Lösungsvorschläge zu ausgewählten Übungsaufgaben aus Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 1, 3. Aufl. (Version 2010), Kapitel 2

4 Die reellen Zahlen

Abschnitt 4.A, Aufg. 1, p. 83 (1.7.2010) :

Sei α eine positive rationale Zahl, die nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Dann ist $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,] := \{a + b\sqrt{\alpha} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen ein Körper.

Beweis: Für $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\big(a+b\sqrt{\alpha}\,\big) + \big(c+d\sqrt{\alpha}\,\big) = (a+c) + (b+d)\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,],$$

$$\big(a+b\sqrt{\alpha}\,\big) \cdot \big(c+d\sqrt{\alpha}\,\big) = (ac+bd\alpha) + (ad+bc)\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,].$$

Daher liefern Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ tatsächlich Verknüpfungen auf $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,]$. Die beiden Assoziativgesetze, die beiden Kommutativgesetze und das Distributivgesetz gelten in ganz $\mathbb{R}$, müssen hier also nicht eigens nachgeprüft werden. Wegen $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{\alpha}$ und $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{\alpha}$ enthält $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,]$ auch das Nullelement 0 und das Einselement 1 von $\mathbb{R}$. Das Negative zu $a+b\sqrt{\alpha}$ ist $(-a) + (-b)\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,]$. Schließlich sei $a+b\sqrt{\alpha} \neq 0$ aus $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,]$. Dann ist sicherlich auch $a-b\sqrt{\alpha} \neq 0$, da andernfalls $a=b\sqrt{\alpha}$, d.h. $\alpha = (a/b)^2$ wäre im Widerspruch zur Voraussetzung über α. Nun folgt durch Erweitern nach der dritten binomischen Formel, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,]$ mit $a+b\sqrt{\alpha}$ auch das Inverse davon bezüglich der Multiplikation enthält:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{\alpha}} = \frac{a-b\sqrt{\alpha}}{\big(a+b\sqrt{\alpha}\,\big)\big(a-b\sqrt{\alpha}\,\big)} = \frac{a}{a^2-b^2\alpha} + \frac{-b}{a^2-b^2\alpha}\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}\,].$$ •

Abschnitt 4.A, Variante zu **Aufg. 5**, p. 83 (1.7.2010) :

Man berechne das Inverse von [8] im Körper $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}29$.

Lösung: Der Euklidische Divisionsalgorithmus liefert

$$\begin{aligned} 29 &= 3 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1\,. \end{aligned}$$

Es ist somit $1 = \mathrm{ggT}(29, 8) = 3 - 1 \cdot 2 = 3 - (5 - 1 \cdot 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2(8 - 1 \cdot 5) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 8 - 3(29 - 3 \cdot 8) = 11 \cdot 8 - 3 \cdot 29$. Wegen $\overline{29} = \overline{0}$ folgt $[1] = [11] \cdot [8] - [3] \cdot [29] = [11] \cdot [8]$, d.h. $[8]^{-1} = [11]$, in $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}29$. •

Abschnitt 4.A, Aufg. 5, p. 83 (1.7.2010) :

Man berechne das Inverse von [40] im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}97$.

Lösung: Der Euklidische Divisionsalgorithmus liefert

$$\begin{aligned} 97 &= 2 \cdot 40 + 17 \\ 40 &= 2 \cdot 17 + 6 \\ 17 &= 2 \cdot 6 + 5 \\ 6 &= 1 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1\,. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die auftretenden Quotienten mit q_i und setzen $s_0 := 1$, $s_1 := 0$, $t_0 := 0$, $t_1 := 1$ sowie $s_{i+1} = s_{i-1} - q_i s_i$, $t_{i+1} = t_{i-1} - q_i t_i$, so gilt für die auftretenden Reste $r_i = s_i a + t_i b$ und insbesondere $1 = r_5 = s \cdot 97 + t \cdot 40$ mit $s = s_5 = -7$ und $t = t_5 = 17$, wie sich aus der folgenden Tabelle ergibt:

i	0	1	2	3	4	5
q_i		2	2	2	1	
s_i	1	0	1	-2	5	-7
t_i	0	1	-2	5	-12	17

Es ist somit $1 = \mathrm{ggT}(97, 40) = -7 \cdot 97 + 17 \cdot 40$. Wegen $[97] = [0]$ folgt $[1] = [-7] \cdot [97] + [17] \cdot [40] = [17] \cdot [40]$, d.h. $[40]^{-1} = [17]$ in $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}97$. •

Abschnitt 4.A, Zusatzaufgabe, p. 83 (1.7.2010) :

Die Addition „ + “ und die Multiplikation „ · “ eines aus 4 Elementen bestehenden Körpers $K = \{0, 1, a, b\}$ mit dem Nullelement 0 und dem Einselement 1 werde durch die beiden Tabellen

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	$*$	$*$
a	a	$*$	$*$	$*$
b	b	$*$	$*$	$*$

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	$*$	$*$
b	0	b	$*$	$*$

gegeben, bei denen die Angaben an den mit $*$ bezeichneten Stellen verloren gegangen sind. Man ergänze die Tabellen.

Lösung: In jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle für „ + “ und jeder von der ersten verschiedenen Zeile und Spalte der Tabelle für „ · “ muss jedes Element genau einmal stehen. In der dritten Zeile der Tabelle für „ · “ fehlen also noch eine 1 und ein b, wobei aber b nicht in der letzten Spalte stehen kann. Daher ist $a \cdot a = b$ und $a \cdot b\ (= b \cdot a) = 1$. Schließlich folgt so auch $b \cdot b = a$.

In der zweiten Zeile der Tabelle für „ + “ fehlen noch a und b, wobei aber b nicht in der letzten Spalte stehen kann. Daher ist $1 + a\ (= a + 1) = b$ und $1 + b\ (= b + 1) = a$. Ferner folgt $a + a = a \cdot (1 + 1) = a \cdot 0 = 0$ und $b + b = b \cdot (1 + 1) = b \cdot 0 = 0$ und somit $a + b\ (= b + a) = 1$. Die gesuchten Tabellen sind also:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Man hätte auf den Eintrag $1 + 1 = 0$ verzichten können: Wäre etwa $1 + 1 = a$, so bliebe für $1 + a$ nur die Möglichkeit $1 + a = b$. Es folgte der Widerspruch $a + a = a \cdot (1 + 1) = a \cdot a = b = 1 + a$, d.h. $a = 1$. •

Bemerkung. Die Aufgabe unterstellt, dass es einen Körper mit 4 Elementen gibt. Sie zeigt, dass nach Fixieren der neutralen Elemente 0 und 1 die Addition und Multiplikation eindeutig bestimmt sind. Man kann natürlich direkt prüfen, dass die angegebenen Verknüpfungstafeln eine Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1, a, b\}$ definieren. Dies ist mühsam. Die Existenz eines Körpers mit 4 Elementen ist aber von einer etwas höheren Warte aus selbstverständlich, vgl. Bd. 2, Beispiel 10.A.28.

Abschnitt 4.A, Zusatzaufgabe, p. 83 (1.7.2010) :

Die Addition „ $+$ “ und die Multiplikation „ $\cdot$ “ eines Körpers $K = \{0, 1, a, b, c\}$ aus 5 Elementen mit dem Nullelement 0 und dem Einselement 1 werde durch die beiden Tabellen

$+$	0	1	a	b	c
0	0	1	a	b	c
1	1	a	b	$*$	$*$
a	a	$*$	$*$	$*$	$*$
b	b	$*$	$*$	$*$	$*$
c	c	$*$	$*$	$*$	$*$

$\cdot$	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	$*$	$*$	$*$
b	0	b	$*$	$*$	$*$
c	0	c	$*$	$*$	$*$

gegeben, bei denen die Angaben an den mit $*$ bezeichneten Stellen verloren gegangen sind. Man ergänze die Tabellen.

Lösung: In jeder Zeile und jeder Spalte der Tabelle für „ $+$ “ und jeder von der ersten verschiedenen Zeile und Spalte der Tabelle für „ $\cdot$ “ muss jedes Element genau einmal stehen.

In der zweiten Zeile und letzten Spalte der Tabelle für „ $+$ “ steht daher 0. Dann muss aber $1 + b = c$ sein. Wegen der Kommutativität von „ $+$ “ folgt $a + 1 = b$, $b + 1 = c$, $c + 1 = 0$. Nun bleibt für das Element in der dritten Zeile und letzten Spalte nur das Element 1 über, d.h. es ist $a + c = c + a = 1$. Dann folgt ebenso $a + b = b + a = 0$, schließlich $a + a = c$. Das Element in der vierten Zeile und letzten Spalte dieser Tabelle muss nun a sein, d.h. es ist $b + c = c + b = a$. Damit ergibt sich $b + b = 1$. Schließlich bleibt nur übrig $c + c = b$.

Wegen $a = 1 + 1$ ergibt sich mit dem Distributivgesetz $a \cdot a = a(1 + 1) = a + a = c$. Wieder bleibt nur der Reihe nach $a \cdot b = b \cdot a = 1$, $a \cdot c = c \cdot a = b$, $b \cdot c = c \cdot b = a$, $b \cdot b = c$ und schließlich $c \cdot c = 1$. Die gesuchten Tabellen sind also:

$+$	0	1	a	b	c
0	0	1	a	b	c
1	1	a	b	c	0
a	a	b	c	0	1
b	b	c	0	1	a
c	c	0	1	a	b

$\cdot$	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	c	1	b
b	0	b	1	c	a
c	0	c	b	a	1

Bemerkung. Ein Vergleich mit den Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation von $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ in Beispiel 4.A.4 zeigt, dass der vorliegende Körper im Wesentlichen der Körper $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ ist. Man hat nur (neben der Identifikation der neutralen Elemente 0 und 1) die Elemente $a, b, c \in K$ mit den Restklassen von $2, 3, 4$ in $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ zu identifizieren. Später werden wir sagen, K und $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ seien isomorphe Körper. Übrigens ist jeder Körper – ja sogar jeder Ring – mit 5 Elementen zu $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}5$ isomorph, vgl. Bd. 2, Beispiel 5.A.8. (Die Charakteristik eines solchen Ringes ist notwendigerweise 5.)

Abschnitt 4.B, Aufg. 3a), p. 88 (1.7.2010) :

G sei eine Gruppe mit dem neutralen Element e. Gilt $x^2 = e$ für alle $x \in G$, so ist G abelsch.

Beweis: Seien $x, y \in G$. Dann ist $x^2 = y^2 = e$ und $(xy)^2 = xyxy = e$. Es folgt $xy = xey = x(yxyx)y = x^2yxy^2 = eyxe = yx$. •

Abschnitt 4.B, Aufg. 8, p. 89 (1.7.2010) :

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f_{a,b}(x) := ax + b$ definiert. Dann ist $G := \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine nicht kommutative Gruppe.

Beweis: Wegen $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}\big(f_{c,d}(x)\big) = f_{a,b}(cx+d) = a(cx+d)+b = acx+(ad+b) = f_{ac,ad+b}(x)$ für $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0$ und folglich $ac \neq 0$, liegt auch $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$ in G, d.h. “$\circ$„ ist eine Verknüpfung auf G. Das Assoziativgesetz gilt stets für $\circ$, muss hier also nicht eigens nachgeprüft werden. Ferner ist $f_{1,0}(x) = 1 \cdot x + 0 = x = \mathrm{id}(x)$, d.h. $\mathrm{id} = f_{1,0} \in G$ ist neutrales Element von G. Für das inverse Element $f_{c,d}$ zu $f_{a,b}$ muss dann wegen obiger Identität $ac = 1$, $ad+b = 0$ gelten, d.h. $c = a^{-1}$, $d = -a^{-1}b$.

In der Tat prüft man nach, dass nicht nur $f_{a,b} \circ f_{a^{-1},-a^{-1}b} = \mathrm{id}$ ist, sondern auch $f_{a^{-1},-a^{-1}b} \circ f_{a,b} = \mathrm{id}$ gilt. – Wegen $f_{1,1} \circ f_{2,0} = f_{2,1}$ und $f_{2,0} \circ f_{1,1} = f_{2,2}$ ist die Gruppe überdies nicht kommutativ. •

Bemerkung. Analog bilden auch die Abbildungen $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$, $(a,b) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$, von $\mathbb{C}$ auf sich eine Gruppe oder noch allgemeiner die Abbildungen $x \mapsto ax + b$, $(a,b) \in K^\times \times K$, von K auf sich, wo K ein beliebiger Körper ist. Es handelt sich um die affine Gruppe $\mathrm{A}_1(K)$, vgl. Bd. 2, Abschnitt 7.A.

Abschnitt 4.B, Zusatzaufgabe, p. 89 (1.8.2010):

Sei A eine nichtleere Menge und $\cdot : A \times A \to A$ eine assoziative Verknüpfung auf A. Zu jedem $a \in A$ gebe es genau ein $a^* \in A$ derart, dass $aa^*a = a$ gilt. $a^{**} := (a^*)^*$ bezeichne das entsprechende Element zu a^*. Man zeige:

a) Für alle $a \in A$ gilt $a^{**} = a$.

b) Für alle $a, b \in A$ gilt $aa^* = bb^*$.

c) $(A, \cdot)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element $e := bb^*$, wo $b \in A$ beliebig ist, und a^* als inversem Element zu $a \in A$.

(Dies ist Keks-Problem Nr. 82 der Uni Würzburg, vgl. http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~keks.)

Beweis: a) Nach Definition von a^* bzw. a^{**} gilt $aa^*a = a$ und $a^*a^{**}a^* = a^*$, also wegen der Assoziativität von $\cdot$ auch $a(a^*aa^*)\,a = (aa^*a)\,a^*a = aa^*a = a$. Die Eindeutigkeit von a^* liefert dann $a^*aa^* = a^*$. Da aber $a^{**} := (a^*)^*$ das eindeutig bestimmte Element mit $a^*a^{**}a^* = a^*$ ist, ergibt sich $a = a^{**}$.

b) Für $c := a(b^*a)^*b^*$ gilt wegen $b^*a = (b^*a)^{**}$

$$\begin{aligned} c(aa^*)\,c &= \big(a(b^*a)^*b^*\big)\,(aa^*)\,\big(a(b^*a)^*b^*\big) = \big(a(b^*a)^*b^*\big)\,\big(aa^*a\big)\,\big((b^*a)^*b^*\big) = \big(a(b^*a)^*b^*\big)\,a\,\big((b^*a)^*b^*\big) \\ &= a\,\big((b^*a)^*\,(b^*a)\,(b^*a)^*\big)\,b^* = a\,\big((b^*a)^*\,(b^*a)^{**}\,(b^*a)^*\big)\,b^* = a\,(b^*a)^*b^* = c \end{aligned}$$

und analog wegen $b^*bb^* = b^*b^{**}b^* = b^*$

$$\begin{aligned} c(bb^*)\,c &= \big(a(b^*a)^*b^*\big)\,(bb^*)\,\big(a(b^*a)^*b^*\big) = \big(a\,(b^*a)^*\big)\,\big(b^*bb^*\big)\,\big(a\,(b^*a)^*b^*\big) = \big(a(b^*a)^*\big)b^*\big(a\,(b^*a)^*b^*\big) \\ &= a\,\big((b^*a)^*\,(b^*a)\,(b^*a)^*\big)\,b^* = a\,\big((b^*a)^*\,(b^*a)^{**}\,(b^*a)^*\big)\,b^* = a\,(b^*a)^*b^* = c\,. \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von c^* liefert nun $c^* = aa^*$ und $c^* = bb^*$, also $aa^* = bb^*$.

c) Wegen b) gilt $ea = (bb^*)a = (aa^*)a = a$ und mit a) erhält man ebenso $ae = a(bb^*) = a\big(a^*(a^*)^*\big) = aa^*a = a$, d.h. e ist neutrales Element. Wegen b) gilt für beliebiges $a \in A$ ebenfalls $aa^* = bb^* = e$ und mit a) erhält man ebenso $a^*a = a^*a^{**} = bb^* = e$, d.h. a^* ist das inverse Element zu a. •

Abschnitt 4.C, Aufg. 8, p. 92 (1.7.2010):

Man beweise die so genannte Polarisationsformel: Für $n \in \mathbb{N}^*$ und beliebige paarweise kommutierende Elemente $x_1, \dots, x_n$ eines Ringes gilt

$$2^{n-1}\, n!\; x_1 \cdots x_n = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^{n-1}} \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n\,(x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_nx_n)^n\,,$$

wobei auf der rechten Seite über alle Vorzeichentupel $\varepsilon = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{1,-1\}$ zu summieren ist. (*Bei* $n=2$ *handelt es sich um die Formel* $4x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2$, *die das Multiplizieren auf zweimaliges Quadrieren zurückführt.*) – Ähnlich zeige man die Formel

$$(-1)^n\, n!\; x_1 \cdots x_n = \sum_{H \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|H|} x_H^n = \sum_{e=(e_1,\dots,e_n)\in\{0,1\}^n} (-1)^{e_1+\cdots+e_n}\,(e_1x_1+\cdots+e_nx_n)^n\,,$$

(mit $x_H := \sum_{i \in H} x_i$ für $H \subseteq \{1,\dots,n\}$), die $2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$ verallgemeinert.

Beweis:. Wir berechnen die rechte Seite der ersten Formel mit dem Polynomialsatz 2.B.16 und erhalten

$$\begin{aligned} &\sum_{\varepsilon=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^{n-1}} \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n\,(x_1+\varepsilon_2x_2+\cdots+\varepsilon_nx_n)^n = \\ &\qquad = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^{n-1}} \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n \sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=n}} \binom{n}{m} \varepsilon_2^{m_2} \cdots \varepsilon_n^{m_n}\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \\ &\qquad = \sum_{\substack{m=(m_1,\dots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=n}} \binom{n}{m} \Bigg(\sum_{\varepsilon=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^{n-1}} \varepsilon_2^{m_2+1} \cdots \varepsilon_n^{m_n+1} \Bigg)\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}\,. \end{aligned}$$

Im Summanden mit $m_1=\cdots=m_n=1$ ist jeder der 2^{n-1} Summanden $\varepsilon_2^{m_2+1}\cdots\varepsilon_n^{m_n+1}=(\pm1)^2\cdots(\pm1)^2$ der zweiten Summe gleich 1, und ferner ist dafür $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{1!\cdots 1!}=n!$. Dieser Summand ist daher gleich der linken Seite $2^{n-1}n!\;x_1\cdots x_n$ der zu beweisenden Formel. In den anderen Summanden sind nicht alle $m_i=1$. Wegen $m_1+\cdots+m_n=n$ ist dann eine der natürlichen Zahlen m_i, etwa m_n, gleich 0. Die in der oben erhaltenen Formel eingeklammerte Summe ist in diesem Fall

$$\sum_{(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-1})\in\{1,-1\}^{n-2}}\varepsilon_2^{m_2+1}\cdots\varepsilon_{n-1}^{m_{n-1}+1}\left(1^1+(-1)^1\right)=0\,,$$

wobei der letzte (verschwindende) Faktor dadurch zustande kommt, dass jeweils noch die Summanden mit $\varepsilon_n=1$ und $\varepsilon_n=-1$ zu berücksichtigen waren und $m_n+1=1$ ist.

Zum Beweis der zweiten Formel wird deren rechte Seite wieder mit dem Polynomialsatz 2.B.16 berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned}
&\sum_{e=(e_1,\ldots,e_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{e_1+\cdots+e_n}\,(e_1x_1+\cdots+e_nx_n)^n=\\
&\qquad=\sum_{e=(e_1,\ldots,e_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{e_1+\cdots+e_n}\sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=n}}\binom{n}{m}e_1^{m_1}\cdots e_n^{m_n}\,x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\\
&\qquad=\sum_{\substack{m=(m_1,\ldots,m_n)\\ m_1+\cdots+m_n=n}}\binom{n}{m}\Bigg(\sum_{e=(e_1,\ldots,e_n)\in\{0,1\}^n}(-1)^{e_1+\cdots+e_n}\,e_1^{m_1}\cdots e_n^{m_n}\Bigg)x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\,.
\end{aligned}$$

Im Summanden mit $m_1=\cdots=m_n=1$ ist der Multinomialkoeffizient gleich $n!$, und in der eingeklammerten Summe sind alle Summanden gleich 0 bis auf den, bei dem alle e_i gleich 1 sind. Dieser Summand liefert den Beitrag $n!\,(-1)^n1^1\cdots1^1x_1^1\cdots x_n^1$. Er ist daher gleich der rechten Seite $(-1)^n n!\;x_1\cdots x_n$ der Formel. In den anderen Summanden sind nicht alle $m_i=1$. Wegen $m_1+\cdots+m_n=n$ ist dann eines der m_i, etwa m_n, gleich 0. Die im obigen Ausdruck eingeklammerte Summe ist somit

$$\sum_{(e_1,\ldots,e_{n-1})\in\{0,1\}^{n-1}}(-1)^{e_1+\cdots+e_{n-1}}\,e_1^{m_1}\cdots e_{n-1}^{m_{n-1}}\left((-1)^0 0^0+(-1)^1 1^0\right)=0$$

wobei der letzte (verschwindende) Faktor dadurch zustande kommt, dass noch die Summanden jeweils mit $e_n=0$ und mit $e_n=1$ zu berücksichtigen waren und $m_n=0$ ist.

Die mittlere Summe erhält man aus der rechten, wenn man darin für jeden Summanden rechts H als Menge der $i\in\{1,\ldots,n\}$ mit $e_i=1$ nimmt. •

Abschnitt 4.D, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 96 (1.7.2010):

Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $1+|x+1|>|x-1|$?

Lösung: Wir unterscheiden drei Fälle:

Bei $x\geq1$ sind $x-1$ und $x+1$ beide ≥0, d.h. es ist $|x-1|=x-1$ und $|x+1|=x+1$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $x+2=1+(x+1)>x-1$, d.h. zu $2>-1$. Sie gilt in diesem Fall also immer.

Bei $1>x\geq-1$ ist $x+1\geq0$ und $x-1<0$, d.h. es ist $|x+1|=x+1$ und $|x-1|=1-x$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $x+2=1+(x+1)>1-x$ und somit zu $2x>-1$, d.h. $x>-\frac12$.

Bei $x<-1$ sind $x-1$ und $x+1$ beide <0, d.h. es ist $|x-1|=1-x$ und $|x+1|=-x-1$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $-x=1-x-1>1-x$, d.h. zu $0>1$. Sie gilt also in diesem Fall nie.

Insgesamt gilt die Ungleichung genau für alle reellen Zahlen x mit $x>-\frac12$. •

Abschnitt 4.D, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 96 (1.7.2010):

Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $|x|+|x-1|<2$?

Lösung: Wir unterscheiden drei Fälle:

Bei $x\geq1$ sind x und $x+1$ beide ≥0, d.h. es ist $|x|=x$ und $|x-1|=x-1$. Die Ungleichung ist dann äquivalent zu $x+x-1=2x-1<2$, d.h. zu $2x<3$. Sie gilt also in diesem Fall genau dann, wenn $x<\frac32$ ist.

Bei $0 \le x < 1$ ist $x \ge 0$ und $x-1 \le 0$, d.h. es ist $|x| = x$ und $|x-1| = 1-x$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $x+1-x < 2$ und somit zu $1 < 2$, d.h. sie gilt in diesem Fall immer.

Bei $x < 0$ sind x und $x-1$ beide < 0, d.h. es ist $|x| = -x$ und $|x-1| = 1-x$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $-x+1-x < 2$, d.h. zu $1-2x < 2$. Sie gilt also in diesem Fall genau dann, wenn $x > -\frac{1}{2}$ ist.

Insgesamt gilt die Ungleichung genau für alle reellen Zahlen x mit $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$. •

Abschnitt 4.D, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 96 (1.7.2010):

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung $2\,|x-1| \le |x+1| + 1$.

Lösung: Wir unterscheiden drei Fälle:

Bei $x \ge 1$ sind $x-1$ und $x+1$ beide ≥ 0, d.h. es ist $|x-1| = x-1$ und $|x+1| = x+1$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $2x-2 = 2\,(x-1) \le (x+1)+1 = x+2$ und somit zu $x \le 4$.

Bei $1 > x \ge -1$ ist $x+1 \ge 0$ und $x-1 < 0$, d.h. es ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = 1-x$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $2-2x = 2\,(1-x) \le x+1+1 = x+2$ und somit zu $0 \le 3x$, d.h. $0 \le x$.

Bei $x < -1$ sind $x-1$ und $x+1$ beide < 0, d.h. es ist $|x-1| = 1-x$ und $|x+1| = -x-1$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $2-2x \le -x-1+1 = -x$, d.h. zu $2 \le x$. Sie gilt also in diesem Fall nie.

Insgesamt gilt die Ungleichung genau für alle reellen Zahlen x mit $0 \le x \le 4$. •

Abschnitt 4.D, Variante zu **Aufg. 1a)**, p. 96 (1.7.2010):

Für welche rellen Zahlen x gilt die Ungleichung $1 + |x-1| > |x-2|$?

Lösung: Wir unterscheiden drei Fälle:

Bei $x \ge 2$ sind $x-1$ und $x-2$ beide ≥ 0, d.h. es ist $|x-1| = x-1$ und $|x-2| = x-2$. Die Ungleichung ist dann äquivalent zu $1+x-1 = x > x-2$, d.h. zu $0 > -2$. Sie gilt also in diesem Fall stets.

Bei $1 \le x < 2$ ist $x-1 \ge 0$ und $x-2 < 0$, d.h. es ist $|x-1| = x-1$ und $|x-2| = 2-x$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $1+x-1 > 2-x$ und somit zu $2x > 2$, d.h. $x > 1$. Sie gilt also in diesem Fall nur für $1 < x\ (< 2)$.

Bei $x < 1$ sind $x-1$ und $x-2$ beide < 0, d.h. es ist $|x-1| = 1-x$ und $|x-2| = 2-x$. Die obige Ungleichung ist dann äquivalent zu $1+1-x > 2-x$, d.h. zu $2-x > 2-x$. Sie gilt also in diesem Fall nie.

Insgesamt gilt die Ungleichung genau für alle reellen Zahlen x mit $x > 1$. •

Abschnitt 4.D, Variante zu **Aufg. 1c)**, p. 96 (1.7.2010):

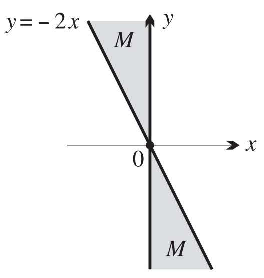
Für alle $x,\, y \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ und $|y| < 1$ gilt die Ungleichung $|x+y| < 1+xy$.

Beweis: Wegen $\pm x \le |x| < 1$ und $\pm y \le |y| < 1$ sind $1-x$ und $1-y$ sowie $1+x$ und $1+y$ jeweils positiv. Es folgt $0 < \big(1-x\big)\big(1-y\big) = 1-(x+y)+xy$ sowie $0 < \big(1+x\big)\big(1+y\big) = 1+(x+y)+xy$. Dies liefert $x+y < 1+xy$ und $-(x+y) < 1+xy$, d.h. insgesamt $|x+y| < 1+xy$. •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 1d)**, p. 96 (1.7.2010):

Man bestimme die Menge der Paare $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$, die der Ungleichung $2(x+y)^2 \le y\,(3x+2y)$ genügen, und skizziere diese Menge in der $(x,\, y)$-Ebene.

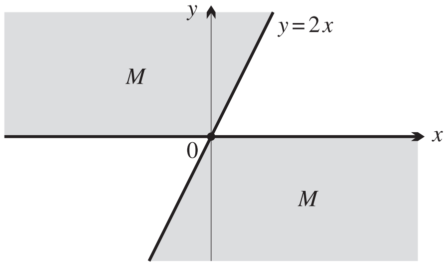
Lösung: $2(x+y)^2 \le y\,(3x+2y)$ ist äquivalent zu $2x^2+4xy+2y^2 \le 3xy+2y^2$, d.h. zu $2x^2+xy \le 0$, und somit zu $x\,(2x+y) \le 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x \ge 0$ und $y \le -2x$ gilt oder wenn $x \le 0$ und $y \ge -2x$ gilt. Es handelt sich also um den nebenstehend skizzierten Bereich M:



Abschnitt 4.D, Variante zu **Aufg. 1d)**, p. 96 (1.7.2010) :

Man bestimme die Menge der Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die der Ungleichung $x(x+4y) \leq (x+y)^2$ genügen und skizziere diese Menge in der (x, y)-Ebene.

Lösung: $x(x+4y) \leq (x+y)^2$ ist äquivalent zu $x^2+4xy \leq x^2+2xy+y^2$, d.h. zu $2xy \leq y^2$, und somit zu $0 \leq y(y-2x)$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $y \geq 0$ und $y \geq 2x$ gilt oder wenn $y \leq 0$ und $y \leq 2x$ gilt. Es handelt sich also um den im Folgenden skizzierten Bereich M:



Abschnitt 4.D, **Aufg. 2b)**, p. 96 (1.7.2010) :

Ist $x \geq 1$, so folgt $x \geq \big((3x+1)/(3+x)\big)^2$.

Beweis: Wegen $x \geq 1$ ist $0 \leq x-1$ und somit $0 \leq (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Daraus ergibt sich aber $(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1 \leq x^3 + 6x^2 + 9x = (3+x)^2x$ und schließlich $\big((3x+1)/(3+x)\big)^2 \leq x$, da $(3+x)^2 > 0$ ist. •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 4a)**, p. 96 (1.7.2010) :

Für $x, y > 0$ gilt $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$.

Beweis: Als Quadrat ist $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$. Es folgt $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Wegen $x, y > 0$ ist nun $xy > 0$, und Division durch xy liefert $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x^2+y^2}{xy} \geq 2$. •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 4b)**, p. 96 (1.7.2010) :

Man zeige $2xy \leq (x+y)^2/2 \leq x^2+y^2$.

Beweis: Aus $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ folgt $2xy \leq x^2 + y^2$ und dann $4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$, also $2xy \leq (x+y)^2/2$. Ferner folgt aus $2xy \leq x^2 + y^2$ bereits $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \leq 2x^2 + 2y^2$, also $(x+y)^2/2 \leq x^2 + y^2$. •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 4c)**, p. 96 (1.7.2010) :

Man zeige $xy+xz+yz \leq x^2+y^2+z^2$.

Beweis: Wir verwenden den trivialen Teil $2xy \leq x^2+y^2$ von Aufg. 4.b) sowie die analogen Ungleichungen $2xz \leq x^2+z^2$ und $2yz \leq y^2+z^2$. Addition der 3 Ungleichungen liefert $2xy+2xz+2yz \leq 2x^2+2y^2+2z^2$ unnd damit nach Division durch 2 die Behauptung. •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 5**, p. 96 (1.7.2010) :

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y > 0$ gilt $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$.

Beweis: Wir verwenden $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}\, 1^k = (1+1)^n = 2^n$. Wiederum mit dem binomischen Lehrsatz und dann Aufg. 4a), die für x^k und y^k statt x und y ausgenutzt wird, folgt daraus

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{x^k}{y^k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{y^k}{x^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x^k}{y^k} + \frac{y^k}{x^k}\right) \geq 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n+1}.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 13**, p. 97 (1.7.2010) :

Es gilt $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq 1+x_1+\cdots+x_n$, falls alle $x_i \geq 0$ sind oder falls $0 \geq x_i \geq -1$ für alle i ist.

Beweis: Wir verwenden Induktion über $n \geq 1$. Für $n=0$ (und auch für $n=1$) ist die Behauptung richtig, da dann beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung gleich 1 (bzw. gleich $1+x_1$) sind.

Beim Schluss von n auf $n+1$ ist in beiden zu betrachtenden Fällen $1+x_{n+1} \geq 0$, und ferner sind alle Produkte $x_{n+1}x_1, \ldots, x_{n+1}x_n$ in beiden Fällen nichtnegativ. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhalten wir daher

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1+x_i) = (1+x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \geq (1+x_{n+1})(1+x_1+\cdots+x_n) =$$
$$= 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+x_{n+1}x_1+\cdots+x_{n+1}x_n \geq 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 4.D, **Aufg. 14a)**, p. 97 (1.7.2010) :

Bei $0 \leq x_i \leq 1$, $i=1,\ldots,n$, gilt $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \leq \dfrac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}$. Gilt $0<x_i$ für wenigstens ein i, so ist die Ungleichung echt.

Beweis: Wir verwenden Induktion über $n \geq 1$. Für $n=0$ ist die Behauptung richtig, da dann beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung gleich 1 sind. (Im Fall $n=1$ ist $1-x_1 \leq \dfrac{1}{1+x_1}$ wegen $1+x_1 \geq 0$ äquivalent zu $1-x_1^2 = (1-x_1)(1+x_1) \leq 1$. Dies ist aber richtig, da x_1^2 als Quadrat ≥ 0 ist. Bei $x_1>0$ ist die Ungleichung darüber hinaus echt.)

Beim Schluss von n auf $n+1$ können wir die Ungleichung für n voraussetzen, und haben sie dann für $n+1$ zu beweisen. (Ist eines der $x_i>0$ positiv, so können wir nach Umnummerieren der x_i noch annehmen, dass $x_{n+1}>0$ ist.) Wegen $x_{n+1} \leq 1$ ist $1-x_{n+1} \geq 0$, und es folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i) = (1-x_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) \leq (1-x_{n+1})\,\frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}\,.$$

Wir haben also noch
$$\frac{1-x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}$$
zu zeigen. Die ist aber äquivalent zu $(1-x_{n+1})\,(1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}) \leq 1+x_1+\cdots+x_n$, d.h. zu $1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}-x_{n+1}-x_{n+1}(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}) \leq 1+x_1+\cdots+x_n$. Letzteres ist aber richtig, da die beiden Terme x_{n+1} und $-x_{n+1}$ sich wegheben und da $x_{n+1}(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}) \geq 0$ ist nach Voraussetzung über die x_i. Bei $x_{n+1}>0$ ist $x_{n+1}(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}) \geq x_{n+1}^2 > 0$, und diese Ungleichungen sind echt. $\bullet$

Abschnitt 4.D, **Aufg. 20**, p. 97 (1.7.2010) :

Für alle $x_1,\ldots,x_n$ mit $x_1,\ldots,x_n > 0$ und $x_1\cdots x_n = 1$ gilt $x_1+\cdots+x_n \geq n$. Genau dann gilt dabei das Gleichheitszeichen, wenn $x_1,\ldots,x_n = 1$ ist.

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Für $n=0$ ist die Behauptung richtig, da dann beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung gleich 0 sind. (Im Fall $n=1$ sind beide Seiten 1.)

Induktionsschluss von n auf $n+1$: Es seien nun $x_1,\ldots,x_{n+1}$ positive reelle Zahlen mit $x_1\cdots x_n x_{n+1} = 1$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf $x_1,\ldots,x_{n-1},x_n x_{n+1}$ an, wo x_n die kleinste und x_{n+1} die größte der Zahlen $x_1,\ldots,x_{n+1}$ ist. Nach Wahl von x_n und x_{n+1} gilt dann $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$. Wären nämlich alle $x_1,\ldots,x_{n+1}$ größer (bzw. alle kleiner) als 1, so wäre auch ihr Produkt größer (bzw. kleiner) als 1 im Widerspruch zu $x_1\cdots x_n x_{n+1} = 1$. Es folgt $1-x_n \geq 0$ und $1-x_{n+1} \leq 0$. Ist dabei eines der $x_i \neq 1$, so muss bereits $x_n<1$ und dann notwendigerweise $x_{n+1}>1$ sein, d.h. $1-x_n>0$ und $1-x_{n+1}<0$. Wegen $x_1\cdots x_{n-1}(x_n x_{n+1}) = 1$ liefert die Induktionsvoraussetzung $x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n x_{n+1} \geq n$.

Um daraus die Induktionsbehauptung zu erhalten, haben wir nur noch zu zeigen: $x_n x_{n+1} \leq x_n+x_{n+1}-1$, d.h. $(1-x_n)(1-x_{n+1}) = 1-x_n-x_{n+1}+x_n x_{n+1} \leq 0$. Dies folgt aber aus der Wahl von x_n und x_{n+1}. Sind nicht alle $x_i=1$, so sind die letzten Ungleichungen wegen $1-x_n>0$ und $1-x_{n+1}<0$ sogar echt. $\bullet$

Abschnitt 4.D, **Aufg. 21**, p. 97 (1.7.2010) :

Für alle $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_1, \ldots, x_n > 0$ und $x_1 + \cdots + x_n = n$ gilt $x_1 \cdots x_n \leq 1$. Genau dann gilt dabei das Gleichheitszeichen, wenn $x_1, \ldots, x_n = 1$ ist.

Beweis: Wir verwenden Induktion über n. Für $n=0$ ist die Behauptung richtig, da dann beide Seiten der zu beweisenden Ungleichung gleich 1 sind. (Im Fall $n=1$ sind beide Seiten 1.)

Induktionsschluss von n auf $n+1$: Es seien nun $x_1, \ldots, x_{n+1}$ positive reelle Zahlen mit $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = n+1$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1} - 1$ an, wo x_n die kleinste und x_{n+1} die größte der Zahlen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ ist. Nach Wahl von x_n und x_{n+1} gilt dann $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$. Wären nämlich alle $x_1, \ldots, x_{n+1}$ größer (bzw. alle kleiner) als 1, so wäre ihre Summe größer (bzw. kleiner) als $n+1$ im Widerspruch zu $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = n+1$. Es folgt $1 - x_n \geq 0$ und $1 - x_{n+1} \leq 0$. Ist dabei eines der $x_i \neq 1$, so muss bereits $x_n < 1$ und dann notwendigerweise $x_{n+1} > 1$ sein, d.h. $1 - x_n > 0$ und $1 - x_{n+1} < 0$. Wegen $x_1 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1} - 1) = n$ liefert die Induktionsvoraussetzung $x_1 \cdots x_{n-1} \cdot (x_n + x_{n+1} - 1) \leq 1$.

Um daraus die Induktionsbehauptung zu erhalten, haben wir nur noch zu zeigen: $x_n x_{n+1} \leq x_n + x_{n+1} - 1$, d.h. $(1-x_n)(1-x_{n+1}) = 1 - x_n - x_{n+1} + x_n x_{n+1} \leq 0$. Dies folgt aber gerade aus der Wahl von x_n und x_{n+1}. Sind nicht alle $x_i = 1$, so sind dabei die letzten Ungleichungen wegen $1 - x_n > 0$ und $1 - x_{n+1} < 0$ sogar echt. •

Abschnitt 4.D, **Aufg. 22**, p. 97 (1.7.2010) :

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Für alle $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_1, \ldots, x_n > 0$ gilt

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 \cdots x_n \geq \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\right)^n .$$

Das Gleichheitszeichen gilt jeweils genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n$ ist. Ist $a := \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel, $h := \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$ das harmonische Mittel und im Fall reeller Zahlen $g := \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ das geometrische Mittel der $x_1, \ldots, x_n$, so gilt also über $\mathbb{R}$ die Ungleichung $a \geq g \geq h$.

1. Beweis: Es gilt $\dfrac{x_1}{a} + \cdots + \dfrac{x_n}{a} = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{a} = \dfrac{na}{a} = n$. Aus Aufg. 21 folgt daher $\dfrac{x_1}{a} \cdots \dfrac{x_n}{a} \leq 1$. Dies liefert $x_1 \cdots x_n \leq a^n$ (und dann über den reellen Zahlen $g \leq a$ durch Übergang zu den n-ten Wurzeln). Wendet man dies auf $1/x_1, \ldots, 1/x_n$ statt $x_1, \ldots, x_n$ an, so erhält man $\dfrac{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}{n} \geq \dfrac{1}{x_1} \cdots \dfrac{1}{x_n}$, also $x_1 \cdots x_n \geq \left(\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\right)^n$.

Abschnitt 4.D, Zusatzaufgabe, p. 99 (1.7.2010) :

Man zeige $\dfrac{x^2}{(x-1)^2} + \dfrac{y^2}{(y-1)^2} + \dfrac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$ für alle reellen Zahlen x, y, z, die ungleich 1 sind und für die $xyz = 1$ gilt. – Man zeige ferner, dass für unendlich viele Tripel rationaler Zahlen x, y, z, die ungleich 1 sind und für die $xyz = 1$ gilt, in dieser Ungleichung der Gleichheitsfall eintritt. (Dies ist eine Aufgabe der Internationalen Mathematikolympiade 2008.)

Beweis: Setzen wir $x' := 1/x$, $y' := 1/y$, $z' := 1/z$, so haben wir die Ungleichung

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad \text{für} \quad x, y, z \neq 1, \quad xyz = 1$$

zu betrachten, wobei wir statt x', y', z' wieder x, y, z geschrieben haben.

Wegen $(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2 > 0$ ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$(y-1)^2(z-1)^2 + (x-1)^2(z-1)^2 + (x-1)^2(y-1)^2 \geq (x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2 .$$

Ausmultiplizieren beider Seiten liefert, dass dies äquivalent ist zu

$$y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2-2(yz^2+y^2z+xy^2+x^2y+xz^2+x^2z)+4(xy+yz+zx)+2(x^2+y^2+z^2)-4(x+y+z)+3$$
$$\geq x^2y^2z^2-2(x^2yz^2+x^2y^2z+y^2xz^2)+4(xyz^2+x^2zy+xy^2z)-8xyz+y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2$$
$$-2(yz^2+y^2z+xy^2+x^2y+xz^2+x^2z)+4(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2-2(x+y+z)+1\,.$$

Benutzt man nun $xyz=1$ und fasst zusammen, so ist diese Ungleichung äquivalent zu

$$9+x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)+2(xy+yz+zx)\geq 0\,,\qquad \text{d.h. zu}\qquad \big(3-(x+y+z)\big)^2\geq 0\,.$$

Da Quadrate reeller Zahlen stets ≥ 0 sind, ist die Ungleichung damit bewiesen.

Genau dann gilt darin das Gleichheitszeichen, wenn $x+y+z=3$ ist. Wir haben also noch zu zeigen, dass es unendlich viele Tripel rationaler Zahlen $x,y,z\neq 1$ mit $x+y+z=3$ und $xyz=1$ gibt. Dazu wählen wir eine beliebige rationale Zahl r mit $r\neq\pm 1$ und setzen $z=4/(1-r^2)\in\mathbb{Q}$. Wegen $y=1/xz$ gilt nun $x+1/xz+z=3$, also $x^2+(z-3)x+1/z=0$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x=\frac{1}{2}(3-z)\pm\frac{1}{2}\sqrt{9-6z-z^2-(4/z)}=\frac{1}{2}(3-z)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(z-1)^2(z-4)/z}$. Verwenden wir noch $z-1=4/(1-r^2)-1=(3+r^2)/(1-r^2)$, $(z-4)/z=1-(4/z)=r^2$ und $3-z=-(3r^2+1)/(1-r^2)$, so erhalten wir als rationale Lösung

$$x=-\frac{3r^2+1}{2(1-r^2)}\pm\frac{(3+r^2)r}{2(1-r^2)}=-\frac{(1\mp r)^3}{2(1-r^2)}=-\frac{(1\mp r)^2}{2(1\pm r)}\,,\qquad y=\frac{1}{xz}=-\frac{1-r^2}{4}\cdot\frac{2(1\pm r)}{(1\mp r)^2}=-\frac{(1\pm r)^2}{2(1\mp r)}\,.$$

Dies liefert unendlich viele verschiedene Tripel rationaler Zahlen, für die die Gleichheit gilt. •

Abschnitt 4.E, Aufg. 6a), p. 103 (1.7.2010):

Eine Folge (x_n) positiver reeller Zahlen konvergiert genau dann gegen ∞, wenn die Folge $(1/x_n)$ der Kehrwerte eine Nullfolge ist.

Beweis: Sei zunächst $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, und sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Zu $S:=\dfrac{1}{\varepsilon}$ gibt es dann ein n_0 mit $x_n\geq S$, d.h. mit $0<\dfrac{1}{x_n}\leq\dfrac{1}{S}=\varepsilon$ und somit $\left|\dfrac{1}{x_n}-0\right|\leq\varepsilon$ für alle $n\geq n_0$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$.

Sei umgekehrt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$, und sei $S>0$ vorgegeben. Zu $\varepsilon:=\dfrac{1}{S}$ gibt es dann ein n_0 mit $0<\dfrac{1}{x_n}\leq\varepsilon=\dfrac{1}{S}$, d.h. mit $x_n\geq S$, für alle $n\geq n_0$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. •

Abschnitt 4.E, Aufg. 6b), p. 103 (1.7.2010):

Sei $\lim x_n=\infty$ und $\lim y_n=a\in\overline{K}-\{0\}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=\infty$, falls $a>0$, und $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=-\infty$, falls $a<0$

Beweis: Sei $S\geq 0$ vorgegeben. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$ gibt es zu $\varepsilon:=\frac{1}{2}a$ ein n_0 mit $|y_n-a|\leq\varepsilon$, also bei $a>0$ mit $0<a/2\leq y_n$ und bei $a<0$ mit $0>a/2\geq y_n$, jeweils für alle $n\geq n_0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ gibt es ein n_1 mit $x_n\geq 2S/|a|$ für alle $n\geq n_1$. Für alle $n\geq \operatorname{Max}(n_0,n_1)$ gilt dann $x_ny_n\geq(a/2)\cdot(2S/|a|)=S$ bei $a>0$ und $x_ny_n\leq(a/2)\cdot(2S/|a|)=-S$ bei $a>0$. •

Abschnitt 4.F, Variante zu **Aufg. 1**, p. 114 (1.7.2010):

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\frac{3n^3-2n+4}{4n^3+n^2+2}\,,\qquad \frac{3^n+4^n}{5^n}\,,\qquad \frac{2^n-6n}{5^n}\,,\qquad (-1)^n\,\frac{2n^2+1}{n^2+2}\,,\qquad \frac{1}{n+2}+(-1)^n\,.$$

Lösung: Mit den Grenzwertrechenregeln ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n+4}{4n^3+n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2(\frac{1}{n})^2+4(\frac{1}{n})^3}{4+\frac{1}{n}+2(\frac{1}{n})^3}=\frac{3-2\big(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big)^2+4\big(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big)^3}{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\big(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big)^3}=\frac{3}{4}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{3}{5}\Big)^n+\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{4}{5}\Big)^n=0+0=0\ \text{ wegen }\ \Big|\frac{3}{5}\Big|<1\ \text{ und }\ \Big|\frac{4}{5}\Big|<1\,.$$

Wegen $|\frac{2}{5}|<1$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$, und $n^2\le 5^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ (Induktion über n), also $0\le\frac{n}{5^n}\le\frac{1}{n}$, ist nach dem Einschließungskriterium $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5^n}=0$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-6n}{5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-6\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5^n}=0$.

Bei der vierten Folge haben die Teilfolgen für gerade Indizes $n=2k$ bzw. für ungerade Indizes $n=2k+1$ die Grenzwerte $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{2k}\dfrac{8k^2+1}{4k^2+2}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{8+\frac{1}{k^2}}{4+\frac{2}{k^2}}=\dfrac{8}{4}=2$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty}(-1)^{2k+1}\dfrac{8k^2+8k+3}{4k^2+4k+3}=-\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{8+\frac{8}{k}+\frac{3}{k^2}}{4+\frac{4}{k}+\frac{3}{k^2}}=-\dfrac{8}{4}=-2$. Die Folge hat also nur die beiden Häufungspunkte 2 und -2. Da diese verschieden sind, ist die Folge nicht konvergent.

Die letzte Folge konvergiert nicht, da ihre Teilfolgen für gerade bzw. ungerade Indizes verschiedene Grenzwerte haben. Für gerade n ist $(-1)^n=1$ und folglich $\frac{1}{n+2}+(-1)^n=\frac{1}{n+2}+1$, d.h. die zugehörige Teilfolge hat den Grenzwert 1. Für ungerade n ist $(-1)^n=-1$ und folglich $\frac{1}{n+2}+(-1)^n=\frac{1}{n+2}-1$, d.h. die zugehörige Teilfolge hat den Grenzwert -1. •

Abschnitt 4.F, Zusatz zu **Aufg. 4**, p. 114 (1.7.2010):

Sei $a_n\ge 0$, $n\in\mathbb{N}$. Man zeige direkt: Aus $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{a}$.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $|a_n-a|\le\varepsilon\sqrt{a}$ bei $a>0$ bzw. mit $|a_n-a|=a_n\le\varepsilon^2$ bei $a=0$ jeweils für alle $n\ge n_0$. Bei $a>0$ folgt die Behauptung aus $|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|=\left|\dfrac{a_n-a}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}\right|\le\dfrac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}\le\varepsilon$ und bei $a=0$ aus $|\sqrt{a_n}-\sqrt{0}|=\sqrt{a_n}\le\sqrt{\varepsilon^2}=\varepsilon$ für alle $n\ge n_0$. •

Abschnitt 4.F, Teil von **Aufg. 4**, p. 114 (1.7.2010):

Man berechne die folgenden Grenzwerte: $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right)$, $a\in\mathbb{R}$, $n\ge a$; $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}$.

Lösung: Bei der ersten Folge erweitern wir mit $\sqrt{n+a}+\sqrt{n}$, um die dritte binomische Formel anwenden zu können, und kürzen dann durch $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{(n+a)-n}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+(a/n)}+1}=\frac{a}{2}.$$

Bei der zweiten Folge erweitern wir mit $\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$ und kürzen ebenfalls durch $\sqrt{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-\left(n-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{2}{1+1}=1.$$ •

Abschnitt 4.F, Aufg. 5, p. 114 (1.7.2010):

b) Sei $a>0$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

1. Beweis: Sei zunächst $a\ge 1$. Dann setzen wir $\sqrt[n]{a}=1+h_n$ mit $h_n\ge 0$. Dann ist $a=(1+h_n)^n\ge 1+nh_n$, also $0\le h_n\le(a-1)/n$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=0$ nach dem Einschließungskriterium. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n)=1$. Ist jedoch $0<a<1$, so ist $(1/a)>1$, also $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}=1$ und somit auch $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\Big/\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}=1$ nach den Grenzwertrechenregeln. •

2. Beweis: Wie im ersten Beweis genügt es, den Fall $a\ge 1$ zu betrachten. Dann ist auch $\sqrt[n]{a}\ge 1$, d.h. die Folge ist nach unten durch 1 beschränkt. Ferner ist dann $a\le a\sqrt[n]{a}$, also $\sqrt[n+1]{a}\le\sqrt[n+1]{a\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{a}$, d.h. die Folge ist auch monoton fallend. Daher ist sie konvergent, ihre Teilfolge $\left(\sqrt[2n]{a}\right)$ hat denselben Limes x wie die Folge selbst, und somit gilt: $x=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2n]{a}\right)^2=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{a}\right)^2=x^2$, woraus $x=1$ folgt, da wegen $\sqrt[n]{a}\ge 1$ der Limes 0 nicht möglich ist. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 6, p. 114 (1.7.2010) :

Man zeige $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

1. Beweis: Sei $\sqrt[n]{n} = 1+h_n$ mit $h_n > 0$. Dann ist $n = (1+h_n)^n \geq 1+nh_n+\frac{1}{2}n(n-1)h_n^2 \geq \frac{1}{2}n(n-1)h_n^2$, also $0 < h_n^2 \leq 2/(n-1)$ und somit $\lim_{n\to\infty} h_n^2 = 0$, folglich auch $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$. Daraus ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. •

2. Beweis: Für $n \geq 3$ ergibt sich aus Beispiel 4.F.10 sofort $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{5}\right)^6 < 3 \leq n$ und somit $(n+1)^n \leq n^{n+1}$, woraus durch Übergang zur $n(n+1)$-ten Wurzel $\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n}$ folgt. Da die Folge also ab $n = 3$ monoton fallend und offenbar nach unten durch 1 bschränkt ist, konvergiert sie gegen einen Grenzwert $x \geq 1$. Dafür gilt unter Verwendung von Aufg. 5:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{n}\right) \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[2n]{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sqrt[n]{n}}\right) \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sqrt[n]{2}}\right) = \sqrt{x}\,\sqrt{1} = \sqrt{x},$$

was $x^2 = x$ und schließlich $x = 1$ ergibt. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 12a), p. 115 (1.7.2010) :

Man zeige $\lim_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$,

Beweis: Die Bernoullische Ungleichung liefert $1 \geq \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\dfrac{n}{n^2} = 1-\dfrac{1}{n}$ (wegen $-\frac{1}{n} \geq -1$ für $n \geq 1$) , woraus mit dem Einschließungskriterium die Konvergenz der Folge gegen 1 folgt. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 14a), p. 116 (1.7.2010) :

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_0 = 0$, $x_{n+1} := x_n^2 + \frac{1}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass der Grenzwert der Folge (x_n) existiert und berechne ihn.

Lösung: Wenn die Folge (x_n) einen Grenzwert x besitzt, so liefern die Grenzwertrechenregeln $x = \lim x_n = \lim x_{n+1} = \lim (x_n^2+\frac{1}{4}) = (\lim x_n)^2+\frac{1}{4} = x^2+\frac{1}{4}$, d.h. $x^2-x+\frac{1}{4} = 0$, und wir erhalten $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Wir vermuten, dass (x_n) monoton wachsend gegen dieses x konvergiert und zeigen als nächstes durch Induktion über n, dass $x_n \leq \frac{1}{2}$ ist. Für $n=0$ ist nach Definition $x_0 = 0 \leq \frac{1}{2}$, und beim Schluss von n auf $n+1$ erhält man mit der Induktionsvoraussetzung $x_n \leq \frac{1}{2}$ in der Tat $x_{n+1} = x_n^2+\frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Nun können wir zeigen, dass die Folge (x_n) monoton wachsend ist: Wegen $x_{n+1}-x_n = x_n^2+\frac{1}{4}-x_n = (x_n-\frac{1}{2})^2 \geq 0$ ist nämlich $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n.

Insgesamt ist (x_n) als (nach oben) beschränkte und monoton wachsende Folge konvergent und hat somit den Grenzwert $x = \frac{1}{2}$. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 14b), p. 116 (1.7.2010) :

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_0 := 0$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}(a+x_n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq a \leq 1$. Man zeige, dass der Grenzwert der Folge (x_n) existiert und berechne ihn.

Lösung: Wenn die Folge (x_n) einen Grenzwert x besitzt, so liefern die Grenzwertrechenregeln $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a+x_n^2) = \frac{1}{2}\left(a+(\lim_{n\to\infty} x_n)^2\right) = \frac{1}{2}(a+x^2)$, d.h. $x^2-2x+a = 0$, und wir erhalten $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$. Wir werden zeigen, dass die Folge (x_n) nach oben durch $1-\sqrt{1-a} \leq 1+\sqrt{1-a}$ beschränkt und ferner monoton wachsend ist. Die Folge ist dann konvergent und hat daher den Grenzwert $x = 1-\sqrt{1-a}$.

Wir zeigen durch Induktion über n, dass $x_n \leq 1-\sqrt{1-a}$ ist. Für $n = 0$ ist nach Definition in der Tat $x_0 = 0 \leq 1-\sqrt{1-a}$, und beim Schluss von n auf $n+1$ erhält man mit der Induktionsvoraussetzung $x_n \leq 1-\sqrt{1-a}$ sofort $x_{n+1} = \frac{1}{2}(a+x_n^2) \leq \frac{1}{2}\left(a+\left(1-\sqrt{1-a}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(2-2\sqrt{1-a}\right) = 1-\sqrt{1-a}$.
Nun können wir zeigen, dass die Folge (x_n) monoton wachsend ist: Wegen $x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2}(a+x_n^2)-x_n = \frac{1}{2}(a+x_n^2-2x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n-\left(1-\sqrt{1-a}\right)\right)\left(x_n-\left(1+\sqrt{1-a}\right)\right) \geq 0$ (da beide Faktoren nach dem bereits Gezeigten negativ sind) ist nämlich $x_{n+1} \geq x_n$ für alle n. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 14d), p. 116 (1.7.2010) :

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_0 := 2$ und $x_{n+1} := 2 - \dfrac{1}{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass der Grenzwert der Folge (x_n) existiert und berechne ihn.

Lösung: Wenn die Folge (x_n) den Grenzwert x besitzt, so liefern die Grenzwertrechenregeln $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \big(2 - \dfrac{1}{x_n}\big) = 2 - \dfrac{1}{x}$. Dies ergibt die quadratische Gleichung $x^2 = 2x-1$, d.h. $x^2-2x+1 = 0$ für x mit der einzigen Lösung $x = 1$.

Als nächstes zeigen wir durch Induktion über n, dass $x_n \geq 1$ ist. Für $n = 0$ ist nach Definition in der Tat $x_0 = 2 \geq 1$, und beim Schluss von n auf $n+1$ erhält man mit der Induktionsvoraussetzung $x_n \geq 1$ der Reihe nach $\dfrac{1}{x_n} \leq 1$, $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n} \geq 2-1 = 1$.

Nun können wir zeigen, dass die Folge (x_n) monoton fallend ist: Wegen $x_n - x_{n+1} = x_n - \big(2 - \dfrac{1}{x_n}\big) = \dfrac{x_n^2 - 2x_n + 1}{x_n} = \dfrac{(x_n-1)^2}{x_n} \geq 0$ ist nämlich $x_n \geq x_{n+1}$ für alle n. Insgesamt ist (x_n) als (nach unten) beschränkte und monoton fallende Folge konvergent. Somit hat die Folge (x_n) den Grenzwert 1. •

Abschnitt 4.F, Variante zu **Aufg. 14d)**, p. 116 (1.7.2010) :

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch $x_0 := 4$ und $x_{n+1} := 4 - \dfrac{3}{x_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, dass der Grenzwert der Folge (x_n) existiert und berechne ihn.

Lösung: Wenn die Folge (x_n) einen Grenzwert x besitzt, so liefern die Grenzwertrechenregeln $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{\lim x_n} = 4 - \dfrac{3}{x}$, d.h. $x^2 - 4x + 3 = 0$, und wir erhalten $x = 2 \pm \sqrt{4-3}$, also $x = 3$ oder $x = 1$.

Als nächstes zeigen wir durch Induktion über n, dass $x_n \geq 3$ ist. Für $n = 0$ ist nach Definition in der Tat $a_0 = 4 \geq 3$, und beim Schluss von n auf $n+1$ erhält man mit der Induktionsvoraussetzung $x_n \geq 3$ der Reihe nach $\dfrac{3}{x_n} \leq \dfrac{3}{3} = 1$, $x_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{x_n} \geq 4-1 = 3$.

Nun können wir zeigen, dass die Folge (x_n) monoton fallend ist: Wegen $x_n - x_{n+1} = x_n - \big(4 - \dfrac{3}{x_n}\big) = \dfrac{x_n^2 - 4x_n + 3}{x_n} = \dfrac{(x_n-1)(x_n-3)}{x_n} \geq 0$ ist nämlich $x_n \geq x_{n+1}$ für alle n. Insgesamt ist (x_n) als (nach unten) beschränkte und monoton fallende Folge konvergent. Somit hat die Folge (x_n) den Grenzwert $x = 3$. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 17, p. 116 (1.7.2010) :

Seien $a, b > 0$. Die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_0 = a$, $b_0 = b$ und

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \text{harmonisches Mittel von } a_n\,, b_n\,,$$
$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = \text{arithmetisches Mittel von } a_n\,, b_n\,.$$

bilden ab $n = 1$ eine Intervallschachtelung für das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ von a und b.

Beweis: Offenbar sind alle a_n, b_n positiv. Für alle $n \geq 0$ gilt ferner $a_{n+1} \leq b_{n+1}$. Das ist ein Spezialfall von 4.E, Aufg. 22, ergibt sich aber auch leicht direkt: Diese Ungleichung, d.h. $\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \leq \dfrac{a_n+b_n}{2}$ ist äquivalent zu $4a_nb_n \leq (a_n+b_n)^2 = a_n^2 + 2a_nb + b_n^2$, folgt also aus $0 \leq (a_n-b_n)^2 = a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2$.

Ferner gilt $a_n \leq a_{n+1}$ für $n \geq 1$. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $a_n(a_n+b_n) = a_n^2 + a_nb_n \leq 2a_nb_n$, d.h. zu $a_n(a_n-b_n) \leq 0$, was aus der für $n \geq 1$ bereits bewiesenen Ungleichung $a_n \leq b_n$ folgt.

Außerdem gilt $b_{n+1} \leq b_n$ für $n \geq 1$. Dies ist äquivalent zu $a_n + b_n \leq 2b_n$, d.h. ebenfalls zu $a_n \leq b_n$.

Aus dem Bewiesenen folgt, dass die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend bzw. fallend und beschränkt (jeweils durch jedes Glied der anderen Folge) sind. Es existieren also $x := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq y := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Aus $b_{n+1}-a_{n+1} \le b_{n+1}-a_n = (a_n+b_n)/2-a_n = (b_n-a_n)/2$ erhält man dann durch Übergang zu den Limiten $0 \le y-x \le (y-x)/2$, d.h. $y=x$.

Schließlich ist $a_{n+1}b_{n+1} = \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}\cdot\dfrac{a_n+b_n}{2} = a_nb_n = \cdots = a_0b_0 = ab$. Daraus folgt mit den Grenzwertrechenregeln $x^2 = xy = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty} ab = ab$, d.h. $x=y=\sqrt{ab}$.

Wegen $b_{n+1}-a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - \dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = \dfrac{(b_n-a_n)^2}{2(a_n+b_n)} \le \dfrac{(b_n-a_n)^2}{4a_1}$ hat man sogar quadratische Konvergenz der Intervallschachtelung. •

Abschnitt 4.F, Aufg. 18, p. 116 (1.7.2010):

Seien $a, b > 0$. Die rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_0=a$, $b_0=b$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n} = \text{ geometrisches Mittel von } a_n, b_n,$$
$$b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = \text{ arithmetisches Mittel von } a_n, b_n$$

bilden ab $n=1$ eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, $n\in\mathbb{N}^*$, für das so genannte arithmetisch-geometrische Mittel $M(a,b)$ von a und b, vgl. hierzu auch die Bemerkungen vor Satz 17.C.9.

Beweis: Offenbar sind alle a_n, b_n positiv. Für alle $n\ge 0$ gilt ferner $a_{n+1} \le b_{n+1}$. Das ist ein Spezialfall von 4.E, Aufg. 22, ergibt sich aber auch leicht direkt: Diese Ungleichung, d.h. $\sqrt{a_nb_n} \le \dfrac{a_n+b_n}{2}$, ist äquivalent zu $4a_nb_n \le (a_n+b_n)^2 = a_n^2+2a_nb+b_n^2$, folgt also aus $0 \le (a_n-b_n)^2 = a_n^2-2a_nb_n+b_n^2$.
Ferner gilt $a_n \le a_{n+1}$ für $n\ge 1$. Diese Ungleichung ist äquivalent zu $a_n \le \sqrt{a_nb_n}$, d.h. zu $\sqrt{a_n} \le \sqrt{b_n}$, was aus der für $n\ge 1$ bereits bewiesenen Ungleichung $a_n \le b_n$ folgt.
Außerdem gilt $b_{n+1} \le b_n$ für $n\ge 1$. Dies ist äquivalent zu $a_n+b_n \le 2b_n$, d.h. ebenfalls zu $a_n \le b_n$.
Aus dem Bewiesenen folgt, dass die Folgen $(a_n)_{n\ge 1}$ und $(b_n)_{n\ge 1}$ monoton wachsend bzw. fallend und beschränkt (jeweils durch jedes Glied der anderen Folge) sind. Es existieren also $x := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \le y := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Aus $b_{n+1}-a_{n+1} \le b_{n+1}-a_n = (a_n+b_n)/2-a_n = (b_n-a_n)/2$ erhält man dann durch Übergang zu den Limiten $0 \le y-x \le (y-x)/2$, d.h. $y=x$.

Wegen $b_{n+1}-a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_nb_n} = \dfrac{\big(\sqrt{b_n}-\sqrt{a_n}\big)^2}{2} = \dfrac{(b_n-a_n)^2}{2\big(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}\big)^2} = \dfrac{(b_n-a_n)^2}{2\big(a_n+b_n+2\sqrt{a_nb_n}\big)} \le \dfrac{(b_n-a_n)^2}{8a_1}$ hat man sogar quadratische Konvergenz der Intervallschachtelung. •

Abschnitt 4.F, Zusatzaufgabe, p. 117 (1.7.2010):

Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ seien definiert durch $a_n := \dfrac{4^{2n}}{(n+1)\binom{2n}{n}^2}$ und $b_n := \dfrac{4^{2n}}{n\binom{2n}{n}^2}$.

Man zeige, dass $[a_n, b_n]$, $n\in\mathbb{N}^*$, eine Intervallschachtelung für eine Zahl x mit $2\le x\le 4$ ist.
(Nach Beispiel 16.B.5 (4) ist $x=\pi$, vgl. auch das Ende von Beispiel 12.A.13.)

Beweis: Es gilt $a_1 = \dfrac{4^2}{2\cdot\binom{2}{1}^2} = 2$, $b_1 = \dfrac{4^2}{1\cdot\binom{2}{1}^2} = 4$ sowie offenbar $a_n \le b_n$ für alle n. Mit

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\cdots(n+2)}{(n+1)!} = \frac{2\,(2n+1)(2n)\cdots(n+2)(n+1)}{(n+1)\cdot n!} = \frac{2\,(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

ergibt sich:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{4^{2n}}{(n+1)\binom{2n}{n}^2} - \frac{4^{2n+2}}{(n+2)\binom{2n+2}{n+1}^2} = \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{4^2}{\dfrac{(n+2)\,2^2(2n+1)^2}{(n+1)^2}}\right)$$

$$= \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3}{(n+1)(n+2)(2n+1)^2} = \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{(4n^3+12n^2+9n+2) - (4n^3+12n^2+12n+4)}{(n+1)(n+2)(2n+1)^2}$$

$$= \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{-3n-2}{(n+1)(n+2)(2n+1)^2} < 0\,,$$

$$b_n - b_{n+1} = \frac{4^{2n}}{n\binom{2n}{n}^2} - \frac{4^{2n+2}}{(n+1)\binom{2n+2}{n+1}^2} = \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{4^2}{\frac{2^2(2n+1)^2}{n+1}}\right) = \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2}\left(\frac{1}{n} - \frac{4n+4}{(2n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{4n^2+4n+1 - (4n^2+4n)}{n\,(2n+1)^2} = \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{1}{n\,(2n+1)^2} > 0\,,$$

d.h. die Folge (a_n) ist monoton wachsend und die Folge (b_n) ist monoton fallend. Schließlich ist $b_n - a_n = \frac{4^{2n}}{n\binom{2n}{n}^2} - \frac{4^{2n}}{(n+1)\binom{2n}{n}^2} = \frac{4^{2n}}{n(n+1)\binom{2n}{n}^2} = \frac{a_n}{n}$ wegen $a_n < b_n \le 4$ eine Nullfolge. •

Abschnitt 4.G, Aufg. 11, p. 124 (1.7.2010) :

Jede (unendliche) Folge reeller Zahlen enthält eine (unendliche) monotone Teilfolge.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Ist die Folge beschränkt, so besitzt sie nach dem Satz von Weierstraß-Bolzano eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit einem Grenzwert a. Sind unendlich viele der a_{n_k} kleiner als a, so bilden diese eine Teilfolge von (a_{n_k}) , die wir mit (b_j) bezeichnen. Es gilt dann $b_j < a$ für alle j und $\lim_{j\to\infty} b_j = a$. Zu b_0 gibt es deswegen ein b_{n_1}, $n_1 > n_0 := 0$, mit $b_{n_0} < b_{n_1} < a$, dazu ein b_{n_2}, $n_2 > n_1$, mit $b_{n_1} < b_{n_2} < a$, usw. Auf diese Weise konstruiert man sukzessive eine (streng) monoton wachsende Teilfolge der Folge (b_j) , die aber auch eine Teilfolge der Ausgangsfolge (a_n)ist. Sind jedoch unendlich viele der a_{n_k} größer als a, so bilden diese eine Teilfolge von (a_{n_k}) , die wir mit (c_j) bezeichnen. Es gilt dann $c_j > a$ für alle j und $\lim_{j\to\infty} c_j = a$. Zu c_0 gibt es deswegen ein c_{n_1}, $n_1 > n_0 := 0$, mit $c_{n_0} > c_{n_1} > a$, dazu ein c_{n_2}, $n_2 > n_1$, mit $c_{n_1} > c_{n_2} > a$, usw. Auf diese Weise konstruiert man sukzessive eine monoton fallende Teilfolge der Folge (c_j) , die aber auch eine Teilfolge der Ausgangsfolge (a_n) ist. Sind weder unendlich viele der a_{n_k} größer noch unendlich viele davon kleiner als a, so sind unendlich viele davon gleich a und bilden eine konstante und somit ebenfalls monotone Teilfolge der Ausgangsfolge (a_n) .

Ist schließlich die Folge (a_n) nicht beschränkt, so gibt es zu jeder noch so großen Zahl S ein a_n (und dann auch unendlich viele a_n) mit $|a_n| \ge S$. Wir wählen nun der Reihe nach zu a_0 ein $n_1 > n_0 := 0$, mit $|a_{n_1}| \ge |a_0|$, zu a_{n_1} ein $n_2 > n_1$, mit $|a_{n_2}| \ge |a_{n_1}|$, usw. Auf diese Weise konstruiert man sukzessive eine monoton wachsende Teilfolge $\big(|a_{n_k}|\big)$ der Folge $\big(|a_n|\big)$. Sind unendlich viele dieser a_{n_k} positiv, so bilden diese eine monoton wachsende Teilfolge der Folge (a_n) (die gegen ∞ wächst) . Andernfalls sind unendlich viele der a_{n_k} negativ und bilden eine monoton gegen $-\infty$ fallende Teilfolge der Folge (a_n) . •

5 Die komplexen Zahlen

Abschnitt 5.A und **5.C**, Variante zu **Aufg. 1**, p. 132 bzw. 142 (1.7.2010):

Man bestimme Real- und Imaginärteil, den Betrag und die konjugiert-komplexe Zahl sowie eine Darstellung in Polarkoordinaten von

$$z_1 := \frac{-2+3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\,, \qquad z_2 := \frac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \frac{1}{1-\mathrm{i}}\,, \qquad z_3 := \frac{3+4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} + \frac{1}{\mathrm{i}}\,, \qquad z_4 := (1+\mathrm{i})^n,\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

Lösung: Durch Erweitern mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners erhalten wir wegen $\mathrm{i}^2=-1$

$$z_1 := \frac{-2+3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} = \frac{(-2+3\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})} = \frac{-6-4\mathrm{i}+9\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2}{9-4\mathrm{i}^2} = \frac{-12+5\mathrm{i}}{13} = -\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\,\mathrm{i}\,.$$

z_1 hat also den Realteil $-\frac{12}{13}$, den Imaginärteil $\frac{5}{13}$, den Betrag $|z_1| = \sqrt{(-\frac{12}{13})^2+(\frac{5}{13})^2} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$ und $\overline{z}_1 = -\frac{12}{13} - \frac{5}{13}\mathrm{i}$ als zugehörige konjugiert-komplexe Zahl. Da z_1 im zweiten Quadranten liegt, berechnet sich das Argument φ von z_1 aus $\tan\alpha = \frac{5}{13}\Big/-\frac{12}{13} = -\frac{5}{12}$, also $\varphi \approx -0{,}3948$, zu $\operatorname{Arg} z = \varphi = \pi+\alpha \approx 2{,}7468$. Die Darstellung von z_1 in Polarkoordinaten ist also $z_1 = |z_1|(\cos\varphi+\sin\varphi) \approx \cos 2{,}7468 + \mathrm{i}\sin 2{,}7468$.

Erweitern mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners liefert:

$$z_2 := \frac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} + \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{(2-\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})} + \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2-5\mathrm{i}-2}{5} + \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

z_2 hat also den Realteil $\frac{1}{2}$, den Imaginärteil $-\frac{1}{2}$, den Betrag $|z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ als konjugiert-komplexe Zahl. Da z_2 im vierten Quadranten liegt, berechnet sich schließlich das Argument von z_2 aus $\tan\varphi = -\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{2} = -1$, also $\varphi = -\pi/4$, zu $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.)

Erweitern mit dem Konjugiert-Komplexen des Nenners liefert:

$$z_3 := \frac{3+4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} + \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{(3+4\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})} + \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})} = \frac{12+16\mathrm{i}-9\mathrm{i}+12}{25} + \frac{-\mathrm{i}}{1} = \frac{24+7\mathrm{i}-25\mathrm{i}}{25} = \frac{24}{25}-\frac{18}{25}\,\mathrm{i}\,.$$

z_3 hat also den Realteil $\frac{24}{25}$, den Imaginärteil $-\frac{18}{25}$, den Betrag $|z_3| = \sqrt{\left(\frac{24}{25}\right)^2+\left(-\frac{18}{25}\right)^2} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$ und $\frac{24}{25}+\frac{18}{25}\mathrm{i}$ als konjugiert-komplexe Zahl. Da z_3 im vierten Quadranten liegt, berechnet sich schließlich das Argument von z_3 aus $\tan\varphi = -\frac{18}{25}\Big/\frac{24}{25} = -\frac{3}{4} \approx \tan(-0{,}6435)$ zu $2\pi - 0{,}6435 = 5{,}6397$.

Da $1+\mathrm{i}$ im ersten Quadranten liegt, mit der positiven reellen Achse den Winkel $\frac{\pi}{4}$ einschließt und den Betrag $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ hat, ist die Polarkoordinatendarstellung $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Mit den Moivreschen Formeln ergibt sich für die n-te Potenz die Polarkoordinatendarstellung $z_4 = (1+\mathrm{i})^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Daher hat z_4 den Betrag $2^{n/2}$, den Realteil $2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$ und den Imaginärteil $2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$ sowie $(1-\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)$ als konjugiert-komplexe Zahl. •

Abschnitt 5.A und **5.C**, Zusatzaufgabe zu **Aufg. 1**, p. 132 bzw. 142 (1.7.2010):

Verwenden Sie das Ergebnis $(1+\mathrm{i})^{2n} = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$ der vorangehenden Aufgabe, um die Summen $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n}{2j}$ und $\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1}$ zu berechnen.

Lösung: Der binomische Lehrsatz liefert $(1+\mathrm{i})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k}\,\mathrm{i}^k$. Trennt man die Summanden für gerades $k=2j$ und ungerades $k=2j+1$, so bekommt man

$$(1+\mathrm{i})^{2n} = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{i}^{2j}\binom{2n}{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{i}^{2j+1}\binom{2n}{2j+1} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n}{2j} + \mathrm{i}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1}\,.$$

Vergleich der Realteile liefert

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n}{2j} = 2^n\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{bei ungeradem } n\,,\\ (-1)^{n/2}\,2^n & \text{bei geradem } n\,,\end{cases}$$

und Vergleich der Imaginärteile

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{2n}{2j+1} = 2^n\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{bei geradem } n\,,\\ (-1)^{(n-1)/2}\,2^n & \text{bei ungeradem } n\,.\end{cases}$$ •

Abschnitt 5.A, Teil von **Aufg. 2c)**, p. 132 (1.7.2010):
Man löse die Gleichung $z^2-(2+2\mathrm{i})\,z+(3-2\mathrm{i})=0$.

Lösung: Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert $z_{1,2} = 1+\mathrm{i}\pm\sqrt{(1+\mathrm{i})^2-(3-2\mathrm{i})} = 1+\mathrm{i}\pm\sqrt{-3+4\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}\pm(1+2\mathrm{i}) = 3+3\mathrm{i}$ bzw. $-\mathrm{i}$. Dabei haben wir die auftretende Wurzel durch den Ansatz $(a+b\mathrm{i})^2 = (a^2-b^2)+\mathrm{i}\,2ab = -3+4\mathrm{i}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ berechnet. Er liefert zunächst $a^2-b^2=-3$, $2ab=4$, also $b=2/a$, und somit $a^4+3a^2-4=0$. Wir erhalten dafür die Lösung $a^2=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4} = -\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2} = 1$ bzw. -4. Da a^2 als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann, muss $a^2=1$, d.h. $a=\pm1$, und somit $b=\pm2$ sein. Es folgt $\sqrt{-3+4\mathrm{i}}=\pm(1+2\mathrm{i})$. •

Abschnitt 5.A, Variante zu **Aufg. 2c)**, p. 132 (1.7.2010):
Man löse die Gleichung $z^2-3z+3-\mathrm{i}=0$.

Lösung: Die gesuchten Lösungen sind $z_{1,2} = \frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-3+\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\big(3\pm\sqrt{-3+4\mathrm{i}}\,\big) = \frac{1}{2}\big(3\pm(1+2\mathrm{i})\big) = 2+\mathrm{i}$ bzw. $1-\mathrm{i}$. Dabei haben wir die auftretende Wurzel durch den Ansatz $-3+4\mathrm{i}=(a+\mathrm{i}b)^2=(a^2-b^2)+\mathrm{i}\,2ab$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ berechnet. Er liefert zunächst $2ab=4$, d.h. $b=2/a$, und dann $-3=a^2-b^2=a^2-4/a^2$, d.h. $a^4+3a^2-4=0$. Wir erhalten dafür die Lösung $a^2=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+4}=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}=1$ bzw. -4. Da a^2 als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann, muss $a^2=1$, d.h. $a=\pm1$, und somit $b=\pm2$ sein. Es folgt $\sqrt{-3+4\mathrm{i}}=\pm(1+2\mathrm{i})$. •

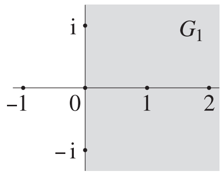
Abschnitt 5.A, Variante zu **Aufg. 2c)**, p. 132 (1.7.2010):
Man löse die Gleichung $z^2+(-3+\mathrm{i})\,z+(4-3\mathrm{i})=0$.

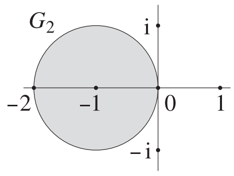
Lösung: Die Lösungen $z_{1,2}$ ergeben sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Es ist $z_{1,2} = -\frac{-3+\mathrm{i}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(-3+\mathrm{i})^2-4(4-3\mathrm{i})} = \frac{3}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-8+6\mathrm{i}} = \frac{3}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\pm\frac{1}{2}(1+3\mathrm{i}) = 2+\mathrm{i}$ bzw. $1-2\mathrm{i}$. Dabei bestimmt man die Quadratwurzel am einfachsten mit dem Ansatz $(a+b\mathrm{i})^2=-8+6\mathrm{i}$ $(a,b\in\mathbb{R})$, d.h. $a^2-b^2=-8$, $2ab=6$, also $b=3/a$, und somit $a^2-9/a^2=-8$, d.h. $a^4+8a^2-9=0$, $a^2=-4\pm\sqrt{16+9}$, und somit $a^2=1$ ($a^2=-9$ ist wegen $a\in\mathbb{R}$ nicht möglich), $a=\pm1$, und folglich $b=3/a=\pm3$. •

Abschnitt 5.A, Variante zu **Aufg. 5a)**, ferner **Aufg. 5b)**, p. 132 (1.7.2010):
Man skizziere die Punktmengen $\{z\in\mathbb{C}\mid |z+1|>|z-1|\}$ und $\{z\in\mathbb{C}\mid z\overline{z}+z+\overline{z}<0\}$ in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$.

Lösung: Bei der ersten Menge handelt es sich um die Menge derjenigen Punkte von $\mathbb{C}$, die von -1 einen größeren Abstand haben als von 1. Dies ist gerade die rechte Halbebene, die aus allen Punkten mit positivem Realteil besteht.

Setzen wir $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so liefert quadratische Ergänzung $z\overline{z} + z + \overline{z} = x^2 + y^2 + 2x = (x+1)^2 + y^2 - 1 = |(x+iy) - (-1)|^2 - 1 = |z - (-1)|^2 - 1$. Genau dann gilt also $z\overline{z} + z + \overline{z} < 0$, wenn $|z - (-1)|^2 < 1$, und somit $|z - (-1)| < 1$ ist, d.h. wenn z vom Punkt -1 den Abstand < 1 hat. Die zweite Menge ist also der Kreis um -1 mit dem Radius 1 (ohne die Kreislinie).





Abschnitt 5.A, **Aufg. 10**, p. 133 (1.1.2011):

Sind $z_1, \ldots, z_n$ von 0 verschiedene komplexe Zahlen mit $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$, so ist $z_i/z_j \in \mathbb{R}_+^\times$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Beweis: Sei $z := z_1 + \cdots + z_n$. Nach Voraussetzung ist $|z| = |z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n| \neq 0$, also $z \neq 0$. Wir setzen $w_i := z_i/z$ für $i = 1, \ldots, n$ und zeigen dafür $w_i = |w_i|$. Dann folgt $w_i \in \mathbb{R}_+^\times$ für alle i und somit $z_i/z_j = w_i/w_j \in \mathbb{R}_+^\times$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Die Voraussetzung liefert

$$\begin{aligned} w_1 + \cdots + w_n &= (z_1 + \cdots + z_n)/z = 1 = |1| = |z_1 + \cdots + z_n|/|z| \\ &= \big(|z_1| + \cdots + |z_n|\big)\big/|z| = |z_1/z| + \cdots + |z_n/z| = |w_1| + \cdots + |w_n|\,. \end{aligned}$$

Es genügt, $w_1 = |w_1|$ zu zeigen. Dann ergibt sich nämlich $w_2 + \cdots + w_n = |w_2| + \cdots + |w_n|$, und die Behauptung folgt durch Induktion.

Sei nun $w_1 = a_1 + ib_1$ und $w := w_2 + \cdots + w_n = a + ib$ mit $a_1, a, b_1, b \in \mathbb{R}$, also $a_1 + a + i(b_1 + b) = w_1 + w = w_1 + \cdots + w_n = |w_1| + \cdots + |w_n| \in \mathbb{R}$ und somit $b_1 + b = 0$, d.h.

$$a_1 + a = |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n| \geq |w_1| + |w| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a_1| + |a| \geq a_1 + a\,.$$

Folglich gilt bei allen vorstehenden Abschätzungen bereits das Gleichheitszeichen. Daher ist $b_1 = 0\,(= b)$ und dann $w_1 = a_1 = |a_1| = |w_1|$. •

Abschnitt 5.A, Variante zu **Aufg. 10**, p. 133, im Vorgriff auf §6 (1.1.2011):

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ eine absolut konvergente Reihe von 0 verschiedener komplexer Zahlen z_k mit $\big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\big| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$, so ist $z_k/z_j \in \mathbb{R}_+^\times$ für alle k, j.

1. Beweis: Sei $z := \sum_{k=0}^{\infty} z_k$. Nach Voraussetzung ist $|z| = \big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\big| = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \neq 0$, also $z \neq 0$. Wir setzen $w_k := z_k/z$ für alle k und zeigen $w_k = |w_k|$. Dann folgt $w_k \in \mathbb{R}_+^\times$ für alle k und somit $z_k/z_j = w_k/w_j \in \mathbb{R}_+^\times$ für alle k, j. Die Voraussetzung liefert ferner

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} z_k\Big)/z = 1 = |1| = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} w_k\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\Big|\Big/|z| = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|\Big)\Big/|z| = \sum_{k=0}^{\infty} |w_k|\,.$$

Es genügt, $w_0 = |w_0|$ zu zeigen. Dann ergibt sich nämlich $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$, also $w_1 = |w_1|$, usw.

Sei nun $w_0 = a_0 + ib_0$ und $w := \sum_{k=1}^{\infty} w_k = a + ib$ mit $a_0, a, b_0, b \in \mathbb{R}$, d.h. $a_0 + a + i(b_0 + b) = w_0 + w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k = \sum_{k=0}^{\infty} |w_k| \in \mathbb{R}$ und somit $b_0 + b = 0$ und $a_0 + a = |w_0| + \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| \geq |w_0| + |w| = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a_0| + |a| \geq a_0 + a$. Folglich gilt bei allen vorstehenden Abschätzungen bereits das Gleichheitszeichen, und es ist $b_0 = 0\,(= b)$ und dann $w_0 = a_0 = |a_0| = |w_0|$. •

2. Beweis Man kann auch direkt mit Abschnitt 5.A , Aufg. 10 schließen: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ folgt wegen $\big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\big| \le \big|\sum_{k=0}^{n} z_k\big| + \big|\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\big|$, $\big|\sum_{k=0}^{n} z_k\big| \le \sum_{k=0}^{n}|z_k|$ und $\big|\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}|z_k|$ mit der Voraussetzung $\big|\sum_{k=0}^{\infty} z_k\big| = \sum_{k=0}^{\infty}|z_k|$ notwendigerweise $\big|\sum_{k=0}^{n} z_k\big| = \sum_{k=0}^{n}|z_k|$ (und $\big|\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\big| = \sum_{k=n+1}^{\infty}|z_k|$.) •

Abschnitt 5.B, Variante zu **Aufg. 3**, p. 135 (1.7.2010) :

Man bestimme die Häufungspunkte bzw. gegebenenfalls den Grenzwert der Folgen

$$\Big(\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\Big)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}\,,\qquad \Big(\Big(\frac{2+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\Big)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Lösung: Mit den Moivreschen Formeln sieht man, dass die (sich stets wiederholenden) Glieder der ersten Folge alle gleich einer der 8 komplexen Zahlen ±1, $\pm\mathrm{i}$, $\pm\frac12\sqrt2\,(1+\mathrm{i})$, $\pm\frac12\sqrt2\,(1-\mathrm{i})$ sind, welche also ihre Häufungspunkte sind: $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\Big)^n = \big(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\big)^n = \cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}$. Die Folge ist nicht konvergent.

Wegen $\Big|\Big(\frac{2+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}\Big)^n\Big| = \frac{|2+\mathrm{i}|^n}{|3+\mathrm{i}|^n} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}^{\,n} = \frac{1}{(\sqrt2)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ konvergiert die zweite Folge gegen 0. •

Abschnitt 5.C, Teil von **Aufg. 10**, p. 143 (1.7.2010) :

Für $\varphi\in\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt $\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi$.

Beweis: Wir verwenden zunächst $\cos\varphi = \frac12\big((\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)\big)$, dann den binomischen Lehrsatz, ferner $(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{-1} = \cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi$ und schließlich die Moivreschen Formeln:

$$\begin{aligned}
\cos^n\varphi &= \frac{1}{2^n}\big((\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)+(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)\big)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{n-k}(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)^k\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{n-k}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{-k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{n-2k}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(\cos(n-2k)\varphi+\mathrm{i}\sin(n-2k)\varphi\big)\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi+\mathrm{i}\,\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(n-2k)\varphi = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi\,.
\end{aligned}$$

Da wir mit einer reellen Zahl gestartet sind, muss nämlich auch das Ergebnis einen Imaginärteil haben, der gleich 0 ist. Insbesondere folgt so auch die Formel $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(n-2k)\varphi = 0$. •

Abschnitt 5.C, Teil von **Aufg. 11**, p. 144 (1.7.2010) :

Für $\varphi\in\mathbb{R}$, $\varphi\neq 2m\pi$, $m\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\varphi = \frac12+\frac{\sin\big(n+\frac12\big)\varphi}{2\,\sin\frac{\varphi}{2}}\qquad\text{und}\qquad \sum_{k=0}^{n}\sin k\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\big(n+\frac12\big)\varphi}{2\,\sin\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Beweis: Wir fassen beide Formeln zu einer komplexen Formel zusammen, verwenden dann die Moivreschen Formeln und schließlich die Summenformel für endliche geometrische Reihen. Nach Erweitern des entstehenden Bruches mit $\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}$ und Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus erhalten wir nun die Behauptung durch Vergleich der Real- und Imaginärteile in

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\varphi + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\sin k\varphi = \sum_{k=0}^{n}(\cos k\varphi + \mathrm{i}\sin k\varphi) = \sum_{k=0}^{n}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^k = \frac{1-(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^{n+1}}{1-(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}$$

$$= \frac{1-(\cos(n+1)\varphi+\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi)}{1-(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)} = \frac{(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})-(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})(\cos(n+1)\varphi+\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi)}{(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})-(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}$$

$$= \frac{(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})-(\cos(n+1)\varphi\,\cos\frac{\varphi}{2}+\sin(n+1)\varphi\,\sin\frac{\varphi}{2})-\mathrm{i}\,(\sin(n+1)\varphi\,\cos\frac{\varphi}{2}-\cos(n+1)\varphi\,\sin\frac{\varphi}{2})}{(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})-((\cos\varphi\,\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\varphi\,\sin\frac{\varphi}{2})+\mathrm{i}\,(\sin\varphi\,\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\varphi\,\sin\frac{\varphi}{2}))}$$

$$= \frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\varphi-\mathrm{i}\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{(\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})-(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2})} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$= \Bigl(\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\,\varphi}{2\,\sin\frac{\varphi}{2}}\Bigr) + \mathrm{i}\Bigl(\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\,\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\Bigr)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 5.C, Aufg. 17a), p. 145 (1.7.2010):

Sei $n \in \mathbb{N}, \geq 2$. Die Summe aller n-ten Einheitswurzeln ist gleich 0.

Beweis: Die n n-ten Einheitswurzeln sind

$$\zeta_n^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\,, \qquad k = 0, \ldots, n-1\,.$$

Mit Hilfe der Summenformel für endliche geometrische Reihen erhält man $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k = \frac{1-\zeta_n^n}{1-\zeta_n} = 0\,.$ •

Abschnitt 5.C, Aufg. 17b), p. 145 (1.7.2010):

Sei $n \in \mathbb{N}, \geq 1$. Das Produkt aller n-ten Einheitswurzeln ist $(-1)^{n-1}$.

Beweis: Man sieht mit Hilfe der Moivreschen Formeln und der Potenzrechenregeln sowie der Summenformel $1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$ wegen $\cos\pi = -1$ und $\sin\pi = 0$:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\zeta_n^k = \zeta_n^{\sum_{k=0}^{n-1}k} = \zeta_n^{n(n-1)/2} = \cos(n-1)\pi + \mathrm{i}\sin(n-1)\pi = (\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)^{n-1} = (-1)^{n-1}\,. \qquad \bullet$$

6 Reihen

Abschnitt 6.A, Teil von **Aufg. 1**, p. 156 (1.7.2010) :

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{3^n\,n!}\,.$

Lösung: Die erste Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Sie ist nämlich von der Form $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n := \frac{\sqrt{n}}{n+1} \ge 0$, wobei die Folge (a_n) wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n}}{1+(1/n)} = \frac{0}{1} = 0$ eine Nullfolge ist, die für $n \ge 1$ monoton fällt. Letzteres ergibt sich so: Für $n \ge 1$ ist $n^2+n \ge 1$, und es folgt $n\,(n+2)^2 = n^3+4n^2+4n \ge n^3+3n^2+3n+1 = (n+1)(n+1)^2$. Dies liefert $\frac{n}{(n+1)^2} \ge \frac{n+1}{(n+2)^2}$, d.h. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \ge \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = a_{n+1}\,.$ •

Die zweite Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium: Wegen $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e < 3$ konvergieren die Quotienten

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\Big/\frac{n^n}{3^n n!} = \frac{(n+1)^{n+1}\,n!\,3^n}{n^n\,(n+1)!\,3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

nämlich für $n \to \infty$ gegen $\frac{1}{3}e < 1$. •

Abschnitt 6.A, Variante zu **Aufg. 1**, p. 156 (1.7.2010) :

Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{(n+1)(n+2)}\,,$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+1}\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\sqrt[3]{n}}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\,,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,(2n)!}{n!\,(3n)!}\,.$$

Lösung: Die erste Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Sie ist nämlich von der Form $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n := \frac{n}{n^2+1} \ge 0$, wobei die Folge (a_n) wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1+(1/n^2)} = \frac{0}{1} = 0$ eine Nullfolge ist, die für $n \ge 1$ monoton fällt. Letzteres ergibt sich so: Wegen $n \ge 1$ ist $n^2+n \ge 1$, also $n\big((n+1)^2+1\big) = n^3+2n^2+2n \ge n^3+n^2+n+1 = (n^2+1)(n+1)$ und somit die Behauptung $a_n = \frac{n}{n^2+1} \ge \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = a_{n+1}\,.$ •

Die zweite Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Sie ist nämlich von der Form $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n := \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \ge 0$, wobei die Folge (a_n) eine Nullfolge ist, die für $n \ge 1$ monoton fällt wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n+3/n^2}{(1+1/n)(1+2/n)} = \frac{0}{1} = 0$. Letzteres erhält man so: Es ist $n^2+5n+4 \le n^2+6n+9$, und folglich $(n+4)(n+1) \le (n+3)^2$. Nach Division durch $(n+1)(n+2)(n+3)$ ergibt sich $a_{n+1} = \frac{n+4}{(n+2)(n+3)} \le \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} = a_n\,.$ •

Die dritte Reihe ist divergent: Für $n \ge 1$ ist nämlich $\frac{n}{2n^2+1} \ge \frac{n}{2n^2+2n^2} = \frac{1}{4n}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n}$ ist aber wie ihr Vierfaches $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, die harmonische Reihe, divergent. •

Das Majorantenkriterium zeigt, dass die vierte Reihe konvergent ist. Für alle $n \geq 1$ erhält man nämlich der Reihe nach $2n^2 \leq 2n^3+3$, $n^3+2n^2 \leq 3n^3+3$ und somit $\dfrac{n+2}{n^3+1} \leq \dfrac{3}{n^2}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n^2} = 3\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ist aber konvergent, vgl. Beispiel 6.A.15 oder das Beispiel zu 6.A, Aufg. 27b) weiter unten. •

Die fünfte Reihe konvergiert, da sie nichtnegative Glieder hat und ihre Partialsummen beschränkt sind wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^n-1}\frac{1}{n\sqrt{n}} &= 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{6\sqrt{6}}+\frac{1}{7\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2^{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)\sqrt{2^n-1}}\\ &\leq 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2^{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2^{n-1}}}\\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}} = \sum_{n=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n = \frac{1}{1-\big(1/\sqrt{2}\big)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\,. \end{aligned}$$ •

Die sechste Reihe konvergiert, da sie nichtnegative Glieder hat und ihre Partialsummen beschränkt sind wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2^n-1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}} &= 1+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{5\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{6\sqrt[3]{6}}+\frac{1}{7\sqrt[3]{7}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt[3]{2^{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{(2^n-1)\sqrt[3]{2^n-1}}\\ &\leq 1+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt[3]{2^{n-1}}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}\sqrt[3]{2^{n-1}}}\\ &= 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{2^{n-1}}} = \sum_{n=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Big)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\Big)^n = \frac{1}{1-\big(1/\sqrt[3]{2}\big)}\,. \end{aligned}$$ •

Die siebte Reihe ist divergent nach dem Quotientenkriterium. Die Quotienten

$$\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}((n+1)!)^2}\Big/\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)^2} = \frac{\big(2+(2/n)\big)\big(2+(1/n)\big)}{3\big(1+(1/n)\big)^2}$$

konvergieren nämlich für $n\to\infty$ gegen $\frac{4}{3}>1$. •

Für die achte Reihe verwenden wir das Quotientenkriterium. Die Folge $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ konvergiert gegen $e>2$. Daher hat die Folge der Quotienten $\Big|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\Big/\dfrac{2^n n!}{n^n} = 2\Big/\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n = 2\Big/\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n$ den Grenzwert $2/e<1$. Die Reihe ist also konvergent.

Die neunte Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium. Die Quotienten

$$\begin{aligned}\Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big| &= \frac{(2(n+1))!\,(2(n+1))!}{(n+1)!\,(3(n+3))!}\Big/\frac{(2n)!\,(2n)!}{n!\,(3n)!} = \frac{(2n+2)!\,(2n+2)!\,n!\,(3n)!}{(2n)!\,(2n)!\,(n+1)!\,(3n+3)!} =\\ &= \frac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{(n+1)\,(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{\big(2+(1/n)\big)^2(2+(2/n))\cdot 2}{(1+(1/n))(3+(1/n))(3+(2/n))\cdot 3}\end{aligned}$$

konvergieren nämlich für $n\to\infty$ gegen $\frac{16}{27}<1$. •

Abschnitt 6.A, Variante zu **Aufg. 2**, p. 156 (1.7.2010):

Man untersuchen Sie, für welche $x\in\mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

Lösung: Für $x=1$ ist die erste Reihe trivialerweise konvergent. Bei $x\neq 1$ verwenden wir das Quotientenkriterium: Die Folge $\Big|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big|\dfrac{(1-x)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\Big/\dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{n}}\Big| = |x-1|\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ konvergiert für $n\to\infty$ gegen $|x-1|$. Bei $|x-1|<1$ ist die Folge also konvergent, bei $|x-1|>1$ ist sie divergent. Bei $x-1=-1$, also $1-x=1$, $x=0$, handelt es sich um die Reihe $\sum 1\big/\sqrt{n}$, die die divergente harmonische Reihe als Minorante hat und daher divergent ist. Bei $x-1=1$, also $1-x=-1$, $x=2$, um die alternierende Reihe $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Insgesamt konvergiert die Reihe genau für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $0<x\le 2$.

Für $x=2$ ist die zweite Reihe trivialerweise konvergent. Bei $x\neq 2$ verwenden wir das Quotientenkriterium: Die Folge $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\Big/\frac{(x-2)^n}{n}\right| = |x-2|\,\frac{n}{n+1}$ konvergiert für $n\to\infty$ gegen $|x-2|$. Bei $|x-2|<1$ ist die Folge also konvergent, bei $|x-2|>1$ ist sie divergent. Bei $x-2=1$, also $x=3$, handelt es sich um die divergente harmonische Reihe, bei $x-2=-1$, also $x=1$, um die konvergente alternierende harmonische Reihe. Insgesamt konvergiert die Reihe genau für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $1\le x<3$. •

Abschnitt 6.A, **Zusatzaufgabe**, p. 156 (1.7.2010) :

Man berechne die Grenzwerte der folgenden Reihen: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}}{(-5)^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+9\cdot(-3)^n}{5^n}$,

Lösung: Wir wenden die Summenformel für die geometrische Reihe an und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}-4^{n+1}}{(-5)^n} = 6\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n - 4\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{4}{5}\Big)^n = \frac{6}{1-(-3/5)} - \frac{4}{1-(-4/5)} = \frac{30}{8}-\frac{20}{9} = \frac{55}{36}\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+9\cdot(-3)^n}{5^n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{5}\Big)^n + 9\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{3}{5}\Big)^n = \frac{2}{1-(2/5)} + \frac{9}{1-(-3/5)} = \frac{10}{3}+\frac{45}{8} = \frac{215}{24}\,.$$ •

Abschnitt 6.A, **Zusatzaufgabe**, p. 156 (1.7.2010) :

Man schreibe den gemischt-periodischen Dezimalbruch $0{,}50\overline{45}$ als gewöhnlichen Bruch, d.h. man berechne den Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_k}{10^k}$ mit $z_1=5$, $z_2=0$ und $z_{2n+1}=4$, $z_{2n+2}=5$ für alle $n\ge 1$.

Lösung: Die Summenformel für die geometrische Reihe liefert (vgl. Beispiel 6.A.18) :

$$0{,}50\overline{45} = \frac{50}{100}+\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{45}{100^k} = \frac{1}{2}+\frac{45}{10000}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{100^k} = \frac{1}{2}+\frac{9}{2000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{220} = \frac{111}{220}\,.$$ •

Abschnitt 6.A, **Zusatzaufgabe**, p. 156 (1.7.2010) :

Man berechne die Grenzwerte der folgenden Reihen mit einem Fehler $\le 10^{-4}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}$.

Lösung: Es ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}\approx 1-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{27}+\frac{1}{256}-\frac{1}{3125}=\frac{4677463}{21600000}\approx 0{,}2165$ mit einem Fehler, der nach dem Leibniz-Kriterium $\le$ dem Betrag des ersten nicht berücksichtigten Glieds, also $\le 1/6^6 = 1/46656 < 10^{-4}$ ist. •

Abschätzen durch eine geometrische Reihe liefert $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}+\frac{1}{3840}=\frac{6331}{3840}\approx$ $1{,}6487$ mit einem Fehler $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\le\frac{1}{6!\cdot 2^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{720\cdot 64}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{720\cdot 32}<10^{-4}$. •

Bemerkung. Die Summe der zweiten Reihe ist nach Abschnitt 12.E gleich $e^{1/2}=\sqrt{e}=1{,}648721\ldots$.

Abschnitt 6.A, Teil von **Aufg. 3**, p. 156 (1.7.2010) :

Man berechne die Summen der folgenden Teleskopreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+15n+4}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}\,, \quad k\in\mathbb{N}^*\,.$$

Lösung: Der Ansatz $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1} = \frac{(2a+2b)n+a-b}{4n^2-1}$ liefert $2a+2b = 0$ und $a-b=1$, d.h. $a=\frac{1}{2}$ und $b=-a=-\frac{1}{2}$. Damit ergibt sich $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$, und es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\,.$$

Genau genommen müsste man natürlich die Teleskopformel $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)$ noch durch Induktion über n zeigen, vgl. 2.A, Aufg. 3b) . •

Bei der zweiten Reihe machen wir den Ansatz $\frac{1}{9n^2+15n+4} = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{a}{3n+1}+\frac{b}{3n+4} = \frac{(3a+3b)n+4a+b}{9n^2+15n+4}$. Er liefert $3a+3b=0$ und $4a+b=1$, d.h. $b=-a$ und somit $1=4a-a$, $a=\frac{1}{3}$ und $b=-a=-\frac{1}{3}$. Damit ergibt sich $\frac{1}{9n^2+15n+4} = \frac{1}{3}\Big(\frac{}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\Big)$ und somit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{9n^2+15n+4} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\Big) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\cdots+\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\Big)$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{3n+4}\Big) = \frac{1}{3}\,. \quad \bullet$$

Bei der dritten Reihe machen wir den Ansatz $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+2} = \frac{(a+b)n+2a}{n(n+2)}$ und bekommt $a+b=0$ und $2a=1$, d.h. $a=\frac{1}{2}$ und $b=-a=-\frac{1}{2}$. Damit ergibt sich $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{\frac{1}{2}}{n+2}$. Es folgt $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$. Genau genommen müsste man natürlich die dabei verwandte Teleskopformel

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\Big(3-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)$$ durch Induktion über n zeigen. •

Um die Partialbruchzerlegung des allgemeinen Gliedes der vierten Reihe zu finden, machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)}$$

mit Koeffizienten a, b, c, für die wir die drei Gleichungen $a+b+c=0$, $3a+2b+c=0$, $2a=1$ erhalten. Es ergibt sich $a=\frac{1}{2}$, $b+c=-\frac{1}{2}$, $2b+c=-\frac{3}{2}$, und somit $b=-1$, $c=\frac{1}{2}$. Damit bekommen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\Big) =$$

$$\begin{array}{ll} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{1}{3} & \qquad\frac{1}{n-2}-\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n} \\ \qquad +\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+ & \frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1} \\ \qquad +\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5} & \quad+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big)=\frac{1}{4}\,. \end{array}$$

Die dabei verwendete Formel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\Big)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ sieht man entweder mit Hilfe des obigen Schemas ein, bei dem sich die Einträge mit gleichen Nennern in den Diagonalen (abgesehen von Anfang und Ende) jeweils wegheben, oder beweist sie leicht durch Induktion über n. •

Um die Partialbruchzerlegung des allgemeinen Gliedes der fünften Reihe zu finden, machen wir den Ansatz

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1}+\frac{b}{n+2}+\frac{c}{n+3} = \frac{a(n+2)(n+3)+b(n+1)(n+3)+c(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$$
$$= \frac{(a+b+c)n^2+(5a+4b+3c)n+6a+3b+2c}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

mit Koeffizienten a, b, c, für die wir die drei Gleichungen $a+b+c=0$, $5a+4b+3c=1$, $6a+3b+2c=0$ erhalten. Subtrahieren des 3-fachen (bzw. 2-fachen) der ersten von der zweiten (bzw. dritten) Gleichung liefert $2a+b=1$ (bzw. $4a+b=0$). Es folgt $2a=-1$, $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=-a-b=-\frac{3}{2}$. Damit bekommen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{-\frac{1}{2}}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{n+3}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{k+1}+\frac{4}{k+2}-\frac{3}{k+3}\Big)=$$

$$\begin{array}{ll} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{3}{4} & \quad-\frac{1}{n-1}+\frac{4}{n}-\frac{3}{n+1} \\ \qquad -\frac{1}{3}+\frac{4}{4}-\frac{3}{5}\pm\cdots & \quad-\frac{1}{n}+\frac{4}{n+1}-\frac{3}{n+2} \\ \qquad -\frac{1}{4}+\frac{4}{5}-\frac{3}{6} & \quad-\frac{1}{n+1}+\frac{4}{n+2}-\frac{3}{n+3}\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{3}{n+3}\Big)=\frac{1}{4}\,. \end{array}$$

Die dabei verwendete Formel $\displaystyle\sum_{n=1}^{n}\Big(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\Big)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}-\frac{3}{n+3}$ sieht man entweder mit Hilfe des obigen Schemas ein, bei dem sich die Einträge mit gleichen Nennern in den Diagonalen (abgesehen von Anfang und Ende) jeweils wegheben, oder beweist sie leicht durch Induktion über n.

Es ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}=\frac{1}{k\cdot k!}$. Für $\ell\in\mathbb{N}^*$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\ell}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} &= \frac{1}{k}\Big(\sum_{n=1}^{\ell}\frac{n+k}{n(n+1)\cdots(n+k)}-\sum_{n=1}^{\ell}\frac{n}{n(n+1)\cdots(n+k)}\Big)\\ &= \frac{1}{k}\Big(\sum_{n=1}^{\ell}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}-\sum_{n=1}^{\ell}\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}\Big)\\ &= \frac{1}{k}\Big(\sum_{n=1}^{\ell}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}-\sum_{n=2}^{\ell+1}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}\Big)\\ &= \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(\ell+1)\cdots(\ell+k)}\Big)\xrightarrow{\ell\to\infty}\frac{1}{k\cdot k!}\,.\end{aligned}$$

•

Abschnitt 6.A, **Zusatzaufgabe**, p. 157 (1.4.2012) :

Man berechne den Grenzwert der folgenden Reihe: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$.

Beweis: Mit der vorstehenden Aufgabe erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+k+1}{(n+1)\cdots(n+k+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+1}{(n+1)\cdots(n+k+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)} - (k+1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k+1)}\\ &= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdots(n+k-1)} - \frac{1}{k!}\Big) - (k+1)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdots(n+k)} - \frac{1}{(k+1)!}\Big)\\ &= \frac{1}{(k-1)\cdot(k-1)!} - (k+1)\frac{1}{k\cdot k!} = \frac{k^2-(k-1)(k+1)}{(k-1)\,k\cdot k!} = \frac{1}{(k-1)\,k\cdot k!}\,.\end{aligned}$$

•

Bemerkung: Ähnlich bestimmt man die Summen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n(n+1)\cdots(n+k)}$, wobei P eine beliebige Polynomfunktion vom Grad $< k$ ist. Man schreibt $P(n) = a_k + a_{k-1}(n+k) + \cdots + a_1(n+2)\cdots(n+k)$ mit konstanten $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ und erhält

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \frac{a_k}{k\cdot k!} + \frac{a_{k-1}}{(k-1)\cdot(k-1)!} + \cdots + \frac{a_1}{1\cdot 1!}\,.$$

Abschnitt 6.A, **Aufg. 4**, p. 157 (1.7.2010) :

Man beweise das so genannte Wurzelkriterium: Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. Gibt es eine Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für fast alle n, so ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent.

Beweis: Mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ gilt $|a_n| \leq q^n$ für fast alle n. Die wegen $q < 1$ konvergente geometrische Reihe $\sum q^n$ ist also eine konvergente Majorante für $\sum |a_n|$. •

Zusatz: Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum a_n$ sicherlich nicht konvergent, da (a_n) wegen $|a_n| \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ keine Nullfolge ist.

Abschnitt 6.A, Zusatz zu **Aufg. 4**, p. 157 (1.7.2010) :

Liefert das Quotientenkriterium die Konvergenz einer Reihe, so auch das Wurzelkriterium.

Beweis: Sei $q \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Für alle $n \geq n_0$ gelte $|a_{n+1}/a_n| \leq q$. Für diese n folgt dann $|a_n| = \Big|\frac{a_n}{a_{n-1}}\Big|\,\Big|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\Big|\cdots\Big|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\Big|\,|a_{n_0}| \leq q^{n-n_0}|a_{n_0}|$. Dies liefert $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q\,\sqrt[n]{|a_{n_0}|/q^{n_0}} \leq q'$ für (jedes) $q' \in \mathbb{R}$ mit $q < q' < 1$ und alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n_0}|/q^{n_0}} = 1$ ist, vgl. 4.F, Aufg. 5. •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 6**, p. 157 (1.7.2010) :

Die Folge (a_n) sei eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Konvergiert die Reihe $\sum a_n$, so ist die Folge (na_n) eine Nullfolge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mit $\Big|\sum_{k=n_0}^{n} a_k\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Außerdem ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ wegen der Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Da die Folge (a_k) monoton fallend ist, folgt daraus $a_k \geq 0$ für alle k sowie $a_n \leq a_k$ für $n \geq k$. Man erhält

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq \Big|\sum_{k=n_0}^{n} a_k\Big| = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \geq \sum_{k=n_0}^{n} a_n = (n-n_0+1)\,a_n\,, \quad \text{d.h.} \quad na_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + (n_0-1)\,a_n\,,$$

für alle $n \ge n_0$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ gibt es ein $n_1 \ge n_0$ mit $a_n \le \dfrac{\varepsilon}{2(n_0-1)}$ für $n \ge n_1$, also mit $|na_n - 0| = na_n \le \dfrac{\varepsilon}{2} + (n_0-1)a_n \le \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$ für alle $n \ge n_1$. •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 8a)**, p. 158 (1.7.2010) :

Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen. Genau dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$, wenn die Reihe $\sum a_n/(1+a_n)$ konvergiert.

Beweis: Konvergiert $\sum a_n$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n/(1+a_n)$ nach dem Majorantenkriterium wegen $|a_n/(1+a_n)| \le a_n$ für alle n.

Umgekehrt liefert die Konvergenz der Reihe $\sum a_n/(1+a_n)$ zunächst $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(1/a_n)+1}$. Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (1/a_n)+1 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (1/a_n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, vgl. 4.E, Aufg. 6a). Es gibt daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le 1$, d.h. $1+a_n \le 2$ und somit $a_n/(1+a_n) \ge a_n/2$, für alle $n \ge n_0$. Nach dem Majorantenkriterium $\sum a_n/(1+a_n)$ ist also $\sum a_n/2$ und dann auch das Doppelte $\sum a_n$ konvergent. •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 15a)**, p. 158 (1.7.2010) :

Sei (a_n) eine Folge positiver natürlicher Zahlen. Dann ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = 1.$

Beweis: Wegen $1+a_n \ge 2$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a_n)-1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_{n-1})} - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)}\right) = 1\,.$$ •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 26**, p. 160 (1.7.2010) :

Eine Schnecke bewege sich tagsüber von einem Ende eines beliebig dehnbaren Gummibandes der Länge ℓ zum anderen und lege dabei pro Tag die Längeneinheit zurück, worauf in der folgenden Nacht das Band jeweils um ℓ_0 gedehnt wird. Man untersuche, ob und gegebenenfalls im Laufe welchen Tages die Schnecke das andere Ende des Bandes erreicht.

Lösung: Am ersten Tag legt die Schnecke den Anteil $1/\ell$ des Bandes zurück. Den so geschafften Bruchteil des Bandes behält sie nachts natürlich, da das Band gleichmäßig gedehnt wird. Am nächsten Tag legt sie nur noch den Anteil $1/(\ell+\ell_0)$ des dann auf die Länge $\ell+\ell_0$ gedehnten Bandes zurück, hat abends also den Anteil $(1/\ell) + 1/(\ell+\ell_0)$ des Bandes zurückgelegt, usw. Am Morgen des n-ten Tages hat das Band die Länge $\ell+(n-1)\ell_0$ Meter lang und die Schnecke legt eine weitere Längeneinhheit zurück, hat also am Abend des n-ten Tages den Anteil $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\ell+k\ell_0} \ge \frac{1}{\mathrm{Max}\ (\ell,\ell_0)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{\mathrm{Max}\ (\ell,\ell_0)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ des Bandes zurückgelegt. Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_n (1/n)$ wird die Schnecke also das andere Ende des Bandes erreichen. (Bei $\ell = \ell_0 = 10$ braucht sie dafür 12367 Tage, vgl. Beispiel 6.A.3.) •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 27a)**, p. 160 (1.7.2010) :

Sei (q_n) eine Folge reeller Zahlen mit $0 < q_n < 1$ für alle n. Man zeige:
Die Teleskopreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_0 \cdots q_n\,(1-q_{n+1})$ konvergiert.

Beweis: Wegen $0 < q_n < 1$ für alle n ist die Folge $(q_0 \cdots q_n\, q_{n+1})$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt, also konvergent. Die angegebene Reihe ist eine Teleskopreihe mit dem Grenzwert

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} q_0\cdots q_n\,(1-q_{n+1}) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(q_0\cdots q_k - q_0\cdots q_k q_{k+1}) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(q_0 - q_0q_1 + q_0q_1 - q_0q_1q_2 + \cdots + q_0\cdots q_n - q_0\cdots q_{n+1}) = \\ &= \lim_{n\to\infty}(q_0 - q_0\cdots q_{n+1}) = q_0 - \lim_{n\to\infty} q_0\cdots q_{n+1}\,. \end{aligned}$$ •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 27b)**, p. 160 (1.7.2010) :

Sei (q_n) eine Folge reeller Zahlen mit $0<q_n<1$ für alle n. Man beweise die folgende Verallgemeinerung des Quotientenkriteriums: Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen mit $a_n\neq 0$ und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q_n\,\frac{1-q_{n+1}}{1-q_n}$$

für (fast) alle n sind absolut konvergent.

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Voraussetzungen über die a_n für alle n gilt. Dann liefert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q_0\cdots q_n\,(1-q_{n+1})$ aus Aufg. 27a) eine konvergente Majorante zu $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$, da wir der Reihe nach erhalten:

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| &\le |a_n|\,q_n\,\frac{1-q_{n+1}}{1-q_n} \le |a_{n-1}|\,q_nq_{n-1}\,\frac{1-q_{n+1}}{1-q_{n-1}} \le \cdots \le |a_0|\,q_n\cdots q_0\,\frac{1-q_{n+1}}{1-q_0} = \\ &= \frac{|a_0|}{1-q_0}\,q_0\cdots q_n\,(1-q_{n+1})\,.\end{aligned}$$ •

Abschnitt 6.A, Beispiel zu **Aufg. 27b)**, p. 160 (1.7.2010) :

Verwenden Sie Aufg. 27b), um die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ zu beweisen.

Beweis: Im Spezialfall $a_n=\frac{1}{n^2}$ verwenden wir $q_n=\frac{n}{n+1}$, also $1-q_n=\frac{1}{n+1}$, und erhalten für alle $n\ge 1$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = q_n\,\frac{n}{n+1} \le q_n\,\frac{n+1}{n+2} = q_n\,\frac{1-q_{n+1}}{1-q_n}\,.$$ •

Abschnitt 6.A, **Aufg. 27c)**, p. 160 (1.7.2010) :

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a\,(a+1)\cdots(a+n)}{c\,(c+1)\cdots(c+n)}$ konvergiert für $a,c\in\mathbb{R}_+^{\times}$ und $c>a+1$.

Beweis: Wir wählen ein $m_0\in\mathbb{N}$ mit $m_0>(c-a)/(c-a-1)$ und $q_n:=\frac{a+m_0(n+1)}{c+m_0(n+1)}$. Dann gilt die Bedingung aus Aufg. 27b) für $n\ge\frac{m_0a}{m_0(c-a-1)-(c-a)}-1$. Wir haben dazu zu zeigen:

$$q_n\,\frac{1-q_{n+1}}{1-q_n} = \frac{a+m_0(n+1)}{c+m_0(n+1)}\cdot\frac{1-\dfrac{a+m_0(n+2)}{c+m_0(n+2)}}{1-\dfrac{a+m_0(n+1)}{c+m_0(n+1)}} = \frac{a+m_0(n+1)}{c+m_0(n+2)} \ge \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{a+n+1}{c+n+1}\,.$$

Dies ist äquivalent zu $(a+m_0(n+1))(c+n+1)\ge(a+n+1)(c+m_0(n+2))$, d.h. zu $(c-a)m_0(n+1)\ge am_0+(c-a)(n+1)+m_0(n+1)$, also zu $(n+1)\big((c-a)(m_0-1)-m_0\big)\ge am_0$. Dies ist aber gerade die angegebene Bedingung an n. •

Abschnitt 6.B, **Aufg. 1a)**, p. 168 (1.8.2010) :

Seien $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$ mit $|z_i| < 1$ für $i = 1, \ldots, r$. Wir setzen wie allgemein üblich $z^m = z_1^{m_1} \cdots z_r^{m_r}$ für $m := (m_1, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$. Dann ist die Familie z^m, $m \in \mathbb{N}^r$, summierbar, und es gilt

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^r} z^m = \frac{1}{1-z_1} \cdots \frac{1}{1-z_r}\,.$$

Beweis: Für $i = 1, \ldots, r$ sind die Familien $z_i^{m_i}$, $m_i \in \mathbb{N}$, summierbar, da die geometrischen Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} z_i^{m_i}$, $i = 1, \ldots, r$, wegen $|z_i| < 1$ absolut konvergieren. Nach dem Großen Distributivgesetz 6.B.13 ist dann die Familie z^m, $m \in \mathbb{N}^r$, summierbar mit der Summe

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^r} z^m = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} z_1^{m_1} \cdots z_r^{m_r} = \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} z_1^{m_1}\right) \cdots \left(\sum_{m_r=0}^{\infty} z_r^{m_r}\right) = \frac{1}{1-z_1} \cdots \frac{1}{1-z_r}\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 6.B, **Aufg. 1b)**, p. 168 (1.8.2010) :

Man folgere für $w \in \mathbb{C}$, $|w| < 1$, und alle $r \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle \frac{1}{(1-w)^r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} w^k\,.$

1. Beweis: Wir verwenden Induktion über r. Der Fall $r = 1$ ist die Summenformel $1/(1-w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$ für geometrische Reihen. Beim Schluss von r auf $r+1$ verwenden wir die vorstehende Aufgabe, den Satz 6.B.14 über das Cauchy-Produkt und die Formel aus 2.B, Aufg. 4d) über Binomialkoeffizienten:

$$\frac{1}{(1-w)^{r+1}} = \frac{1}{(1-w)} \cdot \frac{1}{(1-w)^r} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} w^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} w^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} w^{n-k} \binom{k+r-1}{r-1} w^k$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{r-1+k}{k}\right) w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+n}{n} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r}{r} w^n\,. \qquad \bullet$$

2. Beweis: Wir interpretieren $1/(1-w)^r$ als r-faches Produkt der geometrischen Reihe $1/(1-w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$. Nach der vorstehenden Aufgabe ist dann der Koeffizient von w^k die Anzahl der Tupel $m \in \mathbb{N}^r$ mit $|m| = m_1 + \cdots + m_r = k$. Diese Zahl ist nach Beispiel 2.B.11 gleich $\binom{k+r-1}{r-1}$. •

Abschnitt 6.B, **Aufg. 2a)**, p. 168 (1.8.2010) :

Die Familie $a_{m,n} := m^{-n}$, $m, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, hat die Summe $\sum_{n=2}^{\infty} \big(\zeta(n) - 1\big) = 1$.

Beweis: Da alle $a_{m,n}$ positiv sind, wird die Summierbarkeit nach 6.B.12 durch dieselbe Rechnung gezeigt, die auch zur Berechnung der Summe verwandt wird. Der Große Umordnungssatz 6.B.11 liefert nun zusammen mit der Summenformel für geometrische Reihen und Beispiel 6.A.4:

$$\sum_{m,n \ge 2} \frac{1}{m^n} = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m^n}\right) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = 1$$

und

$$1 = \sum_{m,n \ge 2} \frac{1}{m^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \big(\zeta(n) - 1\big)\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 6.B, **Aufg. 2b)**, p. 168 (1.8.2010) :

Sei $Q := \{m^n \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}\}$ die Menge der echten Potenzen natürlicher Zahlen. Dann ist die Familie $1/(q-1)$, $q \in Q$, summierbar mit Summe 1.

Beweis: Jede echte Potenz m^n lässt sich eindeutig in der Form $m_0^{n_0}$, $m_0, n_0 \ge 2$, m_0 keine echte Potenz, schreiben: Ist nämlich $m = \prod_{p \in P} p^{\nu_p}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von m und ist k der größte gemeinsame Teiler der ν_p, $p \in P$, so hat man $m_0 = \prod_{p \in P} p^{\nu_p/k}$ und $n_0 = kn$ zu nehmen. Die Abbildung, die jedem solchen Paar (m, n) das Paar $(q, k) := (m_0^n, k)$ zuordnet, ist dann eine bijektive Abbildung von

$(\mathbb{N}-\{0,1\})\times(\mathbb{N}-\{0,1\})$ auf $Q\times\mathbb{N}^*$, und dabei gilt jeweils $m^n=q^k$. Unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen und des Ergebnisses der vorstehenden Aufgabe erhalten wir so:

$$\sum_{q\in Q}\frac{1}{q-1}=\sum_{q\in Q}\frac{\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}}=\sum_{q\in Q}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q^k}=\sum_{m,n\geq 2}\frac{1}{m^n}=1\,. \qquad \bullet$$

Abschnitt 6.B, Teil von **Aufg. 13a)**, p. 172 (1.8.2010) :

Sei $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$. Die Familie z^{mn}, $m,n\in\mathbb{N}^*$, ist summierbar, und es gilt $\sum\limits_{m,n\geq 1} z^{mn}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} T(n)\,z^n$, wobei $T(n)$ die Anzahl der Teiler $d\in\mathbb{N}^*$ von n ist, vgl. 2.D, Aufg. 12b) .

Beweis: Die Summierbarkeit folgt mit 6.B.12 aus $|z|^n<\frac{1}{2}$, d.h. $1/\big(1-|z|^n\big)<2$, für $n\geq n_0$, $n_0\in\mathbb{N}$ hinreichend groß, und

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|z^{mn}|&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\big(|z|^n\big)^m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{1-|z|^n}=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{|z|^n}{1-|z|^n}+\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{|z|^n}{1-|z|^n}\\&<\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{|z|^n}{1-|z|^n}+\sum_{n=n_0}^{\infty}2\,|z|^n=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{|z|^n}{1-|z|^n}+\frac{2\,|z|^{n_0}}{1-|z|}<\infty\,.\end{aligned}$$

Nach dem großen Umordnungssatz 6.B.11 gilt dann $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} z^{mn}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\sum\limits_{d|k}1\Big)z^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}T(k)\,z^k\,.$ $\bullet$