vektoren bereits dann eine Basis von $\mathbb{C}^2$ bilden, wenn sie linear unabhängig sind oder wenn sie $\mathbb{C}^2$ erzeugen. Es hätte also einer der beiden obigen Beweisteile genügt. •

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 27 (1.5.2011):

Man zeige, dass die Vektoren $(2\mathrm{i}\,,2-\mathrm{i})$, $(2+\mathrm{i}\,,-2\mathrm{i})$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$ bilden.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind und $\mathbb{C}^2$ erzeugen.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $r, s \in \mathbb{C}$ mit $r(2\mathrm{i}\,,2-\mathrm{i}) + s(2+\mathrm{i}\,,-2\mathrm{i}) = 0$, d.h. mit $2\mathrm{i}r + (2+\mathrm{i})s = 0$ und $(2-\mathrm{i})r - 2\mathrm{i}s = 0$. Die erste dieser Gleichungen liefert $r = -(2+\mathrm{i})s/(2\mathrm{i}) = (-\frac{1}{2}+\mathrm{i})s$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $(2-\mathrm{i})(-\frac{1}{2}+\mathrm{i})s - 2\mathrm{i}s = \frac{1}{2}\mathrm{i}s = 0$, d.h. $s=0$, und dann auch $r=0$. Die beiden Vektoren sind also in der Tat linear unabhängig.

Wir zeigen nun, dass die beiden Vektoren $\mathbb{C}^2$ erzeugen. Sei dazu $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Wir suchen $r, s \in \mathbb{C}$ mit $r(2\mathrm{i}\,,2-\mathrm{i}) + s(2+\mathrm{i}\,,-2\mathrm{i}) = (a,b)$, haben also die Gleichungen $2\mathrm{i}r + (2+\mathrm{i})s = a$ und $(2-\mathrm{i})r - 2\mathrm{i}s = b$ zu lösen. Die erste dieser Gleichungen liefert $r = -\big((2+\mathrm{i})s/(2\mathrm{i})\big) + a/(2\mathrm{i}) = (-\frac{1}{2}+\mathrm{i})s - \frac{1}{2}\mathrm{i}a$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt sich $(2-\mathrm{i})\big((-\frac{1}{2}+\mathrm{i})s - \frac{1}{2}\mathrm{i}a\big) - 2\mathrm{i}s = b$, d.h. $\frac{1}{2}\mathrm{i}s - (\frac{1}{2}+\mathrm{i})a = b$, $s = (\frac{1}{2}+\mathrm{i})a\cdot(-2\mathrm{i}) + b(-2\mathrm{i}) = (2-\mathrm{i})a - 2\mathrm{i}b$. Damit ist schließlich $r = (-\frac{1}{2}+\mathrm{i})s - \frac{1}{2}\mathrm{i}a = (-\frac{1}{2}+\mathrm{i})\big((2-\mathrm{i})a - 2\mathrm{i}b\big) - \frac{1}{2}\mathrm{i}a = 2\mathrm{i}a + (2+\mathrm{i})b$.

Die angegebenen Vektoren erzeugen also auch $\mathbb{C}^2$ und bilden insgesamt eine Basis von $\mathbb{C}^2$.

Beweisvariante: Da $\mathbb{C}^2$ nach Beispiel 3.B.5 (1) die Dimension 2 hat, liefert Satz 3.B.7, dass 2 Vektoren bereits dann eine Basis von $\mathbb{C}^2$ bilden, wenn sie linear unabhängig sind oder wenn sie $\mathbb{C}^2$ erzeugen. Es hätte also einer der beiden obigen Beweisteile genügt. •

Abschnitt 3.A, Teil von **Aufg. 2**, p. 27 (1.5.2011):

Seien x, y, z linear unabhängige Vektoren eines $\mathbb{Q}$-Vektorraumes V. Man untersuche die folgenden Systeme auf lineare Unabhängigkeit: **a)** $x+y+z,\ 2y+3z,\ x-y+z$. **b)** $x+y+2z,\ x+2y+5z,\ 5x+3y+4z$. **d)** $x+y+z,\ 2x+y+z,\ x+y+3z,\ x-y$.

Lösung: a) Sind $r, s, t \in \mathbb{Q}$ mit $r(x+y+z) + s(2x+3z) + t(x-y+z) = 0$, so ergeben sich wegen der linearen Unabhängigkeit von x, y, z die drei Gleichungen $r+2s+t = 0$, $r-t = 0$, $r+3s+t = 0$. Subtraktion der zweiten von der ersten bzw. dritten Gleichung liefert $2s+2t = 0$ bzw. $3s+2t = 0$. Die Subtraktion der beiden so erhaltenen Gleichungen ergibt $s=0$ und somit $r+t = 0$. Zusammen mit der Gleichung $r-t = 0$ liefert dies $r=t=0$. Die Vektoren $x+y+z$, $2x+y+z$, $x+y+3z$ sind also auch linear unabhängig.

b) Sind $r, s, t \in \mathbb{Q}$ mit $r(x+y+2z) + s(x+2y+5z) + t(5x+3y+4z) = 0$, so ergeben sich wegen der linearen Unabhängigkeit von x, y, z die drei Gleichungen $r+s+5t = 0$, $r+2s+3t = 0$, $2r+5s+4t = 0$. Addition des (-1)-fachen der ersten Gleichungen zur zweiten und des (-2)-fachen der ersten Gleichungen zur dritten liefert jeweils $s-2t=0$, d.h. $s=2t$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann $r=-7t$. Da es keine weiteren Bedingungen an r, s, t gibt, können wir nun $t=1$, $r=-7$, $s=2$ wählen und erhalten in der Tat in $-7(x+y+2z)+2(x+2y+5z)+1\cdot(5x+3y+4z)$ eine Linearkombination der betrachteten drei Vektoren mit nicht verschwindenden Koeffizienten, die gleich 0 ist. Die Vektoren $x+y+2z$, $x+2y+5z$, $5x+3y+4z$ sind also linear abhängig.

c) Sind $r, s, t, u \in \mathbb{Q}$ mit $r(x+y+z)+s(2x+y+z)+t(x+y+3z)+u(x-y)=0$, so ergeben sich wegen der linearen Unabhängigkeit von x, y, z die drei Gleichungen $r+2s+t+u=0$, $r+s+t-u=0$, $r+s+3t=0$. Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert $s+2u=0$, also $s=-2u$. Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichung liefert $2t+u=0$, also $t=-\frac{1}{2}u$. Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $r=-s-3t=2u+\frac{3}{2}u=\frac{7}{2}u$. Da es keine weiteren Bedingungen an r, s, t, u gibt, können wir nun $u=2$, $r=1$, $s=-4$ und $t=-1$ wählen und erhalten in der Tat in

$$7(x+y+z)-4(2x+y+z)-1\cdot(x+y+3z)+2(x-y)$$

eine Linearkombination der betrachteten vier Vektoren mit nicht verschwindenden Koeffizienten, die gleich 0 ist. Sie sind also linear abhängig.

Beweisvariante zu c): Der von x, y, z erzeugte Vektorraum ist 3-dimensional. Nach Satz 3.B.9 (1) sind 4 Vektoren in diesem Vektorraum also stets linear abhängig. •

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 27 (1.5.2011):

Seien x, y, z linear unabhängige Vektoren eines $\mathbb{Q}$-Vektorraumes V. Man untersuche die folgenden Systeme auf lineare Unabhängigkeit: **a)** $x+y+z$, $2x+y+z$, $x+y+3z$. **b)** $x-y-z$, $-2x+y+z$, $x+y+z$.

Lösung: a) Sind $r, s, t \in \mathbb{Q}$ mit $r(x+y+z)+s(2x+y+z)+t(x+y+3z)=0$, so ergeben sich wegen der linearen Unabhängigkeit von x, y, z die drei Gleichungen $r+2s+t=0$, $r+s+t=0$, $r+s+3t=0$. Subtraktion der zweiten von der dritten Gleichung liefert $2t=0$, d.h. $t=0$. Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung liefert $s=0$. Schließlich folgt $r=0$. Die Vektoren $x+y+z$, $2x+y+z$, $x+y+3z$ sind also auch linear unabhängig.

b) Sind $r, s, t \in \mathbb{Q}$ mit $r(x-y-z)+s(-2x+y+z)+t(x+y+z)=0$, so ergeben sich wegen der linearen Unabhängigkeit von x, y, z die drei Gleichungen $r-2s+t=0$, $-r+s+t=0$, $-r+s+t=0$. Die dritte Gleichung stimmt mit der zweiten überein und kann daher weggelassen werden. Addition der beiden ersten Gleichungen liefert $-s+2t=0$, d.h. $s=2t$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert dann $r=3t$. Da es keine weiteren Bedingungen an r, s, t gibt, können wir nun $t=1$, $r=3$, $s=2$ wählen und erhalten in der Tat in $3(x-y-z)+2(-2x+y+z)+1\cdot(x+y+z)$ eine Linearkombination der betrachteten drei Vektoren mit nicht verschwindenden Koeffizienten, die gleich 0 ist. Die Vektoren $x-y-z$, $-2x+y+z$, $x+y+z$ sind also linear abhängig.

Abschnitt 3.A, Teil von **Aufg. 4**, p. 27 (1.5.2011):

Die Elemente $x_1, \dots, x_n$ seien linear unabhängig im K-Vektorraum V, und es sei $x=\sum_{i=1}^n a_i x_i \in V$ mit $a_i \in K$. Genau dann sind die Elemente $x_1-x, \dots, x_n-x$ linear unabhängig, wenn $a_1+\cdots+a_n \neq 1$ ist.

Beweis: Bei $a_1+\cdots+a_n=1$ ist $a_1(x_1-x)+\cdots+a_n(x_n-x)=(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)-(a_1+\cdots+a_n)\,x=x-x=0$, wobei nicht alle Koeffizienten a_i gleich 0 sein können. Die Vektoren sind dann linear abhängig.

Sei nun $a_1+\cdots+a_n \neq 1$ und sei $r_1(x_1-x)+\cdots+r_n(x_n-x)=0$ für $r_j \in K$. Unter Umbenennung von i in j und j in i in der zweiten Summe ergibt sich

$$0=\sum_{j=1}^n r_j(x_j-x)=\sum_{j=1}^n r_j\Big(x_j-\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big)=\sum_{j=1}^n r_j x_j-\sum_{j=1}^n r_j\sum_{i=1}^n a_i x_i=\sum_{j=1}^n r_j x_j-\sum_{i=1}^n r_i\sum_{j=1}^n a_j x_j$$
$$=\sum_{j=1}^n\Big(r_j-a_j\sum_{i=1}^n r_i\Big)x_j\,.$$

Da die x_j linear unabhängig sind, folgt $r_j-a_j\sum_{i=1}^n r_i=0$ für alle j und somit $\sum_{j=1}^n r_j=\Big(\sum_{j=1}^n a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^n r_i\Big)$.

Wegen $\sum_{j=1}^n a_j \neq 1$ folgt $\sum_{i=1}^n r_i=0$ und schließlich $r_j=a_j\sum_{i=1}^n r_i=0$, $j=1, \dots, n$. Das war zu zeigen. •

Abschnitt 3.A, Aufg. 13, p. 28 (1.5.2011) :

Seien $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis des K-Vektorraums V und $a_{ij} \in K$, $1 \le i \le j \le n$. Genau dann ist auch

$y_1 = a_{11}x_1$, $y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2$, ... , $y_{n-1} = a_{1,n-1}x_1 + \cdots + a_{n-1,n-1}x_{n-1}$, $y_n = a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n$

eine Basis von V, wenn $a_{11} \cdots a_{nn} \ne 0$ ist.

Beweis: Sei zunächst $a_{11} \cdots a_{nn} \ne 0$. Durch Induktion über n zeigen wir, dass $y_1, \ldots, y_n$ eine Basis von V ist. Im Fall $n=1$ ist $a_{11} \ne 0$ und somit auch $y_1 \ne 0$, also y_1 linear unabhängig. Außerdem ist jedes Vielfache von x_1 dann auch ein Vielfaches von x_1, d.h. $y1$ erzeugt auch V.

Beim Schluss von $n-1$ auf n ist $a_{11} \cdots a_{n-1,n-1} \ne 0$. Die Vektoren $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sind linear unabhängig, also Basis eines K-Vektorraums V'. Nach Induktionsvoraussetzung folgt, dass $y_1, \ldots, y_{n-1}$ ebenfalls eine Basis von V' ist. Ferner ist $a_{nn} \ne 0$, d.h. das Element x_n lässt sich mit Elementen $x'_n \in V'$ in folgender Form schreiben: $x_n = a_{nn}^{-1}y_n - (a_{nn}^{-1}a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}^{-1}a_{n-1,n-1}x_{n-1}) = a_{nn}^{-1}y_n + x'_n$. Dann ist $y_n = a_{nn}x_n - a_{nn}x'_n$.

Wir zeigen, dass $y_1, \ldots, y_n$ ein Erzeugendensytem von V ist. Sei dazu $x \in V$. Dann gibt es $x' \in V'$ und $a \in K$ mit $x = x' + ax_n = x' + aa_{nn}^{-1}y_n + ax'_n$. Das Element $x' + ax'_n \in V'$ lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren $y_1, \ldots, y_{n-1}$ von V' schreiben, folglich also x als Linearkombination von $y_1, \ldots, y_n$.

Wir zeigen nun, dass $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig sind. Sei dazu $b_1y_1 + \cdots + b_ny_n = 0$ für $b_1, \ldots, b_n \in K$. Wir erhalten $b_1y_1 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1} - b_na_{nn}x'_n + b_na_{nn}x_n = b_1y_1 + \cdots + b_ny_n = 0$. Dabei lässt sich $b_1y_1 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1} - b_na_{nn}x'_n \in V'$ als Linearkombination der Basiselemente $x_1, \ldots, x_{n-1}$ von V' schreiben: $b_1y_1 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1} - b_na_{nn}x'_n = a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$ mit Koeffizienten $a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$. Es folgt $a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + b_na_{nn}x_n = 0$. Die lineare Unabhängigkeit der $x_1, \ldots, x_n$ liefert dann insbesondere $b_na_{nn} = 0$, also $b_n = 0$ wegen $a_{nn} \ne 0$. Somit ist $b_1y_1 + \cdots + b_{n-1}y_{n-1} = 0$, und dann $b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0$, da $y_1, \ldots, y_{n-1}$ nach Induktionsvoraussetzung linear unabhängig waren.

Durch Induktion über n zeigen wir nun umgekehrt, dass $a_{11} \cdots a_{nn} \ne 0$ ist, wenn $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig sind. Im Fall $n = 1$ ist $y_1 = 0$ bei $a_{11} = 0$, als y_1 sicher nicht linear unabhängig. Beim Schluss von $n-1$ auf n seien $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig. Dann sind insbesondere $y_1, \ldots, y_{n-1}$ linear unabhängig, und nach Induktionsvoraussetzung ist $a_{11} \cdots a_{n-1,n-1} \ne 0$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist dann $Kx_1 + \cdots + Kx_{n-1} = Ky_1 + \cdots + Ky_{n-1}$. Wäre $a_{nn} = 0$, so wäre $y_n \in Kx_1 + \cdots + Kx_{n-1} = Ky_1 + \cdots + Ky_{n-1}$, und es gäbe eine Darstellung $y_n = a_1y_1 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1}$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der $y_1, \ldots, y_n$. Also ist $a_{nn} \ne 0$ und daher insgesamt auch $a_{11} \cdots a_{nn} \ne 0$.

Beweisvariante: Verwendet man Ergebnisse aus Abschnitt 3.B, so lässt sich der vorstehende Beweis wesentlich verkürzen: Wie oben zeigt man, dass $y_1, \ldots, y_n$ ein Erzeugendensytem von V ist, wenn $a_{11} \cdots a_{nn} \ne 0$ ist. Wegen $\mathrm{Dim}_K V = n$ ist dann $y_1, \ldots, y_n$ nach Satz 3.B.7 bereits eine Basis von V.

Ist umgekehrt $y_1, \ldots, y_n$ eine Basis, so schließt man wie oben $a_{11} \cdots a_{n-1,n-1} \ne 0$. Wäre nun $a_{nn} = 0$, so könnten die n Vektoren $y_1, \ldots, y_n$ im $(n-1)$-dimensionalen Raum mit der Basis $x_1, \ldots, x_{n-1}$ nach Satz 3.B.9 nicht linear unabhängig sein. Also ist $a_{11} \cdots a_{nn} \ne 0$. •

Abschnitt 3.A, Aufg. 18, p. 29 (1.10.2011) :

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschiedene Elemente im Körper K. Dann sind

$$x_1 := (1, \lambda_1, \lambda_1^2, \ldots, \lambda_1^{n-1}), \ldots, x_n := (1, \lambda_n, \lambda_n^2, \ldots, \lambda_n^{n-1})$$

linear unabhängig in K^n.

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Für $n=1$ ist $x_1 = 1$ von 0 verschieden, also linear unabhängig in $K^1 = K$.

Beim Schluss von n–1 auf n folgt aus $\sum_{i=1}^n a_ix_i = 0$ mit $a_i \in K$ durch Betrachten der Komponenten $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^k = 0$, $k = 0, \ldots, n$–1. Subtrahieren der k-ten Gleichung vom λ_n-fachen der $(k$–1)-ten liefert $\sum_{i=1}^{n-1} a_i(\lambda_n - \lambda_i)\lambda_i^{k-1} = \lambda_n \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^{k-1} - \sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^k = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Für $x'_i := (1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-2})$, $i = 1, \ldots, n-1$, folgt $\sum_{i=1}^{n-1} a_i(\lambda_n - \lambda_i)x'_i = 0$. Da die x'_i nach Induktionsvoraussetzung linear unabhängig sind, folgt $a_i(\lambda_n - \lambda_i) = 0$, also $a_i = 0$ wegen $\lambda_i \neq \lambda_n$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Einsetzen in $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^0 = \sum_{i=1}^n a_i = 0$ ergibt schließlich auch $a_n = 0$. •

Abschnitt 3.A, Aufg. 19, p. 29 (1.10.2011):

Die Folgen

$$(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots) \in K^{\mathbb{N}}, \quad \lambda \in K,$$

sind linear unabhängig im Folgenraum $K^{\mathbb{N}}$.

Beweis: Wir betrachten eine Linearkombination dieser Folgen, die gleich 0 ist. Nur endlich viele der darin auftretenden Koeffizienten können $\neq 0$ sein. Sind dies etwa die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ der Folgen zu den paarweise verschiedenen Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aus K, so folgt $\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i^k = 0$ für $i = 1, \ldots n$ und alle $k \in \mathbb{N}$, also insbesondere für $k = 0, \ldots, n-1$. Setzt man $x_i := (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^{n-1})$, so ist also $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ und folglich $a_1 = \cdots = a_n = 0$, da die x_i, $i = 1, \ldots, n$, nach Aufg. 18 linear unabhängig über K sind. •

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 24**, p. 30 (1.5.2011):

V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Elemente $f_1, \ldots, f_4$ von V seien definiert durch $f_1(x) := \sin x$, $f_2(x) := \cos x$, $f_3(x) := \cos 2x$, $f_4(x) := \cos(x+2)$. Man bestimme eine Basis des von f_1, f_2, f_3, f_4 erzeugten Unterraums U von V.

Lösung: Nach dem Additionstheorem des Kosinus ist $f_4(x) = \cos(x+2) = \cos 2 \cdot \cos x - \sin 2 \cdot \sin x = -\sin 2 \cdot f_1(x) + \cos 2 \cdot f_2(x)$, d.h. die Funktion f_4 ist eine Linearkombination von f_1, f_2, f_3, die daher ebenfalls U erzeugen.

Die Funktionen f_1, f_2, f_3 sind auch linear unabhängig und bilden daher insgesamt eine Basis von U. Zum Beweis sei $rf_1 + sf_2 + tf_3 = 0$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$, d.h. $r \sin x + s \cos x + t \cos 2x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setzt man hierin $x = 0$, so sieht man $s + t = 0$. Für $x = \pi/2$ bzw. $x = \pi$ ergibt sich $r - t = 0$ bzw. $-s + t = 0$. Addition der ersten und dritten so erhaltenen Gleichung liefert $t = 0$ und dann auch $r = s = 0$. •

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 25**, p. 30 (1.5.2011):

Die Funktionen $t \mapsto \cos kt$, $k \in \mathbb{N}$, und $t \mapsto \sin kt$, $k \in N^*$, sind alle zusammen linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ der reellwertigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

Beweis: Wir haben eine für alle $t \in \mathbb{R}$ verschwindende Linearkombinationen der Form

$$\sum_{k=0}^m a_k \cos kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin kt = 0, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

zu betrachten und zu zeigen, dass alle a_k, b_k ebenfalls 0 sind. Dazu multiplizieren wir die obige Relation zunächst mit $\cos \ell t$ und integrieren dann von 0 bis 2π. Da gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos \ell t \; dt = \begin{cases} 2\pi, & k = \ell = 0, \\ \pi, & k = \ell \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \int_0^{2\pi} \sin kt \cos \ell t \; dt = 0,$$

vgl. die Aufgabenlösungen zu Band 1, Abschnitt 16.B, folgt für $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ (bzw. $\ell = 0$) sofort $\pi a_\ell = 0$ (bzw. $2\pi a_0 = 0$), d.h. $a_k = 0$ für alle $k = 0, \ldots, m$. Indem man nun für $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ die verbleibende Relation

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kt = 0$$

mit $\sin \ell t$ multipliziert und die ebenfalls am oben gennannten Ort bewiesene Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \sin kt \sin \ell t \; dt = \begin{cases} \pi, & k = \ell \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

verwendet, sieht man analog $b_k = 0$ für $k = 1, \ldots, n$. •

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 25**, p. 30 (1.5.2011) :

Die Funktionen $t \mapsto e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, auf dem Intervall $[a, b]$, $a < b$, sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

Beweis: Sei $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n \in \mathbb{R}$ und sei $\sum_{j=1}^{n} r_j\, e^{\alpha_j t} = 0$ (für alle $t \in [a, b]$) eine verschwindende Linearkombination der betrachteten Funktionen. Indem wir diese Gleichung mit $e^{-\alpha_1 t}$ multiplizieren, erhalten wir eine ebensolche Linearkombination mit nichtnegativen Exponenten α_j, und wir können gleich $\alpha_1 \geq 0$ annehmen.

Angenommen, es sei $r_n \neq 0$. Durch k-faches Differenzieren erhalten wir $\sum_{j=1}^{n} r_j \alpha_j^k\, e^{\alpha_j t} = 0$ und somit $e^{\alpha_n t} = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{r_j}{r_n} \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_n}\right)^k e^{\alpha_j t}$. Für $k \to \infty$ (und t fest) geht die rechte Seite dieser Gleichung gegen 0 wegen $0 < \frac{\alpha_j}{\alpha_n} < 1$, die linke Seite ist aber konstant $\neq 0$. Widerspruch! Also ist $r_n = 0$ und dann $r_j = 0$ für alle j. •

Abschnitt 3.A, Variante zu **Aufg. 25**, p. 30 (1.5.2011) :

Die Funktionen $x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{N}$, sind linear unabhängig im $\mathbb{C}$-Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

Beweis: Es genügt, eine Linearkombination der Form $\sum_{k=m_1}^{m_2} c_k e^{ikx} = 0$, $c_k \in \mathbb{C}$, mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ zu betrachten, die für alle $x \in [0, 2\pi]$ verschwindet und zu zeigen, dass alle c_k ebenfalls 0 sind. Dazu multiplizieren wir die obige Relation zunächst mit $e^{-i\ell x}$ und integrieren dann von 0 bis 2π. Wegen

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-i\ell x}\, dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-\ell)x}\, dx = \begin{cases} 2\pi\,, & k = \ell\,, \\ \frac{1}{i(k-\ell)}\left(e^{2\pi i(k-\ell)} - e^{0\cdot i(k-\ell)}\right) = 0\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

folgt für $\ell \in \{m_1, \ldots, m_2\}$ sofort $2\pi c_\ell = 0$, d.h. $c_\ell = 0$, für alle ℓ. •

Abschnitt 3.B, Variante zu **Aufg. 4**, p. 37 (1.5.2011) :

Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume U und W, $U + W$ und $U \cap W$ für folgende Unterräume im gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraums V.

a) $V := \mathbb{R}^3$, $U := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}$,
$W := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0,\ \ x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

b) $V := \mathbb{R}^4$, $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\,,\ \ x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$,
$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,\ \ x_1 + 5x_2 - 4x_4 = 0\}$.

Lösung: a) U ist der Unterraum $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = -x_2\,,\ \ x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-x_2, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(-1, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$. Da die beiden Vektoren $(-1, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ also U erzeugen und offenbar linear unabhängig sind, ist $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} U = 2$. Ferner ist $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = -x_3\,, x_2 = x_1 - x_3\,, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = -x_3\,, x_2 = -2x_3\,, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-x_3, -2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(-1, -2, 1)$.

Da der Vektor $(-1, -2, 1)$ also W erzeugt und als Vektor $\neq 0$ offenbar linear unabhängig ist, ist $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} W = 1$. Schließlich ist $U \cap W$ der Unterraum von $\mathbb{R}^3$, der aus den (x_1, x_2, x_3) besteht, deren Koeffizienten die Gleichungen $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ erfüllen. Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich $x_1 = -x_2 = -x_3$. Einsetzen in die letzte Gleichung liefert $3x_1 = 0$, d.h. $x_1 = 0$, und dann auch $x_2 = x_3 = 0$. Daher ist $U \cap W = 0$, $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 0$. Die Dimensionsformel liefert nun $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(U + W) = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} U + \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} W - \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 2 + 1 - 0 = 3$.

b) Für den Unterraum U gilt $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = -x_1 + x_2\,, x_4 = x_1 + x_2\,,\ \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, -x_1 + x_2\,, x_1 + x_2) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, 0, -1, 1) + \mathbb{R}(0, 1, 1, 1)$. Da die Vektoren $(1, 0, -1, 1)$ und $(0, 1, 1, 1)$ also U erzeugen und offenbar linear unabhängig sind, ist $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} U = 2$. Ferner ist $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\,, x_4 = \frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_2\,,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\,, \frac{1}{4}x_1 + \frac{5}{4}x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) + \mathbb{R}(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$. Da die Vektoren $(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ und $(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ also W erzeugen und offenbar linear unabhängig sind (keiner ist ein Vielfaches des anderen), ist $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} W = 2$.

Schließlich ist $U\cap W$ der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der aus den $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ besteht, deren Komponenten die Gleichungen $x_1-x_2+x_3=0$, $x_1+x_2-x_4=0$, $x_1+x_2-2x_3=0$, $x_1+5x_2-4x_4=0$ erfüllen. Aus der ersten und dritten Gleichung ergibt sich $-x_1+x_2=x_3=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$, also $\frac{1}{2}x_2=\frac{3}{2}x_1$, $x_2=3x_1$. Einsetzen in die erste bzw. zweite Gleichung liefert $x_3=2x_2$ bzw. $x_4=4x_1$. Die vierte Gleichung ist dann bei beliebigem x_1 erfüllt. Daher ist $U\cap W=\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4\;\big|\;x_2=3x_1\,,\,x_3=2x_1\,,\,x_4=4x_1\big\}=\mathbb{R}(1,3,2,4)$. Da $(1,3,2,4)$ als Vektor $\neq 0$ linear unabhängig ist, ist $\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}}(U\cap W)=1$. Die Dimensionsformel liefert nun $\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}}(U+W)=\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}}U+\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}}W-\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}}(U\cap W)=2+2-1=3$. •

Abschnitt 3.B, Aufg. 15, p. 38 (1.5.2011):

Sei V ein Vektorraum der Dimension $n\in\mathbb{N}$.

a) Sind $H_1,\ldots,H_r$ Hyperebenen in V, so ist $\operatorname{Dim}(H_1\cap\cdots\cap H_r)\geq n-r$.

b) Ist $U\subseteq V$ ein Unterraum der Kodimension r, so gibt es r Hyperebenen $H_1,\ldots,H_r$ in V mit $U=H_1\cap\cdots\cap H_r$.

Beweis: a) Wir verwenden Induktion über r. Bei $r=0$ ist der Durchschnitt von 0 Hyperebenen definitionsgemäß gleich V und hat die Dimension n.

Beim Schluss von $r-1$ auf r gilt nach Induktionsvoraussetzung $\operatorname{Dim}(H_1\cap\cdots\cap H_{r-1})\geq n-(r-1)$. Die Dimensionsformel 3.B.11 liefert dann wegen $H_1+\cdots+H_r\subseteq V$, also $\operatorname{Dim}(H_1+\cdots+H_r)\leq n$, und wegen $\operatorname{Dim}H_r=n-1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}(H_1\cap\cdots\cap H_r)&=\operatorname{Dim}(H_1\cap\cdots\cap H_{r-1})+\operatorname{Dim}H_r-\operatorname{Dim}(H_1+\cdots+H_r)\\&\geq n-(r-1)+(n-1)-n=n-r\,.\end{aligned}$$

b) Nach Voraussetzung ist $\operatorname{Dim}U=n-r$. Wir ergänzen eine Basis $v_{r+1},\ldots,v_n$ von U zu einer Basis $v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n$ von V und setzen $H_i:=Kv_1+\cdots+Kv_{i-1}+Kv_{i+1}+\cdots+Kv_r+\cdots+Kv_n$ für $i=1,\ldots,r$. Dann gilt nach Konstruktion $H_i\supseteq U$ für alle i, also $H_1\cap\cdots\cap H_r\supseteq U$. Angenommen, es sei $H_1\cap\cdots\cap H_r\neq U$. Dann gibt es ein $x\in H_1\cap\cdots\cap H_r$ mit $x\notin U$. Ist $x=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$, $a_1,\ldots,a_n\in K$, so ist $a_i\neq 0$ für ein $i\in\{1,\ldots,r\}$. Wegen $x\in H_i$ gibt es aber auch eine Darstellung $x=a'_1v_1+\cdots+a'_nv_n$, $a'_1,\ldots,a'_n\in K$, mit $a'_i=0$ im Widerspruch zur Eindeutigkeit einer solchen Basisdarstellung. •

Abschnitt 3.B, Aufg. 17, p. 38 (1.5.2011):

Es seien U_1 , U_2 , U_3 endlichdimensionale Unterräume eines K-Vektorraums V mit $U_i\cap U_j=0$ für $i\neq j$. Dann gilt
$\operatorname{Dim}\big((U_1+U_2)\cap U_3\big)=\operatorname{Dim}\big((U_1\cap(U_2+U_3)\big)=\operatorname{Dim}U_1+\operatorname{Dim}U_2+\operatorname{Dim}U_3-\operatorname{Dim}(U_1+U_2+U_3)$.

Beweis: Wegen $U_i\cap U_j=0$ gilt $\operatorname{Dim}(U_1+U_2)=\operatorname{Dim}U_1+\operatorname{Dim}U_2$ nach Beispiel 3.B.13 (2). Mit der Dimensionsformel 3.B.11 erhält man dann

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}\big((U_1+U_2)\cap U_3\big)&=\operatorname{Dim}(U_1+U_2)+\operatorname{Dim}U_3-\operatorname{Dim}(U_1+U_2+U_3)\\&=\operatorname{Dim}U_1+\operatorname{Dim}U_2+\operatorname{Dim}U_3-\operatorname{Dim}(U_1+U_2+U_3)\,.\end{aligned}$$

Die zweite Dimensionsformel ergibt sich, indem man hierin U_1 und U_3 vertauscht. •

Abschnitt 3.B, Aufg. 18, p. 42 (1.5.2011):

Seien $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}^n$ beliebige Vektoren mit ganzzahligen Komponenten. Für jedes $\lambda\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ bilden dann die Vektoren $x_1+\lambda e_1,\ldots,x_n+\lambda e_n$ eine Basis von $\mathbb{Q}^n$.

1. Beweis: Nach Satz 3.B.7 genügt es zu zeigen, dass die n angegebenen Vektoren im n-dimensionalen Raum $\mathbb{Q}^n$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir eine Relation $a_1(x_1+\lambda e_1)+\cdots+a_n(x_n+\lambda e_n)=0$ mit Koeffizienten $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}$. Sind nicht alle $a_i=0$, so können wir nach Multiplikation mit einer geeigneten ganzen Zahl annehmen, dass alle a_i ganze Zahlen sind, und dann nach Division durch den größten gemeinsamen Teiler der a_i, dass sogar gilt $\operatorname{ggT}(a_1,\ldots,a_n)=1$.

Sei nun $x_i=(a_{i1},\ldots,a_{in})$ für $i=1,\ldots,n$ mit $a_{ij}\in\mathbb{Z}$, und sei $\lambda=a/b$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$ und $\operatorname{ggT}(a,b)=1$. Für jeden Koeffizienten $a_j\neq 0$ erhält man dann durch Betrachten der j-ten Komponente in der obigen Relation

$$\sum_{i=1,\,i\neq j}a_ia_{ij}+a_ja_{jj}+a_j\lambda=0\,,\qquad\text{also}\qquad b\Big(\sum_{i=1,\,i\neq j}a_ia_{ij}+a_ja_{jj}\Big)=-a_ja\,.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(a,b)=1$ muss dann b ein Teiler von a_j sein. Aus $\mathrm{ggT}(a_1,\ldots,a_n)=1$ folgt nun $b=\pm 1$, d.h. $\lambda\in\mathbb{Z}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. •

2. Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ die $n\times n$-Matrix mit den Zeilen $x_1,\ldots,x_n$. Dann ist $\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{E}_n$ die Matrix mit den Zeilen $x_1+\lambda e_1,\ldots,x_n+\lambda e_n$. Nach Lemma 8.B.6 sind diese Zeilen genau dann linear abhängig, wenn $\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{E}_n$ nicht invertierbar ist. Nach Korollar 9.C.10 ist dies genau dann der Fall, wenn die Determinante $\mathrm{Det}(\mathfrak{A}+\lambda\mathfrak{E}_n)$ gleich 0 ist, d.h. wenn λ ein Eigenwert von $-\mathfrak{A}$ ist, also eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_{-\mathfrak{A}}=\mathrm{Det}(X\mathfrak{E}_n+\mathfrak{A})$ von $-\mathfrak{A}$, vgl. Definition 11.A.4. Dies ist ein normiertes Polynom vom Grad n mit ganzen Koeffizienten. Genau dann ist $\lambda\in\mathbb{Q}$ eine Nullstelle dieses Polynoms, wenn der Linearfaktor $X-\lambda$ ein Teiler von $\chi_{-\mathfrak{A}}(X)$ ist, also wenn es ein (notwendigerweise ebenfalls normiertes) Polynom $Q\in\mathbb{Q}[X]$ mit $\chi_{-\mathfrak{A}}(X)=(X-\lambda)Q$ gibt. Nun liefert Korollar 10.A.20 zum Gaußschen Lemma, dass $X-\lambda$ und Q dann in $\mathbb{Z}[X]$ liegen müssen. Insbesondere folgt $\lambda\in\mathbb{Z}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. – Es genügt hier natürlich schon, das (kleine) Gaußsche Lemma aus Band 1, Aufg. 29a) zu benutzen. •

Abschnitt 3.B, Aufg. 21, p. 39 (1.10.2011):

Für paarweise verschiedene Elemente $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ eines Körpers K, in dem die Vielfachen $m\cdot 1_K$, $m\in\mathbb{N}^*$, alle $\neq 0$ sind (Man sagt dann auch, K habe die Charakteristik 0), bilden $(t-\lambda_0)^n,\ldots,(t-\lambda_n)^n$ eine Basis des Raumes $K[t]_{n+1}$ aller Polynomfunktionen vom Grad $\le n$ auf K.

Allgemeiner gilt (unter den angegebenen Voraussetzungen über K und $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$) sogar: Ist f eine beliebige Polynomfunktion vom Grad n über K, so sind die Polynomfunktionen $f(t-\lambda_0),\ldots,f(t-\lambda_n)$ linear unabhängig über K.

Beweis: $K[t]_{n+1}$ besitzt die Basis $1,t,t^2,\ldots,t^n$ und hat daher die Dimension $n+1$. Nach Satz 3.B.7 genügt es somit zu zeigen, dass die angegebenen Polynomfunktionen linear unabhängig sind.

Ist $\sum_{i=0}^{n}a_i(t-\lambda_i)^n=0$ mit Koeffizienten $a_i\in K$, so liefert die binomische Formel

$$0=\sum_{i=0}^{n}a_i(t-\lambda_i)^n=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}(-\lambda_i)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda_i^k\,t^{n-k}.$$

Da $1,t,t^2,\ldots,t^n$ linear unabhängig sind, ergibt sich $(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda_i^k=0$, also $\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda_i^k=0$, für alle $k=0,\ldots,n$. Nun ist 3.A, Aufg. 18 anwendbar und liefert $a_0=\cdots=a_n=0$. – Zum Beweis der Verallgemeinerung verwenden wir für $k=0,\ldots,n$ die durch $f^{(k)}(t):=\sum_{j=k}^{n}j(j-1)\cdots(j-k+1)\,b_j\,t^{j-k}$ definierte k-te Ableitung der Polynomfunktion $f(t)=\sum_{j=0}^{n}b_jt^j$. (Bei $K=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ handelt es sich um die gewöhnlichen Ableitungen. Die Ableitungsregeln gelten auch für Polynomfunktionen über beliebigen Körpern, vgl. 10.A, Aufg. 7.) Wegen $\mathrm{Grad}\,f=n$ ist $b_n\neq 0$ und folglich $\mathrm{Grad}\,f^{(k)}=n-k$. Nach 3.A, Aufg. 14a) sind die Polynomfunktionen $f=f^{(0)},\ldots,f^{(n)}=n!\,b_n$ dann linear unabhängig. Mit Hilfe der binomischen Formel und durch Vertauschen der Summenzeichen sieht man nämlich für $\lambda\in K$:

$$\begin{aligned}f(t-\lambda)&=\sum_{j=0}^{n}b_j\,(t-\lambda)^j=\sum_{j=0}^{n}b_j\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}t^{j-k}(-\lambda)^k\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\lambda^k\sum_{j=k}^{n}j(j-1)\cdots(j-k+1)\,b_j\,\frac{t^{j-k}}{k!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\lambda^k\,\frac{f^{(k)}(t)}{k!}.\end{aligned}$$

(Dies ist die Taylor-Formel.) Gilt nun $\sum_{i=0}^{n}a_i\,f(t-\lambda_i)=0$ mit Koeffizienten $a_i\in K$, so folgt

$$0=\sum_{i=0}^{n}a_i\,f(t-\lambda_i)=\sum_{i=0}^{n}a_i\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\lambda_i^k\,\frac{f^{(k)}(t)}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big(\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda_i^k\Big)f^{(k)}(t)$$

Die lineare Unabhängigkeit der $f^{(k)}(t)$ liefert $\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda_i^k=0$ für $k=0,\ldots,n$ und dann wieder mit 3.A, Aufg. 18 auch $a_0=\cdots=a_n=0$. •

Abschnitt 3.B, Aufg. 26, p. 42 (1.5.2011) :

Seien $x_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, x_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$ Elemente von $\mathbb{K}^n$ mit $|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ji}|$. Dann ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$.

Beweis: Nach Satz 3.B.7 ist nur zu zeigen,dass $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind. Sei $b_1x_1+\cdots+b_nx_n = 0$ für $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$, und sei $|b_{i_0}|$ maximal unter den reellen Zahlen $|b_1|, \ldots, |b_n|$. Angenommen, es sei $b_{i_0} \neq 0$. Indem wir die obige Gleichung durch $|b_{i_0}|$ dividieren, können wir annehmen, dass $|b_{i_0}| = 1$ und $|b_j| \leq 1$ gilt für $j = 1, \ldots, n$. Wir betrachten nun die i_0-te Komponente von $b_{i_0}x_{i_0} = -\sum_{j=1,\, j\neq i_0}^{n} b_jx_j$ und erhalten einen Widerspruch zur Voraussetzung:

$$|a_{i_0i_0}| = |b_{i_0}a_{i_0i_0}| = \Big|\sum_{j=1,\, j\neq i_0}^{n} b_ja_{ji_0}\Big| \leq \sum_{j=1,\, j\neq i_0}^{n} |b_j|\,|a_{ji_0}| \leq \sum_{j=1,\, j\neq i_0}^{n} |a_{ji_0}|\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 3.B, Aufg. 29, p. 42 (1.10.2011) :

Seien K ein Körper mit mindestens n Elementen ($n \in \mathbb{N}^*$) und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. $U_1, \ldots, U_n$ seien Unterräume von V der gleichen Dimension r. Für jeden Unterraum U_i sei eine Basis gegeben. Dann gibt es $\mathrm{Dim}_K V - r$ Vektoren in V, die simultan die gegebenen Basen jeweils zu einer Basis von ganz V ergänzen.

Beweis: Ist $r < \mathrm{Dim}_K V$, so sind die Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ von V verschieden. Nach Lemma 1.C.12 ist dann $U_1 \cup \cdots \cup U_n \neq V$. Wir können also ein $x_1 \in V$ wählen mit $x_1 \notin U_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ergänzt x_1 jeweils die Basis des Unterraums U_i zu einer Basis von $U_i' := U_i + Kx_1$, $i = 1, \ldots, n$, und es gilt $\mathrm{Dim}_K U_i' = r+1$. In dieser Weise fortfahrend erhält man nach $m := \mathrm{Dim}_K V - r$ Schritten Vektoren $x_1, \ldots, x_m \in V$, die jede der gegebenen Basen zu einer Basis von V ergänzen. •

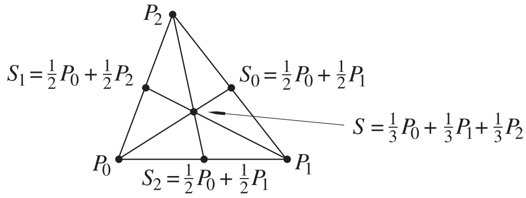
4 Affine Räume

Abschnitt 4.B, Aufg. 3, p. 55 (1.5.2011):

Sei $(P_0, \ldots, P_n)$ ein nichtausgeartetes n-Simplex, $n \geq 2$, im reellen affinen Raum E. Jeder Punkt P_i werde mit einem positiven Gewicht a_i versehen, $i = 0, \ldots, n$. Mit S_i werde der Schwerpunkt der Seite des Simplex bezeichnet, die durch Weglassen des Punktes P_i gewonnen wird.

a) Die Verbindungsgeraden $S_i P_i$, $i = 0, \ldots, n$, schneiden sich im Schwerpunkt S der Punkte $P_0, \ldots, P_n$ bzgl. der Gewichte $a_0, \ldots, a_n$.

b) Für $i = 0, \ldots, n$ ist das Teilverhältnis $(S_i, S) : (S, P_i)$ gleich a_i/b_i, wo b_i die Summe der Gewichte a_j, $j \neq i$, ist. (Sind alle Gewichte gleich, so ist dieses Teilverhältnis also einfach gleich $1/n$. In diesem Fall heißt S der Schwerpunkt der $P_0, \ldots, P_n$ schlechthin.)



Beweis: Der Schwerpunkt der Seite des Simplex, die durch Weglassen des Punktes P_i gewonnen wird, ist $S_i = \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{a_j}{b_i} P_j$, $b_i := \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} a_j$. Der Schwerpunkts des ganzen Simplex ist $S = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{b} P_j$, $b := \sum_{j=0}^{n} a_j$. Dann liegt S auf jeder der Verbindungsgeraden $S_i P_i$ wegen

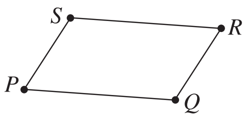
$$S = \overrightarrow{P_i S} + P_i = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{b} \overrightarrow{P_i P_j} + P_i = \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{a_j}{b} \overrightarrow{P_i P_j} + P_i = \frac{b_i}{b} \sum_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{a_j}{b_i} \overrightarrow{P_i P_j} + P_i = \frac{b_i}{b} \overrightarrow{P_i S_i} + P_i\,.$$

Wegen $b_i = b - a$ gilt ferner $S = \frac{b-a_i}{b} \overrightarrow{P_i S_i} + P_i = -\frac{a_i}{b} \overrightarrow{P_i S_i} + \overrightarrow{P_i S_i} + P_i = \frac{a_i}{b} \overrightarrow{S_i P_i} + S_i$ und somit $(S_i, S) : (S, P_i) = a_i/b_i$. •

Abschnitt 4.B, Aufg. 4, p. 55 (1.5.2011):

Sei E ein K-affiner Raum. Ein 4-Tupel (P, Q, R, S) von Punkten in E heißt ein Viereck, wenn je drei der Punkte P, Q, R, S nicht auf einer Geraden liegen.

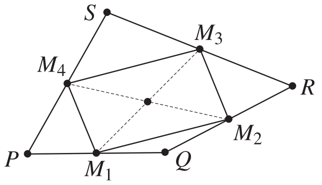
a) Für ein beliebiges Viereck (P, Q, R, S) sind folgende Aussagen äquivalent: (1) Die Geraden PQ und SR sowie die Geraden PS und QR sind jeweils parallel. (2) Es ist $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. (3) Es ist $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$. (Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so heißt das Viereck (P, Q, R, S) ein Parallelogramm.)



Beweis: Ist (1) erfüllt, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{SR}$ und $\overrightarrow{QR} = \mu \overrightarrow{PS}$. Einsetzen in $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$ liefert $\lambda \overrightarrow{SR} + \mu \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$, also $(\lambda - 1)\overrightarrow{SR} + (\mu - 1)\overrightarrow{PS} = 0$. Wären $\overrightarrow{SR}$ und $\overrightarrow{PS}$ linear abhängig. so wären nun auch $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ linear abhängig, und die vier Punkte lägen auf ein und derselben Gerade. Also sind $\overrightarrow{SR}$ und $\overrightarrow{PS}$ linear unabhängig, und es folgt $\lambda - 1 = 0$ und $\mu - 1 = 0$, also $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ und $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$. Daher gelten (2) und (3).

Gilt umgekehrt (2), also $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, so wegen $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR}$ auch $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$, also (3). Natürlich sind die Geraden PQ und SR sowie die Geraden PS und QR dann jeweils parallel, d.h. (1) ist erfüllt. •

b) Es sei $2 = 1_K + 1_K \neq 0$ in K, d.h. es sei Char $K \neq 2$. Für ein beliebiges Viereck (P, Q, R, S) bilden die Mittelpunkte $M_1, \ldots, M_4$ der Strecken (P, Q), (Q, R), (R, S), (S, P) ein Parallelogramm, dessen Diagonalen M_1M_3 und M_2M_4 sich im Schwerpunkt $\frac{1}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}S$ schneiden. (Dabei versteht man unter dem Mittelpunkt einer Strecke (L, N) in E den Schwerpunkt $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}N$.)



Beweis: Nach Konstruktion gilt $\overrightarrow{M_1Q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{SM_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{M_4S} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PS}$, also $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{QM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{M_4S} + \overrightarrow{SM_3} = \overrightarrow{M_4M_3}$. Nach a) ist daher das Viereck (M_1, M_2, M_3, M_4) ein Parallelogramm.

Sei $S_0 := \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{4}R + \frac{1}{4}S$ der Schwerpunkt des Vierecks (P, Q, R, S). Wir zeigen, dass S_0 der Mittelpunkt $\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_3} + M_1$ der Diagonale M_1M_3 des Parallelogramms ist. Analog sieht man dass S_0 auch der Mittelpunkt der Diagonale M_4M_2 ist, also der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Dabei benutzen wir die Identitäten $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{QM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_2R} + \overrightarrow{RM_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RS}$ und $M_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + P$:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_3} + M_1 = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{M_1M_2} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{M_2M_3} + M_1 &= \tfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{RS} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + P\\ &= \tfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ} + \big(\tfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{QR}\big) + \big(\tfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{QR} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{RS}\big) + P\\ &= \tfrac{1}{4}\overrightarrow{PQ} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{PR} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{PS} + P = \overrightarrow{PS_0} + P = S_0\,.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 4.B, Aufg. 9, p. 56 (1.5.2011):

Seien $F_1 = U_1 + P_1$ und $F_2 = U_2 + P_2$ affine Unterräume eines affinen Raumes E. Genau dann ist $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, wenn $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$ ist.

Beweis: Sei $P \in F_1 \cap F_2$. Dann gibt es $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $u_1 + P = P_1 = \overrightarrow{PP_1} + P$ und $u_2 + P = P_2 = \overrightarrow{PP_2} + P$. Es folgt $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P} + \overrightarrow{PP_2} = -\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} = -u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$.

Sei umgekehrt $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$, also $\overrightarrow{P_1P_2} = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Dann gilt $P = u_1 + P_1 \in F_1$ und $P = u_1 + P_1 = -u_2 + \overrightarrow{P_1P_2} + P_1 = -u_2 + P_2 \in F_2$, also $P \in F_1 \cap F_2$. •

Abschnitt 4.B, Aufg. 10, p. 56 (1.5.2011):

Seien F_1 und F_2 affine Unterräume eines K-affinen Raumes E. Die affine Hülle von $F_1 \cup F_2$ heißt der Verbindungsraum von F_1 und F_2 und werde mit $F_1 \vee F_2$ bezeichnet.

a) Sind $F_1 = U_1 + P_1$ und $F_2 = U_2 + P_2$, so ist $F_1 \vee F_2 = (U_1 + U_2 + K \cdot \overrightarrow{P_1P_2}) + P_1$.

b) Sind F_1 und F_2 endlichdimensional und ist $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, so gilt

$$\mathrm{Dim}(F_1 \vee F_2) + \mathrm{Dim}(F_1 \cap F_2) = \mathrm{Dim}\, F_1 + \mathrm{Dim}\, F_2\,.$$

(Wie muss man die Formel im Fall $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ modifizieren?)

c) Enthält K mehr als zwei Elemente, und ist $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, so ist $F_1 \vee F_2$ die Vereinigung aller Verbindungsgeraden P_1P_2 mit $P_1 \neq P_2$ und $P_1 \in F_1$, $P_2 \in F_2$. (Man überlege sich an Hand von Gegenbeispielen, dass eine analoge Aussage im Fall $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ im Allgemeinen nicht gilt.)

Beweis: a) Offenbar umfasst $F_1 \vee F_2 = (U_1 + U_2 + K \cdot \overrightarrow{P_1P_2}) + P_1$ sowohl $F_1 = U_1 + P_1$ als auch $F_2 = U_2 + P_2$ und damit $F_1 \vee F_2$.

Andererseits enthält U' für jeder affine Unterraum $U'+P$ von E, der $F_1 = U_1 + P_1$ und $F_2 = U_2 + P_2$ umfasst, auch $\overrightarrow{P_1P_2}$ und ferner U_1 und U_2. Insgesamt gilt daher $F_1 \vee F_2 \subseteq (U_1 + U_2 + K \cdot \overrightarrow{P_1P_2}) + P_1$.

b) Bei $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ gilt $\overrightarrow{P_1P_2} \in U_1 + U_2$ nach Aufg. 9. Aus a) folgt daher $F_1 \vee F_2 = (U_1 + U_2) + P_1$. Die Dimensionsformel 3.B.11 liefert dann wegen $F_1 \cap F_2 = (U_1 \cap U_2) + P_1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}(F_1 \vee F_2) &= \operatorname{Dim}(U_1 + U_2) = \operatorname{Dim} U_1 + \operatorname{Dim} U_2 - \operatorname{Dim}(U_1 \cap U_2)\\ &= \operatorname{Dim} F_1 + \operatorname{Dim} F_2 - \operatorname{Dim}(F_1 \vee F_2)\,.\end{aligned}$$

Bei $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ gilt $\overrightarrow{P_1P_2} \notin U_1 + U_2$ nach Aufg. 9. Aus a) folgt daher $F_1 \vee F_2 = (U_1 + U_2) + K \cdot \overrightarrow{P_1P_2}) + P_1$. Die Dimensionsformel 3.B.11 liefert dann wegen $F_1 \cap F_2 = (U_1 \cap U_2) + P_1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}(F_1 \vee F_2) &= \operatorname{Dim}(U_1 + U_2 + K \cdot \overrightarrow{P_1P_2}) = \operatorname{Dim} U_1 + \operatorname{Dim} U_2 + 1 - \operatorname{Dim}(U_1 \cap U_2)\\ &= \operatorname{Dim} F_1 + \operatorname{Dim} F_2 + 1 - \operatorname{Dim}(F_1 \vee F_2)\,.\end{aligned}$$

c) Sei $P_1 \in U_1$, $P_2 \in U_2$. Dann gilt $F_1 = U_1 + P_1$ und $F_2 = U_2 + P_2$ mit Unterräumen U_1, U_2 des zu E gehörenden Vektorraums V. Wegen $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ enthält dann $U_1 + U_2$ nach Aufg. 9 den Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $F_1 \vee F_2$ dann auch die ganze Gerade P_1P_2.

Sei nun $P' \in F_1 \cap F_2$, also $F_1 = U_1 + P'$ und $F_2 = U_2 + P'$. Ist dann umgekehrt $P \in F_1 \cap F_2$, so gilt es nach Teil a) dieser Aufgabe Vektoren $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $P = u_1 + u_2 + P'$. Für $P_1 := 2u_1 + P' \in F_1$ und $P_2 := 2u_2 + P' \in F_2$ gilt dann $\overrightarrow{P_1P_2} = 2u_2 - 2u_1$. Somit ist $P = u_1 + u_2 + P' = (u_2 - u_1) + (2u_1 + P') = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} + P_1 \in P_1P_2$.

Gegenbeispiel dazu für $F_1 \cap F_2 = \emptyset$: Die beiden Geraden $g_1 := \{(t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $g_2 := \{(0, s, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ sind windschief, d.h. ihr Verbindungsraum ist nach b) ein 3-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$, also ganz $\mathbb{R}^3$. Die Punkte auf den Verbindungsgeraden P_1P_2 von Punkten $P_1 \in g_1$ und $P_2 \in g_2$ haben dann die Form $(t, 0, 0) + r(-t, s, 1)$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$. Der Punkt $P := (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ lässt sich offensichtlich nicht in dieser Form darstellen. •

Abschnitt 4.B, Aufg. 14, p. 57 (1.5.2011) :

Seien E ein endlichdimensionaler affiner Raum und F_1 , F_2 nichtleere disjunkte affine Unterräume von E. Dann gibt es disjunkte parallele affine Hyperebenen H_1 , H_2 in E mit $F_1 \subseteq H_1$, $F_2 \subseteq H_2$.

Beweis: Sei $F_1 = U_1 + P_1$, $F_2 = U_2 + P_2$ mit Unterräumen U_1, U_2 des zugehörigen Vektorraums V. Da F_1 und F_2 disjunkt sind, gilt $\overrightarrow{P_1P_2} \notin U_1 + U_2$ nach Aufg. 9. Man kann also eine Basis $v_1, \ldots, v_r$ von $U_1 + U_2$ durch $v_{r+1} := \overrightarrow{P_1P_2}$ und eventuell weitere Vektoren $v_{r+2}, \ldots, v_n$ zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V ergänzen. Ist nun U der Unterraum von V mit der Basis $v_1, \ldots, v_r, v_{r+2}, \ldots, v_n$, so gilt $\operatorname{Dim} U = \operatorname{Dim} V - 1$, $U_1 \subseteq U$ und $U_2 \subseteq U$. Daher sind $H_1 := U + P_1$ und $H_2 := U + P_2$ disjunkte parallele Hyperebenen in E mit $F_1 \subseteq H_1$ und $F_2 \subseteq H_2$. •