Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 1, 3. Aufl. (Version 2010), Kapitel 6

16 Stammfunktionen und Integrale

Abschnitt 16.A, Variante zu **Aufg. 5**, p. 441 (1.4.2011) :

Man gebe Stammfunktionen der folgenden rationalen Funktionen an, deren Partialbruchzerlegungen bereits in den Lösungen zu Abschnitt 11.B. bestimmt wurden.

$$\frac{x^6 - x^4 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,, \quad \frac{x^6 + x - 1}{x^4 + x^2}\,, \quad \frac{x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2(x^2+1)}\,.$$

Lösung: Unter Verwendung der bereits berechneten Partialbruchzerlegungen erhält man:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^6 - x^4 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx &= \int (x^2 + 2x + 1)\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\,, \\
\int \frac{x^6 + x - 1}{x^4 + x^2}\,dx &= \int (x^2 - 1)\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{x-2}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 - x + \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x\,, \\
\int \frac{x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2(x^2+1)}\,dx &= \int x\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx + \int \frac{-1}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{-x+1}{x^2+1}\,dx = \\
&= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x+2| + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x\,.
\end{aligned}$$

•

Abschnitt 16.A, Variante zu **Aufg. 5**, p. 441 (1.4.2011) :

Man gebe eine Stammfunktion an zu $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}$.

Lösung: Wir verwenden Partialbruchzerlegung und machen dazu den Ansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-2} = \frac{a(x+1)(x-2) + b(x-2) + c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} = \\
&= \frac{(a+c)\,x^2 + (-a+b+2c)\,x + (-2a-2b+c)}{(x+1)^2(x-2)}\,.
\end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten von x^2, x und x^0 in den Zählern dieser Brüche liefert die Bedingungsgleichungen $a+c=1$, $-a+b+2c=0$, $-2a-2b+c=2$ für a, b, und c, aus denen wir $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$, $c=\frac{2}{3}$ errechnen. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{x-2}\,dx = \\
&= \tfrac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \tfrac{2}{3}\ln|x-2| = \frac{1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\ln\big(|x+1|(x-2)^2\big)\,.
\end{aligned}$$

•

Abschnitt 16.B, Teil von **Aufg. 1**, p. 454 (1.4.2011) :
Man berechne Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen (jeweils dort, wo sie auf $\mathbb{R}$ definiert sind) :

$$x\,\sin x\,,\quad x\,\sin x^2\,,\quad \frac{1}{x}\,\ln x\,,\quad \arctan x\,,\quad \arcsin x\,,\quad e^x\sin x\,,\quad \frac{\ln(\ln x)}{x}\,,\quad \frac{1}{x\,(1+\ln x)}\,,$$

$$\frac{1}{\cos x}\,,\quad \cos\sqrt{x}\,,\quad \frac{1}{\sin x+\cos x}\,,\quad \sqrt{x+\sqrt{x}}\,,\quad \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq b.$$

Lösung: Partielle Integration liefert $\displaystyle\int x\sin x\,dx = -x\cos x+\int\cos x\,dx = -x\cos x+\sin x\,.$

Mit der Substitution $u=x^2$, $du=2x\,dx$ erhält man $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx=\int\frac{1}{2}\sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u=-\frac{1}{2}\cos x^2.$

Partielle Integration liefert $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx=\ln x\cdot\ln x-\int\frac{\ln x}{x}\,dx$, also $\displaystyle 2\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\ln^2 x$,

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\,.$$

Man hätte hier auch die Substitution $u=\ln x$, $du=\frac{1}{x}dx$ verwenden können:

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{2}\ln^2 x\,.$$

Indem man zunächst partielle Integration verwendet und dann $u=1+x^2$, d.h. $du=2x\,dx$, substituiert, sieht man:

$$\int\arctan x\,dx=\int 1\cdot\arctan x\,dx=x\,\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx=x\,\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=$$
$$=x\,\arctan x-\frac{1}{2}\ln|u|=x\,\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,.$$

Indem man zunächst partielle Integration verwendet und dann $u=1-x^2$, d.h. $du=-2x\,dx$, substituiert, sieht man wegen $\arcsin' x=1\big/\sqrt{1-x^2}$:

$$\int\arcsin x\,dx=\int 1\cdot\arcsin x\,dx=x\,\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=x\,\arcsin x+\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=$$
$$=x\,\arcsin x+\sqrt{u}=x\,\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\,.$$

Zweimalige partielle Integration (bei der e^x jeweils integriert und $\sin x$ bzw. $\cos x$ differenziert wird) liefert $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx$. Indem man das Integral $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$ auf die linke Seite bringt, folgert man daraus

$$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}\big(e^x\sin x-e^x\cos x\big)=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\,.$$

Mit der Substitution $u=\ln x$, $du=(1/x)\,dx$, $e^u=x$ und dann partieller Integration erhält man:

$$\int\frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx=\int\ln u\,du=u\ln u-u=(\ln x)\big(\ln(\ln x)\big)-\ln x\,.$$

Mit der Substitution $u = 1 + \ln x$, $du = (1/x)\, dx$ erhält man

$$\int \frac{dx}{x\,(1+\ln x)} = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| = \ln|1+\ln x|\,.$$

Indem wir die Substitution $u := \sin x$, also $du = \cos x\, dx$, verwenden, erhalten wir aus $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ ein Integral über eine rationale Funktion:

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\Big(\int \frac{du}{1+u} + \int \frac{du}{1-u}\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\ln|1+u| - \ln|1-u|\big) = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+u}{1-u}\Big| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} = \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|}\,.$$

Mit den Halbwinkelformeln $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ und $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ sowie $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ und dem Additionstheorem des Tangens aus 12.E, Aufg. 9 ergibt sich daraus

$$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\Big)^2$$
$$= \ln\Big|\frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}\Big| = \ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2} + 1}{1 - \tan\frac{x}{2}}\Big| = \ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{4}}\Big| = \ln\big|\tan\big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\big)\big|\,.$$

Indem man zunächst $u = \sqrt{x}$, d.h. $u^2 = x$, $2u\, du = dx$ substituiert und dann partiell integriert, sieht man

$$\int \cos\sqrt{x}\, dx = \int 2u\cos u\, du = 2u\sin u - 2\int \sin u\, du = 2u\sin u + 2\cos u = 2\big(\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\big)\,.$$

Indem wir die Substitution $u := \tan\frac{x}{2}$, also $x = 2\arctan u$, $dx = 2du/(1+u^2)$, mit

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos(2\cdot\frac{x}{2})}{1} = \cos x\,,$$
$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin(2\cdot\frac{x}{2})}{1} = \sin x$$

verwenden, erhalten wir aus $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx$ ein Integral über eine rationale Funktion:

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx = \int \frac{2\, du}{\big(\frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}\big)(1+u^2)} = \int \frac{-2\, du}{\big(u - (1-\sqrt{2})\big)\big(u - (1+\sqrt{2})\big)}$$
$$= \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\, du}{u - (1-\sqrt{2})} - \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\, du}{\big(u - (1+\sqrt{2})\big)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\ln\big|u - (1-\sqrt{2})\big| - \ln\big|u - (1+\sqrt{2})\big|\Big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{u - (1-\sqrt{2})}{u - (1+\sqrt{2})}\Big| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1}\Big|$$

Mit dem Additionstheorem von Tangens aus 12.E, Aufg. 9 ergibt sich $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\big(2\,\frac{\pi}{8}\big) = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2\frac{\pi}{8}}$, also $\tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$, d.h. $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 = 1/(\sqrt{2} + 1)$ wegen $\tan\frac{\pi}{8} > 0$, und ferner

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2} + (\sqrt{2} - 1)}{\tan\frac{x}{2} - (\sqrt{2} + 1)}\Big| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|(-\tan\tfrac{\pi}{8})\cdot\frac{\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{8}}\Big|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\tan\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2} + \tan\frac{\pi}{8}}{1 - \tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{8}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\tan\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\big|\tan\big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\big)\big|\,.$$

Alternativ kann man das betrachtete Integral auch mit Hilfe von $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2}$ auf das oben berechnete Integral über $1/\cos x$ zurückführen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sin x\,\sin\frac{\pi}{4}+\cos x\,\cos\frac{\pi}{4}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\cos\,(x-\frac{\pi}{4})}\,dx\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\tan\Big(\frac{x-(\pi/4)}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\Big|\tan\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\Big)\Big|\,.\end{aligned}$$

Die beiden berechneten Stammfunktionen unterscheiden sich nur um die additive Konstante $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\tan\dfrac{\pi}{8}$.

Wir verwenden zunächst die Substitution $u=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $u^2=x+\sqrt{x}=\big(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\big)^2-\frac{1}{4}$, also $\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}$, $x=u^2+\frac{1}{2}-\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}$, d.h. $dx=\Big(2u-\dfrac{u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}}\Big)\,du$, dann partielle Integration und schließlich die Substitution $u=\frac{1}{2}\sinh x$, $du=\frac{1}{2}\cosh x\;dx$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x+\sqrt{x}}\,dx &= \int u\cdot\Big(2u-\frac{u}{\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}}\Big)\,du = \frac{2}{3}u^3-u\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}+\int\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}\,du =\\ &= \frac{2}{3}u^3-u\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}+\frac{u}{2}\sqrt{u^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{8}\operatorname{Arsinh}(2u)\\ &= \frac{2}{3}\Big(\sqrt{x+\sqrt{x}}\Big)^3-\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2}\Big(\sqrt{t}+\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{8}\operatorname{Arsinh}\Big(2\sqrt{x+\sqrt{x}}\Big)\\ &= \Big(\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\sqrt{x}-\frac{1}{4}\Big)\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\operatorname{Arsinh}\Big(2\sqrt{x+\sqrt{x}}\Big)\,.\end{aligned}$$

Indem man die ganze Wurzel substituiert, also $u=\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}$, $u^2(x-b)=x-a$, d.h. $x=\dfrac{u^2b-a}{u^2-1}$, setzt mit $dx=\dfrac{2(a-b)u}{(u^2-1)^2}\,du$ und dann Partialbruchzerlegung macht, sieht man

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,dx &= \int\frac{2(a-b)u^2}{(u^2-1)^2}\,du = \frac{a-b}{2}\Big(\int\frac{du}{u-1}+\int\frac{du}{(u-1)^2}-\int\frac{du}{u+1}+\int\frac{du}{(u+1)^2}\Big)\\ &= \frac{a-b}{2}\Big(\ln\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\Big) = \frac{a-b}{2}\Big(\ln\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|-\frac{2u}{u^2-1}\Big)\\ &= \frac{a-b}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}-1}{\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}+1}\right|-(a-b)\,\frac{\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}}{\frac{x-a}{x-b}-1}\\ &= \frac{a-b}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{|x-a|}-\sqrt{|x-b|}}{\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x-b|}}\right|+\sqrt{(x-a)(x-b)}\;\operatorname{Sign}(x-b)\\ &= \frac{a-b}{2}\,\ln\frac{\big(\sqrt{|x-a|}-\sqrt{|x-b|}\,\big)^2}{\big||x-a|-|x-b|\big|}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\;\operatorname{Sign}(x-b)\\ &= (a-b)\,\ln\left|\frac{\sqrt{|x-a|}-\sqrt{|x-b|}}{\sqrt{|a-b|}}\right|+\sqrt{(x-a)(x-b)}\;\operatorname{Sign}(x-b)\,.\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass $a\ge x$ und $b>x$ gelten muss oder aber $a\le x$ und $b<x$, damit die Ausgangsfunktion definiert ist. In jedem Fall gilt dann $\big||x-a|-|x-b|\big|=|a-b|$. Schließlich ist auch die Funktion $(a-b)\,\ln|\sqrt{|x-a|}-\sqrt{|x-b|}\,|+\sqrt{(x-a)(x-b)}\;\operatorname{Sign}(x-b)$, die sich von dem berechneten Integral nur um eine additive Konstante unterscheidet, eine Stammfunktion zu $\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}$. •

Abschnitt 16.B, Variante zu **Aufg. 1**, p. 454 (1.4.2011):

Man berechne Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen (jeweils dort, wo sie auf $\mathbb{R}$ definiert sind):

$$x\sinh x\,,\quad x\sinh(x^2)\,,\quad x\ln x\,,\quad \cos^3 x\,,\quad \cos^4 x\,,\quad e^x\cos(e^x)\,,\quad \frac{1}{\cos^3 x}\,,\quad \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,,\quad \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,,$$

$$\sin\sqrt[3]{x}\,,\quad \sqrt{x}\cosh\sqrt{x}\,,\quad \cosh x\,\sin(\sinh x)\,,\quad \cosh x\,\sin x\,,\quad \sin(\ln x)\,,\quad \frac{\ln x}{x^2}\,,\quad \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,,\quad \frac{\ln^4 x}{x}\,,$$

$$\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,,\quad \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad \sqrt{1+x^2}\,,\quad \sqrt{x^2-1}\,,\quad \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,,\quad \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,,\quad \sqrt{1+\sqrt{x}}\,,$$

$$\frac{1}{\sin x+2\cos x}\,,\quad \frac{1}{1+3\cos x}\,.$$

Lösung: Mit partieller Integration erhält man $\int x\sinh x\,dx = x\cosh x - \int \cosh x\,dx = x\cosh x - \sinh x\,.$

Die Substitution $u=x^2,\ du=2x\,dx$ liefert $\int x\sinh(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \sinh u\,du = \frac{1}{2}\cosh u = \frac{1}{2}\cosh(x^2)\,.$

Partielle Integration liefert

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}\Big(\ln x - \frac{1}{2}\Big)\,.$$

Unter Verwendung von $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ sieht man mit der Substitution $u=\sin x,\ du=\cos x\,dx$:

$$\int\cos^3 x\,dx = \int\cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \int(1-u^2)\,du = u-\frac{1}{3}u^3 = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\,.$$

Partielle Integration liefert unter Verwendung von $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ und $\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\,\cos x$:

$$\int\cos^4 x\,dx = \sin x\cos^3 x - 3\int\sin x\,\cos^2 x\,(-\sin x)\,dx = \sin x\cos^3 x + 3\int\cos^2 x\,dx - 3\int\cos^4 x\,dx\,,$$

also $4\int\cos^4 x\,dx = \sin x\cos^3 x + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\sin x\,\cos x\,,\ \int\cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\sin x\cos^3 x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{8}\sin x\,\cos x\,.$

Mit der Substitution $u=e^x,\ du=e^x\,dx$ sieht man $\int e^x\cos(e^x)\,dx = \int\cos u\,du = \sin u = \sin(e^x)\,.$

Durch partielle Integration führt man $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$ mit Hilfe von $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ auf das bereits weiter oben berechnete Integral über $1/\cos x$ zurück:

$$\int\frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos x}\,dx = \frac{\tan x}{\cos x} - \int\frac{\tan x\,\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx\,, \qquad \text{also}$$

$$2\int\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|}\,;\qquad \int\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\frac{1+\sin x}{|\cos x|}\Big)\,.$$

Die Substitution $u=\cos x,\ du=-\sin x$ liefert $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = -\int\frac{du}{u^3} = \frac{1}{2u^2} = \frac{1}{2\cos^2 x}\,.$

Die vorstehende Substitution liefert ferner $\int\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx = -\int\frac{du}{\sqrt{1-u}} = 2\sqrt{1-u} = 2\sqrt{1-\cos x}\,.$

Indem man zunächst $u = \sqrt[3]{x}$, d.h. $u^3 = x,\ 3u^2\,du = dx$, substituiert und dann zweimal partiell integriert, sieht man

$$\begin{aligned}\int \sin \sqrt[3]{x}\ dx &= \int 3u^2 \sin u\ du = -3u^2\cos u + 6\int u\cos u\ du = -3u^2\cos u + 6u\sin u + 6\cos u\\ &= 3\big(2-\sqrt[3]{x^2}\big)\ \cos\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\ \sin\sqrt[3]{x}\,.\end{aligned}$$

Indem man zunächst $u = \sqrt{x}$, d.h. $u^2 = x,\ 2u\,du = dx$, substituiert und dann zweimal partiell integriert, sieht man

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\cosh\sqrt{x} &= 2\int u^2\cosh u\,du = 2u^2\sinh u - 4\int u\sinh u\,du = 2u^2\sinh u - 4u\cosh u + 4\int\cosh u\,du\\ &= 2u^2\sinh u - 4u\cosh u + 4\sinh u = 2x\sinh\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\cosh\sqrt{x} + 4\sinh\sqrt{x}\,.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \sinh x,\ du = \cosh x\,dx$ sieht man:

$$\int \cosh x\cdot\sin(\sinh x)\ dx = \int \sin u\ du = -\cos u = -\cos(\sinh x)\,.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\int\cosh x\ \sin x\ dx = \sinh x\ \sin x - \int\sinh x\ \cos x\ dx = \sinh x\ \sin x - \cosh x\ \cos x - \int\cosh x\ \sin x\ dx\,,$$

also $\displaystyle\int\cosh x\ \sin x\ dx = \frac{1}{2}\big(\sinh x\ \sin x - \cosh x\ \cos x\big)$.

Indem man $u = \ln x$, d.h. $e^u = x,\ e^u du = dx$, substituiert, führt man das folgende Integral auf das weiter oben berechnete Integral über $e^u \sin u$ zurück:

$$\int\sin(\ln x)\,dx = \int e^u\sin u\,du = \frac{1}{2}\,e^u\,(\sin u - \cos u) = \frac{1}{2}\,x\,\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big)\,.$$

Partielle Integration liefert $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\,.$

Partielle Integration liefert ebenfalls $\displaystyle\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ \ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ \ln x - 4\sqrt{x} = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2)\,.$

Unter Verwendung der Substitution $u = \ln x,\ du = (1/x)\ dx$ erhält man $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,(\ln x)^4\ dt = \int u^4\,du = \frac{1}{5}\,u^5 = \frac{1}{5}\,(\ln x)^5$. Übrigens könnte man hier auch partielle Integration verwenden, wobei $1/x$ integriert und $(\ln x)^4$ differenziert wird. Das Ergebnis folgt dann aus der Gleichung $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,(\ln x)^4\ dx = (\ln x)^5 - 4\int(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,(\ln x)^3\ dx$, d. h. $\displaystyle 5\int\frac{1}{x}\,(\ln x)^4\ dx = (\ln x)^5$.

Mit der Substitution $u = \ln x,\ du = (1/x)\ dx,\ e^u = x$ und dann partieller Integration erhält man:
$\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\ dx = \int\frac{u}{e^u}\ du = \int u\,e^{-u}\ du = -u\,e^{-u} + \int e^{-u}\ du = -e^{-u}(1+u) = -e^{-\ln x}(1+\ln x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\,.$
Übrigens könnte man hier auch direkt partielle Integration verwenden, wobei $1/x^2$ integriert und $\ln x$ differenziert wird: $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\ dx = -\frac{\ln x}{x} + \int\frac{1}{x^2}\ dt = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$. Mit der Substitution $x = \sinh t$,

$dx = \cosh t\ dt$, $\operatorname{Arsinh} x = t$ bekommt man wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und $\cosh t \geq 0$, also $\cosh t = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{1+x^2}$, und mit Hilfe der nachfolgenden Substitution $u = \cosh t$, $du = \sinh t\, dt$:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{\cosh t\ dt}{\sinh t \sqrt{1+\sinh^2 t}} = \int \frac{dt}{\sinh t} = \int \frac{\sinh t\ du}{\cosh^2 t - 1} = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{u-1}{u+1}\right| =$$
$$= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{\cosh t - 1}{\cosh t + 1}\right| = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\,.$$

Mit der Substitution $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$, $\arcsin x = t$ bekommt man wegen $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{2\sin^2 t}{\cos t} \cos t\, du = \int 2\sin^2 t\, dt = t - \cos t\, \sin t = \arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\,,$$

wobei wir $\int \sin^2 t\ \ dt$ mit Hilfe partieller Integration aus $\int \sin^2 t\ \ dt = -\sin t \cos t + \int \cos^2 t\, dt = -\sin t \cos t + \int (1 - \sin^2 t)\, dt = t - \sin t \cos t - \int \sin^2 t\ dt$ berechnen.

Die Substitution $x = \sinh t$, $dx = \cosh t\ dt$ ergibt wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ nach partieller Integration: $\int \sqrt{1+x^2}\ \ dx = \int \cosh^2 t\ \ dt = \cosh t\ \sinh t - \int \sinh^2 t\ \ dt = \cosh t\ \sinh t - \int (1 + \cosh^2 t)\, dt$, d.h. $2\int \cosh^2 t\ dt = \cosh t\ \sinh t - t$, und somit $\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \int \cosh^2 t\ dt = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1+x^2} - \operatorname{Arsinh} x\big)$.

Die Substitution $x = \cosh t$, $dx = \sinh t\ dt$ ergibt wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ nach partieller Integration: $\int \sqrt{x^2-1}\ \ dx = \int \sinh^2 t\ \ dt = \sinh t\ \cosh t - \int \cosh^2 t\ \ dt = \sinh t\ \cosh t - \int (1 + \sinh^2 t)\, dt$, d.h. $2\int \sinh^2 t\ dt = \sinh t\ \cosh t - t$, und somit $\int \sqrt{x^2-1}\ dx = \int \sinh^2 t\ dt = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arcosh} x\big)$.

Die Substitution $x = \sinh t$, $dx = \cosh t\ dt$ ergibt wegen $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ nach partieller Integration:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\ dx = \int \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t}\ dt = -\cosh t\, \frac{1}{\sinh t} + \int dx = \operatorname{Arsinh} x - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,.$$

Die Substitution $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, d.h. $u^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$, $1 + u^2 = \dfrac{2}{1+x}$ und $1 - u^2 = \dfrac{2x}{1+x}$, schließlich $x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \dfrac{-4u}{(1+u^2)^2}\ du$, liefert mit nachfolgender partieller Integration:

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ dx = \int 2u \cdot \frac{-2u}{(1+u^2)^2}\ du = 2u \cdot \frac{1}{1+u^2} - 2\int \frac{1}{1+u^2}\ du = \frac{2u}{1+u^2} - 2\arctan u =$$
$$= 2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1+x}{2} - 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{1-x^2} - 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,.$$

Die Substitution $u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $u^2 = 1 + \sqrt{x}$, $u^2 - 1 = \sqrt{x}$, $x = u^4 - 2u^2 + 1$, $dx = (4u^3 - 4u)\, du$ liefert

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\ dx = \int u \cdot (4u^3 - 4u)\, du = \int (4u^4 - 4u^2)\, du = \frac{4}{5}u^5 - \frac{4}{3}u^3 = \frac{4}{5}u^3\big(u^2 - 1 - \tfrac{2}{3}\big) =$$
$$= \frac{4}{5}\sqrt{1+\sqrt{x}}\ \big(1+\sqrt{x}\big)\big(\sqrt{x} - \tfrac{2}{3}\big) = \frac{4}{5}\sqrt{1+\sqrt{x}}\ \Big(x + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\Big)\,.$$

Wir verwenden zur Berechnung einer Stammfunktion zu $1/(\sin x + 2\cos x)$ die Substitution $u = \tan\frac{x}{2}$, also $x = 2\arctan u$, $dx = 2du/(1+u^2)$, mit

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos(2\cdot\frac{x}{2})}{1} = \cos x\,,$$

$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin(2\cdot\frac{x}{2})}{1} = \sin x$$

und erhalten ein Integral über eine rationale Funktion:

$$\int\frac{dx}{\sin x + 2\cos x} = \int\frac{2\,du}{\big(\frac{2u}{1+u^2}+2\frac{1-u^2}{1+u^2}\big)\,(1+u^2)} = \int\frac{-du}{u^2-u-1} = \int\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\,du}{u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}} - \int\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\,du}{u-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\ln\big|u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}\big| - \ln\big|u-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\big|\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\ln\Big|\frac{u-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}{u-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}{\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\Big|\,.$$

Wir verwenden wieder die Substitution $u = \tan\frac{x}{2}$, also $x = 2\arctan u$, $dx = 2du/(1+u^2)$, und erhalten ein Integral über eine rationale Funktion:

$$\int\frac{1}{1+3\cos x}\,dx = \int\frac{2\,du}{\big(1+3\frac{1-u^2}{1+u^2}\big)\,(1+u^2)} = \int\frac{-du}{(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2})}$$

$$= \int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{u+\sqrt{2}}\,du - \int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{u-\sqrt{2}}\,du = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln\big|u+\sqrt{2})\big| - \ln\big|u-\sqrt{2}\big|\Big) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\Big|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\Big|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\Big|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{2}}\Big|\,.$$

•

Abschnitt 16.B, Variante zu **Aufg. 1**, p. 454 (1.4.2011):

Man berechne für $m, n\in\mathbb{N}$ die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,\quad \int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx\,,\quad \int_0^1(1+x)^n(1-x)\,dx\,,\quad \int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx\,,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mt\,\cos nt\,dt\,,\quad \int_0^{2\pi}\sin mt\,\sin nt\,dt\,,\quad \int_0^{2\pi}\cos mt\,\cos nt\,dt\,.$$

Lösung: Die Substitution $u = \ln x$, $du = (dx)/x$, mit $u(1) = \ln 1 = 0$ und $u(e) = \ln e = 1$ liefert:

$$\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int_{u(1)}^{u(e)} u^2\,du = \frac{1}{3}\,u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Die Substitution $u = \ln x$, $du = (dx)/x$ mit $u(e) = \ln e = 1$ und $u(e^2) = \ln e^2 = 2$ liefert:

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \int_{u(e)}^{u(e^2)}\ln u\,du = (u\ln u - u)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1\,.$$

Die Substitution $u = 1+x$, $du = dx$, $1-x = 2-u$ liefert wegen $u(0) = 1$ und $u(1) = 2$:

$$\int_0^1 (1+x)^n(1-x)\,dt = \int_1^2 u^n(2-u)\,du = \int_1^2 (2u^n - u^{n+1})\,du = \frac{2u^{n+1}}{n+1} - \frac{u^{n+2}}{n+2}\Big|_{u=1}^{u=2} =$$

$$= \frac{2^{n+2}}{n+1} - \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Mit partieller Integration liefe die Rechnung übrigens folgendermaßen:

$$\int_0^1 (1+x)^n(1-x)\,dt = (1-t)\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\,dt = -\frac{1}{n+1} + \frac{(1+t)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{n+1} + \frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $u = u(x) = 1-x$, $du = -dx$ erhalten wir wegen $u(0) = 1$, $u(1) = 0$:

$$\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx = -\int_1^0 (1-u)^2u^n\,du = \int_0^1 (u^n - 2u^{n+1} + u^{n+2})\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{2u^{n+2}}{n+2} + \frac{u^{n+3}}{n+3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,.$$

Mit zweimaliger partieller Integration liefe die Rechnung übrigens folgendermaßen:

$$\int_0^1 t^2(1-t)^n\,dt = -t^2\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=1} + 2\int_0^1 t\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\,dt = -2t\frac{(1-t)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Big|_{t=0}^{t=1} +$$

$$+ 2\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\,dt = -2\frac{(1-t)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,.$$

Mit $\sin mt\,\cos nt = \frac{1}{2}\big((\sin mt\cos nt + \cos mt\sin nt) + (\sin mt\cos nt - \cos mt\sin nt)\big) = \frac{1}{2}\big(\sin(m+n)t + \sin(m-n)t\big)$ bekommt man bei $m \neq n \neq 0$:

$$\int_0^{2\pi} \sin mt\,\cos nt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)t\Big|_0^{2\pi} = -0 - 0 = 0\,.$$

Bei $m = n$ ist $\sin(m-n)t \equiv 0$ (und bei $m = n = 0$ auch $\sin(m+n)t \equiv 0$). Das Ergebnis ist dann in beiden Fällen auch gleich 0.

Das Additionstheorem $\sin mt\,\sin nt = \frac{1}{2}\big((\cos mt\cos nt + \sin mt\sin nt) - (\cos mt\cos nt - \sin mt\sin nt)\big) = \frac{1}{2}\big(\cos(m-n)t - \cos(m+n)t\big)$ liefert (bei $m \neq n$):

$$\int_0^{2\pi} \sin mt\,\sin nt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)t\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)t\Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0\,.$$

Bei $m=n$ ist $\cos(m-n)t \equiv 1$ und oben ist das erste Integral gleich π, während das zweite Integral nach wie vor verschwindet; das Ergebnis ist dann gleich π. Bei $m=n=0$ ist auch $\cos(m+n)t \equiv 0$ und beide Integrale haben den Wert π; das Ergebnis ist dann 2π.

Das Additionstheorem $\cos mt\,\cos nt = \frac{1}{2}\big(\cos(m+n)t + \cos(m-n)t\big)$ liefert (bei $m\neq n$)

$$\int_0^{2\pi} \cos mt\,\cos nt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m+n)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(m-n)t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)t\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)t\,\Big|_0^{2\pi} = 0+0=0\,.$$

Bei $m=n$ ist $\cos(m-n)t \equiv 1$ und oben ist der zweite Summand gleich π, während der erste Summand nach wie vor verschwindet; das Ergebnis ist dann gleich π. Bei $m=n=0$ ist auch $\cos(m+n)t \equiv 0$ und beide Summanden haben den Wert π; das Ergebnis ist dann 2π.

Auch die drei letzten Integrale ließen sich durch zweimalige partielle Integration berechnen. •

Abschnitt 16.B, Aufg. 13, p. 457 (1.4.2011):

b) Die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{K}$ sei stetig. Dann gilt $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\,dt = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin t)\,dt\,.$

Beweis: Die Substitution $u=\frac{\pi}{2}-t,\ du=-dt,\ t=\frac{\pi}{2}-u$ liefert wegen $\sin(\frac{\pi}{2}-u)=\cos u$:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt = -\int_{\pi/2}^{0} f\big(\sin(\tfrac{\pi}{2}-u)\big)\,du = \int_0^{\pi/2} f\big(\sin(\tfrac{\pi}{2}-u)\big)\,du = \int_0^{\pi/2} f(\cos u)\,du\,.$$

Die Substitution $u=\pi-t,\ du=-dt,\ t=\pi-u$ liefert wegen $\sin(\pi-u)=\sin u$:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,dt = -\int_{\pi}^{\pi/2} f\big(\sin(\pi-u)\big)\,du = \int_{\pi/2}^{\pi} f\big(\sin(\pi-u)\big)\,du = \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin u)\,du$$ •

Abschnitt 16.B, Aufg. 13, p. 457 (1.4.2011):

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $D_n := \int_0^x \tan^n t\,dt\,,\ |x|<\pi/2$.

a) Es ist $D_0(x):=x\,,\quad D_1(x):=-\ln\cos x$ und $nD_{n+1}(x)=\tan^n x - nD_{n-1}(x)=1\,,\ n\geq 1$.

b) Für $d_n := D_n(\pi/4)$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

c) Für $m\in\mathbb{N}$ ist $\displaystyle d_{2m} = (-1)^m\Big(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\Big)\,,\qquad d_{2m+1}=(-1)^m\Big(\ln\sqrt{2}-\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\Big)\,.$

d) Aus b) und c) folgere man noch einmal $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2\,.$

Beweis: a) Offenbar ist $D_0(x)=\int_0^x dt = x$. Wegen $-\big(\ln\cos t\big)' = \tan t$ und $\ln\cos 0 = \ln 1 = 0$ ist $D_1(x)=\int_0^x \tan t\,dt = -\ln\cos x$ für $|x|<\pi/2$. Ferner gilt wegen $\tan' t = 1+\tan^2 t$:

$$nD_{n+1}(x)+nD_{n-1}(x) = n\int_0^x (\tan^{n+1}t+\tan^{n-1}t)\,dt = \int_0^x n\,\tan^{n-1}t\,(\tan^2 t+1)\,dt = \tan^n t\,\Big|_0^x = \tan^n x\,.$$

b) Da der Tangens im Intervall $]0\,,\pi/4]$ positiv ist, sind alle $d_n \ge 0$. Wegen $\tan(\pi/4) = 1$ ist

$$0 \le D_{n+1}\big(\frac{\pi}{4}\big) = d_{n+1} = \frac{1}{n} - D_{n-1}\big(\frac{\pi}{4}\big) = \frac{1}{n} - d_{n-1} \le \frac{1}{n}\,.$$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$.

Bemerkung: Dies ergibt sich auch aus dem folgenden allgemeinen Resultat: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ stetig mit $|f|<1$ bis auf endlich viele Stellen in $[a,b]$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f^n(t)\,dt = 0$. Zum **Beweis** können wir wegen $\big|\int_a^b f^n(t)\,dt\big| \le \int_a^b |f|^n(t)\,dt$ annehmen, dass die Werte von f in $\mathbb{R}_+$ liegen. Ferner genügt es dann den Fall zu betrachten, dass f nur an einer Stelle $c\in[a,b]$ den Wert 1 hat. Sei dann $\varepsilon>0$ vorgegeben. Wir wählen ein Intervall positiver Länge $\le \frac{1}{2}\varepsilon$ um c in $[a,b]$. Die Werte von f auf dem Komplement dieses Intervalls sind dann alle kleiner als C mit festem $C<1$ und es gibt ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $f^{n_0}\le\frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)$ auf diesem Koplement. Für $n\ge n_0$ gilt dann $0\le\int_a^b f^n(t)\,dt \le \frac{1}{2}\varepsilon + \big(\frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)\big)\cdot(b-a) = \varepsilon$. (Für eine Verallgemeinerung siehe Band 3, 14.D, Aufg. 5.)

c) Wir verwenden Induktion über $m\in\mathbb{N}$. Für $m=0$ sind die angegebenen Formeln richtig wegen $d_0 := \dfrac{\pi}{4}$ und $d_1 := \ln\sqrt{2}$. Der Schluss von m auf $m+1$ ergibt sich mit der Formel aus a) und der Induktionsvoraussetzung aus

$$d_{2m+2} = \frac{1}{2m+1} - d_{2m} = \frac{1}{2m+1} - (-1)^m\Big(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\Big) = (-1)^{m+1}\Big(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2k+1}\Big) \quad \text{und}$$

$$d_{2m+3} = \frac{1}{2m+2} - d_{2m+1} = \frac{1}{2m+2} - (-1)^m\Big(\ln\sqrt{2} - \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\Big) = (-1)^{m+1}\Big(\ln\sqrt{2} - \sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}\Big).$$

d) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$ folgt aus der ersten Formel sofort $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ sowie aus der zweiten Formel $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 2\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{2k} = 2\ln\sqrt{2} = \ln 2\,.$ •

Abschnitt 16.B, Aufg. 16, p. 457 (1.4.2011):

Man gebe die Potenzreihenentwicklungen um 0 an für die Funktionen $\int \ln(1+t)\,dt/t$, $\int \ln(1-t)\,dt/t$ und $\int(\arctan t)\,dt/t$ und gewinne damit

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,, \qquad \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 - 16\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{(16m^2-1)^2} =: G\,.$$

(Der Wert $G = 0{,}915965594\ldots$ des dritten Integrals heißt die Catalansche Konstante.)

Lösung: Die Logarithmusreihen $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}$ und $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$ (jeweils für $|t|<1$) liefern $\dfrac{\ln(1+t)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{t^{n-1}}{n}$ und $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^{n-1}}{n}$. Mit den Summenformeln $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, vgl. Beispiel 14.E.3, bekommt man

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n^2}\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n}\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}\Big|_0^1 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Mit der Reihe des Arcustangens erhält man $\dfrac{\arctan t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n}}{2n+1}$ für $|t|<1$ und folglich

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\,t^{2n+1}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= 1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1-\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{(4m-1)^2}-\frac{1}{(4m+1)^2}\Big) = 1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{16m}{(16m^2-1)^2}\,.\ \bullet$$

Abschnitt 16.B, Variante zu **Aufg. 16**, p. 457 (1.4.2011) :

Man berechne $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Artanh} t}{t}\,dt$.

Lösung: Mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung von Artanh t aus 14.B, Aufg. 6c) bekommt man

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Artanh} t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{t^{2n}dt}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\,.\qquad\bullet$$

Abschnitt 16.B, Zusatzaufgabe zu **Aufg. 16**, p. 457 (1.4.2011) :

Man zeige für die Catalansche Konstante G aus Aufg. 16 die Formeln

$$G = \frac{\pi^2}{8}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{(4m+3)^2}\qquad\text{und}\qquad G = -\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = \int_1^{\infty}\frac{\ln\tau}{\tau^2+1}\,d\tau\,.$$

Man folgere die Summenformeln $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(4m+3)^2} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{G}{2}\,,\quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(4m+1)^2} = \frac{\pi^2}{16}+\frac{G}{2}\,.$

Beweis: Wie in den beiden vorstehenden Aufgaben gezeigt, gilt

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{(4m+1)^2}-\frac{1}{(4m+3)^2}\Big)\,,$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{(4m+1)^2}+\frac{1}{(4m+3)^2}\Big)\,.$$

Differenzbildung liefert $G-\dfrac{\pi^2}{8} = -2\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4m+3)^2}$, woraus auch die angegebenen Summenformeln sofort folgen. Mit partieller Integration erhält man ferner

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,dt = \arctan t\cdot\ln t\,\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$$

wegen $\arctan 1\cdot\ln 1 = \frac{\pi}{4}\cdot 0 = 0$ und da man mit der Regel von de l'Hôpital sieht:

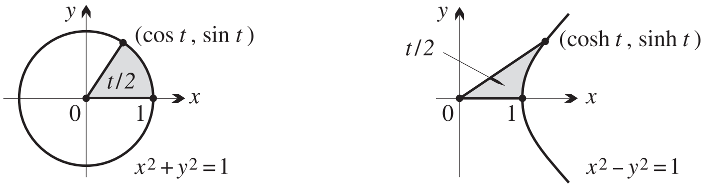
$$\lim_{t\to 0}\arctan t\cdot\ln t = \lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2+1}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1/t}{-1/t^2} = 1\cdot\lim_{t\to 0}(-t) = 0\,.$$

Die Substitution $t = 1/\tau,\ dt = (-1/\tau^2)\,d\tau$ liefert die zweite Integraldarstellung. •

16.C, **Aufg. 3**, p. 462 (1.4.2011):

a) Der Flächeninhalt des links in der folgenden Zeichnung skizzierten Einheitskreissektors $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\,,\, 0 \le \operatorname{Arg} z \le t\}$ mit dem Öffnungswinkel t ist $t/2$ (für $0 \le t \le 2\pi$).

b) Der Flächeninhalt des rechts in der folgenden Zeichnung skizzierten Einheitshyperbelsektors zum Parameter t ist $t/2$ (für $0 \le t$).



c) Der Flächeninhalt der Ellipse $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \le 1\big\}$ mit Halbachsen der Länge a und b ist πab (für $a, b > 0$).

Beweis: a) Ist $F_\triangle$ der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die x-Achse, die Gerade durch den Nullpunkt und $(\cos t\,,\,\sin t)$ sowie die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(\cos t, 0)$ begrenzt wird, und ist F_A der Inhalt der Fläche, die von dieser Parallelen, dem Kreis und der x-Achse begrenzt wird, so sieht man mit der Substitution $x = \cos\tau,\, dx = \sin\tau\, d\tau\,,\ 1 = \cos 0$ und der durch partielle Integration zu erhaltenden Formel $\int \sin^2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}(\tau - \sin\tau\ \cos\tau)$, dass der gesuchte Flächeninhalt folgenden Wert hat:

$$F_\triangle + F_A = \frac{\cos t\ \sin t}{2} + \int_1^{\cos t} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\cos t\ \sin t}{2} + \int_0^t \sin^2\tau\, d\tau$$
$$= \frac{\cos t\ \sin t}{2} + \frac{1}{2}(\tau - \sin\tau\ \cos\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t}{2}\,.$$

b) Ist $F_\triangle$ der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die x-Achse, die Gerade durch den Nullpunkt und $(\cosh t\,,\,\sinh t)$ sowie die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $(\cosh t, 0)$ begrenzt wird, und ist F_A der Inhalt der Fläche, die von dieser Parallelen, der Hyperbel und der x-Achse begrenzt wird, so sieht man mit der Substitution $x = \cosh\tau,\, dx = \sinh\tau\, d\tau\,,\ 1 = \cosh 0$ und der durch partielle Integration zu erhaltenden Formel $\int \sinh^2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}(\sinh\tau\cosh\tau - \tau)$, dass der gesuchte Flächeninhalt folgenden Wert hat:

$$F_\triangle - F_A = \frac{\cosh t\ \sinh t}{2} - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{\cosh t\ \sinh t}{2} - \int_0^t \sinh^2\tau\, d\tau$$
$$= \frac{\cosh t\ \sinh t}{2} - \frac{1}{2}(\sinh\tau\ \cosh\tau - \tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t}{2}\,.$$

c) Die Gleichung der Ellipse ist $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Mit der Substitution $x = a\sin\tau,\, dx = a\cos\tau\, d\tau\,,\ a = a\sin(\pi/2)\,,\ -a = a\sin(-\pi/2)$, und der durch partielle Integration zu erhaltenden Formel $\int \cos^2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}(\tau + \sin\tau\ \cos\tau)$ sieht man, dass der gesuchte Flächeninhalt folgenden Wert hat:

$$2\,\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = 2\,\frac{b}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2\tau}\ a\cos\tau\ d\tau = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\tau\ d\tau$$
$$= 2ab\,\frac{1}{2}\big(\tau + \sin\tau\ \cos\tau\big)\Big|_{\tau=-\pi/2}^{\tau=\pi/2} = \pi ab\,.$$ •

17 Uneigentliche Integrale

Abschnitt 17.A, Teil von **Aufg. 1**, p. 468 (1.4.2011) :
Man zeige, dass die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und die angegebenen Werte haben:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\,;\quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,;\quad \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\,dt\,;\quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2\,;$$

$$\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 1\,;\quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\;dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\tan t}}\,;\quad \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \pi\,;\quad \int_{-\infty}^\infty e^{-|t|}\,dt = 2\,;$$

$$\int_0^1 \ln t\;dt = -1\,;\quad \int_0^\infty \frac{e^{2t}\,dt}{(e^{2t}+1)^2} = \frac{1}{4}\,;\quad \int_0^\infty e^{-at}\sin bt\;dt = \frac{b}{a^2+b^2}\,,\ \text{falls } a,b\in\mathbb{R},\ a>0\,;$$

Lösung: Wegen $\arctan' x = 1/(1+x^2)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\,\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = \lim_{t\to\infty} \arctan t - \lim_{t\to-\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi\,,$$

Da -1 Nullstelle von $1+t^3$ ist, liefert Division mit Rest die Produktdarstellung $1+t^3 = (t+1)(t^2-t+1)$.
Wie in 11.B, Aufg. 3 berechnen wir die Partialbruchzerlegung $\displaystyle\frac{1}{1+t^3} = \frac{\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{-\frac{t}{3}+\frac{2}{3}}{t^2-t+1}$ und bekommen

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{-t+2}{t^2-t+1}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$= \Big(\frac{1}{3}\ln(t+1) - \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)\Big)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\infty \frac{(2/\sqrt{3})\,dt}{\big((2t-1)/\sqrt{3}\big)^2+1} = \Big(\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{6}\big(\ln 1 - \ln 1\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\lim_{\tau\to\infty}\arctan\tau - \arctan\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

wegen $\tan(\pi/6) = \sin(\pi/6)\big/\cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\big/\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$.

Wie in 11.A, Aufg. 1 berechnen wir die Faktorisierung $1+t^4 = (t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)$ und dann wie in 11.B, Aufg. 3 die beiden Partialbruchzerlegungen

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{-\frac{t}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{\frac{t}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1} \quad\text{und}\quad \frac{t^2}{1+t^4} = \frac{\frac{t}{2\sqrt{2}}}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{-\frac{t}{2\sqrt{2}}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,.$$

Damit bekommen wir:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{-t+\sqrt{2}}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,dt + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,dt$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\big(2t-\sqrt{2}\big)\,dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\big(2t+\sqrt{2}\big)\,dt}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln\big(t^2+t\sqrt{2}+1\big) - \ln\big(t^2-t\sqrt{2}+1\big)\Big)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,dt}{\big(t\sqrt{2}-1\big)^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,dt}{\big(t\sqrt{2}+1\big)^2+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,\Big|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan\big(t\sqrt{2}-1\big) + \arctan\big(t\sqrt{2}+1\big)\Big)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\big(\ln 1 - \ln 1\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\big) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ ,$$

$$\int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{t}{t^2-t\sqrt{2}+1}\,dt - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{t}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\big(2t-\sqrt{2}\big)\,dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\big(2t+\sqrt{2}\big)\,dt}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln\big(t^2-t\sqrt{2}+1\big) - \ln\big(t^2+t\sqrt{2}+1\big)\Big)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,dt}{\big(t\sqrt{2}-1\big)^2+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,dt}{\big(t\sqrt{2}+1\big)^2+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\,\Big|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\arctan\big(t\sqrt{2}-1\big) + \arctan\big(t\sqrt{2}+1\big)\Big)\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\big(\ln 1 - \ln 1\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\big) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ ,$$

Bemerkung: Die Formelsammlungen von Bronstein-Semendjajew und Råde-Westergren (Springers Mathematische Formeln) geben für $1/(1+t^4)$ die Stammfunktion $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\big(\dfrac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\big)$ (mit der obiges Integral absurderweise 0 wäre). Diese hat für $t\neq\pm 1$ die richtige Ableitung, aber in $t=1$ eine Sprungstelle der Höhe $-\pi/2\sqrt{2}$. Sie entsteht aus der hier benutzten Stammfunktion durch falsches Anwenden des Additionstheorems des Arcustangens. Entsprechendes gilt für die Stammfunktion zu $t/(1+t^4)$. Teubners Taschenbuch der Mathematik gibt die richtigen Stammfunktionen an.

Die Substitution $u=1-t,\ du=-dt$ liefert

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_1^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}\,\Big|_0^1 = 2\ .$$

Die Substitution $u=1-t^2,\ du=-2t\,dt$ liefert

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt = -\int_1^0 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^1 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}\,\Big|_0^1 = 1\ .$$

Mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{\tan t}\,,\ t = \arctan u^2,\ dt = \dfrac{2u}{1+u^4}\,du$ lassen sich die beiden nächsten Integrale auf bereits oben berechnete Integrale zurückführen:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\ dt = 2\int_0^\infty \frac{u^2}{1+u^4}\,du = 2\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,,\qquad \int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{\tan t}} = 2\int_0^\infty\frac{du}{1+u^4} = 2\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

Es ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-t}\,dt = -2\,e^{-t}\Big|_0^\infty = 2\,.$

Mit partieller Integration und der Regel von de l'Hôpital sieht man:

$$\int_0^1 \ln t\,dt = \int_0^1 1\cdot\ln t\,dt = t\ln t\,\Big|_0^1 - \int_0^1 t\,\frac{1}{t}\,dt = (t\ln t - t)\,\Big|_0^1 = -1 - \lim_{t\to 0} t\ln t$$
$$= -1 - \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{1/t} = -1 - \lim_{t\to 0}\frac{1/t}{-1/t^2} = -1 + \lim_{t\to 0} t = -1\,.$$

Mit der Substitution $u = e^{2t},\ du = 2e^{2t}\,dt,\ 1 = e^{2\cdot 0}$ sieht man

$$\int_0^\infty \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\,dt = \int_1^\infty\frac{du}{2(u+1)^2} = \frac{-1/2}{u+1}\,\Big|_1^\infty = -\frac{1}{2}\Big(0-\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}\,.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\ dt = -\frac{1}{a}\,e^{-at}\sin bt\,\Big|_0^\infty + \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\ dt = \frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-at}\cos bt\ dt$$
$$= -\frac{b}{a^2}\,e^{-at}\cos bt\,\Big|_0^\infty - \frac{b^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\ dt\,,$$

also

$$\Big(1+\frac{b^2}{a^2}\Big)\int_0^\infty e^{-at}\sin bt\ dt = -\frac{b}{a^2}\,e^{-at}\cos bt\,\Big|_0^\infty = -\frac{b}{a^2}(0-1) = \frac{b}{a^2}\,,\qquad \int_0^\infty e^{-at}\sin bt\ dt = \frac{a^2+b^2}{b}\,.\ \bullet$$

Abschnitt 17.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 468 (1.4.2011):

Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^3}\,dt\,,\quad \int_0^1\frac{t^3}{1+t^8}\,dt\,,\quad \int_1^\infty\frac{t^3}{1+t^8}\,dt\,,\quad \int_0^1\frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt\,,\quad \int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}\,,$$
$$\int_0^\infty\frac{dt}{\cosh t}\,,\quad \int_0^\infty\frac{dt}{1+\cosh t}\,dt\,,\quad \int_0^\infty(1+t^2)\,e^{-t}\,dt\,,\quad \int_1^\infty\frac{dt}{(1+t^2)\arctan t}\,,$$
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}\,dt\,,\quad \int_\pi^\infty\frac{t^2+2}{t^3}\cos t\,dt\,,\quad \int_0^\infty\frac{t}{e^t+1}\,dt\,,\quad \int_0^\infty\frac{t}{e^t-1}\,dt\,.$$

Lösung: Wie oben erhalten wir die Produktdarstellung $1+t^3 = (t+1)(t^2-t+1)$ und berechnen wie in 11.B, Aufg. 3 die Partialbruchzerlegung $\dfrac{t}{1+t^3} = \dfrac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \dfrac{\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2-t+1}$. Dies liefert

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{1+t^3} &= -\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t+1}{t^2-t+1}\,dt = -\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2-t+1}\\ &= \Big(-\frac{1}{3}\ln(t+1) + \frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)\Big)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\infty \frac{(2/\sqrt{3})\,dt}{\big((2t-1)\big/\sqrt{3}\big)^2+1} = \Big(\frac{1}{6}\ln\frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\Big)\Big|_0^\infty\\ &= \frac{1}{6}\big(\ln 1 - \ln 1\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\lim_{\tau\to\infty}\arctan\tau - \arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

wegen $\tan(\pi/6) = \sin(\pi/6)\big/\cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\big/\frac{1}{2}\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$.

Mit Hilfe der Substitution $u = t^4$, $du = 4t^3\,dt$ und $u(0)=0$, $u(1)=1$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ sieht man

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^8+1}\,dt = \int_0^1 \frac{du}{4\,(u^2+1)} = \frac{1}{4}\arctan u\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4}-0\Big) = \frac{\pi}{16}\,,$$

$$\int_1^\infty \frac{t^3}{t^8+1}\,dt = \frac{1}{4}\arctan u\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{4}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{16}\,.$$

Die Substitution $u = 1-t,\ t = 1-u,\ dt = -du$ liefert

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}}\,dt = -\int_1^0 \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^1 \sqrt{u}\,du = 2\sqrt{u}\,\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\big(\sqrt{u}\big)^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\,.$$

Mit Hilfe der Substitution $u = \sqrt{e^{2t}+1}$, $e^{2t} = u^2-1$, $t = \frac{1}{2}\ln(u^2-1)$, $dt = \dfrac{u}{u^2-1}$ und $u(0) = \sqrt{2}$, $\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \infty$ erhält man

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}} = \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^\infty \Big(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\Big)\,du = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\Big|_{\sqrt{2}}^\infty = \ln\big(\sqrt{2}+1\big)\,.$$

Indem wir die Substitution $u := \sinh t$, $du = \cosh t\,dt$ mit $\sinh 0 = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\cosh t = \infty$ verwenden, erhalten wir aus $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\cosh t}$ ein Integral über eine rationale Funktion:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\cosh t} = \int_0^\infty \frac{\cosh t}{\cosh^2 t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,dt = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \arctan u\,\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Wegen $\coth' t = -1/\sinh^2 t$ und $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+\cosh t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1-\cosh t}{1-\cosh^2 t}\,dt = -\int_0^\infty \frac{1-\cosh t}{\sinh^2 t}\,dt = -\int_0^\infty \frac{1}{\sinh^2 t}\,dt + \int_0^\infty \frac{\cosh t}{\sinh^2 t}\,dt$$

$$= \Big(\frac{\cosh t}{\sinh t} - \frac{1}{\sinh t}\Big)\Big|_0^\infty = \frac{\cosh t - 1}{\sinh t}\Big|_0^\infty = \frac{\sinh t}{\cosh t + 1}\Big|_0^\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t} + 2} - 0 = 1 \;.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\int_0^\infty (1+t^2)\,e^{-t}\,dt = -(1-t^2)\,e^{-t}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt = (0+1) - 2t\,e^{-t}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-t}\,dt$$

$$= 1 - (0-0) - 2e^{-t}\Big|_0^\infty = 1 + 2 = 3\,.$$

Die Substitution $u = \arctan t$, $du = \dfrac{dt}{1+t^2}$ liefert wegen $\arctan(\pi/4) = 1$, $\lim\limits_{u\to\pi/2} \arctan u = \infty$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{(1+t^2)\arctan t} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{u} = \ln u\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln\frac{\pi}{2} - \ln\frac{\pi}{4} = \ln\frac{\pi/2}{\pi/4} = \ln 2\;.$$

Die Substitution $u = \cos t$, $du = -\sin t\,dt$ liefert wegen $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ und $\sin\pi/2 = 1, \cos 0 = 1$:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos t}}\,dt = -\int_1^0 \frac{1-u^2}{\sqrt{u}}\,du = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^1 u^{3/2}\,du = 2\sqrt{u}\,\Big|_0^1 - \frac{2}{5}\,u^{5/2}\,\Big|_0^1 = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}\;.$$

Mit partieller Integration, bei der $\cos t$ im ersten Integral integriert und im zweiten Integral differenziert wird, sieht man:

$$\int \frac{t^2+2}{t^3}\cos t = \int \frac{1}{t}\cos t\,dt + \int \frac{2}{t^3}\cos t\,dt = \frac{1}{t}\sin t + \int \frac{1}{t^2}\sin t\,dt - \frac{1}{t^2}\cos t - \int \frac{1}{t^2}\sin t\,dt$$

$$= \frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}\,, \qquad \int_\pi^\infty \frac{t^2+2}{t^3}\cos t\,dt = \Big(\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}\Big)\Big|_\pi^\infty = \frac{\cos\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi^2}\;.$$

Bemerkung: Die beiden nächsten Intergale sind Spezialfälle von 17.B, Aufg. 14.

Zur Berechnung von $\int_0^\infty \dfrac{t}{e^t+1}\,dt$ erweitern wir zunächst mit e^{-t}, verwenden dann die Summenformel für die geometrische Reihe und die Vertauschung von Integration und Summation (die möglich ist, da $2t\,e^{-t}$ für $t \ge \ln 2$ eine konvergente Majorante für die Partialsummen der Reihe liefert). Anschließend benutzen wir partielle Integration und die Stetigkeit der gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k\Big(\dfrac{x}{k+1} + \dfrac{1}{(k+1)^2}\Big)\,e^{-(k+1)x}$ im Punkt $x=0$ und schließlich die Summenformel aus Beispiel 14.E.3:

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t+1}\,dt = \int_0^\infty \frac{t\,e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^\infty \frac{t\,e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^\infty \sum_{k=0}^\infty (-1)^k t\,e^{-(k+1)t}\,dt$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_x^\infty t\,e^{-(k+1)\,t}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \Big(-\frac{t}{k+1}\,e^{-(k+1)\,t}\,\Big|_{t=x}^{t=\infty} + \int_x^\infty \frac{1}{k+1}\,e^{-(k+1)\,t}\,dt\Big)$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \Big(\frac{x}{k+1}\,e^{-(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)^2}\,e^{-(k+1)x}\Big) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Zur Berechnung von $\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt$ erweitern wir zunächst mit e^{-t}, verwenden dann die Summenformel für die geometrische Reihe und die Vertauschung von Integration und Summation (die möglich ist, da $2t\,e^{-t}$ für $t \ge \ln 2$ eine konvergente Majorante für die Partialsummen der Reihe liefert). Anschließend benutzen wir partielle Integration und die Stetigkeit der gleichmäßig konvergenten Reihe $\sum_{k=0}^\infty \big(\frac{x}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\big)\,e^{-(k+1)x}$ im Punkt $x=0$ und schließlich die Summenformel aus Beispiel 14.E.3:

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^t-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^\infty \frac{t\,e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^\infty \sum_{k=0}^\infty t\,e^{-(k+1)t}\,dt$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{k=0}^\infty \int_x^\infty t\,e^{-(k+1)\,t}\,dt = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{k=0}^\infty \Big(-\frac{t}{k+1}\,e^{-(k+1)\,t}\,\Big|_{t=x}^{t=\infty} + \int_x^\infty \frac{1}{k+1}\,e^{-(k+1)\,t}\,dt\Big)$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{x}{k+1}\,e^{-(k+1)x} + \frac{1}{(k+1)^2}\,e^{-(k+1)x}\Big) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 17.A, Teil von **Aufg. 2**, p. 468 (1.4.2011):

Man entscheide, ob die folgenden Integrale konvergieren: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t^2+1}{2t^3+1}\,dt\,, \quad \int_0^{\pi/2} \tan t\;dt\,.$

Lösung: Für alle $t \ge 1$ gilt $2t^3+1 \le 2t\,(t^2+1)$ und folglich $\left|\frac{1}{2t}\right| \le \left|\frac{t^2+1}{2t^3+1}\right|$. Da $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{2t}\,dt$ nicht konvergiert, gilt dies nach dem Majorantenkriterium auch für $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t^2+1}{2t^3+1}\,dt$.

Die Substitution $u = \cos t$, $du = -\sin t\;dt$, liefert $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t} = -\int_1^0 \frac{du}{u} = \ln u\,\Big|0^1 = \infty.$ •

Abschnitt 17.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 468 (1.4.2011):

Man entscheide, ob die folgenden Integrale konvergieren: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1-\cos t}$ und $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\cosh t}\,.$

Lösung: Es gilt $\displaystyle\int \frac{dt}{1-\cos t} = \int \frac{1+\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} + \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt = -\cot t - \frac{1}{\sin t} = -\frac{\cos t+1}{\sin t}$,

d.h. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-\cosh t} = -\frac{\cos t+1}{\sin t}\Big|_0^{\pi/2} = -1+\infty = \infty$ konvergiert nicht.

Mit der Substitution $u = e^t$, $du = e^t\,dt$, mit $e^0 = 1$, $e^1 = e$, sieht man wegen $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$, dass das zweite Integral ebenfalls nicht konvergiert:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-\cosh t} = \int_0^1 \frac{dt}{1-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}} = \int_1^e \frac{du}{u\bigl(1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}u^{-1}\bigr)} = -\int_1^e \frac{2\,du}{u^2-2u+1}$$
$$= -\int_1^e \frac{2\,du}{(u-1)^2} = \frac{2}{u-1}\Big|_1^e = -\infty\,. \qquad\bullet$$

Abschnitt 17.A, Aufg. 6, p. 469 (1.4.2011):

$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ sei stetig und monoton. Existiert $\int_0^\infty f(t)\,dt$, so ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Beweis: Nach dem Cauchy-Kriterium gibt es zu $\varepsilon>0$ ein x mit $\bigl|\int_x^{x+1} f(t)\,dt\bigr| < \varepsilon$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es dann nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ein c zwischen x und $x+1$ mit $|f(c)|<\varepsilon$. Da f monoton ist, muss dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ sein. •

Abschnitt 17.A, Teil von **Aufg. 9**, p. 469 (1.4.2011):

Mit 17.A.13 teste man die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\ln n\ \ln(\ln n)}\ ; \qquad \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\,.$$

Lösung: Da die Funktionen $f(x) = 1\big/(\ln x)^{\ln x}$ und $1\big/\ln\bigl(\ln(x)\bigr)$ für $x\ge 3$ monoton fallend sind, können wir das Integralkriterium 17.A.13 verwenden und haben die zugehörigen Integrale auf Konvergenz zu testen.

Die Substitution $u = \ln t$, $du = dt/t$, $e^u\,du = dt$, liefert $\int_3^\infty \frac{dt}{(\ln t)^{\ln t}} = \int_{\ln 3}^\infty \frac{e^u\,du}{u^u}$. Für $u\ge e^2$ gilt $2\le \ln u$, also $e^{2u}\le e^{u\ln u} = u^u$ und somit $\frac{e^u}{u^u}\le e^{-u}$. Daher besitzt das Integral $\int_{\ln 3}^\infty \frac{e^u\,du}{u^u}$ die konvergente Majorante $\int_{\ln 3}^\infty e^{-u}\,du \le \int_0^\infty e^{-u}\,du = 1$.

Die Substitution $u = \ln t$, $du = dt/t$, $e^u\,du = dt$, gefolgt von der Substitution $x = \ln u$, $dx = du/u$, liefert ferner $\int_3^\infty \frac{dt}{t\ \ln t\ \ln(\ln t)} = \int_{\ln 3}^\infty \frac{du}{u\ \ln u} = \int_{\ln(\ln 3)}^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{\ln(\ln 3)}^\infty = \infty$.

Die erste Reihe ist also konvergent, die zweite divergent. •

Abschnitt 17.A, Aufg. 10, p. 469 (1.4.2011):

Für $n\in\mathbb{N}^*$ berechne man $\int_0^1 (\ln t)^n\,dt$.

Lösung: Durch Induktion über $n\in\mathbb{N}$ zeigen wir zunächst $\lim_{t\to 0}(\ln t)^n\,t = 0$. Der Induktionsanfang $n=0$ ist trivial, und beim Schluss von n auf $n+1$ verwenden wir die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{t\to 0}(\ln t)^{n+1}\,t = \lim_{t\to 0}\frac{(\ln t)^{n+1}}{1/t} = \lim_{t\to 0}\frac{(n+1)(\ln t)^n(1/t)}{-1/t^2} = -(n+1)\lim_{t\to 0}(\ln t)^n t = 0\,.$$

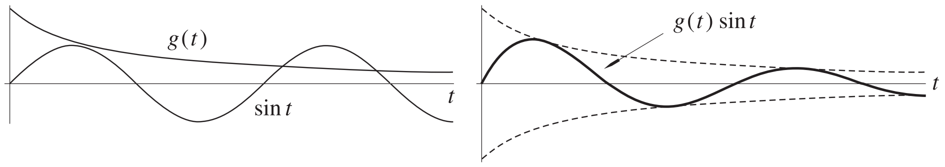
Durch Induktion über $n\in\mathbb{N}^*$ beweisen wir damit $\int\limits_0^1 (\ln t)^n\,dt = (-1)^n n!$. Der Induktionsanfang $n=1$ ist bei 17.A, Aufg. 1 bereits behandelt worden. Der Schluss von n auf $n+1$ folgt durch partielle Integration:

$$\int\limits_0^1 (\ln t)^{n+1}\,dt = \int_0^1 (\ln t)^{n+1}\cdot 1\,dt = (\ln t)^{n+1}\,t\,\Big|_0^1 - (n+1)\int_0^1 (1/t)\,(\ln t)^n t\,dt$$

$$= \lim_{t\to 0}(\ln t)^{n+1}\,t - (n+1)\int_0^1 (\ln t)^n\,dt = 0-(n+1)(-1)^n n! = (-1)^{n+1}(n+1)!\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 17.A, Aufg. 11, p. 469 (1.4.2011) :

$\int\limits_0^\infty g(t)\sin t\,dt$ und $\int\limits_0^\infty g(t)\cos t\,dt$ existieren für jede stetige und monotone Funktion $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$. Es ist $\Big|\int\limits_0^\infty g(t)\,\sin t\,dt\Big| \le \int\limits_0^\pi |g(t)|\,\sin t\,dt \le 2|g(0)|$.



Beweis: Da g monoton ist und $g(t)$ für $t\to\infty$ gegen 0 geht, hat $g(t)$ in ganz $\mathbb{R}_+$ dasselbe Vorzeichen und $|g|$ ist monoton fallend. Da das Vorzeichen von $\sin t$ in den Intervallen $[k\pi\,,\,(k+1)\pi]$ abwechselnd überall positiv bzw. überall negativ ist, sind somit auch die Integrale $I_k := \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)\,\sin t\,dt$ abwechselnd ≥ 0 bzw. ≤ 0. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt wegen der Monotonie von $|g|$

$$2\,|g(k\pi)| = \Big|\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(k\pi)\sin t\,dt\Big| \ge |I_k| = \Big|\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(t)\sin t\,dt\Big| \ge \Big|\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} g((k+1)\pi)\sin t\,dt\Big| = 2\,|g((k+1)\pi)|\,,$$

und die $|I_k|$ bilden eine monoton fallende Nullfolge. Das Leibniz-Kriterium liefert nun die Konvergenz der alternierenden Reihe $\sum_{k=0}^\infty I_k$ gegen einen Grenzwert I mit $|I|\le|I_0|\ \big(\le 2|g(0)|\big)$. Wir zeigen schließlich, dass auch das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty g(t)\,\sin t\,dt$ gegen I konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann gibt es ein n_0 mit $\Big|\int\limits_0^{(k+1)\pi} g(t)\,\sin t\,dt - I\Big| = \Big|\sum\limits_{k=0}^{k} I_k - I\Big| \le \varepsilon/2$ für alle $k\ge n_0$. Wegen der Voraussetzungen über g gibt es ein $S>0$ mit $|g(t)|\le\varepsilon/2\pi$ für alle $t\ge S$. Ist nun $x\ge \mathrm{Max}\,(n_0\pi\,,\,S)$ und ist $k_0:=[x/\pi]$, d.h. $k_0\ge n_0$ und $k_0\pi\le x<(k_0+1)\pi$, so folgt mit der Dreiecksungleichung und dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\Big|\int_0^x g(t)\,\sin t\,dt - I\Big| = \Big|\int_0^{(k_0+1)\pi} g(t)\,\sin t\,dt - \int_x^{(k_0+1)\pi} g(t)\,\sin t\,dt - I\Big|$$

$$\le \Big|\int_0^{(k_0+1)\pi} g(t)\,\sin t\,dt - I\Big| + \Big|\int_x^{(k_0+1)\pi} g(t)\,\sin t\,dt\Big| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{((k_0+1)\pi - x)\,\varepsilon}{2\pi} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi\,\varepsilon}{2\pi} = \varepsilon\,.$$

Die Aussage über das entsprechende Kosinusintegral wird analog bewiesen oder durch die Substitution $z=t+\frac{\pi}{2}$ auf ein Sinusintegral zurückgeführt. $\bullet$

Abschnitt 17.A, **Aufg. 12**, p. 469 (1.4.2011) :

Für alle $z \in \mathbb{C}$ hat $G(z) := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+z)^2}\,dt$ den Wert $\sqrt{\pi}$.

Für $z = -\dfrac{a\mathrm{i}}{2}$, $a \in \mathbb{R}$, ergibt sich $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos at\; dt = e^{-a^2/4}\sqrt{\pi}$.

Beweis: Nach Beispiel 17.A.10 ist $G(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. Wenn wir zeigen, dass G differenzierbar ist mit $G'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so folgt die erste Behauptung, da G nach Korollar 14.A.6 dann konstant ist. Für $z = -a\mathrm{i}/2$, $a \in \mathbb{R}$, ergibt sich dann $e^{-(t-a\mathrm{i}/2)^2} = e^{-(t^2-a^2/4+at\mathrm{i})} = e^{-t^2} e^{a^2/4}(\cos at - \mathrm{i}\sin at)$, also

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-a\mathrm{i}/2)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-a^2/4} \cos at\; dt - \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-a^2/4} \sin at\; dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-a^2/4} \cos at\; dt\,,$$

d.h. $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos at\; dt = e^{a^2/4}\sqrt{\pi}\;.$$

Sei nun $R \in \mathbb{R}_+^\times$ beliebig. Es genügt, die Differenzierbarkeitsaussage über G auf dem offenen Kreis $E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ zu zeigen. Setzen wir $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt für $t \in \mathbb{R}$, $z \in E$ die Abschätzung $\operatorname{Re}(t+z)^2 = \operatorname{Re}(t+x+\mathrm{i}y)^2 = t^2+2tx+x^2-y^2 = \frac{1}{2}(t+2x)^2 + \frac{1}{2}t^2 - x^2 - y^2 \geq \frac{1}{2}t^2 - |z|^2 \geq \frac{1}{2}t^2 - R^2$, also $|e^{-(t+z)^2}| = e^{-\operatorname{Re}(t+z)^2} \leq e^{R^2} e^{-t^2/2}$ und somit $|2(t+z)\,e^{-(t+z)^2}| \leq 2e^{R^2}\big(|t|+R\big)e^{-t^2/2}$. Auf $E \times \mathbb{R}$ folgt $\big|\frac{\partial}{\partial z}\, e^{-(t+z)^2}\big| = \big|-2(t+z)\,e^{-(t+z)^2}\big| \leq 2e^{R^2}\big(|t|+R\big)e^{-t^2/2}$. Mit 17.A.11 gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{R^2}\big(|t|+R\big)e^{-t^2/2}\,dt &= 4e^{R^2}\int_{0}^{\infty} t\,e^{-t^2/2}\,dt \;+ 2e^{R^2}R\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \\ &= -4e^{R^2}e^{-t^2/2}\,\Big|_0^\infty + 2e^{R^2}R\sqrt{2\pi} = 2e^{R^2}(R\sqrt{2\pi}+2) < \infty\,.\end{aligned}$$

Daher ist $g(t) := 2e^{R^2}\big(|t|+R\big)e^{-t^2/2}$ eine integrierbare Majorante zu allen Funktionen $\dfrac{\partial}{\partial z}\,e^{-(t+z)^2}$, $z \in E$. Wir können folglich 17.A.9 anwenden und erhalten

$$G'(z) = \frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+z)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}\,e^{-(t+z)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} -2(t+z)\,e^{-(t+z)^2}\,dt = e^{-(t+z)^2}\,\Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = 0\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 17.B, **Aufg. 1a)**, p. 481 (1.4.2011) :

Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} x > 0$. Dann gilt $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\,dt$.

Beweis: Wir substituieren $\tau = -\ln t$, $e^{-\tau} = t$, $-e^{-\tau}\,d\tau = dt$ und erhalten:

$$\int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\,dt = -\int_\infty^0 \tau^{x-1}e^{-\tau}\,d\tau = \int_0^\infty \tau^{x-1}e^{-\tau}\,d\tau = \Gamma(x)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 17.B, **Aufg. 2a)**, p. 481 (1.4.2011) :

Seien $x, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, und $\mu \in \mathbb{R}_+^\times$. Dann gilt $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-zt^\mu}\, dt = \frac{\Gamma(x/\mu)}{\mu z^{x/\mu}}$.

Beweis: Mit der Substitution $\tau = zt^\mu$, also $t = \left(\frac{\tau}{z}\right)^{1/\mu}$, $dt = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\tau^{(1/\mu)-1}}{z^{1/\mu}}\, d\tau$, erhält man

$$\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-zt^\mu}\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{z}\right)^{(x-1)/\mu} e^{-\tau}\, \frac{1}{\mu}\, \frac{\tau^{(1/\mu)-1}}{z^{1/\mu}}\, d\tau = \frac{1}{\mu\, z^{x/\mu}} \int_0^\infty \tau^{(x/\mu)-1}\, e^{-\tau}\, d\tau = \frac{1}{\mu\, z^{x/\mu}}\, \Gamma\left(\frac{x}{\mu}\right) . \qquad \bullet$$

18 Approximation von Integralen

Abschnitt 18.B, **Zusatzaufgabe**, p. 513 (1.4.2011) :

Man beweise $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2\ln t}{e^t+1}\,dt = -(\ln 2)^2.$

(Dies ist das Keks-Problem Nr. 71 der Uni Würzburg, vgl. http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~keks.)

Beweis: Wir verwenden zunächst der Reihe nach die Summenformel für die geometrische Reihe, die Vertauschung von Integration und Summation (die möglich ist, da das uneigentliche Integral über $2e^{-t}$ eine konvergente Majorante ist), die Substitution $u = kt$, die Summenformel $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$, ferner

$$\int_0^\infty (\ln u)\, e^{-u}\, du = \Gamma'(1) = -\gamma \quad \text{(vgl. 17.B.7) sowie} \quad \int_0^\infty e^{-u}\, du = 1$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln t}{e^t+1}\,dt &= \int_0^\infty \frac{e^{-t}\ln t}{1+e^{-t}}\,dt = \int_0^\infty \ln t \sum_{k=0}^\infty (-1)^k e^{-(k+1)t}\,dt = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \int_0^\infty (\ln t)\, e^{-kt}\,dt \\ &= \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \int_0^\infty \frac{\ln(u/k)}{k}\, e^{-u}\,du = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_0^\infty (\ln u)\, e^{-u}\,du - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}\ln k}{k} \int_0^\infty e^{-u}\,du \\ &= -\gamma \ln 2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k \ln k}{k}\,.\end{aligned}$$

Nach Beispiel 18.B.4 besitzt die Riemannsche Zeta-Funktion $\displaystyle\zeta(s) := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k^s}$ eine Entwicklung der Form $\displaystyle\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{m\ge 1} c_m (s-1)^m$ um 1, woraus sich durch gliedweises Differenzieren ergibt:

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + \sum_{m\ge 0} \tilde{c}_m (s-1)^m$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_m, \tilde{c}_m$. Außerdem benutzen wir (vgl. 6.A, Aufg. 11a))

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s} - 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k)^s} = \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\zeta(s) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s)\,.$$

Durch Differenzieren erhalten wir daraus $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k \ln k}{k^s} = (\ln 2)\, 2^{1-s}\zeta(s) + (1-2^{1-s})\,\zeta'(s)$. Unter Verwendung der Potenzreihenentwicklung $2^{1-s} = e^{(\ln 2)(1-s)} = 1 - (\ln 2)(s-1) + \frac{1}{2}(\ln 2)^2(s-1)^2 + \cdots$ folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k \ln k}{k} &= \lim_{s\to 1} \big((\ln 2)\, 2^{1-s}\zeta(s) + (1-2^{1-s})\,\zeta'(s)\big) \\ &= \lim_{s\to 1} \Big((\ln 2)\big(1-(\ln 2)(s-1) + \frac{1}{2}(\ln 2)^2(s-1)^2 + \cdots\big)\big(\frac{1}{s-1} + \gamma + \cdots\big) \\ &\qquad + \big((\ln 2)(s-1) - \frac{1}{2}(\ln 2)^2(s-1)^2 + \cdots\big)\big(-\frac{1}{(s-1)^2} + c + \cdots\big)\Big) \\ &= \lim_{s\to 1} \Big(\gamma \ln 2 - (\ln 2)^2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \sum_{m\ge 1} \tilde{\tilde{c}}_m (s-1)^m\Big) = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2\end{aligned}$$

mit weiteren Koeffizienten $\tilde{\tilde{c}}_m$. Setzt man dies oben ein, so bekommt man

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{e^t+1}\,dt = -\gamma \ln 2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k \ln k}{k} = -\frac{1}{2}(\ln 2)^2\,, \quad \text{d.h.} \quad \int_0^\infty \frac{2\ln t}{e^t+1}\,dt = -(\ln 2)^2\,. \qquad \bullet$$

Für die numerischen Berechnungen in den folgenden Aufgaben wurde das Programm **Maple** *benutzt.*

Abschnitt 18.C, **Zusatzaufgabe**, p. 525 (1.4.2011):

Das Integral $I := \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ hat den Wert $0{,}74682413281242702 54\ldots$.

a) Man berechne I durch Rechnen mit Potenzreihen bis auf einen Fehler $< 10^{-3}$.

b) Man berechne I mit der Trapezregel bis auf einen Fehler $< 10^{-3}$.

c) Man berechne I mit der Simpson-Regel bis auf einen Fehler $< 10^{-5}$.

d) Man berechne I unter Verwendung des Romberg-Verfahrens mit mindestens 8 Stellen hinter dem Komma.

Lösung: a) Da man Potenzreihen im Inneren des Konvergenzkreises gliedweise integrieren darf, ergibt sich

$$I = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^1 \frac{t^{2k}}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!} \approx \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!} = \frac{5651}{7560} \approx 0{,}7475,$$

wobei der Fehler nach dem Leibniz-Kriterium dem Betrage nach höchstens gleich dem ersten nicht berücksichtigten Glied der Reihe ist, also $\le \dfrac{1}{11\cdot 5!} = \dfrac{1}{1320} < 10^{-3}$ ist. •

b) Für $f(t) := e^{-t^2}$ ist $f'(t) = -2t\,e^{-t^2}$, $f''(t) = (4t^2-2)\,e^{-t^2}$, $f^{(3)}(t) = (-8t^3-12t)\,e^{-t^2}$. $f^{(3)}$ besitzt in $[0,\,1]$ nur die Nullstelle 0, d.h. das globale Maximum M_2 von $|f''|$ in diesem Intervall wird am Rande angenommen. Somit ist M_2 das Maximum von $|f''(0)|$ und $|f''(1)|$, also $\le \mathrm{Max}(2,\ 1{,}4715) = 2$. Für die Anzahl n der notwendigen Intervalle bei der Trapezregel gilt die Abschätzung $M_2(1-0)^3\big/12n^2 < 10^{-3}$, d.h. $n > \sqrt{2000/12} \approx 12{,}91$. Wir nehmen also $n = 13$, $h = 1/13$, $t_k := k/13$, und erhalten

$$I \approx T_{13} = \frac{h}{2}\big(f(t_0)+2f(t_1)+\cdots+2f(t_{12})+f(t_{13})\big) \approx 0{,}74646\,. \qquad \bullet$$

c) Wir schließen an die Lösung von b) an. Weitere Ableitungen von f sind

$$f^{(4)}(t) = (16t^4-48t^2-12)\,e^{-t^2}\,, \qquad f^{(5)}(t) = (-32t^5+160t^3-120t)\,e^{-t^2}\,.$$

$f^{(5)}$ besitzt im Intervall $[0,\,1]$ die Nullstellen 0 und $0{,}95857246$, d.h. das globale Maximum M_4 von $|f^{(4)}|$ in diesem Intervall ist gleich dem Maximum von $|f^{(4)}(0)| = 12$, $|f^{(4)}(1)| \approx 7{,}35759$, $|f^{(4)}(0{,}95857246)| \approx 7{,}41948$ also gleich 12. Für die Anzahl n der notwendigen Doppelintervalle bei der Simpson-Regel gilt die Abschätzung $M_4(1-0)^5\big/2880n^4 < 10^{-5}$, d.h. $n > \sqrt[4]{1200000/2880} \approx 4{,}52$. Wir nehmen also $n = 5$, $h = 1/10$, $t_k := k/10$, und erhalten

$$I \approx S_5 = \frac{h}{3}\big(f(t_0)+4f(t_1)+2f(t_2)+\cdots+2f(t_8)+4f(t_9)+f(t_{10})\big) \approx 0{,}7468249485\,. \qquad \bullet$$

d) Das Romberg-Verfahren (mit $n = 1$) ist durch $T_{2^m,k} = \dfrac{1}{4^k-1}\big(4^k T_{2^{m+1},k-1} - T_{2^m,k-1}\big)$ gegeben, wobei $T_{2^m,0} := T_{2^m}$ die Werte nach dem Trapezverfahren mit 2^m Teilintervallen sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{1,0} & & & & & & \\
T_{2,0} & T_{1,1} & & & & & \\
T_{4,0} & T_{2,1} & T_{1,2} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & T_{2^m,k-1} & \cdots & \\
T_{2^{m+k},0} & T_{2^{m+k-1},1} & T_{2^{m+k-2},2} & \cdots & T_{2^{m+1},k-1} & T_{2^m,k} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

In unserem Fall ergibt sich der Wert $I \approx 0{,}74682413$, da das Romberg-Schema folgende Form hat:

$$\begin{array}{llllll}
0{,}68393972 \\
0{,}73137025 & 0{,}74718043 \\
0{,}74298410 & 0{,}74685538 & 0{,}74683371 \\
0{,}74586562 & 0{,}74682612 & 0{,}74682417 & 0{,}74682402 \\
0{,}74658460 & 0{,}74682426 & 0{,}74682413 & 0{,}74682413 & 0{,}74682413 \\
0{,}74676426 & 0{,}74682414 & 0{,}74682413 & 0{,}74682413 & 0{,}74682413 & 0{,}74682413\,.
\end{array}$$

•

Abschnitt 18.C, **Zusatzaufgabe**, p. 525 (1.4.2011):
Mit Hilfe der Substitution $u = t^2$, $du = 2t\,dt$ sieht man

$$I := \int_0^1 \frac{8t}{t^4+1}\,dt = \int_0^1 \frac{4}{u^2+1}\,du = 4\arctan u\Big|_0^1 = 4\arctan 1 = 4\frac{\pi}{4} = \pi\,.$$

a) Man berechne I durch Rechnen mit Potenzreihen bis auf einen Fehler $< 10^{-3}$.
b) Man berechne I mit der Trapezregel bis auf einen Fehler $< 10^{-3}$.
c) Man berechne I mit der Simpson-Regel bis auf einen Fehler $< 10^{-5}$.
d) Man berechne I unter Verwendung des Romberg-Verfahrens mit mindestens 8 Stellen hinter dem Komma.

Lösung: a) Da man Potenzreihen im Inneren des Konvergenzkreises gliedweise integrieren darf und da die integrierte Reihe in den Punkten auf seinem Rand, in denen sie konvergiert, nach dem Abelschen Grenzwertsatz noch stetig ist, liefert die Summenformel für die geometrische Reihe

$$I = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x 8t\sum_{n=0}^{\infty}(-t^4)^n\,dt = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} 8\cdot(-1)^n t^{4n+1}\,dt = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{8}{4n+2}\,x^{4n+2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{2n+1} \approx \sum_{n=0}^{1999}(-1)^n\frac{4}{2n+1} \approx 3{,}141092654\,,$$

wobei der Fehler nach dem Leibniz-Kriterium dem Betrage nach $\le \dfrac{4}{2\cdot 2000+1} < 10^{-3}$ ist. •

b) Für $f(t) := \dfrac{8t}{t^4+1}$ ist $f'(t) = -\dfrac{8(3t^4-1)}{(t^4+1)^2}$, $f''(t) = \dfrac{32(3t^4-5)}{(t^4+1)^3}$, $f^{(3)}(t) = -\dfrac{96(5t^8-22t^4+5)}{(t^4+1)^4}$. $f^{(3)}$ besitzt in $[0,\,1]$ nur die Nullstellen 0 und $0{,}7002245318$, d.h. das globale Maximum M_2 von $|f''|$ in diesem Intervall wird am Rande angenommen oder in $0{,}7002245318$. Somit ist M_2 das Maximum von $|f''(0)|$, $|f''(1)|$, $|f''(0{,}7002245318)|$, also $\le \mathrm{Max}(0,\,8,\,25) = 25$. Für die Anzahl n der notwendigen Intervalle bei der Trapezregel gilt die Abschätzung $M_2(1-0)^3\big/12n^2 < 10^{-3}$, d.h. $n > \sqrt{25000/12} \approx 45{,}6$. Wir nehmen also $n=46$, $h = 1/46$, $t_k := k/46$, und erhalten

$$I \approx T_{46} = \frac{h}{2}\big(f(t_0)+2f(t_1)+\cdots+2f(t_{45})+f(t_{46})\big) \approx 3.141120041\,.$$ •

c) Wir schließen an die Lösung von b) an. Weitere Ableitungen von f sind

$$f^{(4)}(t) = \frac{192t(15t^{12}-135t^8+101t^4-5)}{(t^4+1)^5}\,,\qquad f^{(5)}(t) = -\frac{960(21t^{16}-336t^{12}+546t^8-120t^4+1)}{(t^4+1)^6}\,.$$

$f^{(5)}$ besitzt im Intervall $[0,\,1]$ nur die Nullstellen $0{,}3051776309$, $0{,}7074387735$, d.h. das globale Maximum M_4 von $|f^{(4)}|$ in diesem Intervall ist gleich dem Maximum von $|f^{(4)}(0)|$, $|f^{(4)}(1)|$, $|f^{(4)}(0{,}3051776309)|$, $|f^{(4)}(0{,}7074387735)|$, also $\approx \mathrm{Max}(0\,;\,144\,;\,231\,;\,536) = 536$. Für die Anzahl n der notwendigen Doppelintervalle bei der Simpson-Regel gilt die Abschätzung $M_4(1-0)^5\big/2880n^4 < 10^{-5}$, d.h. $n > \sqrt[4]{536\cdot 10^5/2880} \approx 11{,}68$. Wir nehmen also $n=12$, $h=1/24$, $t_k := k/24$, und erhalten

$$I \approx S_{12} = \frac{h}{3}\big(f(t_0)+4f(t_1)+2f(t_2)+\cdots+2f(t_{22})+4f(t_{23})+f(t_{24})\big) \approx 3{,}141593862\,.$$ •

d) Das Romberg-Verfahren (mit $n = 1$) ist durch $T_{2^m,k} = \frac{1}{4^k-1}\left(4^k T_{2^{m+1},k-1} - T_{2^m,k-1}\right)$ gegeben, wobei $T_{2^m,0} := T_{2^m}$ die Werte nach dem Trapezverfahren mit 2^m Teilintervallen sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{1,0} & & & & & & \\
T_{2,0} & T_{1,1} & & & & & \\
T_{4,0} & T_{2,1} & T_{1,2} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & T_{2^m,k-1} & \cdots & \\
T_{2^{m+k},0} & T_{2^{m+k-1},1} & T_{2^{m+k-2},2} & \cdots & T_{2^{m+1},k-1} & T_{2^m,k} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

In unserem Fall ergibt sich der Wert $I \approx 3{,}141592653$, da das Romberg-Schema folgende Form hat:

2,000000000					
2,882352941	3,176470588				
3,078696821	3,144144781	3,141989727			
3,125943149	3,141691925	3,141528401	3,141521078		
3,137684876	3,141598785	3,141592576	3,141593595	3,141593880	
3,140615996	3,141593036	3,141592653	3,141592654	3,141592650	3,141592649
3,141348507	3,141592677	3,141592653	3,141592653	3,141592653	3,141592653

•

19 Einfache Differenzialgleichungen

Abschnitt 19.A, Teil von **Aufg. 1**, p. 530 (1.4.2011) :

Man löse die folgende Differenzialgleichung mit getrennten Variablen: $y' = e^y \cos x$.

Lösung: Wir suchen ein Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ genügt.

Da die Funktion e^y keine Nullstellen besitzt, gibt es keine stationären Lösungen. Trennung der Variablen liefert $e^{-y} y' = \cos x$,

$$e^{-y_0} - e^{-y(x)} = -e^{-y}\Big|_{y_0}^{y(x)} = \int_{y_0}^{y(x)} e^{-y}\,dy = \int_{x_0}^{x} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{x_0}^{x} = \sin x - \sin x_0 ,$$

$e^{-y(x)} = e^{-y_0} + \sin x_0 - \sin x;$, d.h. $y(x) = -\ln\,(e^{-y_0} + \sin x_0 - \sin x)$. •

Abschnitt 19.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 530 (1.4.2011) :

Man löse die folgenden Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen:

$$y' = -\frac{y\ln y}{x}\,; \quad y' = (y-1)^2 \sin x\,; \quad y' = (1+x)^2(1+y)\,; \quad y' = \sqrt{1-y^2}\,;$$
$$y' = (y-1)\cdot\frac{x}{1+x^2}\,; \quad y' = \sqrt{1-y^2}\,\cos x\,; \quad y' = (1-y^2)\,\cos x\,.$$

Lösung: Wir suchen jeweils Lösungen $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ genügen. Die Angabe des jeweiligen genauen Defitionsbereichs überlassen wir dem Leser.

Die rechte Seite der Differenzialgleichung $y' = -\dfrac{y\ln y}{x}$ ist nur für Anfangswerte $y_0 > 0$ und $x_0 \neq 0$ definiert. Für $y_0 = 1$ bekommt man die stationäre Lösung $y(x) \equiv 1$.

Bei $y_0 \neq 1$ ist $y(x)$ nirgendwo gleich 1, da $u(x)$ andernfalls nach Satz 19.A.1 konstant gleich 1 wäre. Dann haben also $\ln y(x)$ und $\ln y_0$ nach dem Zwischenwertsatz stets das gleiche Vorzeichen, und Trennung der Variablen liefert $y'/(y\ln y) = -1/x$, d.h. für x mit $x x_0 > 0$ gilt:

$$\ln\frac{\ln y(x)}{\ln y_0} = \ln\,|\ln y|\Big|_{y_0}^{y(x)} = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{y\ln y} = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -\ln|x|\,\Big|_{x_0}^{x} = \ln|x_0| - \ln|x| = \ln\frac{x_0}{x} ,$$
$$\ln y(x) = x_0(\ln y_0)\,x^{-1} , \qquad y(x) = y_0^{x_0/x} .$$

Für $y_0 = 1$ hat $y' = (y-1)^2 \sin x$ die stationäre Lösung $y(x) \equiv 1$. Bei $y_0 \neq 1$ liefert Trennung der Variablen $\dfrac{y'}{(y-1)^2} = \sin x$, $\displaystyle\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{(y-1)^2} = \int_{x_0}^{x} \sin x\,dx$, $\displaystyle -\frac{1}{y(x)-1} + \frac{1}{y_0-1} = -\cos x + \cos x_0$,

$$y(x)-1 = \frac{1}{\cos x - \cos x_0 + 1/(y_0-1)} , \text{ also } y(x) = \frac{y_0 + \cos x - \cos x_0}{(y_0-1)(\cos x - \cos x_0) + 1} .$$

Für $y_0 = -1$ hat $y' = (1+x)^2(1+y)$ die stationäre Lösung $y(x) \equiv -1$. Bei $y_0 \neq -1$ ist $y(x)$ nirgendwo gleich -1, da $u(x)$ andernfalls nach Satz 19.A.1 konstant gleich -1 wäre. Dann haben also $1+y(x)$ und $1+y_0$ nach dem Zwischenwertsatz stets das gleiche Vorzeichen, und Trennung der Variablen liefert:

$$\frac{y'}{1+y} = (1+x)^2 , \qquad \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dy}{1+y} = \int_{x_0}^{x} (1+x)^2 ,$$

$$\ln\frac{1+y(x)}{1+y_0} = \ln|1+y(x)| - \ln|1+y_0| = \frac{1}{3}\big((1+x)^3 - (1+x_0)^3\big) = \frac{1}{3}(x^3 - x_0^3) + x^2 - x_0^2 + x - x_0 ,$$

also $y(x) = -1 + (1+y_0)\exp\big(\frac{1}{3}(x^3 - x_0^3) + x^2 - x_0^2 + x - x_0\big)$.

Für $y=\pm 1$ hat $y'=\sqrt{1-y^2}$ die stationären Lösungen $y(x)\equiv\pm 1$. Für $|y_0|>1$ ist die rechte Seite der Differenzialgleichung nicht definiert.

Bei $|y_0|<1$ liefert Trennung der Variablen $1\big/\sqrt{1-y^2}=1$, d.h.

$$\arcsin y(x)-\arcsin y_0=\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{x_0}^{x}dx=x-x_0\,,\qquad y(x)=\sin\big((\arcsin y_0)-x_0+x\big)\,.$$

Für $y_0=1$ hat $y'=(y-1)\cdot\dfrac{x}{1+x^2}$ die stationäre Lösung $y(x)\equiv 1$.

Bei $y_0\neq 1$ ist $y(x)$ nirgendwo gleich 1, da $y(x)$ andernfalls nach Satz 19.A.1 konstant gleich 1 wäre. Dann haben also $y(x)-1$ und y_0-1 nach dem Zwischenwertsatz stets das gleiche Vorzeichen, und Trennung der Variablen liefert: $y'/(y-1)=x/(1+x^2)$, folglich

$$\ln\frac{y(x)-1}{y_0-1}=\ln|y(x)-1|-\ln|y_0-1|=\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{y-1}=\int_{x_0}^{x}\frac{x\,dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\big(\ln(1+x^2)-\ln(1+x_0^2)\big)=\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1+x_0^2}}\,,$$

$$y(x)=1+\frac{y_0-1}{\sqrt{1+x_0^2}}\sqrt{1+x^2}\,.$$

•

Für $y=\pm 1$ hat $y'=\sqrt{1-y^2}\,\cos x$ die stationären Lösungen $y(x)\equiv\pm 1$. Für $|y_0|>1$ ist die rechte Seite der Differenzialgleichung nicht definiert.

Bei $|y_0|<1$ liefert Trennung der Variablen $y'\big/\sqrt{1-y^2}=\cos x$ und folglich

$$\arcsin y(x)-\arcsin y_0=\arcsin y\,\Big|_{y_0}^{y(x)}=\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int_{x_0}^{x}\cos x\;dx=\sin x-\sin x_0\,.$$

Die gesuchte Lösung ist also $y(x)=\sin(\arcsin y_0-\sin x_0+\sin x)$.

Für $y_0=\pm 1$ hat $y'=(1-y^2)\cos x$ die stationären Lösungen $y(x)\equiv\pm 1$.

Bei $y_0\neq\pm 1$ ist $y(x)$ nirgendwo gleich ± 1, da $y(x)$ andernfalls nach Satz 19.A.1 konstant gleich ± 1 wäre. Dann haben also $1-y(x)$ und $1-y_0$ sowie $1+y(x)$ und $1+y_0$ nach dem Zwischenwertsatz stets das gleiche Vorzeichen, und Trennung der Variablen liefert $y'/(1-y^2)=\cos x$, folglich

$$\frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+y(x)}{1-y(x)}\cdot\frac{1-y_0}{1+y_0}\Big)=\frac{1}{2}\big(-\ln(1-y(x))+\ln(1-y_0)+\ln(1+y(x))-\ln(1+y_0)\big)$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{1-y}+\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{1+y}\Big)=\int_{y_0}^{y(x)}\frac{dy}{1-y^2}=\int_{x_0}^{x}\cos x\;dx=\sin x-\sin x_0\,,$$

$$\frac{1+y(x)}{1-y(x)}\cdot\frac{1-y_0}{1+y_0}=e^{2\sin x-2\sin x_0}=\frac{e^{2\sin x}}{e^{2\sin x_0}}\,,$$

$$1+y(x)=c_0\,(1-y(x))\,e^{2\sin x}\quad\text{mit}\quad c_0:=\frac{1+y_0}{1-y_0}\,e^{-2\sin x_0}\,,\qquad y(x)=\frac{c_0\,e^{2\sin x}-1}{c_0\,e^{2\sin x}+1}\,.$$

•

Abschnitt 19.A, Teil von **Aufg. 3**, p. 530 (1.4.2011):

Man löse die homogene Differenzialgleichung $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

Lösung: Wir suchen eine Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, genügt. Sei zunächst $x_0 \neq 0$. Wir transformieren die Differenzialgleichung durch die Substitution $u := y/x$, d.h.

$$u' = \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{x}\Big(y'-\frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}\Big(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}\Big(\frac{1-(y/x)}{1+(y/x)} - \frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}\Big(\frac{1-u}{1+u} - u\Big) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1-2u-u^2}{1+u},$$

in eine Differenzialgleichung für u mit getrennten Variablen und Anfangsbedingung $u(x_0) = u_0 := y_0/x_0$. Da $1-2u-u^2$ die Nullstellen $-1 \pm \sqrt{2}$ besitzt, hat diese bei $u_0 = -1 \pm \sqrt{2}$, d.h. $y_0 = x_0\big(-1 \pm \sqrt{2}\big)$, die stationären Lösungen $u(x) \equiv -1 \pm \sqrt{2}$, d.h. $y(x) = \big(-1 \pm \sqrt{2}\big)x$.

Bei $u_0 \neq -1 \pm \sqrt{2}$ ist $u(x)$ niemals eine dieser Nullstellen von u^2+2u-1, da $u(x)$ andernfalls nach Satz 19.A.1 konstant gleich einer davon wäre. Dann haben also $u(x)^2+2u(x)-1$ und $u_0^2+2u_0-1$ nach dem Zwischenwertsatz stets das gleiche Vorzeichen, und Trennung der Variablen liefert (für x mit $xx_0 > 0$):

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}, \qquad -\frac{1}{2}\ln|1-2u-u^2|\,\Big|_{u_0}^{u(x)} = \ln|x| - \ln|x_0| = \ln\frac{x}{x_0},$$

$$\ln\frac{u(x)^2+2u(x)-1}{u_0^2+2u_0-1} = \ln|1-2u(x)-u(x)^2| - \ln|1-2u_0-u_0^2| = 2\ln\frac{x_0}{x} = \ln\frac{x_0^2}{x^2},$$

$$u(x)^2+2u(x)-1 = \frac{c_0}{x^2} \quad \text{mit } c_0 := (u_0^2+2u_0-1)x_0^2 = y_0^2+2x_0y_0-x_0^2, \qquad u(x) = -1 \pm \sqrt{\frac{c_0}{x^2}+2},$$

$$y(x) = x\,u(x) = -x \pm x\sqrt{\frac{c_0}{x^2}+2} = -x \pm \sqrt{c_0+2x^2}.$$

Wegen $y_0 = y(x_0) = -x_0 \pm \sqrt{y_0^2+2x_0y_0-x_0^2+2x_0^2} = -x_0 \pm \sqrt{y_0^2+2x_0y_0+x_0^2} = -x_0 \pm |y_0+x_0|$ ist dabei das Vorzeichen $\operatorname{Sign}(y_0+x_0)$ zu wählen, d.h. es folgt $y(x) = -x + \operatorname{Sign}(y_0+x_0)\sqrt{c_0+2x^2}$. Man beachte, dass der Fall $x_0+y_0 = 0$ nicht auftreten kann, da dafür die rechte Seite der Differenzialgleichung nicht definiert ist. – Auch im Fall $x_0 = 0$ liefert die erhaltene Funktion die Lösung $y(x) = -x + (\operatorname{Sign} y_0)\sqrt{y_0^2+2x^2}$ des Anfangswertproblems, wie man leicht bestätigt. •

Abschnitt 19.A, Variante zu **Aufg. 3**, p. 530 (1.4.2011):

Man löse die homogenen Differenzialgleichungen $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$ und $y' = \dfrac{2y^4-x^4}{xy^3}$.

Lösung: Wir suchen jeweils eine Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, genügt.

Wir transformieren die Differenzialgleichung $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$ durch die Substitution $u := y/x$, d.h.

$$u' = \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2} = \frac{1}{|x|}\sqrt{1-u^2},$$

in eine Differenzialgleichung für u mit getrennten Variablen und Anfangsbedingung $u(x_0) = u_0 := y_0/x_0$. Bei $|u_0| > 1$, d.h. $|y_0| > |x_0|$, ist die rechte Seite der Differenzialgleichung nicht definiert.

Für $u_0 = \pm 1$, d.h. $y_0 = \pm x_0$, hat man die stationären Lösungen $u(x) \equiv \pm 1$, d.h. $y(x) = \pm x$.

Bei $|u_0| < 1$, d.h. $|y_0| < |x_0|$, liefert Trennung der Variablen (für x mit $xx_0 > 0$):

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{|x|}, \qquad \arcsin u(x) - \arcsin u_0 = \arcsin u\,\Big|_{u_0}^{u(x)} = \ln|x|\,\Big|_{x_0}^{x} = \ln\frac{x}{x_0},$$

$$u(x) = \sin\Big(\ln\frac{x}{x_0} + \arcsin u_0\Big) = \sin\Big(\ln\frac{x}{x_0}\Big)\cos(\arcsin u_0) + \cos\Big(\ln\frac{x}{x_0}\Big)u_0,$$

$$u(x) = \sin\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)\sqrt{1-u_0^2} + \cos\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)u_0\,, \qquad y(x) = x\sin\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)\sqrt{1-\frac{y_0^2}{x_0^2}} + x\cos\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)\frac{y_0}{x_0}\,.$$

Wir transformieren die Differenzialgleichung $y' = \dfrac{2y^4-x^4}{xy^3}$ durch die Substitution $u := y/x$, d.h.

$$u' = \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y'-\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(2\frac{y}{x}-\left(\frac{x}{y}\right)^3-\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(u-\frac{1}{u^3}\right) = \frac{1}{x}\,\frac{u^4-1}{u^3}\,,$$

in eine Differenzialgleichung für u mit getrennten Variablen und Anfangsbedingung $u(x_0) = u_0 := y_0/x_0$.
Bei $u_0 = \pm 1$, d.h. $y_0 = \pm x_0$, bekommt man die stationären Lösungen $u(x) \equiv \pm 1$, d.h. $y(x) = \pm x$.
Bei $u_0 \neq \pm 1$, d.h. $y_0 \neq \pm x_0$, ist $u(x)$ für kein x eine dieser Nullstellen von u^4-1, da $u(x)$ andernfalls nach Satz 19.A.1 konstant gleich einer davon wäre. Dann haben also $u(x)^4-1$ und u_0^4-1 nach dem Zwischenwertsatz stets das gleiche Vorzeichen und Trennung der Variablen liefert (für x mit $xx_0 > 0$):

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{u^3\,du}{u^4-1} = \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}\,, \qquad \frac{1}{4}\ln\frac{u(x)^4-1}{u_0^4-1} = \frac{1}{4}\ln|u^4-1|\,\Big|_{u_0}^{u(x)} = \ln|x|\,\Big|_{x_0}^{x} = \ln|x|-\ln|x_0| = \ln\frac{x}{x_0}\,,$$

$$u(x)^4-1 = (u_0^4-1)\,x^4/x_0^4\,, \qquad u(x) = \pm\sqrt[4]{(u_0^4-1)\,x^4/x_0^4+1}\,,$$

$$y(x) = \pm x\sqrt[4]{(y_0^4/x_0^4-1)\,x^4/x_0^4+1} = \pm\frac{x}{x_0^2}\sqrt[4]{(y_0^4-x_0^4)\,x^4+x_0^8}\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(x_0) = x_0$ erfordert dabei das Vorzeichen $\operatorname{Sign}(x_0y_0)$, d.h. es ist

$$y(x) = \operatorname{Sign}(x_0y_0)\,\frac{x}{x_0^2}\sqrt[4]{(y_0^4-x_0^4)\,x^4+x_0^8}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 19.B, Teil von **Aufg. 1**, p. 534 (1.4.2011):

Man löse die lineare Differenzialgleichung $y' + 2xy = 2x\,e^{-x^2}$.

Lösung: Wir suchen eine Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, genügt.
Die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung $y' + 2xy = 0$ hat

$$\varphi(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} 2x\,dx\right) = e^{-x^2}\Big|_{x_0}^{x} = e^{x_0^2-x^2}$$

als Lösung mit $\varphi(x_0) = 1$. Für die Störfunktion $g(x) := 2x\,e^{-x^2}$ ist die Lösung also

$$y(x) = \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x}\frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt\right) = e^{x_0^2-x^2}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x}\frac{2t\,e^{-t^2}}{e^{x_0^2-t^2}}\,dt\right) = e^{-x^2}\left(y_0\,e^{x_0^2} + \int_{x_0}^{x}2t\,dt\right)$$

$$= e^{-x^2}\left(y_0\,e^{x_0^2} - x_0^2 + x^2\right)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 19.B, Variante zu **Aufg. 1**, p. 534 (1.4.2011):

Man löse die linearen Differenzialgleichungen $y' = (\tan x)\,y - 2\sin x$ und $y' = \dfrac{1}{x}\,y + x\cos x$.

Lösung: Wir suchen jeweils eine Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, genügt.

Die zu $y' = (\tan x)\,y - 2\sin x$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $y' = (\tan x)\,y$ hat $\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x}\tan x\,dx\right) = e^{-\ln|\cos x|+\ln|\cos x_0|} = \left|\dfrac{\cos x_0}{\cos x}\right| = \dfrac{\cos x_0}{\cos x}$ als Lösung mit $\varphi(x_0) = 1$, wobei x und x_0 im selben Definitionsintervall des Tangens, also Intervall der Form $]k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}[$, liegen sollen.

Für die Störfunktion $g(x) := -\sin x$ ist die Lösung dann

$$y(x) = \varphi(x)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt\Big) = \frac{\cos x_0}{\cos x}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{-2\sin t\,\cos t)}{\cos x_0}\,dt\Big) = \frac{1}{\cos x}\Big(y_0\cos x_0 + \cos^2 t\,\Big|_{x_0}^{x}\Big)$$
$$= \cos x + \frac{(y_0 - \cos x_0)\cos x_0}{\cos x}\,.$$

Die zu $y' = \frac{1}{x}\,y + x\cos x$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $y' = \frac{1}{x}\,y$ hat

$$\varphi(x) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}\Big) = e^{\ln|x| - \ln|x_0|} = \frac{x}{x_0}$$

für alle x mit $xx_0 > 0$ als Lösung mit $\varphi(x_0) = 1$. Für die Störfunktion $g(x) := x\cos x$ ist die Lösung dann

$$y(x) = \varphi(x)\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{\varphi(t)}\,dt\Big) = \frac{x}{x_0}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{t\cos t}{t/x_0}\,dt\Big) = \Big(\frac{y_0}{x_0} - \sin x_0 + \sin x\Big)\,x\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 19.B, Teil von **Aufg. 1**, p. 534 (1.4.2011):
Man löse die folgenden Bernoullischen Differenzialgleichungen:

$$y' = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(1-2x)y^4\,, \qquad y' + 2xy = 2x^3y^3\,, \qquad y' = y + xy^5\,.$$

Lösung: Wir suchen jeweils eine Lösung $y(x)$, die der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ für $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$, genügt.

Im Fall $y_0 = 0$ ist $y(x) \equiv 0$ die gesuchte Lösung. Sei daher $y_0 \neq 0$. Bei $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(1-2x)y^4$ handelt es sich um eine Bernoullische Differenzialgleichung, die durch die Substitution $u = y^{-3}$ in die lineare Differenzialgleichung $u' = (-3)y'y^{-4} = y^{-3} - (1-2x) = u + (2x-1)$ mit der Anfangsbedingung $u(x_0) = u_0 := y_0^{-3}$ überführt wird. Die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung $u' = u$ hat die Lösung $\varphi(x) = e^{x-x_0}$, die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = 1$ genügt. Dann hat das Anfangswertproblem $u' = u + (2x-1)\,,\ u(x_0) = u_0$, die Lösung

$$u(x) = e^{x-x_0}\Big(u_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-(t-x_0)}(2t-1)\,dt\Big) = e^{x-x_0}\Big(u_0 - e^{-(t-x_0)}(2t-1)\,\Big|_{x_0}^{x} + 2\int_{x_0}^{x} e^{-(t-x_0)}\,dt\Big)$$
$$= e^{x-x_0}u_0 - (2x-1) + e^{x-x_0}(2x_0-1) - 2 + 2e^{x-x_0} = e^{x-x_0}(u_0 + 2x_0 + 1) - 2x - 1\,.$$

Die gesuchte Lösung des Ausgangsproblems ist dann

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{x-x_0}(y_0^{-3} + 2x_0 + 1) - 2x - 1}}\,.$$

Im Fall $y_0 = 0$ ist $y(x) \equiv 0$ die gesuchte Lösung von $y' + 2xy = 2x^3y^3$. Sei daher $y_0 \neq 0$. Es handelt es sich um eine Bernoullische Differenzialgleichung, die durch die Substitution $u = y^{-2}$ in die lineare Differenzialgleichung $u' = (-2)y'y^{-3} = 4xu - 4x^3$ mit der Anfangsbedingung $u(x_0) = u_0 := y_0^{-2}$ überführt wird. Die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung $u' = 4xu$ hat die Lösung $\varphi(x) = e^{2x^2 - 2x_0^2}$, die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = 1$ genügt. Dann hat das Anfangswertproblem $u' = 4xu - 4x^3\,,\ u(x_0) = u_0$, die Lösung

$$u(x)=e^{2x^2-2x_0^2}\Big(u_0+\int\limits_{x_0}^{x} e^{2x_0^2-2t^2}(-4t^3)\,dt\Big)=e^{2x^2-2x_0^2}u_0+e^{2x^2}\int\limits_{x_0}^{x} t^2(-4t)\,e^{-2t^2}\,dt$$

$$=e^{2x^2-2x_0^2}u_0+e^{2x^2}\Big(t^2e^{-2t^2}\Big|_{x_0}^{x}-2\int\limits_{x_0}^{x} t\,e^{-2t^2}\,dt\Big)$$

$$=e^{2x^2-2x_0^2}u_0+x^2-x_0^2\,e^{2x^2-2x_0^2}+e^{2x^2}\,\frac{1}{2}\big(e^{-2x^2}-e^{-2x_0^2}\big)=e^{2x^2-2x_0^2}\big(u_0-x_0^2-\frac{1}{2}\big)+x^2+\frac{1}{2}\,.$$

Die gesuchte Lösung des Ausgangsproblems ist dann

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{\sqrt{e^{2(x^2-x_0^2)}(y_0^{-2}-x_0^2-\frac{1}{2})+x^2+\frac{1}{2}}}\,.$$

Im Fall $y_0=0$ ist $y(x)\equiv 0$ die gesuchte Lösung von $y'=y+xy^5$. Sei daher $y_0\neq 0$. Es handelt es sich um eine Bernoullische Differenzialgleichung, die durch die Substitution $u=y^{-4}$ in die lineare Differenzialgleichung $u'=-4y'y^{-5}=-4y^{-4}-4x=-4u-4x$ mit der Anfangsbedingung $u(x_0)=u_0:=y_0^{-4}$ überführt wird. Die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung $u'=-4u$ hat die Lösung $\varphi(x)=e^{-4x+4x_0}$, die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0)=1$ genügt. Dann hat das Anfangswertproblem $u'=-4u-4x$, $u(x_0)=u_0$, die Lösung

$$u(x)=e^{-4x+4x_0}\Big(u_0+\int\limits_{x_0}^{x} e^{4t-4x_0}(-4t)\,dt\Big)=e^{-4x+4x_0}\Big(u_0-e^{4t-4x_0}\,t\,\Big|_{x_0}^{x}+\int\limits_{x_0}^{x} e^{4t-4x_0}\,dt\Big)$$

$$=e^{-4x+4x_0}u_0-x+e^{-4x+4x_0}x_0+\frac{1}{4}\big(1-e^{-4x+4x_0}\big)=e^{-4x+4x_0}\big(u_0+x_0-\frac{1}{4}\big)-x+\frac{1}{4}\,.$$

Die gesuchte Lösung des Ausgangsproblems ist dann

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{u(x)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e^{-4x+4x_0}\big(u_0+x_0-\frac{1}{4}\big)-x+\frac{1}{4}}}\,.$$ •

Abschnitt 19.B, **Aufg. 5**, p. 535 (1.4.2011):

Sei $y'=f(x)\,y+g(x)$ eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit den stetigen Funktionen $f,g:[a,\infty[\,\to\mathbb{K}$, $a\in\mathbb{R}$. Es gebe ein $c\in\mathbb{R}_+^\times$ mit $f(x)\le -c$ für alle $x\ge a$.

a) Ist g beschränkt, so ist auch jede Lösung y von $y'=f(x)\,y+g(x)$ beschränkt.

b) Gilt $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$, so gilt auch $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=0$ für jede Lösung y der Gleichung $y'=f(x)\,y+g(x)$.

Beweis: **a)** Sei $F(x):=\int\limits_a^x f(x)\,dx$. Dann ist $F(x)-F(t)=\int\limits_t^x f(x)\,dx\le c(t-x)$ für $a\le t\le x$. Für eine Lösung $y(x)$ von $y'=f(x)\,y+g(x)$ mit $y(a)=y_0$ folgt

$$|y(x)|=\Big|e^{F(x)}\Big(y_0+\int\limits_a^x e^{-F(t)}g(t)\,dt\Big)\Big|\le|y_0|e^{F(x)}+\Big|\int\limits_a^x e^{F(x)-F(t)}g(t)\,dt\Big|\le|y_0|e^{-cx}+\int\limits_a^x e^{c(t-x)}|g(t)|\,dt.$$

Der erste Summand geht für $x\to\infty$ gegen 0. Ist $|g(t)|\le M$ für alle $t\ge a$, so ist der zweite Summand beschränkt durch $M\int\limits_a^x e^{c(t-x)}\,dt=\frac{M}{c}\big(1-e^{c(a-x)}\big)\le\frac{M}{c}$.

b) Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein x_0 mit $|g(x)|\le\varepsilon c/2$ für $x\ge x_0$ und es sei weiterhin $|g(t)|\le M$ für alle $t\ge a$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-cx}=0$ gibt es ein $x_1>x_0$ mit $\Big(|y_0|+\frac{M}{c}\big(e^{cx_0}-e^{ca}\big)\Big)\,e^{-cx}\le\frac{\varepsilon}{2}$.

Sei $y(x)$ eine Lösung von $y' = f(x)\,y + g(x)$ mit $y(a) = y_0$. Dann gilt für den zweiten Summanden in der obigen Abschätzung von $|y(x)|$:

$$\int_a^x e^{c(t-x)}|g(t)|\,dt = \int_a^{x_0} e^{c(t-x)}|g(t)|\,dt + \int_{x_0}^x e^{c(t-x)}|g(t)|\,dt \le M\int_a^{x_0} e^{c(t-x)}dt + \frac{\varepsilon c}{2}\int_{x_0}^x e^{c(t-x)}dt$$
$$= \frac{M}{c}\big(e^{cx_0} - e^{ca}\big)\,e^{-cx} + \frac{\varepsilon}{2}\big(1 - e^{c(x_0-x)}\big) \le \frac{M}{c}\big(e^{cx_0} - e^{ca}\big)\,e^{-cx} + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

also

$$|y(x)| \le |y_0|\,e^{-cx} + \frac{M}{c}\big(e^{cx_0} - e^{ca}\big)\,e^{-cx} + \frac{\varepsilon}{2} = \Big(|y_0| + \frac{M}{c}\big(e^{cx_0} - e^{ca}\big)\Big)\,e^{-cx} + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $x \ge x_1$. Es folgt $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. •

Abschnitt 19.C, **Aufg. 3b)**, p. 560 (1.4.2011) :

Seien $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ die Anzahlen der U^{238}- bzw. U^{235}-Atome in einer gegebenen Uranprobe zur Zeit t. Die Halbwertszeiten von U^{238} bzw. U^{235} betragen $T_1 = 4{,}5\cdot 10^9$ Jahre bzw. $T_2 = 0{,}7\cdot 10^9$ Jahre. In einem Probestück habe das Verhältnis von U^{238} und U^{235} den Wert 137, 8. Unter der Annahme, dass zur Zeit der Entstehung die Anteile von U^{238} und U^{235} gleich waren, berechne man das Alter der Probe.

Lösung: Sei $y(t)$ die Anzahl der Atome eines Isotops mit der Halbwertszeit T zur Zeit t, zur Anfangszeit $t_0 = 0$ seien y_0 Atome vorhanden. Die Zerfallsrate dy/dt ist proportional zu $y(t)$, also $dy(t)/dt = -\lambda y(t)$, wobei $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante ist. Es folgt $y(t) = y_0\,e^{-\lambda t}$. Wegen $y(T) = \frac{1}{2}y_0$ folgt $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T}$, d.h. $\lambda = (\ln 2)/T$. Für die Zerfallskonstanten von U^{238} und U^{235} ergibt sich daraus $\lambda_1 = 0{,}154\cdot 10^{-9}$ und $\lambda_2 = 0{,}99\cdot 10^{-9}$ sowie $\lambda_2 - \lambda_1 = 0{,}836\cdot 10^{-9}$. Mit Obigem folgt

$$137{,}8 = \frac{y_1(t_1)}{y_2(t_1)} = \frac{y_1(0)\,e^{-\lambda_1 t_1}}{y_2(0)\,e^{-\lambda_2 t_1}} = \frac{y_1(0)}{y_2(0)}\,e^{(\lambda_2-\lambda_1)t_1} = e^{0{,}836\cdot 10^{-9}\,t_1} = e^{0{,}836\cdot 10^{-9}\,t_1}\,,$$

woraus sich für das Alter t_1 der Probe der Wert $t_1 = 5{,}892\cdot 10^9$ ergibt. (Das Alter der Erde wird heute mit ca. $4{,}5\cdot 10^9$ Jahren angegeben.) •

Abschnitt 19.C, Variante zu **Aufg. 14**, p. 564 (1.4.2011) :

Die Luft in der Wüste habe abends um 18 Uhr eine Temperatur von 40°C; die Temperatur eines Steines, der dort in der Sonne gelegen hat, betrage gleichzeitig 80°C. Von da an sinke die Temperatur T_L der Luft. Die Temperatur des Steines T_S ändere sich mit einer Rate, die proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Luft und Stein ist, d.h. zu jedem Zeitpunkt t sei $T_S'(t) = \beta\,\big(T_L(t) - T_S(t)\big)$ (Newtonsches Abkühlungsgesetz). Man berechne die Temperatur des Steines um 4 Uhr am nächsten Morgen unter der Annahme $\beta = \frac{1}{2}$,

a) falls die Temperatur T_L der Luft gleichmäßig um 4°C pro Stunde sinkt,

b) falls die Temperatur T_L der Luft mit einer Abkühlungsrate sinkt, die proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Luft und Stein ist, d.h. $\dot T_L(t) = \alpha\big(10 - T_L(t)\big)$ ist, etwa mit dem Proportionalitätsfaktor $\alpha = \frac{1}{4}$.

Lösung: a) Es ist $T_L(t) = 40 - 4t$, also $T_S'(t) = \beta\,\big(40 - 4t - T_S(t)\big)$. Diese lineare Differenzialgleichung hat die Lösung

$$T_S(t) = e^{-\beta t}\Big(80 + \int_0^t \beta e^{\beta t}(40-4t)\,dt\Big) = e^{-\beta t}\Big(40 + e^{\beta t}(40-4t) + \frac{4}{\beta}\big(e^{\beta t}-1\big)\Big) = \Big(40 - \frac{4}{\beta}\Big)e^{-\beta t} + 40 - 4t + \frac{4}{\beta}\,.$$

Für $\beta = \frac{1}{2}$ und $t = 10$ ergibt sich die gesuchte Temperatur zu $8 + 32e^{-5} \approx 8{,}2$°C .

b) Es ist $T_L = 10 + 30e^{-\alpha t}$, also $T_S'(t) = \beta\,\big(10 + 30e^{-\alpha t} - T_S(t)\big)$ mit der Lösung

$$T_S(t) = e^{-\beta t}\Big(80 + \int_0^t \beta e^{\beta t}(10 + 30e^{-\alpha t})\,dt\Big) = 70e^{-\beta t} + 10 + \frac{30\beta}{\beta - \alpha}\big(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\big)\,.$$

Für $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ und $t = 10$ ergibt sich die gesuchte Temperatur zu $10 + 10e^{-5} + 60e^{-5/2} \approx 15$°C . •

Abschnitt 19.C, Teil von **Aufg. 15**, p. 565 (1.4.2011):

Nach Torricellis Gesetz hat Wasser, das aus einem bis zur Höhe h gefüllten Behälter aus einer kleinen Öffnung am Grunde des Behälters fließt, die Geschwindigkeit $c\sqrt{2gh}$ mit einer Konstanten c $(0 < c \le 1)$, die im Idealfall 1 ist. Ist A die Fläche der Ausflussöffnung und hat der Behälter in der Höhe h den Querschnitt $F(h)$, so erfüllt h die Differenzialgleichung $\dot h = -Ac\sqrt{2gh}/F(h)$. Man beschreibe die Höhe h als Funktion der Zeit und bestimme die Zeit, bis der Behälter leer ist, für

a) ein zylindrisches Fass mit Radius R;

b) einen kegelförmigen Trichter mit Öffnungswinkel α.

Lösung: a) Es ist $F(h) = \pi R^2$ für alle Werte von h. Wir haben also die Differenzialgleichung

$$\dot h = -Ac\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{h}}{\pi R^2}$$

für die Anfangsbedingung $h(0) = H$ zu lösen und erhalten durch Trennen der Variablen:

$$2\sqrt{h(t)} - 2\sqrt{H} = 2\sqrt{h}\,\Big|_H^{h(t)} = \int_H^{h(t)} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{A}{\pi R^2}\,c\sqrt{2g}\int_0^t dt = -\frac{A}{\pi R^2}\,c\sqrt{2g}\cdot t\,,$$

also $h(t) = \Big(\sqrt{H} - \dfrac{A}{\pi R^2\sqrt{2}}\,c\sqrt{g}\cdot t\Big)^2$. Wegen $h(T) = 0$ ergibt sich für die gesuchte Zeit T:

$$\sqrt{H} - \frac{A}{\pi R^2\sqrt{2}}\,c\sqrt{g}\cdot T = 0\,, \quad \text{d.h.} \quad T = \frac{\pi R^2}{Ac}\sqrt{\frac{2H}{g}}\,.$$ •

b) Wir bezeichnen die Höhe des Trichters mit H, seinen oberen Radius mit R und seinen unteren Radius mit $r < R$. Dann ist $s := \tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R-r}{H}$. Die Querschnittsfläche des Trichters in der Höhe h hat dann den Radius $r+hs$ und die Fläche $F(h) = \pi(r+hs)^2$. Wir haben also die Gleichung

$$\dot h = -Ac\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{h}}{\pi(r+hs)^2}$$

für die Anfangsbedingung $h(0) = H$ zu lösen und erhalten durch Trennen der Variablen:

$$\int_H^{h(t)} \frac{(r+hs)^2}{\sqrt{h}}\,dh = -\frac{Ac}{\pi}\sqrt{2g}\int_0^t dt = -\frac{Ac}{\pi}\sqrt{2g}\cdot t\,,$$

$$-\frac{Ac}{\pi}\sqrt{2g}\,t = \int_H^{h(t)} \big(s^2h^{3/2} + 2rsh^{1/2} + r^2h^{-1/2}\big)\,dh = \frac{2}{5}s^2h^{5/2} + \frac{4r}{3}sh^{3/2} + 2r^2h^{1/2}\Big|_H^{h(t)}.$$

Dies liefert eine Gleichung 5. Grades für $\sqrt{h(t)}$, aus der sich $h(t)$, etwa mit dem Newton-Verfahren, bestimmen lässt. Für die gesuchte Zeit T, bis das Gefäß geleert ist, ergibt sich wegen $h(T) = 0$:

$$-\frac{Ac}{\pi}\sqrt{2g}\,T = -\frac{2}{5}s^2H^{5/2} - \frac{4r}{3}sH^{3/2} - 2r^2H^{1/2}\,, \quad \text{also} \quad T = \frac{\pi}{Ac\sqrt{2g}}\Big(\frac{2}{5}s^2H^{5/2} + \frac{4}{3}sH^{3/2} + 2r^2H^{1/2}\Big)\,.$$

Mit $\rho := sH/r$ erhält man:

$$T = \frac{\pi r^2}{Ac}\sqrt{\frac{2H}{g}}\,\Big(\frac{1}{5}\rho^2 + \frac{2}{3}\rho + 1\Big)\,.$$

Im Fall $r = R$ ist $\rho = 0$, und wir erhalten die Formel aus a), im Fall $A = \pi r^2$ ergibt sich einfach

$$T = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{2H}{g}}\,\Big(\frac{1}{5}\rho^2 + \frac{2}{3}\rho + 1\Big)\,.$$ •

Abschnitt 19.C, Variante zu **Aufg. 19**, p. 566 (1.4.2011) :

Ein Körper der Masse m falle aus der Ruhelage mit der Geschwindigkeit $v(t)$. Er unterliege dabei zwei Kräften, nämlich der Schwerkraft mg und einer Widerstandskraft der Form $\alpha v(t)^\beta$ mit Konstanten $\alpha>0$, $\beta>0$. Berechnen Sie $v(t)$ und die Grenzgeschwindigkeit $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ in den Fällen $\beta=1$ und $\beta=2$.

Lösung: Wegen Kraft = Masse mal Beschleunigung gilt die Kräftebilanz $m\dot v = mg-\alpha v^\beta$. Dies ist eine Differenzialgleichung mit getrennten Variablen für $v(t)$. Trennung der Variablen liefert

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{g-\frac{\alpha}{m}v^\beta} = \int_0^t dt = t\ .$$

Sei zunächst $\beta=1$. Integration liefert

$$\frac{m}{\alpha}\ln g - \frac{m}{\alpha}\ln\Big(g-\frac{\alpha}{m}v(t)\Big) = -\frac{m}{\alpha}\ln\Big(g-\frac{\alpha}{m}v\Big)\Big|_0^{v(t)} = t\ , \qquad \frac{g-\frac{\alpha}{m}v(t)}{g} = e^{-(\alpha/m)t}\ .$$

Auflösen nach $v(t)$ liefert $g-\dfrac{\alpha}{m}v(t) = e^{-(\alpha/m)t}g$, d.h. $v(t) = \dfrac{mg}{\alpha}\big(1-e^{-(\alpha/m)t}\big)$. Es folgt:

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\alpha}\ .$$

Sei nun $\beta=2$. Integration liefert mit Hilfe von 14.B, Aufg. 6b) :

$$t = \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g-\frac{\alpha}{m}v^2} = \frac{1}{g}\int_0^{v(t)} \frac{dv}{1-\frac{\alpha}{mg}v^2} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\,\mathrm{Artanh}\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\,v\,\Big|_0^{v(t)} = \sqrt{\frac{m}{\alpha g}}\,\mathrm{Artanh}\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\,v(t)\ ,$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}\,v(t) = \tanh\Big(\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}\,t\Big)\ , \qquad v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\,\tanh\Big(\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}\,t\Big)\ .$$

Wegen $\lim\limits_{t\to\infty}\tanh t = 1$ folgt $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{\alpha}}$. •

Abschnitt 19.C, **Zusatzaufgabe**, p. 570 (1.4.2011) :

Ein gleichmäßiger starker Schneefall begann t_0 Stunden vor Mitternacht. Genau um 0 Uhr fuhr ein Schneepflug los und räumte mit konstanter Leistung, d.h. er schaffte immer die gleiche Menge Schnee pro Zeiteinheit. In der zweiten Stunde kam er nur halb so weit wie in der ersten Stunde, weil der Schnee inzwischen viel höher lag. Stellen Sie fest, wann es zu schneien begann, d.h. bestimmen Sie t_0.

Lösung: Die Geschwindigkeit des Schneepflugs sei $v(t)$, die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0=v(0)$ und der zurückgelegte Weg sei $s(t)$. Wegen der Konstanz der Räumleistung und da die Schneehöhe proportional zur verflossenen Zeit ist, ist die Geschwindigkeit des Schneepflugs umgekehrt proportional zur Zeit, die seit dem Einsetzen des Schneefalls verflossen ist. Es gilt also $v(t):v_0 = t_0:(t+t_0)$, d.h. $(t+t_0)v(t) = t_0v_0$, und mit $\dot s(t) = v(t)$, $s(0)=0$ folgt

$$s(t) = \int_0^t v(t) = t_0v_0\int_0^t \frac{dt}{t+t_0} = t_0v_0\ln(t+t_0)\Big|_0^t = t_0v_0\ln(t+t_0) - t_0v_0\ln t_0 = t_0v_0\ln\Big(\frac{t+t_0}{t_0}\Big)\ .$$

Wegen $s(2) = \dfrac{3}{2}s(1)$ ist $2\ln\Big(\dfrac{2+t_0}{t_0}\Big) = 3\ln\Big(\dfrac{1+t_0}{t_0}\Big)$, $\Big(\dfrac{2+t_0}{t_0}\Big)^2 = \Big(\dfrac{1+t_0}{t_0}\Big)^3$. Es folgt $(2+t_0)^2t_0 = (1+t_0)^3$, $t_0^2+t_0-1=0$, d.h. $t_0 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \approx 0{,}618$ Stunden ≈ 37 Minuten. •

Abschnitt 19.C, **Zusatzaufgabe**, p. 570 (1.4.2011) :

Das mechanische Zählwerk eines Kassettenrekorders zeige die Umdrehungszahl n der anfangs leeren Spule. Es sei $t(n)$ die zur Anzeige n gehörende Spieldauer. Bei Spielbeginn werde das Zählwerk auf 0 gestellt, d.h. es sei $t(0)=0$. Die Bandgeschwindigkeit sei $v=4{,}75$ cm/sec. Man gebe $t(n)$ in Abhängigkeit vom Radius R der leeren Spule und der Banddicke d an. Es sei $n=1000$ nach 12 und $n=2000$ nach 28 Minuten erreicht. Man berechne d und R.

Lösung: Es ist $t(n+h) = t(n) + h\,\dfrac{2(R+nd)\pi}{v}$, also $\dfrac{dt}{dn} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{t(n+h)-t(h)}{h} = \dfrac{2(R+nd)\pi}{v}$. Daraus folgt: $t(n) = \dfrac{1}{v}(2\pi Rn + n^2\pi d)$. Einsetzen der Werte liefert $R = 4{,}5$ mm und $d = 0{,}0018$ mm. •

Abschnitt 19.D, Variante zu **Aufg. 1**, p. 580 (1.4.2011):

Für die folgenden linearen Differenzialgleichungen bestimme man alle komplexwertigen und alle reellwertigen Lösungen:

$$\ddot y - 3\dot y + 2y = 3e^{-t} + 4 \quad \ddot y - 3\dot y - 4y = 2e^t - 1\,, \quad y - 4\dot y + 4y = 1 + e^{-2t}, \quad \ddot y + 2\dot y + y = 2t + e^{-t},$$
$$\ddot y - \dot y + \tfrac12 y = t + \sin 3t\,, \quad \ddot y - 2\dot y + y = xe^x + e^{-t}\sin t\,, \quad y'' + 2y' + y = te^{-t} + e^{2t}\cos t\,,$$
$$y^{(3)} - 2\ddot y + 4\dot y = -60\,e^t \sin 3t\,, \quad y^{(3)} - 2\ddot y + 2\dot y = -15\,e^t\cos 2t\,.$$

Lösung: Die zu $\ddot y - 3\dot y + 2y = 3e^{-t} + 4$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $\ddot y - 3\dot y + 2y = 0$ (mit konstanten Koeffizienten) hat das charakteristische Polynom $P(X) := X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ mit den Nullstellen 1 und 2. Ihre sämtlichen Lösungen sind also $c_1e^t + c_2e^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot y - 3\dot y + 2y = 3e^{-t}$ löst man durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da -1 keine Nullstelle von P ist, erhält man als eine Lösung $(3/P(-1))e^{-t} = \frac36 e^{-t} = \frac12 e^{-t}$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot y - 3\dot y + 2y = 4e^{0\cdot x}$ löst man ebenfalls durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da 0 keine Nullstelle von P ist, erhält man als eine Lösung $(4/P(0))e^{0\cdot x} = \frac42 = 2$.

Alle Lösungen der Ausgangsgleichung haben also die Form $y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac12 e^{-t} + 2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Die zu $\ddot y - 3\dot y - 4y = 2e^t - 1$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $\ddot y - 3\dot y - 4y = 0$ (mit konstanten Koeffizienten) hat das charakteristische Polynom $P(X) := X^2 - 3X - 4 = (X-4)(X+1)$(mit den Nullstellen 4 und -1 (p,q-Formel!). Ihre sämtlichen Lösungen sind also $c_1e^{4t} + c_2e^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot y - 3\dot y - 4y = 2e^x$ löst man durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da 1 keine Nullstelle von P ist, erhält man als eine Lösung $(2/P(1))e^t = \frac{2}{-6}e^t = -\frac13 e^t$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot y - 3\dot y - 4y = -1 = -e^{0\cdot x}$ löst man ebenfalls durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da 0 keine Nullstelle von P ist, erhält man als eine Lösung $(-1/P(0))e^{0\cdot t} = 1/4$.

Alle Lösungen der Ausgangsgleichung haben also die Form $y(t) = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac13 e^{-t} + \frac14$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Die zu $\ddot y - 4\dot y + 4y = 1 + e^{-2t}$ gehörende homogene Differenzialgleichung $\ddot y - 4\dot y + 4y = 0$ hat $P = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$ mit der doppelten Nullstelle 2 als charakteristisches Polynom und daher e^{2t}, te^{2t} als Basis des Lösungsraums über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.

Die zugehörige inhomogene Differenzialgleichung mit rechter Seite 1 hat die Lösung $(1/P(0))\,e^{0\cdot t} = \frac14$.

Die inhomogene Differenzialgleichung mit rechter Seite e^{-2t} hat die Lösung $y(t) = (1/P(-2))\,e^{-2t} = (1/16)\,e^{-2t}$.

Superposition liefert die allgemeine Lösung $y(t) = \frac14 + \frac1{16}e^{-2t} + c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Die zu $\ddot y + 2\dot y + y = 2t + e^{-t}$ gehörende homogene Differenzialgleichung $\ddot y + 2\dot y + y = 0$ hat $P = X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$ mit der doppelten Nullstelle -1 als charakteristisches Polynom und daher e^{-t}, te^{-t} als Basis des Lösungsraums über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$.

Die zugehörige inhomogene Differenzialgleichung mit rechter Seite $2t$ lösen wir mit dem Ansatz $y(t) = (at+b)\,e^{0\cdot t} = at+b$ und bekommen $a = 2$, $b = -4$, d.h. die Lösung $2t - 4$.

Die inhomogene Differenzialgleichung mit rechter Seite e^{-t} lösen wir mit dem Ansatz $y(t) = h(t)e^{-t} = at^2e^{-t}$ und bekommen $a = \frac12$, d.h. die Lösung $\frac12 t^2e^{-t}$.

Superposition liefert die allgemeine Lösung $y(t) = 2t - 4 + \frac12 t^2e^{-t} + c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$.

Die zu $\ddot{y}-\dot{y}+\frac{1}{2}y=t+\sin 3t$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $\ddot{y}-\dot{y}+\frac{1}{2}y=0$ hat das charakteristische Polynom $P(X):=X^2-X+\frac{1}{2}=\big(X-\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})\big)\big(X-\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\big)$ mit den beiden Nullstellen $\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(1\pm\mathrm{i})$. Ihre sämtlichen komplexwertigen Lösungen sind also $c_1e^{\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})t}+c_2e^{\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{C}$, und die reellwertigen Lösungen sind $c_1e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+c_2e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot{y}-\dot{y}+\frac{1}{2}y=t$ löst man durch einen Ansatz $y(t)=ct+c'$ vom Typ der rechten Seite. Wegen $\dot{y}=c$ und $\ddot{y}=0$ liefert er $-c+\frac{1}{2}(ct+c')=t$, d.h. $c=2$ und $c'=c=2$. So erhält man die Lösung $2t+2$.

Lösungen der inhomogenen linearen Differenzialgleichung $\ddot{y}-\dot{y}+\frac{1}{2}y=\sin 3t=\operatorname{Im}e^{3\mathrm{i}t}$ bekommt man als Imaginärteile von Lösungen der inhomogenen linearen Differenzialgleichung $\ddot{y}-\dot{y}+\frac{1}{2}y=e^{3\mathrm{i}t}$, die man durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite löst. Wegen $P(3\mathrm{i})\neq 0$ erhält man die Lösung

$$\frac{1}{P(3\mathrm{i})}e^{3\mathrm{i}t}=\frac{1}{-9-3\mathrm{i}+\frac{1}{2}}(\cos 3t+\mathrm{i}\sin 3t)=\frac{-\frac{17}{2}+3\mathrm{i}}{(\frac{17}{2})^2+3^2}(\cos 3t+\mathrm{i}\sin 3t)=\big(-\tfrac{34}{325}+\tfrac{12}{325}\mathrm{i}\big)(\cos 3t+\mathrm{i}\sin 3t)=$$
$$=-\frac{34}{325}\cos 3t-\frac{12}{325}\sin 3t+\mathrm{i}\Big(\frac{12}{325}\cos 3t-\frac{34}{325}\sin 3t\Big).$$

Der Imaginärteil $\frac{12}{325}\cos 3t-\frac{34}{325}\sin 3t$ dieser Lösung ist dann eine Lösung von $\ddot{y}-\dot{y}+\frac{1}{2}y=\sin 3t$. Indem man dazu alle oben angegebenen Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung addiert, erhält man alle Lösungen über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

Die zu $\ddot{y}-2\dot{y}+y=te^t+e^{-t}\sin t$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $\ddot{y}-2\dot{y}+y=0$ (mit konstanten Koeffizienten) hat das charakteristische Polynom $P(X):=X^2-2X+1=(X-1)^2$ mit 1 als doppelter Nullstelle. Ihre sämtlichen Lösungen sind also $c_1e^t+c_2te^t$, $c_1,c_2\in\mathbb{K}$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot{y}-2\dot{y}+y=te^t$ löst man durch einen Ansatz der Form $y(t)=(at^3+bt^2)e^t$ mit Konstanten a und b, da der Exponent der e-Funktion auf der rechten Seite eine doppelte Nullstelle von P ist und da ihr Vorfaktor ein Polynom vom Grad 1 ist. Es folgt $\dot{y}(t)=(3at^2+2bt+at^3+bt^2)e^t$, $\ddot{y}(t)=(6at+2b+6at^2+4bt+at^3+bt^2)e^t$. Einsetzen liefert $(6at+2b+6at^2+4bt+at^3+bt^2)e^t-2(3at^2+2bt+at^3+bt^2)e^t+(at^3+bt^2)e^t=te^t$, woraus man nach Kürzen von e^t und Vergleich der Koeffizienten von t^1 und t^0 bekommt: $6a+4b-4b=1$, $2b=0$, d.h. $a=\frac{1}{6}$ und $b=0$. Eine Lösung ist also $\frac{1}{6}t^3e^t$.

Statt der inhomogenen linearen Differenzialgleichung $\ddot{y}-2\dot{y}+y=e^{-t}\sin t$ lösen wir zunächst einmal $\ddot{y}-2\dot{y}+y=e^{-t}e^{\mathrm{i}t}=e^{(-1+\mathrm{i})t}$ durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Der Imaginärteil einer solchen Lösung löst dann die Gleichung mit rechter Seite $e^{-t}\sin t$. Da $-1+\mathrm{i}$ keine Nullstelle von P ist, erhält man als Lösung $\frac{1}{P(-1+\mathrm{i})}e^{(-1+\mathrm{i})t}=\frac{1}{(-1+\mathrm{i})^2-2(-1+\mathrm{i})+1}e^{(-1+\mathrm{i})t}=\frac{1}{3-4\mathrm{i}}e^{(-1+\mathrm{i})t}=\frac{3+4\mathrm{i}}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}e^{(-1+\mathrm{i})t}=$ $(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}\mathrm{i})(e^{-t}\cos t+\mathrm{i}e^{-t}\sin t)=(\frac{3}{25}e^{-t}\cos t-\frac{4}{25}e^{-t}\sin t+\mathrm{i})(\frac{4}{25}e^{-t}\cos t+\frac{3}{25}e^{-t}\sin t)$. Der Imaginärteil $\frac{4}{25}e^{-t}\cos t+\frac{3}{25}e^{-t}\sin t$ ist hier die gesuchte Lösung.

Alle Lösungen der Ausgangsgleichung sind somit $y(t)=c_1e^t+c_2xe^t+\frac{1}{6}t^3e^t+\frac{4}{25}e^{-t}\cos t+\frac{3}{25}e^{-t}\sin t$, $c_1,c_2\in\mathbb{K}$.

Die zu $\ddot{y}+2\dot{y}+y=te^{-t}+e^{2t}\cos t$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung $\ddot{y}+2\dot{y}+y=0$ (mit konstanten Koeffizienten) hat das charakteristische Polynom $P(X):=X^2+2X+1=(X+1)^2$ mit -1 als doppelter Nullstelle. Ihre sämtlichen Lösungen sind also $c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{K}$.

Die inhomogene lineare Differenzialgleichung $\ddot{y}-2\dot{y}+y=te^{-t}$ löst man durch einen Ansatz der Form $y(t)=(at^3+bt^2)e^{-t}$ mit Konstanten a und b, da der Exponent der e-Funktion auf der rechten Seite eine doppelte Nullstelle von P ist und da ihr Vorfaktor ein Polynom vom Grad 1 ist. Es folgt $\dot{y}(t)=(3at^2+2bt-at^3-bt^2)e^{-t}$, $\ddot{y}(t)=(6at+2b-6at^2-4bt+at^3+bt^2)e^{-t}$. Einsetzen liefert $(6at+2b-6at^2-4bt+at^3+bt^2)e^{-t}+2(3at^2+2bt-at^3-bt^2)e^{-t}+(at^3+bt^2)e^{-t}=te^{-t}$, woraus man nach Kürzen von e^{-t} und Vergleich der Koeffizienten von t^1 und t^0 bekommt: $6a-4b+4b=1$, $2b=0$, d.h. $a=\frac{1}{6}$ und $b=0$. Eine Lösung ist also $\frac{1}{6}t^3e^{-t}$.

Statt der inhomogenen linearen Differenzialgleichung $\ddot{y}+2\dot{y}+y=e^{2t}\cos t$ lösen wir zunächst einmal $\ddot{y}+2\dot{y}+y=e^{2t}e^{\mathrm{i}t}=e^{(2+\mathrm{i})t}$ durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Der Realteil einer solchen Lösung löst dann die Gleichung mit rechter Seite $e^{2t}\cos t$. Wegen $P(2+\mathrm{i})\neq 0$ bekommt man zunächst als Lösung $\frac{1}{P(2+\mathrm{i})}e^{(2+\mathrm{i})t}=\frac{1}{(2+\mathrm{i})^2+2(2+\mathrm{i})+1}e^{(2+\mathrm{i})t}=\frac{1}{8+6\mathrm{i}}e^{(2+\mathrm{i})t}=\frac{8-6\mathrm{i}}{(8+6\mathrm{i})(8-6\mathrm{i})}e^{(2+\mathrm{i})t}=(\frac{2}{25}-\frac{3}{50}\mathrm{i})\,(e^{2x}\cos t+\mathrm{i}\,e^{2x}\sin t)=(\frac{2}{25}e^{2t}\cos t+\frac{3}{50}e^{2t}\sin t)+\mathrm{i}\,(-\frac{3}{50}e^{2t}\cos t+\frac{2}{25}e^{2t}\sin t)$. Der Realteil $\frac{2}{25}e^{2t}\cos t+\frac{3}{50}e^{2t}\sin t$ ist hier die gesuchte Lösung.

Alle Lösungen der Ausgangsgleichung sind $y(t)=c_1e^{-t}+c_2xe^{-t}+\frac{1}{6}t^3e^{-t}+\frac{2}{25}e^{2t}\cos t+\frac{3}{50}e^{2t}\sin t$, $c_1,c_2\in\mathbb{K}$.

Die zu $y^{(3)}-2\ddot{y}+4\dot{y}=-60\,e^t\sin 3t$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung hat das charakteristische Polynom $P=X^3-2X^2+4X=X\,(X-1-\mathrm{i}\sqrt{3}\,)(X-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,)$ und daher das komplexe Lösungsfundamentalsystem $e^{0\cdot t}=1,\ e^{(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\,)t},\ e^{(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\,)t}$. Das zugehörige reelle Lösungsfundamentalsystem ist 1, $e^t\cos(\sqrt{3}\,t)$, $e^t\sin(\sqrt{3}\,t)$.

Die inhomogene Gleichung mit rechter Seite $-60e^{(1+3\mathrm{i})t}$ hat $\big(-60/P(1+3\mathrm{i})\big)e^{(1+3\mathrm{i})t}=\big(10/(1+3i)\big)e^te^{3\mathrm{i}t}=(1-3i)e^t(\cos 3t+\mathrm{i}\sin 3t)$ als Lösung. Der Imaginärteil $(\sin 3t-3\cos 3t)e^t$ dieser Funktion ist eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung.

Die Funktionen $y(t)=(\sin 3t-3\cos 3t)\,e^t+c_1+c_2e^t\cos(\sqrt{3}\,t)+c_3e^t\sin(\sqrt{3}\,t)$ mit $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}$ sind also alle Lösungen der Ausgangsgleichung.

Die zu $y^{(3)}-2\ddot{y}+2\dot{y}=-15\,e^t\cos 2t$ gehörende homogene lineare Differenzialgleichung hat das charakteristische Polynom $P=X^3-2X^2+2X=X\,(X-1-\mathrm{i})(X-1+\mathrm{i})$ und daher das komplexe Lösungsfundamentalsystem $e^{0\cdot t}=1,\ e^{(1+\mathrm{i})\,t},\ e^{(1-\mathrm{i})\,t}$. Das zugehörige reelle Lösungsfundamentalsystem ist 1, $e^t\cos t$, $e^t\sin t$.

Die inhomogene Gleichung mit rechter Seite $-15\,e^{(1+2\mathrm{i})\,t}$ hat $\big(-15/P(1+2\mathrm{i})\big)e^{(1+2\mathrm{i})\,t}=\big(10/(1+2i)\big)\,e^te^{2\mathrm{i}\,t}=(1-2i)\,e^t(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)$ als Lösung. Der Realteil $(\cos 2t+2\cos 2t)\,e^t$ dieser Funktion ist eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung.

Die Funktionen $y(t)=(\cos 2t+2\sin 2t)\,e^t+c_1+c_2e^t\cos t+c_3e^t\sin t$ mit $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}$ sind also alle Lösungen der Ausgangsgleichung.

Abschnitt 19.D, Teil von **Aufg. 2**, p. 580 (1.4.2011):

Unter einer Eulerschen Differenzialgleichung versteht man eine Differenzialgleichung der Form

$$(at+b)^ny^{(n)}+a_{n-1}(at+b)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=g$$

mit Konstanten $a,b,a_0,\ldots,a_{n-1}$. Diese wird bei $a\neq 0$ durch die Substitution

$$\tau=\ln(at+b)$$

auf eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt.

Man löse die folgenden Differenzialgleichungen:

$$t^2\ddot{y}+5t\,\dot{y}+4y=0\,;\qquad t^3y^{(3)}-t^2\ddot{y}+2t\,\dot{y}-2y=t^3+3t\,;\qquad t^2\ddot{y}+t\dot{y}+y=0\,.$$

Lösung: Genau dann ist $\tau=\ln(at+b)$, wenn $t=\frac{1}{a}(e^\tau-b)$ ist. Bezeichnen wir die Ableitung nach t mit einem Punkt und die nach τ mit $'$ und setzen $z(\tau):=y\big(\frac{1}{a}(e^\tau-b)\big)=y(t)$, also $y(t)=z\big(\ln(at+b)\big)$, so ergibt sich $\dot{y}(t)=(at+b)^{-1}a\,z'(\tau)$. Durch Induktion über k zeigen wir, dass es Konstanten $c_{k,j}$ gibt mit $y^{(k)}(t)=(at+b)^{-k}\sum_{j=0}^k c_{k,j}\,z^{(j)}(\tau)$: Für $k=0$ und $k=1$ ist das die Definition von z bzw. die obige Formel für $\dot{y}$. Differenzieren der Induktionsvoraussetzung nach t liefert beim Schluss von k auf $k+1$:

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}(t)&=\Big((at+b)^{-k}\sum_{j=0}^k c_{k,j}\,z^{(j)}(\tau)\Big)^{\cdot}\Big((at+b)^{-k}\sum_{j=0}^k c_{k,j}\,z^{(j)}\big(\ln(at+b)\big)\Big)^{\cdot}\\&=-ka\,(at+b)^{-k-1}\sum_{j=0}^k c_{k,j}\,z^{(j)}\big(\ln(at+b)\big)+(at+b)^{-(k+1)}\sum_{j=0}^k ac_{k,j}\,z^{(j+1)}\big(\ln(at+b)\big)\\&=(at+b)^{-(k+1)}\sum_{j=0}^{k+1}c_{k+1,j}\,z^{(j)}\big(\ln(at+b)\big)=(at+b)^{-(k+1)}\sum_{j=0}^{k+1}c_{k+1,j}\,z^{(j)}(\tau)\end{aligned}$$

mit $c_{k+1,k+1}=ac_{k,k}$, $c_{k+1,j}:=-kac_{k,j}+c_{k,j-1}$ für $j=1,\ldots,k$ und $c_{k+1,0}=-kac_{k,0}$.

Genau dann gilt also $g(t)=\sum_{k=0}^{n}(at+b)^k y^{(k)}(t)$, wenn für $z(\tau)$ folgende lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten gilt:

$$g\bigl(\tfrac{1}{a}(e^\tau-b)\bigr)=\sum_{k=0}^{n}(at+b)^k(at+b)^{-k}\sum_{j=0}^{k}c_{k,j}\,z^{(j)}(\tau)=\sum_{j=0}^{n}\Bigl(\sum_{k=j}^{n}c_{k,j}\Bigr)z^{(j)}(\tau)\,.$$

Um $t^2\ddot{y}+5t\,\dot{y}+4y=0$ zu lösen, setzen wir gemäß dem Vorstehenden $\tau=\ln t$, $z(\tau)=y(e^\tau)=y(t)$, d.h. $\dot{y}(t)=t^{-1}z'(\tau)$, und erhalten daraus $\ddot{y}(t)=-t^{-2}z'(\tau)+t^{-2}z''(\tau)=t^{-2}\bigl(z''(\tau)-z'(\tau)\bigr)$. Dann ist die Gleichung $t^2\ddot{y}+5t\dot{y}+4y=0$ äquivalent zu $t^2t^{-2}\bigl(z''(\tau)-z'(\tau)\bigr)+5tt^{-1}z'(\tau)+4z(\tau)=0$, d.h. zu $z''(\tau)+4z'(\tau)+4z(\tau)=0$. Das zugehörige charakteristische Polynom X^2+4X+4 hat die doppelte Nullstellen -2, die Lösungen von $z''+4z'+4z=0$ sind also $c_1e^{-2\tau}+c_2\tau e^{-2\tau}$ mit Konstanten c_1, c_2. Die Lösungen der Ausgangsgleichungen sind dann $c_1e^{-2\ln t}+c_2(\ln t)\,e^{-2\ln t}=(c_1+c_2\ln t)\,t^{-2}$, $c_1, c_2\in\mathbb{K}$.

Um $t^3y^{(3)}-t^2\ddot{y}+2t\dot{y}-2y=t^3+3t$ zu lösen, setzen wir gemäß dem Vorstehenden $\tau=\ln t$, $z(\tau)=y(e^\tau)=y(t)$, d.h. $\dot{y}(t)=t^{-1}z'(\tau)$, $\ddot{y}(t)=t^{-2}\bigl(z''(\tau)-z'(\tau)\bigr)$, $y^{(3)}(t)=t^{-3}\bigl(z^{(3)}(\tau)-3z''(\tau)+2z'(\tau)\bigr)$. Dann ist die Gleichung $t^3y^{(3)}-t^2\ddot{y}+2t\dot{y}-4y=t^3+3t$ äquivalent zu

$$t^3t^{-3}(z^{(3)}-3z''+2z')-t^2t^{-2}\bigl(z''-z'\bigr)+2tt^{-1}z'-2z=e^{3\tau}+3e^\tau,$$

d.h. zu $z^{(3)}-4z''+5z'-2z=e^{3\tau}+3e^\tau$. Das zugehörige charakteristische Polynom $P:=X^3-4X^2+5X-2$ hat die doppelte Nullstellen 1 sowie die Nullstelle 2, die Lösungen der homogenen Differenzialgleichung $t^3y^{(3)}-t^2\ddot{y}+2t\dot{y}-4y=0$ sind also $c_1e^\tau+c_2\tau e^\tau+c_3e^{2\tau}$ mit Konstanten $c_1, c_2, c_3\in\mathbb{K}$.

$z^{(3)}-4z''+5z'-2z=e^{3\tau}$ hat die spezielle Lösung $(1/P(3))\,e^{3\tau}=\frac{1}{4}\,e^{3\tau}$.

$z^{(3)}-4z''+5z'-2z=3e^\tau$ hat die spezielle Lösung $(3/P''(1)\,e^\tau=\frac{3}{10}\,e^\tau$.

Alle Lösungen von $z^{(3)}-4z''+5z'-2z=e^{3\tau}+3e^\tau$ sind dann $\frac{1}{4}\,e^{3\tau}+\frac{3}{10}\,e^\tau+c_1e^\tau+c_2\tau e^\tau+c_3e^{2\tau}$, $c_1, c_2, c_3\in\mathbb{K}$.

Die Lösungen der Ausgangsgleichungen sind schließlich

$y(t)=\frac{1}{4}\,e^{3\ln t}+\frac{3}{10}\,e^{\ln t}+c_1e^{\ln t}+c_2(\ln t)\,e^{\ln t}+c_3e^{2\ln t}=\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{10}t+(c_1+c_2\ln t)\,t+c_3t^2$, $c_1, c_2\in\mathbb{K}$.

Um $t^2\ddot{y}+t\dot{y}+y=0$ zu lösen, setzen wir gemäß dem Vorstehenden $\tau=\ln t$, $z(\tau)=y(e^\tau)=y(t)$, d.h. $\dot{y}(t)=t^{-1}z'(\tau)$, $\ddot{y}(t)=t^{-2}\bigl(z''(\tau)-z'(\tau)\bigr)$, und erhalten die lineare Differenzialgleichung $z''+z=0$ für τ. Die zugehörige homogene Gleichung hat das charakteristische Polynom $X^2+1=(X+\mathrm{i})(X-\mathrm{i})$. Ihre Lösungen sind also $c_1e^{-\mathrm{i}t}+c_2e^{\mathrm{i}t}$, $c_1, c_2\in\mathbb{C}$, über $\mathbb{C}$ und $c_1\cos t+c_2\sin t$, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$, über $\mathbb{R}$. Die Lösungen der Ausgangsgleichungen sind dann $y(t)=c_1\cos(\ln t)+c_2\sin(\ln t)$, $c_1, c_2\in\mathbb{K}$. •