Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 1, 3. Aufl. (Version 2010), Kapitel 5

13 Differenzierbare Funktionen

Abschnitt 13.A, Variante zu **Aufg. 3**, p. 343 (1.2.2011):

Man untersuche, ob die beiden Funktionen $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\sqrt[3]{x^2}$ bzw. $g(x):=\sqrt{x^3}$ im Punkt 0 differenzierbar sind.

Lösung: Für $x\to 0$ geht $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{0^2}}{x-0}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ gegen ∞, d.h. f ist in 0 nicht differenzierbar.

Für $x\to 0$ geht $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{0^3}}{x-0}=\sqrt{x}$ gegen 0, d.h. g ist in 0 differenzierbar mit $g'(0)=0$. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 6c), p. 344 (1.2.2011):

Die Funktion f sei in einer Umgebung von $a\in\mathbb{R}$ definiert und in a selbst differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)\,.$$

Beweis:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\Bigl(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}+\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}\frac{f(a-h)-f(a)}{(a-h)-a}\Bigr)=\frac{1}{2}\bigl(f'(a)+f'(a)\bigr)=f'(a)\,.$$

Bemerkung: Man beachte die Schlussrichtung. Der zu berechnende Limes kann existieren, ohne dass f in a differenzierbar ist. Beispiel!

Abschnitt 13.A, Aufg. 6d), p. 344 (1.2.2011):

Die Funktion f sei in einer Umgebung von $a\in\mathbb{K}$ definiert und in a selbst differenzierbar. Dann gilt:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)\,.$$

Beweis: Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{xf(a)-af(a)+af(a)-af(x)}{x-a}$$

$$=f(a)\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{x-a}{x-a}+a\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f(a)-f(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)\,.$$ •

Abschnitt 13.A, Aufg. 9a), p. 344 (1.2.2011):

Die Funktionen $f_1,\dots,f_n$ seien in $a\in D$ differenzierbar. Dann gilt: Das Produkt $f_1\cdots f_n$ ist ebenfalls in a differenzierbar, und es ist

$$(f_1\cdots f_n)'(a)=\sum_{i=1}^{n}(f_1\cdots f_{i-1}f_i'f_{i+1}\cdots f_n)(a)\,.$$

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Für $n=0$ steht links das leere Produkt, also die Konstante 1 mit der Ableitung 0, und rechts die leere Summe, also 0. Für $n=1$ lautet die zu beweisende Gleichung einfach $f_1'(a)=f_1'(a)$, und für $n=2$ handelt es sich um die übliche Produktregel.
Beim Schluss von n auf $n+1$ wenden wir zunächst die Pruduktregel (Fall $n=2$ der Behauptung) an und dann die Induktionsvoraussetzung. Dies liefert

$$\begin{aligned}(f_1\cdots f_n\cdot f_{n+1})'(a) &= (f_1\cdots f_n)'(a)\cdot f_{n+1}(a)+(f_1\cdots f_n)(a)\cdot f'_{n+1}(a)\\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} f_1\cdots f_{k-1}\,f'_k\,f_{k+1}\cdots f_n\Big)(a)\cdot f_{n+1}(a)+(f_1\cdots f_n\,f'_{n+1})(a)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(f_1\cdots f_{k-1}\,f'_k\,f_{k+1}\cdots f_n\,f_{n+1})(a)\,,\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung für $n+1$ statt n. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 10, p. 344 (1.2.2011) :

Man zeige die folgenden Summenformeln, indem man die Ableitung der Polynomfunktion $(1+x)^n$ auf zweierlei Weise berechnet:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}=n2^{n-1}\,,\qquad \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k\binom{n}{k}=0\quad (n>1)\,.$$

Durch mehrmaliges Ableiten beweise man $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[k]_m\binom{n}{k}=[n]_m 2^{n-m}\quad (0\le m\le n)\,.$

Lösung: Nach dem Binomischen Lehrsatz ist $n(1+x)^{n-1}=\big((1+x)^n\big)'=\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big)'=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k\,x^{k-1}$. Setzt man hierin $x=1$ bzw. $x=-1$, so erhält man die angegebenen Summenformeln.

m-maliges Differenzieren liefert entsprechend

$$[n]_m(1+x)^{n-m}=n(n-1)\cdots(n-m+1)(1+x)^{n-m}=(1+x)^{(m)}=\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big)^{(m)}=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}[k]_m x^{k-m},$$

Setzt man hierin $x=1$, so erhält man auch die letzte der angegebenen Summenformeln. •

Bemerkung: Zu dieser Aufgabe vergleiche auch 2.B, Aufg. 11 und die dazu angegebene Lösung. – Addiert man die Formeln für $m=1$ und $m=2$, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}.$$

Abschnitt 13.A, Variante zu Aufg. 10), p. 344 (1.2.2011) :

Man leite Summenformeln für $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kx^k$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2x^k$ her und berechne damit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}kx^k &= x\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=x\Big(\sum_{k=0}^{n}x^k\Big)'=x\Big(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\Big)'=\\ &= x\,\frac{(n+1)\,x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}\,.\end{aligned}$$

Weiteres Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2x^{k-1} &= \Big(\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2}\Big)'\\ &= \frac{(n^2+2n)x^{n+1}-(n+1)^2x^n+1)(x-1)-2(nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x)}{(x-1)^3}\\ &= \frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n^2+2n+1)x^n-x-1}{(x-1)^3}\,,\end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=1}^{n}k^2x^k=\frac{n^2x^{n+3}-(2n^2+2n-1)x^{n+2}+(n^2+2n+1)x^{n+1}-x^2-x}{(x-1)^3}\,.$$

Setzt man hierin $x = 1/2$, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{\dfrac{n}{2^{n+2}} - \dfrac{n+1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2} = 2 - \frac{n+2}{2^n}\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 13.A, Aufg. 11b), p. 345 (1.2.2011) :

Man berechne die Ableitung der (bijektiven) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3 + 2x + 4$, $x \in \mathbb{R}$, an der Stelle $b = 1$.

Lösung: Offenbar ist $f(-1) = 1$. Wegen $f'(x) = 3x^2+2$, also $f'(-1) = 5$, gilt

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(1)\big)} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5}\,.$$

Bemerkung: Übrigens ist f injektiv, da f streng monoton wachsend ist. Dies sieht man am einfachsten daran, dass die Ableitung $f'(x) = 3x^2+2 \geq 2$ überall positiv ist. Es folgt aber auch direkt daraus, dass $f(x)$ als Summe der streng monoton wachsenden Funktionen x^3 und $2x$ und der Konstanten 4 streng monoton ist. Außerdem nimmt f für $x \to \infty$ beliebig große und für $x \to -\infty$ beliebig kleine Werte an und dann als stetige Funktion auch alle Zwischenwerte, ist also surjektiv. Daher ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv.

Man kann nun auch leicht höhere Ableitungen von f im Punkt 1 ausrechnen: Es gilt nämlich allgemein $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$. Mit der Quotientenregel und der Kettenregel ergibt sich wegen $f''(x) = 6x$, also $f''\big(f^{-1}(1)\big) = f''(-1) = -6$:

$$(f^{-1})''(x) = \left(\frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}\right)' = \frac{-f''\big(f^{-1}(x)\big)\cdot\big(f^{-1}\big)'(x)}{\big(f'(f^{-1}(x))\big)^2} = \frac{-(-6)\cdot\frac{1}{5}}{5^2} = \frac{6}{125}\,.$$

Abschnitt 13.A, Variante zu **Aufg. 11)**, p. 345 (1.2.2011) :

Man begründe, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3+3x+1$, $x \in \mathbb{R}$, bijektiv ist, und berechne die Ableitungen $(f^{-1})'(5)$ und $(f^{-1})''(5)$ der Umkehrfunktion f^{-1} von f im Punkt $f(1)=5$.

Lösung: Da x^3 und x streng monoton wachsend sind, ist auch $f(x) := x^3+3x+1$ streng monoton wachsend und somit injektiv. Als Polynom ungeraden Gerades nimmt f beliebig kleine und beliebig große Werte an und dann nach dem Zwischenwertsatz auch alle Zwischenwerte, ist also surjektiv.

Wegen $f^{-1}(5) = 1$ und $f'(x) = 3x^2+3$, also $f'\big(f^{-1}(5)\big) = f'(1) = 6$, ist $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(5)\big)} = \dfrac{1}{6}$.

Allgemeiner gilt $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$. Mit der Quotientenregel und der Kettenregel ergibt sich $(f^{-1})''(x) = \left(\dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}\right)' = \dfrac{-f''\big(f^{-1}(x)\big)\cdot\big(f^{-1}\big)'(x)}{\big(f'(f^{-1}(x))\big)^2}$. Wegen $f''(x) = 6x$, also $f''\big(f^{-1}(5)\big) = f''(1) = 6$ ist daher $(f^{-1})''(5) = \dfrac{-f''\big(f^{-1}(5)\big)\cdot\big(f^{-1}\big)'(5)}{\big(f'(f^{-1}(5))\big)^2} = \dfrac{-6\cdot\frac{1}{6}}{6^2} = -\dfrac{1}{36}$. •

Abschnitt 13.A, Variante zu **Aufg. 11)**, p. 345 (1.2.2011) :

Man begründe, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^3-6x^2+15x+2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bijektiv ist, und berechne die Ableitungen $(f^{-1})'(12)$ und $(f^{-1})''(12)$ der Umkehrfunktion f^{-1} von f im Punkt $f(1)=12$.

Lösung: Wegen $f'(x) = 3x^2-12x+15$, also $f'(1) = 6$, ist $(f^{-1})'(12) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(12)\big)} = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$.

Allgemeiner gilt $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$. Mit der Quotientenregel und der Kettenregel ergibt sich $(f^{-1})''(x) = \left(\dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}\right)' = \dfrac{-f''\big(f^{-1}(x)\big)\cdot\big(f^{-1}\big)'(x)}{\big(f'(f^{-1}(x))\big)^2}$. Wegen $f''(x) = 6x-12$, also $f''\big(f^{-1}(12)\big) = f''(1) = -6$ ist daher $(f^{-1})''(12) = \dfrac{-f''\big(f^{-1}(12)\big)\cdot\big(f^{-1}\big)'(12)}{\big(f'(f^{-1}(12))\big)^2} = \dfrac{-(-6)\cdot\frac{1}{6}}{6^2} = \dfrac{1}{36}$.

Übrigens ist f injektiv, da f streng monoton wachsend ist. Dies sieht man am einfachsten daran, dass die Ableitung $f'(x) = 3x^2-12x+15 = 3(x-2)^2+3 \geq 3$ überall positiv ist. Es folgt aber auch direkt daraus, dass $f(x) = (x-2)^3+3x+10$ als Summe der streng monoton wachsenden Funktionen $(x-2)^3$ und $3x+10$ streng monoton ist. Außerdem nimmt f für $x \to \infty$ beliebig große und für $x \to -\infty$ beliebig kleine Werte an und dann als stetige Funktion auch alle Zwischenwerte, ist also surjektiv. Daher ist f bijektiv. •

Abschnitt 13.A, Aufg. 12a), p. 345 (1.2.2011):

Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung von 0 definiert. Es gelte dort $f(x)\,g(x) = x$ sowie $f(0) = g(0) = 0$. Man begründe, dass f und g im Nullpunkt nicht beide differenzierbar sind.

Beweis: Wären f und g beide in 0 differenzierbar, so könnte man die Produktregel anwenden und erhielte in $1 = x'\big|_{x=0} = \big(f(x)\,g(x)\big)'\big|_{x=0} = \big(f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\big)\big|_{x=0} = f'(0)\,g(0) + f(0)\,g'(0) = 0$ (wegen $f(0) = g(0) = 0$) einen Widerspruch. •

Zusatz: Sind f und g überdies stetig in 0, so ist weder f noch g in 0 differenzierbar. Existierte etwa $f'(0)$, so wäre $1 = \lim\limits_{x\to 0,\, x\neq 0}\Big(\dfrac{f(x)}{x}\cdot g(x)\Big) = f'(0)\,g(0) = 0$.

Abschnitt 13.A, Aufg. 12b), p. 345 (1.2.2011):

Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung von 0 definiert. f sei in 0 differenzierbar mit $f(0) = f'(0) = 0$, und es gelte $g\big(f(x)\big) = x$ in einer Umgebung des Nullpunkts. Man begründe, dass g dann in 0 nicht differenzierbar ist.

Beweis: Wäre auch g in 0 differenzierbar, so könnte man die Kettenregel anwenden und erhielte den Widerspruch $1 = x'\big|_{x=0} = g\big(f(x)\big)'\big|_{x=0} = g'\big(f(0)\big)\cdot f'(0) = g(0)\cdot 0 = 0$. •

Abschnitt 13.B, Aufg. 3, p. 348 (1.2.2011):

Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Dann gilt $fg^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\big(f^{(k)}g\big)^{(n-k)}$.

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Für $n=0$ sind $fg^{(0)} = fg$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k\binom{0}{k}\big(f^{(k)}g\big)^{(0-k)} = fg$ gleich. Beim Schluss von n auf $n+1$ liefert die gewöhnliche Produktregel $\big(fg^{(n)}\big)' = f'g^{(n)} + fg^{(n+1)}$, d.h. $fg^{(n+1)} = \big(fg^{(n)}\big)' - f'g^{(n)}$. Wir wenden nun die Induktionsvoraussetzung auf $fg^{(n)}$ und auf $f'g^{(n)}$ an, machen dann in der zweiten Summe einen Indexwechsel und benutzen zum Schluss die Formel (4) aus 2.B.9:

$$\begin{aligned}
fg^{(n+1)} &= \big(fg^{(n)}\big)' - f'g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\big(f^{(k)}g\big)^{(n-k+1)} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\big(f^{(k+1)}g\big)^{(n-k)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\big(f^{(k)}g\big)^{(n-k+1)} - \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}\big(f^{(k)}g\big)^{(n-(k-1))}\\
&= \binom{n}{0}\big(f^{(0)}g\big)^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)\big(f^{(k)}g\big)^{(n-k+1)} - (-1)^n\binom{n}{n}f^{(n+1)}g\\
&= \binom{n+1}{0}\big(f^{(0)}g\big)^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k}\big(f^{(k)}g\big)^{(n-k+1)} + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}f^{(n+1)}g
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(f^{(k)} g\right)^{(n-k+1)} .$$ •

Abschnitt 13.B, Variante zu **Aufg. 3**, p. 348 (1.2.2011) :

Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Dann gilt die Leibniz-Regel, vgl. S. 347 unten,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} .$$

Beweis: Für $n = 0$ sind $(fg)^{(0)} = fg$ und $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(0-k)} g^{(k)} = fg$ gleich. Beim Schluss von n auf $n+1$ verwenden wir zunächst die Induktionsvoraussetzung und die gewöhnliche Produktregel, machen dann in der zweiten Summe einen Indexwechsel und benutzen zum Schluss die Formel (4) aus 2.B.9:

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} \\
&= \binom{n}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n}{n} f g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \binom{n+1}{n+1} f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)} g^{(k)} .
\end{aligned}$$ •

Abschnitt 13.B, Teil von **Aufg. 7c)**, p. 349 (1.2.2011) :

Man berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Lösung: Zunächst folgt aus $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$ durch gliedweises Differenzieren der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$. Daraus erhält man in analoger Weise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = x \, \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} .$$

Setzt man hierin $x = 1/2$, so ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$. •

Bemerkung: Dies folgt auch aus der Lösung von 13.A, Variante zu Aufg. 10, p. 344.

Abschnitt 13.B, Variante zu **Aufg. 7c)**, p. 349 (1.2.2011) :

Man berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2}{(n-1)!}$.

Lösung: Zunächst gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\right)' = \left(x e^x\right)' = e^x (1+x)$. Dies liefert nach Indexwechsel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) x^{n+1}}{n!}\right)' = x \left(x e^x (1+x)\right)' = e^x (x + 3x^2 + x^3) .$$

Setzt man hierin $x=2$, so folgt: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n^2}{(n-1)!}=22e^2$. •

Abschnitt 13.B, Zusatzaufgabe, p. 350 (1.2.2011) :

Für $n\in\mathbb{N}^*$ gebe man die n-te Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\dfrac{1+x}{1-x}$ an und beweise die angegebene Formel durch vollständige Induktion.

Lösung: Es ist $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{2+(x-1}{1-x}=\dfrac{2}{1-x}-1$, also $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}=2\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)}=\dfrac{2\,(n!)}{(1-x)^{n+1}}$ für $n\in\mathbb{N}^*$. Beim Beweis dieser Behauptung durch Induktion ist der Induktionsanfang klar, und der Schluss von n auf $n+1$ ist richtig wegen $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(n+1)}=\left(\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}\right)'=\left(\dfrac{2\,(n!)}{(1-x)^{n+1}}\right)'=-(n+1)\,\dfrac{2\,(n!)\,(-1)}{(1-x)^{n+2}}=\dfrac{2\,\big((n+1)!\big)}{(1-x)^{n+2}}$. •

Abschnitt 13.C, Variante zu **Aufg. 1**, p. 364 (1.2.2011) :

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (wobei die Definitionsbereiche jeweils geeignet zu wählen sind):

$$\sqrt[3]{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\,,\qquad \ln(\tan^2 x+1)\,,\qquad \sqrt[3]{\tan^2 x+2^x}\,,\qquad \frac{1}{\sqrt[3]{2+\cos(x^2)}}\,,$$

$$3^x+\sqrt{1+2\tan^2 x}\,,\qquad \frac{\cos x\,\sinh x}{\sqrt[3]{\ln x}}\,,\qquad \frac{(\sin x)\,(\ln x)}{\sqrt{\cosh^2 x+x^2}}\,.$$

Lösung:

$$\left(\sqrt[3]{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\right)'=\frac{2x}{3\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{2x^4}{\sqrt{1+x^4}^{\,3}}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{1+x^2}^{\,2}}+\frac{1-x^4}{\sqrt{1+x^4}^{\,3}}\,,$$

$$\big(\ln(\tan^2 x+1)\big)'=\frac{1}{\tan^2 x+1}\cdot 2\tan x\cdot\tan' x=2\tan x\,,$$

$$\left(\sqrt[3]{\tan^2 x+2^x}\right)'=\frac{2\tan x\,(1+\tan^2 x)+(\ln 2)\,2^x}{3\left(\sqrt[3]{\tan^2 x+2^x}\right)^2}\,,$$

$$\left(\big(2+\cos(x^2)\big)^{-\frac13}\right)'=-\frac13\big(2+\cos(x^2)\big)^{-\frac43}\cdot\big(-\sin(x^2)\big)\cdot 2x=\frac{2x\sin(x^2)}{3\sqrt[3]{\big(2+\cos(x^2)\big)^4}}\,,$$

$$\left(3^x+\sqrt{1+2\tan^2 x}\right)'=(\ln 3)\,3^x+\frac{2\tan x\,(1+\tan^2 x)}{\sqrt{1+2\tan^2 x}}\,,$$

$$\left(\frac{\cos x\,\sinh x}{\sqrt[3]{\ln x}}\right)'=\frac{-\sin x\,\sinh x+\cos x\,\cosh x}{\sqrt[3]{\ln x}}-\frac{\cos x\,\sinh x}{3x\left(\sqrt[3]{\ln x}\right)^4}\,,$$

$$\left(\frac{(\sin x)\,(\ln x)}{\sqrt{\cosh^2 x+x^2}}\right)'=\frac{\left((\cos x)(\ln x)+\frac{\sin x}{x}\right)\sqrt{\cosh^2 x+x^2}-(\sin x)\,(\ln x)\,\dfrac{2\cosh x\,\sinh x+2x}{2\sqrt{\cosh^2 x+x^2}}}{\cosh^2 x+x^2}=$$

$$=\frac{\left((\cos x)(\ln x)+\frac{\sin x}{x}\right)\left(\cosh^2 x+x^2\right)-(\sin x)\,(\ln x)\,(\cosh x\,\sinh x+x)}{(\cosh^2 x+x^2)^{3/2}}\,.$$ •

Abschnitt 13.C, Aufg. 2b), p. 364 (1.2.2011) :

Die Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=x^2\sin(1/x)$ bzw. $g(x):=x^2\sin(1/x^2)$ für $x\neq 0$ und $f(0)=g(0)=0$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' und g' sind in 0 nicht stetig; g' hat dort sogar die Schwankung ∞.

Beweis: Es ist $f'(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x^2\sin\frac1x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}x\sin\dfrac1x=0$ wegen $\left|\sin\dfrac1x\right|\le 1$ und $\lim\limits_{x\to 0}x=0$. Insbesondere ist f also in 0 differenzierbar. Für $x\neq 0$ gilt $f'(x)=2x\sin\dfrac1x-\cos\dfrac1x$. Wäre nun f' stetig in 0, so wäre $0 = f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 2 \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{1}{x} - \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \cos\frac{1}{x} = -\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \cos\frac{1}{x}$ im Widerspruch dazu, dass die Kosinusfunktion für $x\to\infty$ und damit $\cos\frac{1}{x}$ für $x\to 0$ nicht gegen 0 geht, sondern wegen der Periodizität von cos immer wieder den Wert 1 annimmt.

Ferner ist $g'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{1}{x^2} = 0$ wegen $\left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \le 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Insbesondere ist g also in 0 differenzierbar. Für $x\neq 0$ gilt $g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$. Wäre nun g' stetig in 0, so wäre $0 = g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 2\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\frac{1}{x^2} - \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$ im Widerspruch dazu, dass g für $x\to 0$, etwa an den Stellen $1\big/\sqrt{2k\pi}$, $k\in\mathbb{N}^*$, die beliebig großen Werte $2\sqrt{2k\pi}$ und an den Stellen $1\big/\sqrt{(2k+1)\pi}$, $k\in\mathbb{N}^*$, die beliebig kleinen Werte $-2\sqrt{(2k+1)\pi}$ annimmt. g ist in keiner Umgebung von 0 beschränkt und hat damit in 0 die Schwankung ∞. •

Abschnitt 13.C, Aufg. 3, p. 364 (1.2.2011):

Für $a\in\mathbb{C}-\mathbb{R}_-$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a^{-1}}\right)/2$.

Lösung: Wir verwenden die Definition der Ableitung von a^x in $x=0$ und erhalten:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{1/n}-a^0}{\frac{1}{n}-0} = \frac{d}{dx}(a^x)\Big|_{x=0} = (\ln a)\,a^x\Big|_{x=0} = \ln a\,,$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\,\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{a^{-1}}}{2} &= \frac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{a^{1/n}-a^0}{\frac{1}{n}-0} + \lim_{n\to\infty}\frac{a^{-1/n}-a^0}{-\frac{1}{n}-0}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{dx}(a^x)\Big|_{x=0} + \frac{d}{dx}(a^x)\Big|_{x=0}\Big)\\ &= \frac{d}{dx}(a^x)\Big|_{x=0} = (\ln a)\,a^x\Big|_{x=0} = \ln a\,. \quad \text{(Vgl. auch Aufg. 6c), p. 344.)}\end{aligned}$$
•

Abschnitt 13.C, Variante zu **Aufg. 3**, p. 364 (1.2.2011):

Man berechne $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right)$.

Lösung: $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\sqrt{\frac{1}{n^2}}-\cos\sqrt{0}}{\frac{1}{n^2}-0} = \left(\cos\sqrt{x}\right)'(0) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{(2n)!}\Big)'(0) = -\dfrac{1}{2}$. •

Lösungsvariante: $n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{24n^2}-+\cdots \to -\frac{1}{2}$ für $n\to\infty$.

Abschnitt 13.C, Teil von **Aufg. 12**, p. 365 (1.2.2011):

Man berechne i^{i} und $\left(\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}}$.

Lösung: Es ist $\ln\mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,\mathrm{i} = \ln 1 + \mathrm{i}\pi/2 = \mathrm{i}\pi/2$, also $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\ln\mathrm{i}} = e^{-\pi/2}$.
Es folgt $\ln\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = -\pi/2$, also $\left(\mathrm{i}^{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}\ln\mathrm{i}^{\mathrm{i}}} = e^{-\mathrm{i}\pi/2} = \cos(-\pi/2)+\mathrm{i}\sin(-\pi/2) = -\mathrm{i}\ (=\mathrm{i}^{-1}=\mathrm{i}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}})$. •

Abschnitt 13.C, Teil von **Aufg. 13**, p. 365 (1.2.2011):

Man zeige $\left((-1+\mathrm{i})^2\right)^{\mathrm{i}} \neq (-1+\mathrm{i})^{2\mathrm{i}}$.

Lösung: Es ist $\left((-1+\mathrm{i})^2\right)^{\mathrm{i}} = (-2\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}(\ln|-2\mathrm{i}|-\mathrm{i}\pi/2)} = e^{\pi/2}e^{\mathrm{i}\ln 2}$, also $\left|\left((-1+\mathrm{i})^2\right)^{\mathrm{i}}\right| = e^{\pi/2}$, aber $(-1+\mathrm{i})^{2\mathrm{i}} = e^{2\mathrm{i}(\ln|\sqrt{2}|+3\mathrm{i}\pi/4)} = e^{-3\pi/2}e^{\mathrm{i}\ln 2}$, also $|(-1+\mathrm{i})^{2\mathrm{i}}| = e^{-3\pi/2} \neq e^{\pi/2}$. •

Abschnitt 13.C, Variante zu **Aufg. 12** und **Aufg. 13**, p. 365 (1.2.2011):

Man berechne $\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}}$ und zeige $\left(\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}}\right)^{1-\mathrm{i}} \neq \mathrm{i}^{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}$.

Lösung: Es ist $\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}} = e^{(3+\mathrm{i})\ln\mathrm{i}} = e^{(3+\mathrm{i})\mathrm{i}\pi/2} = e^{-\pi/2+3\pi\mathrm{i}/2} = e^{-\pi/2}\left(\cos 3\pi/2+\mathrm{i}\sin 3\pi/2\right) = -\mathrm{i}e^{-\pi/2}$, also $\ln\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}} = \ln|\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}}| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}} = \ln e^{-\pi/2} + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) = -(\pi/2)(1+\mathrm{i})$, und somit
$\left(\mathrm{i}^{3+\mathrm{i}}\right)^{1-\mathrm{i}} = e^{-(\pi/2)(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = e^{-\pi}$, aber $\mathrm{i}^{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = e^{(4-2\mathrm{i})\ln\mathrm{i}} = e^{(4-2\mathrm{i})\mathrm{i}\pi/2} = e^{2\pi\mathrm{i}+\pi} = e^{\pi} \neq e^{-\pi}$. •

14 Der Mittelwertsatz

Abschnitt 14.A, Aufg. 6, p. 378 (1.2.2011) :

Die Funktionen $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ und $g:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ seien stetig und in $]a\,,b[$ differenzierbar, und es sei $f(a)=f(b)=0$. Für eine geeignete Stelle $c\in\,]a\,,b[$ gilt dann $f'(c)=g'(c)f(c)$. (Man betrachte die Hilfsfunktion $x\mapsto f(x)e^{-g(x)}$.)

Beweis: Die Hilfsfunktion $h(x):=f(x)\,e^{-g(x)}$ ist wie f und g in $[a\,,b]$ stetig und in $]a\,,b[$ differenzierbar. Sie verschwindet nach Voraussetzung in den Randpunkten des Intervalls $[a,b]$. Nach dem Satz von Rolle gibt es daher eine Nullstelle $c\in\,]a,b[$ von $h'(x)=f'(x)\,e^{-g(x)}-f(x)\,g'(x)\,e^{-g(x)}=\big(f'(x)-f(x)\,g'(x)\big)\,e^{-g(x)}$. Wegen $e^{-g(c)}\neq 0$ folgt $f'(c)-f(c)\,g'(c)=0$. •

Abschnitt 14.A, Aufg. 7b), p. 378 (1.2.2011) :

Für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $0<x$ gilt die Ungleichung $\dfrac{1}{x+1}<\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)<\dfrac{1}{x}$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gibt es zur Funktion $f(t):=\ln t$ ein $c\in\,]x\,,x+1[$ mit

$$\frac{1}{c}=f'(c)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x}=\ln\big(1+\tfrac{1}{x}\big)\,.$$

Wegen $x<c<x+1$ ergibt sich daraus die Behauptung. •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 7**, p. 378 (1.2.2011) :

Man beweise (mit Hilfe des Mittelwertsatzes) für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x>0$ die Bernoullischen Ungleichungen $(1+x)^\alpha>1+\alpha x$ bei $\alpha>1$ und $(1+x)^\alpha<1+\alpha x$ bei $0<\alpha<1$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz gibt es zur Funktion $f(t):=(1+t)^\alpha$ ein $c\in\,]0\,,x+1[$ mit

$$\alpha\,(1+c)^{\alpha-1}=f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}\,,\quad\text{also}\quad(1+x)^\alpha=1+\alpha\,x\,(1+c)^{\alpha-1}\,.$$

Wegen $c>0$ ist $1+c>1$ und somit $(1+c)^{\alpha-1}>1$ bei $\alpha>1$ und $(1+c)^{\alpha-1}=\dfrac{1}{(1+c)^{1-\alpha}}<1$ bei $0<\alpha<1$. Daraus ergibt sich die Behauptung. •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 7**, p. 378 (1.2.2011) :

Für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $x>1$ gilt $\ln x<x-1$. Man folgere: $\pi^e<e^\pi$.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz ist $\ln x=\ln x-\ln 1=(x-1)\ln' c=(x-1)/c<x-1$ für ein $c\in\,]1\,,x[$. Es folgt $(\ln\pi)-1=\ln(\pi/e)<(\pi/e)-1$, also $e\ln\pi<\pi$, und somit $\pi^e=e^{e\ln\pi}<e^\pi$. •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 7**, p. 378 (1.2.2011) :

Man beweise für alle $x\in[0\,,1[$ die Ungleichung $\ln\dfrac{1+x}{1-x}\le\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Hilfsfunktion $h(x):=\dfrac{2x}{1-x^2}-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ für alle $x\in[0\,,1[$ nichtnegative Werte hat. Nun ist aber $f(0)=0-\ln 1=0-0=0$. Für $x\in[0\,,1[$ gilt ferner

$$f'(x)=\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}-\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}\ge 0\,,$$

d.h. die Funktion f ist auf $[0\,,1[$ monoton wachsend. Insgesamt muss daher $f(x)\ge 0$ sein für alle $x\ge 0$. •

Abschnitt 14.A, Teil von **Aufg. 8**, p. 379 (1.2.2011) :

Man bestimme den Grenzwert $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\,(1-\cos x)}$ mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital:

Lösung: Wir wenden die Regel von de l'Hôpital dreimal an, bis der entstehende Grenzwert zum ersten Mal nicht mehr vom Typ $0/0$ ist und mit den Grenzwertrechenregeln berechnet werden kann:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos x-x\sin x}=\frac{1}{3}\,.\quad\bullet$$

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 8**, p. 379 (1.2.2011) :

Man bestimme die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{x^3}-1}\ ,\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^3}}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-\cos x}{\sin^2 x}\ ,\quad \lim_{x\to 0}\Big(\cot x-\frac{1}{x}\Big)\ ,\quad \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sinh x}\Big)\,.$$

Lösung: Da die ersten beiden Grenzwerte vom Typ $0/0$ sind, können wir die Regel von de l'Hôpital anwenden und erhalten

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt{x^3}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{3}{2}x^{1/2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{2}x^{1/2}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{9}\,,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}x^{-3/4}}{\frac{4}{3}x^{1/3}-\frac{3}{4}x^{-1/4}}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{4}x^{-3/4}}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{4}{3}x^{1/3}-\lim\limits_{x\to 1}\frac{3}{4}x^{-1/4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}=\frac{3}{7}\,.$$

Beim dritten Grenzwert wenden wir die Regel von de l'Hôpital zweimal an, bis der entstehende Grenzwert zum ersten Mal nicht mehr vom Typ $0/0$ ist und mit den Grenzwertrechenregeln berechnet werden kann:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x^2+\sin x}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x^2-4x^2\cos x^2+\cos x}{2\cos^2 x-2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\,.$$

Bei den beiden letzten Grenzwert bringen wir die Differenz zunächst auf einen gemeinsamen Bruchstrich, erhalten einen Limes vom Typ $0/0$ und wenden dann die Regel von de l'Hôpital zweimal an:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sinh x}\Big)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x-\sin x}{\sin x\ \sinh x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-\cos x}{\cos x\ \sinh x+\sin x\ \cosh x}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x+\sin x}{2\cos x\ \cosh x}=\frac{0}{2}=0\,,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cot x-\frac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0\,.$$

Abschnitt 14.A, Teil von **Aufg. 12**, p. 379 (1.2.2011) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} x\ \ln\big(1+\frac{1}{x}\big)$.

Lösung: Wir schreiben den Ausdruck als Grenzwert eines Quotienten, der vom Typ $0/0$ ist, und verwenden dann die Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x\ \ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\big(1+\frac{1}{x}\big)\big(-\frac{1}{x^2}\big)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\big(1+\frac{1}{x}\big)}=\frac{1}{1}=1\,.$$

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 12**, p. 379 (1.2.2011) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\Big(\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)-\frac{1}{x}\Big)$.

Lösung: Wir schreiben den Ausdruck als Grenzwert eines Quotienten, der vom Typ $0/0$ ist, und verwenden dann die Regel von de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2\Big(\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)-\frac{1}{x}\Big)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\big(1+\frac{1}{x}\big)^{-1}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x+1}+1}{\frac{-2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-2(x+1)}=\frac{1}{-2-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=-\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

•

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 12**, p. 379 (1.2.2011) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Lösung: Mit der Regel von de l'Hôpital sieht man

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\dfrac{x+1}{x-1}}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-1/x^2} = 2\,.$$

Die Stetigkeit der e-Funktion im Punkt 2 liefert dann $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln\frac{x+1}{x-1}} = e^2$. •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 12**, p. 379 (1.2.2011) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}(\tan x)^{\cot x}$.

Lösung: Mit der Regel von de l'Hôpital sieht man

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} \cot x\,\ln(\tan x) = \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\frac{\ln(\tan x)}{\tan x} = \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\frac{\tan' x\cdot(1/\tan x)}{\tan' x} = \lim_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\cot x = 0\,.$$

Die Stetigkeit der e-Funktion in $x=0$ liefert dann $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}(\tan x)^{\cot x} = \lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}} e^{\cot x\,\ln(\tan x)} = e^0 = 1\,.$ •

Abschnitt 14.A, Variante zu **Aufg. 12**, p. 379 (1.2.2011) :

Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x^2}$.

Lösung: Mit zweimaligem Anwenden der Regel von de l'Hôpital sieht man

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\cos x}{\cosh x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\cosh x}{\cos x}\ln\frac{-\sin x\cosh x-\cos x\sinh x}{2x\cosh^2 x}\right)\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cosh x}\cdot\lim_{x\to0}\ln\frac{-\sin x\cosh x-\cos x\sinh x}{2x} = 1\cdot1\cdot\lim_{x\to0}\ln\frac{-2\cos x\cosh x}{2} = -1\,.\end{aligned}$$

Die Stetigkeit der e-Funktion in $x=-1$ liefert $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right)^{1/x^2} = \lim\limits_{x\to0}\exp\left(\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\cos x}{\cosh x}\right) = e^{-1} = 1/e\,.$ •

Abschnitt 14.A, **Aufg. 19**, p. 380 (1.2.2011) :

Die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei differenzierbar. Es sei $f(a)=0$, und für alle $x\in[a,b]$ gelte $f'(x)\le\lambda f(x)$ mit einem festen $\lambda\in\mathbb{R}_+0$. Dann ist $f(x)\le 0$ für alle $x\in[a,b]$.
(Man betrachte die Funktion $h(x):=e^{-\lambda x}f(x)$.)

Beweis: Wegen $h'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}f(x)+e^{-\lambda x}f'(x) = e^{-\lambda x}\big(f'(x)-\lambda f(x)\big)\le 0$ ist h monoton fallend. Da $h(a):=e^{-\lambda a}f(a)=0$ ist, ist $h(x)\le 0$ im ganzen Intervall $[a,b]$. Es folgt $f(x)\le 0$ für alle $x\in[a,b]$. •

Abschnitt 14.A, **Aufg. 20**, p. 380 (1.2.2011) :

Die Funktion $f:[a\,,b]\to\mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es gelte $|f'(x)|\le\lambda|f(x)|$ für alle $x\in[a\,,b]$ mit einem festen $\lambda\in\mathbb{R}_+$. Ist dann $f(x_0)=0$ für ein $x_0\in[a\,,b]$, so ist $f(x)=0$ für alle $x\in[a\,,b]$.
(Lemma von Gronwall)

Beweis: Angenommen, es gäbe ein x_1 mit $f(x_1)\ne 0$. Dann ist f aus Stetigkeitsgründen in einer ganzen Umgebung von x_1 von 0 verschieden, und nach eventueller Multiplikation mit -1 können wir annehmen, dass f dort positiv ist.

Sei zunächst $x_1>x_0$. Dann ist die Menge $\{x\in[a\,,b]\mid x<x_1\,,\ f(x)=0\}$ nichtleer, da sie x_0 enthält, und besitzt ein Supremum x_0', da sie durch x_1 nach oben beschränkt ist. Da f stetig ist, gilt auch $f(x_0')=0$. Indem wir x_0' statt x_0 betrachten, können wir also gleich annehmen, dass f im ganzen Intervall $[x_0\,,x_1]$

nichtnegativ ist. Nach Voraussetzung gilt dort $f(x_0)=0$ und $f'(x)\le |f'(x)|\le \lambda|f(x)|=\lambda f(x)$. Mit Aufg. 19 folgt daraus $f(x)\le 0$ für alle $x\in[x_0\,,x_1]$ im Widerspruch zu $f(x_1)>0$.

Im Fall $x_1<x_0$ betrachten wir die Hilfsfunktion $h(x):=f(a+b-x)$ auf $[a\,,b]$ und die Punkte $y_1:=a+b-x_1$ und $y_0:=a+b-x_0$ aus dem Intervall $[a\,,b]$. Dafür gilt dann $y_1>y_0$, $h(y_1)=h(a+b-x_1)=f(x_1)>0$, $h(y_0)=h(a+b-x_0)=f(x_0)=0$ und $|h'(x)|=|f'(a+b-x)|\le\lambda|f(a+b-x)|=\lambda|h(x)|$ auf ganz $[a\,,b]$. Wir können also das schon Bewiesene anwenden und erhalten wie oben einen Widerspruch. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 381 (1.2.2011):

Sei $a\in\mathbb{R}_+^\times$. Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}_+^\times\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\sqrt{x}+\dfrac{a}{\sqrt{x}}$ auf lokale Extrema.

Lösung: Genau dann ist $f'(x)=\frac12 x^{-1/2}-\frac12 a x^{-3/2}$ gleich 0, wenn $1-ax^{-1}=0$ ist, d.h. wenn $x=a$ ist. Wegen $f''(x)=-\frac14 x^{-3/2}+\frac34 a x^{-5/2}$ ist $f''(a)=-\frac14 a^{-3/2}+\frac34 a a^{-5/2}=\frac12 a^{-3/2}>0$, und $x=a$ ist eine Minimumstelle. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 381 (1.2.2011):

Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}_+^\times\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=x^x$ auf lokale Extrema und Wendepunkte. Ferner berechne man $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Lösung: Es ist $f(x)=e^{x\ln x}$, also $f'(x)=(\ln x+1)f(x)$ und $f''(x)=(1/x)f(x)+(\ln x+1)f'(x)$. Wegen $f(x)>0$ für alle x gilt $f'(x_0)=(\ln x+1)f(x_0)=0$ genau für $x_0=1/e$. Da $f''(x_0)=ef(1/e)+0>0$ ist, liegt dort ein Minimum vor.

Ferner ist stets $f''(x)=\big((1/x)+(\ln x+1)^2\big)f(x)>0$, d.h. f besitzt nach Satz 14.C.8 keine Wendepunkte.

Die Regel von de L'Hôpital liefert $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\ln x\big/(1/x)=\lim\limits_{x\to 0}(1/x)\big/(1/x^2)=\lim\limits_{x\to 0} x=0$. Wegen der Stetigkeit der e-Funktion in 0 folgt $\lim\limits_{x\to 0} x^x=\lim\limits_{x\to 0}\exp(x\ln x)=\exp\,(\lim\limits_{x\to 0} x\ln x)=e^0=1$. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 381 (1.2.2011):

Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}_+^\times\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=x^{1/x}$ auf lokale Extrema. Ferner berechne man $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Lösung: Es ist $f'(x)=\big(e^{(1/x)\ln x}\big)'=e^{(1/x)\ln x}\big(-(1/x^2)\ln x+(1/x^2)\big)=(1/x^2)(1-\ln x)f(x)$ und

$$\begin{aligned}f''(x)&=\big(-(2/x^3)(1-\ln x)-(1/x^3)\big)f(x)+(1/x^2)(1-\ln x)f'(x)\\&=(1/x^3)(2\ln x-3)f(x)+(1/x^2)(1-\ln x)f'(x)\,,\end{aligned}$$

Wegen $f(x)>0$ gilt $f'(x)=0$ genau dann, wenn $1-\ln x=0$, d.h. $x=e$ ist, wegen $f''(e)=-e^{1/e}/e^3<0$ liegt dort ein lokales Maximum vor.

Offenbar ist $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)\ln x=-\infty$. Es folgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\exp\big((1/x)\ln x\big)=0$.

Die Regel von de L'Hôpital liefert $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)/x=\lim\limits_{x\to\infty}(1/x)\big/1=\lim\limits_{x\to\infty}1/x=0$. Wegen der Stetigkeit der e-Funktion in 0 folgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\exp\big((\ln x)/x\big)=\exp\big(\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)/x\big)=e^0=1$. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 381 (1.2.2011):

Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}_+^\times\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=x^{1/x^2}$ auf lokale Extrema. Ferner berechne man $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Lösung: Es gilt $f'(x)=\big(e^{(1/x^2)\ln x}\big)'=(-2x^{-3}\ln x+x^{-3})\,e^{(1/x^2)\ln x}=(1-2\ln x)\,x^{-3}f(x)$ und ferner $f''(x)=-2x^{-4}f(x)-3(1-2\ln x)\,x^{-4}f(x)+(1-2\ln x)\,x^{-3}f'(x)$. Genau dann ist $f'(x)=0$, wenn $\ln x=1/2$, d.h. wenn $x=\sqrt{e}$ ist. An dieser Stelle verschwindet der Faktor $-2\ln x+1$, d.h. es ist einfach $f''\big(\sqrt{e}\big)=e^{(1/x^2)\ln x}(1/x^3)\,(-2/x)\,\big|_{x=\sqrt{e}}<0$, und f hat in $\sqrt{e}$ ein Maximum.

Offenbar ist $\lim\limits_{x\to 0}(1/x^2)\ln x=-\infty$. Es folgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\exp\big((1/x)\ln x\big)=0$.

Die Regel von de L'Hôpital liefert $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)/x^2 = \lim\limits_{x\to\infty}(1/x)\big/2x = \lim\limits_{x\to\infty} 1/2x^2 = 0$. Wegen der Stetigkeit der e-Funktion in 0 folgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\exp\big((\ln x)/x^2\big) = \exp\big(\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)/x^2\big) = e^0 = 1$. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 381 (1.2.2011):

Sei $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$. Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x\,(\ln x)^n$ auf lokale Extrema und Wendepunkte.

Lösung: Wegen $f'(x) = (\ln x)^{n-1}(n+\ln x)$ gilt $f'(x) = 0$ genau für $x=1$ und für $x=e^{-n}$. Wegen $f''(x) = (n-1)(\ln x)^{n-2}(1/x)(n+\ln x) + (\ln x)^{n-1}(1/x) = (\ln x)^{n-2}(n-1+\ln x)$ erhält man nun $f''(e^{-n}) = (-n)^{n-1}e^n$, d.h. bei geradem n liegt dort ein Maximum und bei ungeradem n ein Minimum vor. Bei geradem n ist $f(x)\ge 0$ und $f(1)=0$, d.h. 1 ist eine Minimumstelle. Bei ungeradem n wechselt f'' im Punkt $x=1$ das Vorzeichen, d.h. dort liegt ein Wendepunkt vor. Genau dann ist $f''(x)=0$, wenn $x=1$ ist oder $x=e^{-(n-1)}$. In letzterem Fall liegt ein Wendepunkt vor, da f'' dort das Vorzeichen wechselt. •

Abschnitt 14.A, Zusatzaufgabe, p. 381 (1.2.2011):

Man zeige noch einmal direkt, dass die Binomialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} w^n$ für $|w|<1$ gegen $(1+w)^\alpha$ konvergiert, vgl. Satz 13.C.6.

Beweis: Wir verwenden die Hilfsfunktion $h(w) := (1+w)^{-\alpha}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} w^n$.

Es ist $h(0) = (1+0)^\alpha\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}0^n = \binom{\alpha}{0}0^0 = 1$. Daher genügt es zu zeigen, dass $h'(w)$ für alle w mit $|w|<1$ verschwindet und $h(w)$ somit nach Korollar 14.A.6 konstant gleich $h(0)=1$ ist. Zum Beweis verwenden wir zuerst die Produktregel, bringen die beiden Summanden dann auf einen gemeinsamen Nenner, machen in der mittleren Summe einen Indexwechsel und verwenden schließlich 2.B, Aufg. 3b):

$$\begin{aligned} h'(w) &= \Big((1+w)^{-\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} w^n\Big)' = -\alpha(1+w)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} w^n + (1+w)^{-\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} w^{n-1}\\ &= (1+w)^{-\alpha-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}-\alpha\binom{\alpha}{n} w^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} w^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} w^n\Big)\\ &= (1+w)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\alpha\binom{\alpha}{n} + (n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\Big) w^n = 0\,. \end{aligned}$$ •

Abschnitt 14.B, **Aufg. 4**, p. 392 (1.2.2011):

Die Funktion $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist bijektiv, ihre Umkehrfunktion heißt Area-Sinus hyperbolicus und wird mit Arsinh bezeichnet.

Arsinh ist differenzierbar, und es gilt $\operatorname{Arsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Arsinh ist analytisch, und es gilt $\operatorname{Arsinh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ für $|x|<1$.

Es ist $\operatorname{Arsinh} x = \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)$.

Beweis: Wegen $\sinh' x = \cosh x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \ge 1 > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist die Funktion sinh streng monoton wachsend. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt sie wegen $\lim\limits_{x\to\infty}\sinh x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\sinh x = -\infty$ alle reellen Werte als Zwischenwerte an, ist also bijektiv. Wegen $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ und $\cosh x > 0$ für alle x ist $\cosh x = \sqrt{1+\sinh^2 x}$, und die Ableitung der Umkehrfunktion Arsinh ist

$$\operatorname{Arsinh}' x = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{Arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Für die Hilfsfunktion $h:\,]-1,1[\,\to\mathbb{R}$ mit $h(x) := \operatorname{Arsinh} x - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ gilt unter Verwendung der vorstehenden Aufgabe

$h'(x) := \operatorname{Arsinh}'x - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}(2n+1)\,\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}(x^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - (1+x^2)^{-1/2} = 0$

und $h(0) = \operatorname{Arsinh} 0 - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac12}{n}\frac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0 - 0 = 0$. Daher ist h konstant gleich 0. Dies war zu zeigen.

Für die Hilfsfunktion $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $H(x) := \operatorname{Arsinh} x - \ln\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)$ gilt

$$H'(x) := \operatorname{Arsinh}'x - \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Bigl(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigr) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\bigl(x+\sqrt{1+x^2}\bigr)\sqrt{1+x^2}} = 0$$

und $H(0) = \operatorname{Arsinh} 0 - \ln\bigl(0+\sqrt{1+0}\bigr) = 0 - \ln 1 = 0$. Daher ist H konstant gleich 0, was zu zeigen war. •

Abschnitt 14.B, **Aufg. 6**, p. 392 (1.2.2011):

Die Funktion Tangens hyperbolicus $\tanh:\mathbb{R}\to\,]-1,1[$ ist bijektiv, ihre Umkehrfunktion heißt Area-Tangens hyperbolicus und wird mit Artanh bezeichnet.

Artanh ist differenzierbar, und es gilt $\operatorname{Artanh}'x = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Artanh ist analytisch, und für $|x|<1$ gilt $\operatorname{Artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Es ist $\operatorname{Artanh} x = \dfrac12\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Beweis: Wegen $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist die Funktion tanh streng monoton wachsend. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt sie wegen $\lim_{x\to\infty}\tanh x = \lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac11 = 1$ und $\lim_{x\to-\infty}\tanh x = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{-1}{1} = -1$ auch alle Werte aus $]-1,1[$ an, ist also bijektiv. Wegen $\tanh'x = 1-\tanh^2 x$ ist die Ableitung der Umkehrfunktion Artanh also

$$\operatorname{Artanh}'x = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{Artanh}x)} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{Artanh}x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Für die Hilfsfunktion $h:\mathbb{R}\to\,]-1,1[$ mit $h(x) := \operatorname{Artanh} x - \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ unter Verwendung der Summenformel für die geometrische Reihe $h'(x) := \operatorname{Artanh}'x - \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\Bigr)' = \dfrac{1}{1-x^2} - \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{1}{1-x^2} = 0$ und $h(0) = \operatorname{Artanh} 0 - \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{0^{2n+1}}{2n+1} = 0 - 0 = 0$. Daher ist h konstant gleich $h(0)=0$. Dies war zu zeigen.

Für die Hilfsfunktion $H:\mathbb{R}\to\,]-1,1[$ mit $H(x) := \operatorname{Artanh} x - \dfrac12\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ gilt

$$H'(x) := \operatorname{Artanh}'x - \frac12\Bigl(\ln\frac{1+x}{1-x}\Bigr)' = \frac{1}{1-x^2} - \frac12\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\Big/\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{(1-x)(1+x)} = 0,$$

$H(0) = \operatorname{Artanh} 0 - \dfrac12\ln\dfrac{1+0}{1-0} = 0 - 0 = 0$. Daher ist H konstant gleich $H(0)=0$, was zu zeigen war. •

Abschnitt 14.B, Aufg. 8b), p. 393 (1.2.2011):

Es ist $\arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$ für $x>-1$ und $\arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$ für $x<-1$.

Beweis: Für die Hilfsfunktion $h:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ mit $h(x) := \arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ gilt

$$h'(x) = \arctan'x + \Bigl(\arctan\frac{1-x}{1+x}\Bigr)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}\,\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-2}{(1+x)^2+(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2+2x^2} = 0.$$

Wegen $\arctan 0 = 0$ und $\arctan 1 = \pi/4$ ist $h(0) = \arctan 0 + \arctan 1 = 0 + \pi/4 = \pi/4$. Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\pi/2$ sowie $\arctan(-1) = -\pi/4$ und der Stetigkeit von arctan in -1 ist

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan x + \lim_{x\to-\infty} \arctan\frac{1-x}{1+x} = -\frac{\pi}{2} - \arctan(-1) = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

Auf den beiden Intervallen $]-\infty\,,-1[$ und $]-1\,,\infty[$ ist h also jeweils konstant gleich $h(1) = \pi/4$ bzw. gleich $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -3\pi/4$. Dies war aber zu zeigen. •

Abschnitt 14.B, Aufg. 9), p. 393 (1.2.2011) :

Man zeige die Gleichung $\arctan z + \arctan\frac{1}{z} = \frac{\pi}{2}$ für alle z mit $\operatorname{Re} z > 0$ und $\arctan z + \arctan\frac{1}{z} = -\frac{\pi}{2}$ für alle z mit $\operatorname{Re} z < 0$.

Beweis: Die Hilfsfunktion h mit $h(z) := \arctan z + \arctan\frac{1}{z}$ ist nach Aufg. 7a) wegen $1/z = \overline{z}/|z|^2$ auf jeder der beiden Halbebenen $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ und $H_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ definiert mit

$$h'(z) = \arctan' z + \left(\arctan\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+(1/z^2)}\cdot\frac{-1}{z^2} = \frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+z^2} = 0\,.$$

Wegen $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ und $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ ist $h(1) = \arctan 1 + \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ und $h(-1) = \arctan(-1) + \arctan\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. Auf den Gebieten H_+ und H_- ist h also nach Korollar 14.A.6 jeweils konstant gleich $h(1) = \pi/2$ bzw. gleich $h(-1) = -\pi/2$. Dies war zu zeigen. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 393 (1.2.2011) :

Man beweise für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \ge 0$ die Ungleichung $\arctan x \ge \frac{x}{1+x^2}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Hilfsfunktion $f(x) := \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$ für alle $x \ge 0$ nichtnegative Werte hat. Nun ist aber $f(0) = \arctan 0 - \frac{0}{1+0^2} = 0 - 0 = 0$. Für $x \ge 0$ gilt ferner

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \ge 0\,,$$

d.h. die Funktion f ist auf $\mathbb{R}_+$ monoton wachsend. Insgesamt muss daher $f(x) \ge 0$ sein für alle $x \ge 0$. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 393 (1.2.2011) :

Man beweise für $x \in [0\,,1[$ die Ungleichung $\arcsin x \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

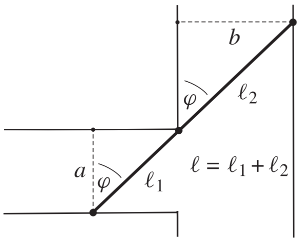
Beweis: Es genügt zu zeigen, dass die Hilfsfunktion $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$ für alle $x \in [0\,,1[$ nichtnegative Werte hat. Nun ist aber $f(0) = \arcsin 0 - \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0 - 0 = 0$. Für $x \in [0\,,1[$ gilt ferner

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + x^2/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \ge 0\,,$$

ist monoton wachsend. Insgesamt muss daher $f(x) \ge 0$ sein für alle $x \in [0\,,1[$. •

Abschnitt 14.B, Aufg. 11b), p. 394 (1.2.2011) :

Ein Seitenkanal der Breite a münde rechtwinklig in den Hauptkanal der Breite b gemäß folgender Skizze. Man zeige, dass Baumstämme (vernachlässigbarer Dicke) höchstens die Länge $\big(a^{2/3}+b^{2/3}\big)^{3/2}$ haben, wenn sie ohne Verkanten um die Ecke flößbar sind.



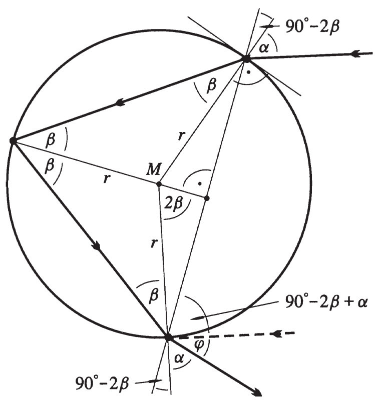
Lösung: Mit den Bezeichnungen der Abbildung ist $\cos\varphi = a/\ell_1$ und $\sin\varphi = b/\ell_2$, also $\ell(\varphi) = \ell = \ell_1+\ell_2 = \dfrac{a}{\cos\varphi}+\dfrac{b}{\sin\varphi}$. Die Ableitung $\ell'(\varphi) = -\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}+\dfrac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ verschwindet nur für $\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, d.h. für $\tan^3\varphi = \dfrac{b}{a}$, $\varphi = \arctan\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$. Wegen $\lim\limits_{\varphi\to\pi/2}\ell(\varphi) = \infty$ und $\lim\limits_{\varphi\to 0}\ell(\varphi) = \infty$ muss dort ein lokales Minimum von $\ell(\varphi)$ vorliegen. Dies liefert dann gleichzeitig die größtmögliche Länge der betrachteten Baumstämme. Aus $1+\tan^2\varphi = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$, also $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$, $\sin\varphi = \tan\varphi\cos\varphi = \dfrac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$, folgt, dass die zugehörige Länge $\ell(\varphi)$ folgenden Wert hat:

$$\frac{a}{\cos\Big(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,\Big)}+\frac{b}{\sin\Big(\arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\,\Big)} = a\cdot\sqrt{1+\big(\tfrac{b}{a}\big)^{2/3}}+\frac{b}{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}\sqrt{1+\big(\tfrac{b}{a}\big)^{2/3}} =$$

$$= \frac{a}{a^{1/3}}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}+\frac{b}{b^{1/3}}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}} = \big(a^{2/3}+b^{2/3}\big)^{3/2}\,. \quad \bullet$$

Abschnitt 14.B, Aufg. 11c), p. 394 (1.2.2011) :

Ein Lichtstrahl werde in einem Wassertröpfchen mit kreisförmigem Querschnitt gemäß folgender Skizze gestreut. Der Brechungsindex von Luft zu Wasser sei $n\ (>1)$, d.h. für Einfallswinkel α und Ausfallswinkel β gilt $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Man bestimme im Fall $n = 4/3$ den Einfallswinkel α im Intervall $[\,0\,,\ \pi/2\,]$, für den der Winkel $\varphi = \varphi(\alpha)$, den der gestreute mit dem einfallenden Lichtstrahl bildet, maximal wird.



Lösung: Es ist $180^\circ = (90^\circ-2\beta)+\alpha+\varphi+(90^\circ-2\beta+\alpha)$, also $\varphi = 4\beta-2\alpha = 4\arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n}-2\alpha$ und $\varphi'(\alpha) = 4\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}-2 = 0$ genau dann, wenn $4\cos^2\alpha = n^2-\sin^2\alpha$, also $\cos^2\alpha = (n^2-1)/3$ und schließlich $\alpha = \arccos\left(\sqrt{(n^2-1)/3}\right)$ ist. Der maximale Ablenkungswinkel $\varphi = \varphi(n)$ zum Brechungsindex n, $1<n<2$, ist also wegen $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(n^2-1)/3} = \sqrt{(4-n^2)/3}$ gleich

$$\varphi = 4\arcsin\sqrt{\frac{4}{3n^2}-\frac{1}{3}} - 2\arccos\sqrt{\frac{n^2}{3}-\frac{1}{3}}$$

mit der Ableitung

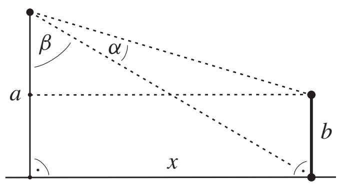
$$\frac{d\varphi}{dn} = 4\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{(-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{3n^2}-\dfrac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3n^2}}} + 2\cdot\frac{2}{3}n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{n^2}{3}-\dfrac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{4}{3}-\dfrac{n^2}{3}}}$$

$$= -\frac{8}{n\sqrt{(4-n^2)(n^2-1)}} + \frac{2n}{\sqrt{(4-n^2)(n^2-1)}} = -\frac{2}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}} < 0\,.$$

Bei $n = 4/3$ ergibt sich der Wert $\varphi \approx 42^\circ$. Dies ist der (ungefähre) Wert für die (gelbe) Na-D-Linie und gleich der Höhe des gelben Streifens im (Haupt-)Regenbogen, wenn die Sonne am Horizont steht. Für rotes Licht ist n kleiner als für blaues Licht. Wegen $d\varphi/dn < 0$ hat dies zur Folge, dass beim Regenbogen der **o**bere Rand r**o**t und der **u**ntere Rand bla**u** ist. (Wie ändert sich die Situation bei $n \ge 2$?) •

Abschnitt 14.B, Aufg. 11d), p. 394 (1.2.2011) :

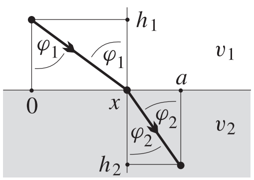
Ein Beobachter schaut aus der Augenhöhe a auf ein senkrecht auf dem Boden stehendes Objekt der Höhe b mit $0<b<a$. In welchem senkrechten Abstand x von dem Objekt ist der Blickwinkel α, unter dem der Beobachter das Objekt sieht, am größten?



Lösung: Bezeichnet β den Winkel, unter dem der Beobachter die Strecke x sieht, so erhält man mit dem Additionstheorem des Tangens $\tan\alpha = \tan\big((\alpha+\beta)-\beta\big) = \dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\,\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{x}{a-b}-\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{x}{a-b}\,\dfrac{x}{a}}$. Es folgt $\alpha = \alpha(x) = \arctan\dfrac{xb}{a^2+x^2-ab}$ mit $\alpha'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2b^2}{(a^2+x^2-ab)^2}}\cdot\dfrac{b(a^2+x^2-ab)-2bx^2}{(a^2+x^2-ab)^2}$. Genau dann ist also $\alpha'(x)$ gleich 0, wenn $a^2-x^2-ab=0$ ist, d.h. wenn $x = x_0 := \sqrt{a(a-b)}$ ist. Wegen $\alpha(0)=0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$ ist x_0 die einzige Maximumstelle. •

Abschnitt 14.B, Variante zu **Aufg. 11**, p. 394 (1.2.2011) :

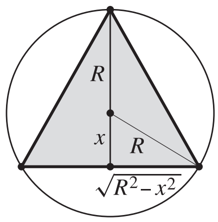
Lichtstrahlen laufen vom Punkt $(0, h_1)$ im optisch dünneren Medium, in dem die Lichtgeschwindigkeit gleich v_1 sei, durch den Punkt $(x, 0)$ der Grenzfläche so zum Punkt (a, h_2) im optisch dichteren Medium mit der Lichtgeschwindigkeit $v_2 < v_1$, dass die Laufzeit $t = t(x)$ minimal wird. Man leite daraus das Brechungsgesetz $n = \sin\varphi_1/\sin\varphi_2$ her, wo $n := v_1/v_2$ der Brechungsindex und φ_1, φ_2 der Einfalls- bzw. Ausfallswinkel sind.



Offenbar ist $t(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+h_1^2}}{v_1}+\dfrac{\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}}{v_2}$ mit der Ableitung $t'(x)=\dfrac{x}{v_1\sqrt{x^2+h_1^2}}-\dfrac{a-x}{v_2\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}}$.
Wegen $t'(0)\le 0$ und $t'(a)\ge 0$ gibt es ein x mit $t'(x)=0$. Für dieses x und den Brechungsindex n gilt $n:=\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}\Big/\dfrac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}}=\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$. •

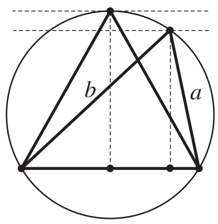
Abschnitt 14.B, Variante zu **Aufg. 11**, p. 394 (1.2.2011) :

Aus einem Baumstamm, der einen kreisförmigen Querschnitt mit Radius $R>0$ besitzt, soll ein Balken ausgesägt werden, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ist. Wie müssen die Basislänge und die Schenkellänge dieses Dreiecks gewählt werden, damit möglichst wenig Abfall entsteht?



Lösung: Der Flächeninhalt $F(x)=\frac{1}{2}(R+x)2\sqrt{R^2-x^2}$ des gleichschenkligen Dreiecks mit der Höhe $R+x$ und der Basis $2\sqrt{R^2-x^2}$ muss maximal werden. Genau dann ist $F'(x)=\sqrt{R^2-x^2}-(R+x)\,x\big/\sqrt{R^2-x^2}$ gleich 0, wenn $R^2-x^2-Rx-x^2=0$ ist, d.h. wenn $x^2+\frac{1}{2}Rx-\frac{1}{2}R^2=0$ ist. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1=\frac{1}{2}R$ und $x_2=-R$. Wegen $F(-R)=F(R)=0$ und $F(x)>0$ für $-R<x<R$ hat F im Intervall $[-R,R]$ dann genau ein Maximum, und zwar im Punkt $x_1=\frac{1}{2}R$. Das Dreieck hat dann die Höhe $\frac{3}{2}R$, die Basislänge $2\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2}=\sqrt{3}\,R$ und nach dem Satz des Pythagoras ebenfalls die Schenkellänge $\sqrt{3}\,R$, ist also gleichseitig. •

Bemerkung: Das Ergebnis lässt sich auch leicht elementargeometrisch beründen: Sind in dem dem Kreis einbeschriebenen Dreieck die Seitenlängen a,b verschieden groß, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks gewiss nicht maximal. wie folgende Skizze zeigt (Flächeninhalt = $\frac{1}{2}$ Grundlinie $\times$ Höhe) :



Abschnitt 14.B, **Aufg. 12**, p. 395 (1.2.2011) :

Für $|x|<1$ gilt $(\arctan x)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}\Big)\dfrac{x^{2n}}{n}$. Man zeige, dass dies auch noch für $x=1$ gilt.

Beweis: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h:\,]-1\,,1[\,\to\mathbb{R}\qquad\text{mit}\qquad h(x):=(\arctan x)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big)x^{2n}\,.$$

Indem wir zunächst ausnutzen, dass die Potenzreihe im Inneren des Konvergenzkreises gliedweise differenzierbar ist, dann die bekannten Potenzreihenentwicklungen von $\arctan x$ und $1/(1+x^2)$ um 0 einsetzen, und schließlich deren Cauchy-Produkt bilden sowie in der 2. Summe zwei Indexwechsel machen, erhalten wir:

$$h'(x)=\frac{2\arctan x}{1+x^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big)x^{2n-1}$$

$$= 2\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Big) - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big)x^{2n-1}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}(-1)^{n-k}x^{2n-2k} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2k-1}\Big)x^{2n+1}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2k+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\Big)x^{2n+1} = 0\,.$$

Die Funktion h ist also konstant gleich $h(0) = (\arctan 0)^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big)0^{2n} = 0-0 = 0$, woraus die behauptete Gleichheit folgt.

Wir verwenden nun das Leibniz-Kriterium 6.A.8, um die Konvergenz der angegebenen Reihe auch in $x=1$ zu zeigen. Daraus folgt zunächst, dass ihr Konvergenzradius (mindestens) 1 ist. Ferner lässt sich der Abelsche Grenzwertsatz 12.B.7 anwenden und liefert die Stetigkeit der Reihe auch noch im Punkt 1. Da $(\arctan x)^2$ ebenfalls im Punkt 1 stetig ist, erhält man dann die Gleichheit für $x=1$.

Zunächst zeigen wir, dass die Koeffizienten $a_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ für $n \geq n_0$ monoton fallen. In der Tat ist $a_n \geq a_{n+1}$ äquivalent zu $\big(1+\frac{1}{n}\big)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2k-1}$, d.h. zu $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \geq \frac{1}{2n+1}$ und schließlich zu $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \geq \frac{n}{2n+1}$. Die linke Seite geht wegen der Divergenz der harmonischen Reihe für $n\to\infty$ gegen ∞, während die rechte Seite durch $\frac{1}{2}$ beschränkt ist; die Ungleichung ist also ab einer Stelle n_0 richtig.

Wir beweisen nun, dass die a_n eine Nullfolge bilden. Wegen der Monotonie von (a_n) genügt es zu zeigen, dass die Teilfolge (a_{2^n}) gegen 0 konvergiert. Dies gilt in der Tat wegen

$$a_{2^n} = \frac{1}{2^n}\Big(1+\frac{1}{3}+\big(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\big)+\big(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\big)+\cdots+\big(\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\big)\Big)$$
$$\leq \frac{1}{2^n}\Big(1+\frac{1}{2}+\big(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\big)+\big(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\big)+\cdots+\big(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\big)\Big)$$
$$= \frac{1}{2^n}\Big(1+\frac{n}{2}\Big) = \frac{n+2}{2^{n+1}} \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty\,.$$ •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011):

Man verwende das Ergebnis der vorstehenden Aufgabe, um folgende Grenzwerte zu berechnen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big).$$

Lösung: Wegen $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{(1/2)\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Mit 14.B, Aufg. 12 folgt

$$\frac{\pi^2}{36} = \Big(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big).$$

Wegen $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \frac{(1/2)\sqrt{2}}{(1/2)\sqrt{2}} = 1$ ist $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Mit 14.B, Aufg. 12 folgt

$$\frac{\pi^2}{16} = (\arctan 1)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big)1^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\Big).$$

Abschnitt 14.B, Aufg. 15, p. 395 (1.2.2011) :

Es gilt $\arcsin x = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Beweis: Für die Hilfsfunktion $h:]-1, 1[\to]-1, 1[$ mit $h(x) := \arcsin x - \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ verschwindet

$$h'(x) = \arcsin' x - \left(\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Wegen $h(0) = \arcsin 0 - \arctan \dfrac{0}{1+0^2} = 0-0 = 0$ ist h also konstant gleich $h(0) = 0$, was zu zeigen war. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011) :

Man untersuche die Funktion $f:]-1, 1[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$ auf lokale Extrema.

Lösung: Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad f''(x) = \frac{-2\sqrt{1-x^2} + (1-2x)x/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}\,.$$

Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $x = 1/2$ ist. Wegen $f''(1/2) = -2\sqrt{3/4}/(3/4) < 0$ ist $1/2$ eine Maximumstelle von f. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011) :

Man untersuche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^{-x}(\sin x + \cos x)$ auf lokale Extrema.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x - \sin x) = -2e^{-x}\sin x\,,\\ f''(x) &= 2e^{-x}(\sin x - \cos x)\,. \end{aligned}$$

Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin x = 0$ ist, d.h. wenn $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ist.

Wegen $f''(k\pi) = -2e^{-k\pi}(-1)^k$ sind die Stellen $k\pi$ für gerades k Maximumstellen und für ungerades k Minimumstellen. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011) :

Man untersuche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cos^3 x + \sin^3 x$ auf lokale Extrema.

Lösung: Genau dann ist $f'(x) = -3\cos^2 x \sin x + 3\sin^2 x \cos x = 3\sin x\, \cos x\,(\sin x - \cos x) = 0$, wenn $\sin x = 0$ ist, d.h. wenn $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist, oder wenn $\cos x = 0$ ist, d.h. wenn $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist, oder wenn $\sin x = \cos x$, d.h. $\tan x = 1$ und somit $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Es ist $f''(x) = 6\cos x \sin^2 x - 3\cos^3 x + 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x$. In den Nullstellen $x = k\pi$ von $\sin x$ ist $f''(k\pi) = -3\cos^3(k\pi) = 3(-1)^{k+1}$ und in den Nullstellen $x = \frac{\pi}{2} + k$ von $\cos x$ ist $f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -3\sin^3(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 3(-1)^{k+1}$. Daher hat f in diesen kritischen Punkten genau dann ein lokales Maximum, wenn k gerade ist, und genau dann ein lokales Minimum, wenn k ungerade ist. In den Punkten $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ mit $\sin x = \cos x$ ist $f''(\frac{\pi}{4} + k\pi) = 6\sin^3(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Daher hat f in diesen Punkten genau dann ein lokales Maximum, wenn k ungerade ist, und genau dann ein lokales Minimum, wenn k gerade ist. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011) :

Man untersuche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^{-2x}\sin^2 x$ auf lokale Extrema.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-2x}(-2\sin^2 x + 2\sin x \cos x) = 2e^{-2x}\sin x\,(\cos x - \sin x)\,,\\ f''(x) &= e^{-2x}(-4\sin x\cos x + 4\sin^2 x + 2\cos^2 x - 2\sin x\cos x - 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x)\\ &= e^{-2x}(2 - 8\sin x \cos x)\,. \end{aligned}$$

Genau dann ist $f'(x) = 0$, wenn $\sin x = 0$ ist oder $\cos x = \sin x$, also $\tan x = 1$, d.h. wenn $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, oder $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ist.

Wegen $f''(k\pi)=2e^{-2k\pi}>0$ sind die Stellen $k\pi$ Minimumstellen und wegen $f''(\frac{\pi}{4}+k\pi)=e^{-\pi/2-2k\pi}\big(2-8\sin(\frac{\pi}{4}+k\pi)\,\cos(\frac{\pi}{4}+k\pi)\big)=e^{-\pi/2-2k\pi}\big(2-8\tan(\frac{\pi}{4}+k\pi)\,\cos^2(\frac{\pi}{4}+k\pi)\big)=e^{-\pi/2-2k\pi}(2-4)<0$ sind die Stellen $\frac{\pi}{4}+k\pi$ Maximumstellen von f. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011):

Man untersuche die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=e^{\sin^2 x}\cos x$ auf lokale Extrema.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}f'(x)&=2e^{\sin^2 x}\sin x\cos^2 x-e^{\sin^2 x}\sin x=e^{\sin^2 x}\sin x\,(2\cos^2 x-1)\,,\\ f''(x)&=2\sin^2 x\cos x\;e^{\sin^2 x}(2\cos^2 x-1)+\cos x\,e^{\sin^2 x}(2\cos^2 x-1)-4\sin^2 x\cos x\;e^{\sin^2 x}\\ &=e^{\sin^2 x}\Big((2\sin^2 x+1)\cos x\,(2\cos^2 x-1)-4\sin^2 x\cos x\Big)\,.\end{aligned}$$

Genau dann ist $f'(x)=0$, wenn $\sin x=0$ ist oder $\cos^2 x=1/2$, d.h. wenn $x=k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$, oder $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, oder $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi,\,k\in\mathbb{Z}$, ist.

Wegen $f''(k\pi)=2e^0\,(-1)^k$ sind die $k\pi$ für gerades k Minimum- und für ungerades k Maximumstellen. Wegen $f''(\frac{\pi}{4}+k\pi)=e^{1/2}\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1<0$ sind die Stellen $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, Maximumstellen. Wegen $f''(\frac{3}{4}\pi+k\pi)=e^{1/2}\cdot(-4)\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)>0$ sind die Stellen $\frac{3}{4}\pi+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, Minimumstellen von f. •

Abschnitt 14.B, Zusatzaufgabe, p. 395 (1.2.2011):

Sei $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Man untersuche die Funktion $f:\ ]-\pi/2\,,\pi/2[\ \to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\cos x\ \sin^n x$ auf lokale Extrema und Wendepunkte.

Lösung: Es ist $f'(x)=n\cos^2 x\sin^{n-1}x-\sin^{n+1}x=\big(n-(n+1)\sin^2 x\big)\sin^{n-1}x$ und

$$\begin{aligned}f''(x)&=-2(n+1)\cos x\sin^n x+(n-1)\cos x\sin^{n-2}x\,\big(n-(n+1)\sin^2 x\big)\\ &=\big(n(n-1)-(n+1)^2\sin^2 x\big)\cos x\sin^{n-2}x\,.\end{aligned}$$

Genau dann ist also $f'(x)=0$, wenn $x=0$ oder wenn $\sin x=\sqrt{n/(n+1)}$, d.h. $x=\pm\arcsin\sqrt{n/(n+1)}$ ist. Wegen $f''\big(\pm\arcsin\sqrt{n/(n+1)}\big)=-2n\cos\big(\pm\arcsin\sqrt{n/(n+1)}\big)(\pm 1)^{n-2}(n/n+1)^{(n-2)/2}$ gilt: Bei geradem n ist $\pm\arcsin\sqrt{n/(n+1)}$ eine Maximumstelle und 0 (wegen $f\ge 0$) eine Minimumstelle. Bei ungeradem n ist $\arcsin\sqrt{n/(n+1)}$ eine Maximumstelle und $-\arcsin\sqrt{n/(n+1)}$ eine Minimumstelle sowie 0 ein Wendepunkt, da f'' dort das Vorzeichen wechselt.
Genau dann ist $f''(x)=0$, wenn $x=0$ ist oder $x=\arcsin\sqrt{n(n-1)/(n+1)^2}$. Wegen der Monotonie von $\sin x$ wechselt f'' in letzterem Punkt bei geradem wie bei ungeradem n das Vorzeichen, d.h. es handelt sich um einen Wendepunkt. •

Abschnitt 14.D, Aufg. 7a), 7b), p. 409 (1.2.2011):

Für $n\in\mathbb{N}^*$ sei $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Polynomfunktion $g_n(x):=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n}$.

Sei n ungerade. Dann ist die Funktion g_n streng monoton wachsend und besitzt genau eine Nullstelle x_n. Dafür gilt $-2<x_n\le -1$ und $x_n<x_{n+2}$ bei $n\ge 5$. Die Folge dieser Nullstellen konvergiert für $n\to\infty$ gegen -1.

Für gerades n besitzt g_n genau eine lokale Extremstelle, und zwar im Punkt $x=-1$. Dabei handelt es sich um ein globales Minimum; g_n besitzt bei geradem n keine Nullstelle.

Beweis: Für alle $x\ne 1$ gilt $g_n'(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}x^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^k=\dfrac{x^n-1}{x-1}$. Für $x>1$ sind Zähler und Nenner dieses Bruchs beide positiv sind und für $|x|<1$ beide negativ. Jeweils folgt $g'(x)>0$. Ferner ist $g_n'(1)=n\cdot 1>0$.

Bei ungeradem $n=2m+1$ gilt für $x\le -1$ auch $x^n\le -1$, also $x^n-1\le -2$, ferner $x-1\le -2$ und somit $g_n'(x)>0$. Also ist in diesem Fall $g_n'(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, d.h. g_n ist streng monoton wachsend und besitzt somit höchstens eine Nullstelle. Außerdem ist dann $\lim\limits_{x\to\infty} g_n(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = -\infty$, d.h. g_n hat nach dem Zwischenwertsatz in der Tat eine Nullstelle x_n. Für $n = 2m+1 \ge 5$ ist

$$\begin{aligned}
g_n\big(-\frac{n+2}{n+1}\big) &= 1 - \frac{n+2}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\big(-\frac{n+2}{n+1}\big)^k = \frac{-1}{n+1} + \sum_{\ell=1}^{m}\Big(\frac{1}{2\ell}\big(-\frac{n+2}{n+1}\big)^{2\ell} + \frac{1}{2\ell+1}\big(-\frac{n+2}{n+1}\big)^{2\ell+1}\Big)\\
&= \frac{-1}{n+1} + \sum_{\ell=1}^{m}\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^{2\ell}\Big(\frac{1}{2\ell} - \frac{n+2}{(2\ell+1)(n+1)}\Big) = \frac{-1}{n+1} + \sum_{\ell=1}^{m}\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^{2\ell}\frac{n+1-2\ell}{(2\ell+1)(n+1)}\\
&= \frac{-1}{n+1} + \big(\frac{n+2}{n+1}\big)^2\frac{n-1}{3(n+1)} + \sum_{\ell=2}^{m}\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^{2\ell}\frac{n+1-2\ell}{(2\ell+1)(n+1)}\\
&= \frac{n^3-4n^2-2n-7}{3(n+1)^3} + \sum_{\ell=2}^{m}\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^{2\ell}\frac{n+1-2\ell}{(2\ell+1)(n+1)} > 0\,,
\end{aligned}$$

da bei $n \ge 5$ alle Summanden dieser Summe positiv sind. Für diese n ist also $x_n < -\dfrac{n+2}{n+1}$ und somit $\dfrac{x_n}{n+2} < \dfrac{-1}{n+1}$. Mit $g_n(x_n) = 0$ und da $n+1$ gerade ist, also $x_n^{n+1} > 0$, folgt dann

$$g_{n+2}(x_n) = g_n(x_n) + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} + \frac{x_n^{n+2}}{n+2} = x_n^{n+1}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{x_n}{n+2}\Big) < 0\,.$$

Es ergibt sich $x_n < x_{n+2} < -1$ für alle ungeraden $n \ge 5$, d.h. die Folge (x_{2m+1}) dieser Nullstellen konvergiert. Wegen

$$\begin{aligned}
g_{2m+1}(-1) &= 1 - 1 + \sum_{\ell=1}^{m}\Big(\frac{1}{2\ell} - \frac{1}{2\ell+1}\Big) = \frac{1}{6} + \sum_{\ell=2}^{m}\frac{1}{2\ell\,(2\ell+1)} \le \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=2}^{m}\frac{1}{\ell\,(\ell-1)}\\
&\le \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=2}^{m}\Big(\frac{1}{\ell-1} - \frac{1}{\ell}\Big) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{m}\Big) < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

für $m \ge 1$ und, da g_{2m+1} streng monoton wachsend ist, gilt dann $0 < g_{2m+1}(x) < 1/2$ für alle $x \in\,]x_{2m+1}\,, -1[\,$. Wäre nun $x_{2m+1} \le -(1+\varepsilon)$ für alle $m \ge 1$ mit einem $\varepsilon > 0$, so gäbe es nachdem Mittelwertsatz ein c_{2m+1} mit $x_{2m+1} < c_{2m+1} < x_{2m+1} + \frac{1}{2}\varepsilon$ und

$$\frac{2}{\varepsilon}\, g_{2m+1}\big(x_{2m+1}+\tfrac{1}{2}\varepsilon\big) = \frac{g_{2m+1}\big(x_{2m+1}+\frac{1}{2}\varepsilon\big) - g_{2m+1}(x_{2m+1})}{x_{2m+1}+\frac{1}{2}\varepsilon - x_{2m+1}} = g'_{2m+1}(c_{2m+1}) = \frac{c_{2m+1}^{2m+1} - 1}{c_{2m+1} - 1} \ge \frac{|c_{2m+1}|^{2m+1}}{x_5 + 1}.$$

Wegen $|c_{2m+1}| > 1$ wäre dann $\lim\limits_{m\to\infty} g_{2m+1}\big(x_{2m+1}+\frac{1}{2}\varepsilon\big) = \infty$ im Widerspruch zu $\big|g_{2m+1}\big(x_{2m+1}+\frac{1}{2}\varepsilon\big)\big| < \frac{1}{2}$.

Bei geradem $n = 2m$ ist $x^n > 1$, also $x^n - 1 > 0$, für $x < -1$, also $x - 1 < -2$. Daher ist in diesem Fall $g'_n(x) < 0$ für alle $x < -1$, d.h. g_n ist für $x < -1$ streng monoton fallend und, wie eingangs gezeigt, für $x \ge 1$ monoton wachsend. Somit hat g_n in -1 ein globales Minimum. In

$$g_n(-1) = g_{2m}(-1) = 1 + \sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^k}{k} = \frac{1}{2m} + \sum_{j=1}^{m-1}\big(\frac{1}{2j} - \frac{1}{2j+1}\big)$$

sind aber alle Summanden positiv. Daher sind dieses Minimum und damit alle Werte von g_n bei $n = 2m$ positiv, d.h. g_n hat dann keine Nullstelle. •

Abschnitt 14.D, Aufg. 8a), 8b), p. 409 (1.2.2011) :

Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Polynomfunktion $g_n(x) := 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$.

Für gerades n hat g_n keine Nullstelle.

Für ungerades n ist g_n streng monoton wachsend und besitzt genau eine Nullstelle x_n. Es ist $-n \le x_n \le -1$ und $x_{n+2} < x_n$. Außerdem ist $\lim x_{2m+1} = -\infty$.

Beweis: Offenbar gilt $g_n' = g_{n-1}$ für alle $n \ge 1$. Für $x \ge 0$ ist offenbar $g(x) > 0$ und natürlich $e^x > 0$. Daher sind für $x \ge 0$ die Werte der Hilfsfunktion $h_n(x) := g_n(x)\,e^{-x}$ auch positiv. Ihre Ableitung ist $h_n'(x) := g_n'(x)\,e^{-x} - g_n(x)\,e^{-x} = \big(g_{n-1} - g_n(x)\big)\,e^{-x} = -\dfrac{x^n}{n!}\,e^{-x}$.

Sei zunächst n gerade. Dann folgt also $h_n'(x) \le 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. h_n ist monoton fallend und hat daher für negative x erst recht positive Werte. Insbesondere hat h also sicher keine Nullstelle. Da die Werte der e-Funktion überall positiv sind, gilt dies auch für g_n.

Sei nun $n = 2m+1$ ungerade. Dann ist $g_n' = g_{2m}$ überall positiv und somit g_n streng monoton wachsend. Daher kann g_n höchstens eine Nullstelle haben. Offenbar ist $g_1(-1) = 0$. Bei $n \ge 3$, also $m \ge 1$, gilt

$$g(-n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{n^{2\ell}}{(2\ell)!}\Big(1 - \frac{n}{2\ell+1}\Big) = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{n^{2\ell}}{(2\ell)!} \cdot \frac{2(\ell-m)}{2\ell+1} < 0\,,$$
$$g(-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{(2\ell)!}\Big(1 - \frac{1}{2\ell+1}\Big) = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{1}{(2\ell)!} \cdot \frac{2\ell}{2\ell+1} > 0\,.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt g_n bei $n = 2m+1$ also eine Nullstelle x_n im Intervall $]-n\,,\,-1[$.

Wegen $g_{n+2}(x) = g_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\Big(1 + \dfrac{x}{n+2}\Big)$ und $g_n(x_n) = 0$ sowie $x_n > -n$ ist

$$g_{n+2}(x_n) = \frac{x_n^{2m+2}}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{x_n}{n+2}\Big) > \frac{x_n^{2m+2}}{(n+1)!}\Big(1 - \frac{n}{n+2}\Big) > 0\,.$$

Da g_{n+2} streng monoton wachsend ist, muss x_n also größer als die Nullstelle x_{n+2} von g_{n+2} sein. Die Folge (x_{2m+1}) dieser Nullstellen ist daher streng monoton fallend. Angenommen, sie sei durch ein $c \in \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(c) = e^c$ gibt es ein n_0 mit $|e^c - g_n(c)| < \frac{1}{2}e^c$, also mit $0 < \frac{1}{2}e^c < g_n(c)$ für (alle) $n \ge n_0$. Da $g_n(x_n) = 0$ ist und g_n streng monoton wachsend, müsste dafür $x_{2m+1} = x_n < c$ sein. Widerspruch! Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. •

Abschnitt 14.D, Variante zu **Aufg. 9**, p. 410 (1.2.2011):

Die Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := e^x - x^{2n}$ besitzt für $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, genau drei reelle Nullstellen.

Die Funktion $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := e^x - x^{2n+1}$ besitzt für $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, genau zwei reelle Nullstellen.

Beweis: Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1 > 0$, $f(4) = e^4 - 4^{2n} \le e^4 - 4^4 < 0$ und und $\lim\limits_{x\to\infty} e^x/x^{2n} = \infty$, also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, hat f nach dem Zwischenwertsatz mindestens drei Nullstellen. Genau dann ist x_0 eine Nullstelle von f, wenn die Hilfsfunktion $h(x) := x^{2n}e^{-x}$ an der Stelle x_0 den Wert 1 hat. Da die Ableitung $h'(x) = (2n-x)x^{2n-1}e^{-x}$ von h nur die beiden Nullstellen 0 und $2n$ hat, kann h somit nach dem Satz von Rolle höchstens an drei Stellen den Wert 1 haben.

Wegen $g(x) > 0$ für $x \le 0$, $g(3) = e^3 - 3^{2n+1} < e^3 - 3^3 < 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} e^x/x^{2n+1} = \infty$, also $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = \infty$, hat g nach dem Zwischenwertsatz mindestens zwei Nullstellen, die alle positiv sein müssen. Genau dann ist x_0 eine Nullstelle von g, wenn die Hilfsfunktion $H(x) := x^{2n+1}e^{-x}$ an der Stelle x_0 den Wert 1 hat. Da die Ableitung $H'(x) = (2n+1-x)x^{2n}e^{-x}$ nur die eine positive Nullstelle $2n+1$ hat, kann H nach dem Satz von Rolle aber höchstens an zwei positiven Stellen den Wert 1 haben. •

Abschnitt 14.D, Zusatzaufgabe, p. 394 (1.2.2011):

Man begründe, dass die Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^5 - 4x - 1$ genau 3 reelle Nullstellen besitzt, und bestimme diese mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Lösung Wegen $f(-2) = -25 < 0$, $f(-1) = 2 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = -4 < 0$ und $f(2) = 23 > 0$ hat f als stetige Funktion nach dem Nullstellensatz in den drei Intervallen $[-2,-1]$, $[-1,0]$ und $[1,2]$ jeweils mindestens eine Nullstelle, vgl. die Aufgabenlösungen zu Abschnitt 10.C.

Zwischen je zwei Nullstellen von f liegt nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle von $f'(x) = 5x^4 - 4$. f' besitzt aber nur die beiden reellen Nullstellen $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{4/5}$. Daher kann f nur drei Nullstellen haben.

Das Newton-Verfahren liefert die Rekursion $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^5 - 4x_n - 1}{5x^4 - 4} = \dfrac{4x_n^5 + 1}{5x_n^4 - 4}$ für die

Nullstellen von f. Da $f(-2)\,f''(-2)$, $f(0)\,f''(0)$ und $f(2)\,f''(2)$ sämtlich ≥ 0 sind, sind -2, 0 und 2 geeignete Startwerte. Sie liefern die folgenden Näherungen für die drei Nullstellen:

$x_0 = -2$, $x_1 = -1{,}67105263$, $x_2 = -1{,}46109537$, $x_3 = -1{,}36451875$, $x_4 = -1{,}34409500$,
$x_5 = -1{,}34324750$, $x_6 = -1{,}34324608$, $x_7 = -1{,}34324608$.

$x_0 = 0$, $x_1 = -0{,}25000000$, $x_2 = -0{,}25024533$, $x_3 = -0{,}25024534$, $x_4 = -0{,}25024534$.

$x_0 = 2$, $x_1 = 1{,}69736842$, $x_2 = 1{,}52939198$, $x_3 = 1{,}47587577$, $x_4 = 1{,}47085975$,
$x_5 = 1{,}47081820$, $x_6 = 1{,}47081820$.

Die gesuchten Nullstellen sind also $-1{,}3432460$, $-0{,}2502453$ und $1{,}47081820$. •

Abschnitt 14.D, Zusatzaufgabe, p. 394 (1.2.2011):

Man begründe, dass die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) := x^5-3x^4+5$ genau 3 reelle Nullstellen besitzt, und bestimme diese mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Lösung: Wegen $f(-2) = -75 < 0$, $f(-1) = 1 > 0$, $f(1) = 2 > 0$, $f(2) = -11 < 0$ und $f(3) = 5 > 0$ hat f als stetige Funktion nach dem Nullstellensatz in den drei Intervallen $[-2,-1]$, $[1,2]$ und $[2,3]$ jeweils mindestens eine Nullstelle, vgl. die Aufgabenlösungen zu Abschnitt 10.C.

Zwischen je zwei Nullstellen von f liegt nach dem Satz von Rolle eine Nullstelle von $f'(x) = 5x^4+16x^3$. f' hat aber offenbar nur die beiden reellen Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -16/5$. Daher kann f nur drei Nullstellen besitzen.

Das Newton-Verfahren liefert die Rekursion $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{x_n^5+4x_n^4-2}{5x^4+16x_n^3} = \dfrac{4x_n^5+12x_n^4+2}{5x_n^4+16x_n^3}$ für die Nullstellen von f. Da $f(-4)\,f''(-4)$, $f(-1)\,f''(-1))$ und $f(1)\,f''(1)$ sämtlich ≥ 0 sind, sind -4, -1 und 1 geeignete Startwerte. Sie liefern die folgenden Näherungen für die drei Nullstellen:

$x_0 = -4$, $x_1 = -3{,}9921875000$, $x_2 = -3{,}9921256817$, $x_3 = -3{,}9921256779$, $x_4 = -3{,}9921256779$,

$x_0 = -1$, $x_1 = -0{,}9090909090$, $x_2 = -0{,}8961774891$, $x_3 = -9{,}8959312961$, $x_4 = -0{,}8959312077$,
$x_5 = -0{,}8959312077$,

$x_0 = 1$, $x_1 = 0{,}8571428571$, $x_2 = 0{,}8084711975$, $x_3 = 0{,}8033436588$, $x_4 = 0{,}8032907802$,
$x_5 = 0{,}8032907746$, $x_6 = 0{,}8032907746$.

Die gesuchten Nullstellen sind also $-3{,}9921256779$, $-0{,}8959312077$ und $0{,}8032907746$. •

Abschnitt 14.E, Zusatzaufgabe, p. 419 (1.2.2011):

Man zeige $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(1-x)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \ln x\,\ln(1-x)$ für $0<x<1$ und berechne damit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}$.

Lösung: Wir betrachten die Hilfsfunktion $h(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(1-x)^n}{n^2} + \ln x\,\ln(1-x)$. Gliedweises Differenzieren liefert mit Hilfe der Logarithmusreihen $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ und $\ln x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}$ direkt $h'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = 0$. Daher ist die Funktion h ein Konstante, die wir als Grenzwert der Funktion für $x\to 0$ bestimmen. Zunächst liefert die Regel von de l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln x\,\ln(1-x) &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{1/\ln x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1-x)}{1/(x\ln^2 x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1/x} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(2/x)\ln x}{-1/x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}2x = 0\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt die zu beweisende Identität wegen $\displaystyle\lim_{x=0}h(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{x=0}\big((\ln x)(\ln(1-x)\big) = \frac{\pi^2}{6}$.

Für $x = \dfrac{1}{2}$ ergibt sich $\displaystyle\frac{\pi^2}{6} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2} + \ln^2\!\big(\tfrac{1}{2}\big)$, also $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$. •

15 Approximation durch Polynome

Abschnitt 15.A, Zusatzaufgabe, p. 378 (1.2.2011):

Man bestimme für $f(x) := x^{1/x^2}$ das Taylor-Polynom vom Grad 2 mit Entwicklungspunkt $a=1$.

Lösung: Es ist $f(1)) = 1$, $f'(x) = x^{1/x^2}(1/x^3)\,(-2\ln x+1)$, also $f'(1)=1$, $f''(x) = x^{1/x^2}(1/x^3)^2(-2\ln x+1)^2 + x^{1/x^2}(-3/x^4)(-2\ln x+1) + x^{1/x^2}(1/x^3)(-2/x)$, also $f''(1) = 1-3-2=-4$. Das gesuchte Taylor-Polynom ist daher

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1+(x-1)+\frac{-4}{2}(x-1)^2 = 1+(x-1)-2(x-1)^2\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 15.A, Zusatzaufgabe, p. 378 (1.2.2011):

Man bestimme für $f(x) := \sqrt[3]{x}$ das Taylor-Polynom vom Grad 2 mit Entwicklungspunkt $a=1$ an sowie das zugehörige Lagrange-Restglied.

Lösung: Für $f(x) = x^{1/3}$ gilt $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$, $f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$. Also ist $f(1)=1$, $f'(1)=\frac{1}{3}$, $f''(1) = -\frac{2}{9}$. Das gesuchte Taylor-Polynom ist daher $f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 = 1+\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2 = -\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{9}x+\frac{5}{9}$. Das zugehörige Lagrange-Restglied ist $\frac{1}{6}f^{(3)}(c)\,(x-1)^3 = \frac{5}{81}c^{-8/3}(x-1)^3$ mit einem c zwischen 1 und x. •

Abschnitt 15.A, Zusatzaufgabe, p. 378 (1.2.2011):

Man bestimme für $f(x) := \tan x$ das Taylor-Polynom vom Grad 3 mit Entwicklungspunkt $a=0$.

Lösung: Es ist $f'(x) = 1+\tan^2 x = 1+f^2(x)$, $f''(x) = 2f(x)\,f'(x)$ und $f^{(3)}(x) = 2f'(x)^2+2f(x)f''(x)$. Damit ergibt sich $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f^{(3)}(0) = 2f'(0)^2+2f(0)f''(0) = 2$. Das gesuchte Taylor-Polynom ist also

$$f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(0)(x-0)^3 = x+\frac{2}{6}x^3 = x+\frac{1}{3}x^3\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 15.A, Zusatzaufgabe, p. 378 (1.2.2011):

Man gebe für die Funktion $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) := \dfrac{1+x}{1-x}$ das Taylor-Polynom vom Grad 3 mit Entwicklungspunkt $a=2$ an.

Lösung: Nach 13.B, Zusatzaufgabe, p. 350 ist $f^{(n)}(x) = 2n!/(1-x)^{n+1}$ für $n\in\mathbb{N}^*$, und das gesuchte Taylor-Polynom ist

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(2)(x-3)^3 = -3+2(x-2)-2(x-2)^2+2(x-2)^3\,. \bullet$$

Abschnitt 15.A, Zusatzaufgabe, p. 378 (1.2.2011):

Man gebe eine Polynomfunktion an, die die Funktion $f(x) := e^x\sin x$ im Intervall $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ mit einem Fehler $\le 10^{-4}$ darstellt.

Lösung: Es ist $f'(x) := e^x(\cos x+\sin x)$, $f''(x) = 2e^x\cos x$, $f^{(3)}(x) := 2e^x(\cos x-\sin x)$, $f^{(4)}(x) = -4e^x\sin x = -4f(x)$, also $f^{(5)}(x) := -4f'(x)$, $f^{(6)}(x) := -4f''(x)$, $f^{(7)}(x) := -4f^{(3)}(x)$, $f^{(8)}(x) := -4f^{(4)}(x) = 16f(x)$, $f^{(9)}(x) := 16f'(x)$, $f^{(10)}(x) := 16f''(x) = 32e^x\cos x$. Da $f^{(10)}$ im betrachteten Intervall keine Nullstelle hat, nimmt $|f^{(9)}|$ das Maximum am Rand von $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ an, also offenbar in $\frac{\pi}{4}$. Die Taylor-Formel liefert dann ein c aus diesem Intervall (für das also $|f^{(9)}(c)| \le |f^{(9)}(\frac{\pi}{4})| = 16\sqrt{2}\,e^{\pi/4}$ gilt) mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{8}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(9)}(c)}{9!}x^9 = x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{90}x^6-\frac{1}{630}x^7+\frac{f^{(9)}(c)}{9!}x^9\,.$$

Für den Fehler $R := \dfrac{f^{(9)}(c)}{9!}x^9$ gilt dabei $|R| \le \dfrac{16\sqrt{2}\,e^{\pi/4}}{9!}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^9 \approx 0{,}0000891 < 10^{-4}$. •

Abschnitt 15.A, Zusatzaufgabe, p. 378 (1.2.2011) :

Man gebe eine Polynomfunktion an, die die Funktion $e^{-x}\cos x$ im ganzen Intervall $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ mit einem Fehler $\le 10^{-5}$ darstellt.

Lösung: Es ist $f'(x) := -e^{-x}(\cos x + \sin x)$, $f''(x) = 2e^{-x}\sin x$, $f^{(3)}(x) := 2e^{-x}(\cos x - \sin x)$, $f^{(4)}(x) = -4e^{-x}\cos x = -4f(x)$, also $f^{(5)}(x) := -4f'(x)$, $f^{(6)}(x) := -4f''(x)$, $f^{(7)}(x) := -4f^{(3)}(x)$, $f^{(8)}(x) := -4f^{(4)}(x) = 16f(x)$, $f^{(9)}(x) := 16f'(x)$, $f^{(10)}(x) := 16f''(x) = 32e^{-x}\sin x$. Da $f^{(10)}$ im betrachteten Intervall nur die Nullstelle 0 hat, nimmt $|f^{(9)}|$ das Maximum am Rand von $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ oder in 0 an. Es ist also gleich Max $\{0, 16e^{-\pi/4}\sqrt{2}\approx 10, 16\} = 16$ und wird im Punkt 0 angenommen. Die Taylor-Formel liefert dann zu $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ ein c aus diesem Intervall (für das also $|f^{(9)}(c)| \le 16$ gilt) mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{8} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(9)}(c)}{9!}x^9 = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{630}x^7 + \frac{1}{2520}x^8 + \frac{f^{(9)}(c)}{9!}x^9 .$$

Für den Fehler $R := \frac{f^{(9)}(c)}{9!}x^9$ gilt dabei $|R| \le \frac{16}{9!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 \approx 5\cdot 10^{-6} < 10^{-5}$. Die Polynomfunktion $1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{630}x^7 + \frac{1}{2520}x^8$ hat daher die geforderte Eigenschaft. •