Korrekturen und Ergänzungen zu
Storch/Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 2.A, Aufg. 7**, p. 25 (1.7.2010)

In Aufgabe 7 füge man die folgenden Teile d) und e) hinzu:

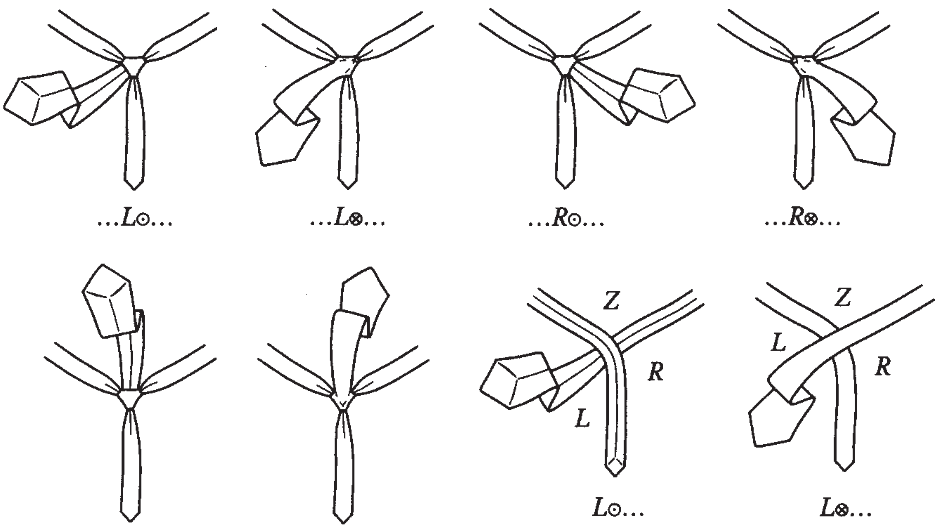
d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, n \geq 2$. Dann ist $a_n = \frac{1}{3}\big(2^n - (-1)^n\big)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

e) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2$. Dann ist $a_n = \big((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\big)\big/2\sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(Zu b), d), e) vgl. 12.C, Aufg. 5a).)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 2.B, Aufgaben**, p. 36, (1.7.2010). Zusätzliche Aufgabe, angeregt durch das Buch Fink, Th.; Mao, Y.: Die 85 Methoden, eine Krawatte zu binden, München 2002:

22. Ein Krawattenknoten wird durch eine endliche Folge von Elementarbewegungen gewonnen. Erlaubt sind sechs Elementarbewegungen des "aktiven" Endes der Krawatte (vgl. die Abbildungen unten, die das Spiegelbild zeigen): $L\odot$:= nach links vom Hemd weg; $L\otimes$:= nach links zum Hemd hin; $R\odot$:= nach rechts vom Hemd weg; $R\otimes$:= nach rechts zum Hemd hin; $Z\odot$:= von hinten zum Zentrum; $Z\otimes$:= nach hinten ins Zentrum. Dabei sind folgende Einschränkungen zu beachten: (1) Die Elementarbewegungen müssen bei jedem Schritt sowohl die Richtungen $\odot$ und $\otimes$ als auch die Regionen L, R, Z wechseln. (2) Man beginnt mit $L\odot$ oder $L\otimes$ (als Rechtshänder, Linkshänder entsprechend mit $R\odot$ oder $R\otimes$; gezählt wird hier nur eine der beiden Knotensorten). (3) Zum Schluss sind die drei Bewegungen $R\odot L\otimes Z\odot$ oder die drei Bewegungen $L\odot R\otimes Z\odot$ (in dieser Reihenfolge) auszuführen (und dann das aktive Ende der Krawatte durch die vorderste Schleife zu ziehen). Bekannt sind etwa der O r i e n t a l $L\odot R\otimes Z\odot$, der F o u r - i n - H a n d bzw. (G r o ß -) V a t e r s K n o t e n $L\otimes R\odot L\otimes Z\odot$ oder auch der W i n d s o r $L\otimes Z\odot L\otimes R\odot Z\otimes R\odot L\otimes Z\odot$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne k_n die Anzahl der möglichen (Rechtshänder-)Knoten mit (genau) n Elementarbewegungen und $K_n = \sum_{i=0}^n k_i$ die Anzahl der Knoten mit höchstens n Elementarbewegungen. Es ist $k_0 = k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$.



mögliche Ausgangsbewegungen

a) Für $n \geq 4$ ist $k_n = k_{n-1} + 2k_{n-2}$ und für $n \geq 2$ ist

$$k_n = \frac{1}{3}\big(2^{n-2} - (-1)^{n-2}\big) = \left[\frac{2^{n-2}}{3} + \frac{1}{2}\right].$$

(Vgl. 2.A, Aufg. 7d) (neu). – Bei geradem n beginnt jeder Knoten mit $L\otimes$, bei ungeradem n mit $L\odot$. Durch Ersetzen von L durch R sowie von R durch L wird aus jedem Rechtshänderknoten ein Linkshänderknoten und umgekehrt.)

b) Es ist $K_n = \big[2^{n-1}/3\big]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ($K_9 = 85$ ist die Zahl im Titel des eingangs erwähnten Buches. Erlaubt man auch 10 Elementarbewegungen kommen weitere 85 Knoten hinzu.)

c) Die Anzahl der Knoten mit n Elementarbewegungen, wovon z Schritte vom Typ $Z_\odot$ oder $Z_\otimes$ sind, ist $2^{z-1}\binom{n-z-2}{z-1}$, $1 \le z \le n-2$.

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 2.D, Aufg. 30b)**, p. 51 (1.7.2010)

Den ersten Satz des Aufgabenteils ersetze man durch die folgenden beiden Sätze: "Außer $(2, 4)$ gibt es kein Paar (x, y) positiver *ganzer* Zahlen mit $x < y$ und $x^y = y^x$. Die Paare (x, y) positiver *rationaler* Zahlen mit $x < y$ und $x^y = y^x$ sind $\big((1+\frac{1}{n})^n, (1+\frac{1}{n})^{n+1}\big)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vgl. hierzu auch Beispiel 4.F.10."

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 2.D, Aufgaben**, p. 52 (1.7.2010). Zusätzliche Aufgabe:

35. Eine (beliebige) Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ heißt periodisch, wenn es Zahlen $t \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}^*$ mit $x_{i+r} = x_i$ für alle $i \ge t$ gibt. Man zeige: Ist $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ periodisch, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ mit folgenden Eigenschaften: (1) Es ist $x_{i+k} = x_i$ für alle $i \ge m$. (2) Für jedes Paar $(t, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ mit $x_{i+r} = x_i$ für alle $i \ge t$ ist $t \ge m$ und $r = \ell k$ mit einem $\ell \in \mathbb{N}^*$. (Zur Existenz von k benutze man Aufg. 25 und zeige, dass für zwei Periodenlängen r, s auch $\operatorname{ggT}(r, s)$ eine Periodenlänge ist. – Man nennt m die (kleinste) Vorperiodenlänge und k die (kleinste) Periodenlänge von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. $(x_0, \ldots, x_{m-1})$ heißt die Vorperiode und $(x_m, \ldots, x_{m+k-1})$ die Periode von $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Ist $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht periodisch, so setzt man $m := \infty$ und $k := 0$.)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 4.F, Beispiel 4.F.11**, p. 110 (1.8.2010)

In der zweiten Zeile vor den Formeln für ζ_{15} muss es "$A_{15} = 15 \sin\frac{2\pi}{15}/(1+\cos\frac{2\pi}{15})$" heißen statt "$A_{15} = \frac{15}{2} \sin\frac{2\pi}{15}/(1+\cos\frac{2\pi}{15})$".

Ferner füge man an das Ende des Beispiels hinzu:

"Bei Benutzung der Umfänge U_n und u_n statt der Flächen A_n und a_n des um- bzw. einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks des Einheitskreises ($n \ge 3$) beachte man die Formeln $U_n = 2A_n$, $u_n = 2a_{2n}$ mit den Rekursionen $U_{2n} = 2A_{2n} = 4a_{2n}A_n/(a_{2n}+A_n) = 2u_nU_n/(u_n+U_n)$, $u_{2n} = 2a_{4n} = \sqrt{2a_{2n}\cdot 2A_{2n}} = \sqrt{u_nU_{2n}}$. Archimedes startete mit $U_6 = 4\sqrt{3}$, $u_6 = 6$ und rechnete bis $U_{2^4\cdot 6}$, $u_{2^4\cdot 6}$."

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 4.F, Aufg. 29a)**, p. 118 (1.7.2010)

In der 6. Z. v. u. ist in der ersten Formel der Exponent "$d-1$" durch "$k-1$" zu ersetzen. Es muss also heißen:

$\sum_{m=1}^{n}(U(m)-G(m)) = \sum_{k,\ell\in\mathbb{N}^*,\, k\ell\le n}(-1)^{k-1} = \sum_{k\le\sqrt{n}}(-1)^{k-1}[n/k] + \sum_{\ell<\sqrt{n}}\big(\sum_{\sqrt{n}<k\le n/\ell}(-1)^{k-1}\big)$

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 4.F, Aufg. 29b)**, p. 118 (1.7.2010)

Da an dieser Stelle die o-Notation noch nicht bekannt ist, ersetze man in der letzten frei stehenden Formel "$o(1)$" durch "τ_n mit einer Nullfolge (τ_n)".

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, Satz 6.B.4**, p. 163 (15.3.2012)

In der zweiten Zeile des Beweises von Satz 6.B.4 ersetze man "für alle $H \in \mathfrak{E}(H)$" durch "für alle $H \in \mathfrak{E}(I)$". (Wir verdanken diesen Hinweis Herrn D. Schult, Greifswald.)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 7.C, Aufg. 21b)**, p. 199 (1.7.2013)

In der Fußnote 2 ersetze man den Hinweis in der Klammer durch folgenden Satz: "Zum Beweis betrachte man andernfalls bei $m < n-1$ die größte Zweierpotenz, die einen der Nenner $m, \ldots, n-1$ teilt."

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 8.B, Aufg. 18d)**, p. 226 (1.7.2010)

In der dritten frei gestellten Formel von Aufg. 18d) fehlt im Exponenten des letzten Terms ein "$-$". Sie muss also lauten:

$$E_{n,k} = \sum_{\nu=-k}^{\ell} c_{\nu,k}\big((k+1)!\big)^{\nu/(k+1)} \cdot \Gamma\Big(\frac{k+1+\nu}{k+1}\Big) \cdot n^{-\nu/(k+1)} + O\big(n^{-(\ell+1)/(k+1)}\big)$$

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, Beispiel 10.A.7**, p. 244 (1.4.2011)

In der sechstletzten Zeile des Beispiels füge man am Ende des Satzes ", vgl. Band 3, Satz 7.G.20" hinzu.

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 10.B, Aufg. 30f)**, p. 253 (1.7.2010)

Man ersetze "φ" durch "Φ".

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 10.C, Aufg. 5a)**, p. 261 (1.2.2011)

Man füge zur Aufgabe 5a) hinzu: "Allgemeiner: Jede stetige Funktion $I \to \mathbb{R}$, die nur abzählbar viele Werte annimmt, ist konstant."

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 10.D, Aufg. 6**, p. 266 (1.4.2011)

In der dritten Zeile der Aufgabe schreibe man "im Allgemeinen" statt "im allgemeinen".

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 12.A, Bemerkung 12.A.15**, p. 293 (1.7.2010)

In der letzten Zeile des vorletzten Abschnitts dieser Bemerkung ist das erste Komma zu streichen.

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 12.C, Aufgabe 3**, p. 315 (1.11.2012)

Man füge ans Ende der Aufgabe innerhalb der Klammer den folgenden Text hinzu:

– Bemerkung. Ist eine der Reihen, etwa $\sum a_n$, absolut konvergent, so beweist man mit Mertens sowohl die Konvergenz von $\sum c_n$ als auch die angegebene Formel leicht direkt. Denn: Ist $M > 0$ eine obere Schranke für die Beträge der Partialsummen von $\sum |a_n|$ und $\sum b_n$ und ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben sowie $\sum_{k=m}^n |a_k| \le \varepsilon/2M$, $\big|\sum_{k=m}^n b_k\big| \le \varepsilon/2M$ für $n \ge m > n_0$, so gilt für $n \ge 2n_0$

$$\Big|\sum_{k\le n} c_k - \Big(\sum_{\ell\le n/2} a_\ell\Big)\Big(\sum_{m\le n/2} b_m\Big)\Big| = \Big|\sum_{\ell\le n/2} a_\ell \sum_{n/2<m\le n-\ell} b_m + \sum_{n/2<\ell\le n} a_\ell \sum_{m\le n-\ell} b_m\Big|$$
$$\le \sum_{\ell\le n/2} |a_\ell|\,\varepsilon/2M + \sum_{n/2<\ell\le n} |a_\ell| M \le M(\varepsilon/2M) + (\varepsilon/2M)M = \varepsilon.$$

Beispiel: Es ist $\ln^2 2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} 1/(k+1)(n-k+1) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_{n+1}/(n+2)$ oder $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}H_n/n = \big(\zeta(2) - \ln^2 2\big)/2$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. (Man beachte $H_n/(n+1) = H_{n+1}/(n+1) - 1/(n+1)^2$.) Dagegen konvergiert zwar die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/(n+1)^{1/2} = (1-\sqrt{2})\zeta(1/2)$, vgl. 6.A, Aufg. 11a), nicht jedoch ihr Cauchy-Produkt mit sich selbst $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} 1/\big((k+1)(n-k+1)\big)^{1/2}$. Zum Beispiel ist $\sum_{k=0}^{n} 1/\big((k+1)(n-k+1)\big)^{1/2} \ge 1$.

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 12.D, Aufgaben**, p. 325f (1.4.2011)

Man streiche Aufg. 13 (die gleichwohl korrekt ist) und ersetze Aufg. 9 durch die folgende:

9. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex-analytisch.

a) Existiert $a := \lim_{z\to\infty} f(z)$, so ist f konstant. Insbesondere ist f die Nullfunktion, wenn $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ ist. (Es genügt, den Spezialfall $a = 0$ zu behandeln. Dieser ergibt sich sofort aus dem Maximumsprinzip 12.D.6: Ist f nicht konstant, so ist die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $r \mapsto \operatorname{Max}\{|f(z)| \mid |z| = r\}$ streng monoton wachsend. – Man erhält damit den folgenden eleganten *Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra* 11.A.7: Sei $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \ne 0$, $n \ge 1$, ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstelle in $\mathbb{C}$. Dann ist der Kehrwert $g := 1/f$ analytisch auf $\mathbb{C}$, und wegen $g \sim 1/a_n z^n$ für $z \to \infty$ ist $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, also $g \equiv 0$. Widerspruch!)

b) Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $|f(z)| = o\big(|z|^{n+1}\big)$ für $z \to \infty$, d.h. $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^{n+1} = 0$. Dann ist f eine Polynomfunktion vom Grade $\le n$. Für $n = 0$ ergibt sich insbesondere: Ist f beschränkt, so ist f konstant (Satz von Liouville). (Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die Potenzreihenentwicklung von f um 0 und

$P(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$. Dann ist $g(z) := (f(z) - P(z))/z^{n+1}$ analytisch auf ganz $\mathbb{C}$ und $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$ nach Vorsaussetzung, also $g \equiv 0$ nach a).)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 14.D,** p. 406 (1.2.2011)

In der 11. Zeile v.u. (im ersten Absatz nach dem Beweis von 14.D.1 drei Zeilen hinter den Skizzen) ersetze man "die Funktion $f(\frac{1}{2}(a+b)-x)$" durch "die Funktion $f(a+b-x)$".

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 14.D, Aufg. 5**, p. 408 (1.7.2010)

Man ersetze in der Aufgabe "K" stets (d.h. 4-mal) durch "K_0" und füge den folgenden Teil d) hinzu:

d) Man behandle das vorstehende Kreditproblem unter der Voraussetzung, dass Verzinsung und Tilgung kontinuierlich erfolgen. Die Schuldenfunktion $K(t)$ erfüllt dann die (lineare) Differenzialgleichung $\dot{K} = pK - R$ mit $K(0) = K_0$ und der leicht zu findenden Lösung $K(t) = K_0\big(e^{pt}(p-r)+r\big)\big/p$ (mit $r = R/K_0$, vgl. auch Abschnitt 19.B). Ferner betrachte man die Fälle, dass die Tilgung (im diskreten Fall) erst nach $m_0 > 1$ Jahren bzw. (im kontinuierlichen Fall) erst zum Zeitpunkt $t_0 > 0$ beginnt.

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 14.E, Aufg. 2**, p. 418 (1.7.2010)

Zur Aufg. 2 füge man folgenden Teil hinzu:

g) Man beweise die zu 12.E, Aufg. 12 analoge Aussage für Dirichlet-Reihen: Ist $f(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n/n^s$ eine konvergente Dirichlet-Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}_+$ und Konvergenzabszisse $\alpha \in \mathbb{R}$, so besitzt f keine analytische Fortsetzung in den Punkt α. (Andernfalls gäbe es ε, η mit $0 < \varepsilon < \eta$ derart, dass die Potenzreihenentwicklung $f(s) = \sum_{k=0}^\infty \dfrac{f^{(k)}(\alpha+\varepsilon)}{k!}(s-\alpha-\varepsilon)^k$ von f um $\alpha+\varepsilon$ für $s = \alpha+\varepsilon-\eta < \alpha$ absolut konvergiert. Zur Darstellung der Ableitungen $f^{(k)}(\alpha+\varepsilon)$ benutze man c). Man kann $\alpha = 0$ annehmen. – Mit der Bemerkung 12.D.5 erhält man dann sogar: Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um $\alpha+\varepsilon$ ist ε für *jedes* $\varepsilon > 0$.)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 14.E, Aufg. 5**, p. 419 (1.7.2010)

Man ersetze das Ende der Aufgabe hinter "die Rekursionsformel" durch:

$$c_k = 3\,\frac{c_1c_{k-2} + c_2c_{k-3} + \cdots + c_{k-2}c_1}{(2k+3)\,(k-2)}\,, \qquad k > 2\,,$$

also $c_3 = c_1^2/3$, $c_4 = 3c_1c_2/11$ usw. (Ein Analogon dazu für die Funktion H_1 aus Aufg. 4 ist die Differenzialgleichung $H_1' + H_1^2 - 3d_1 = 0$, die man übrigens ähnlich wie Satz 14.E.6 beweisen kann, indem man die Anfangsbedingung $H_1(-1/2) = H_1(1/2) = 0$ und dann die Periodizität $H_1(z) = H_1(z+1)$ zeigt (vgl. den Hinweis zu Aufg. 4c)), und die die Rekursionsformel

$$d_\nu = -\frac{d_1d_{\nu-1} + \cdots + d_{\nu-1}d_1}{2\nu+1} \qquad \text{oder} \qquad \zeta(2\nu) = 2\,\frac{\zeta(2)\zeta(2\nu-2) + \cdots + \zeta(2\nu-2)\zeta(2)}{2\nu+1}\,,$$

$\nu > 1$, zur Folge hat, z.B. $\zeta(4) = 2\zeta^2(2)/5$. Siehe auch Aigner, M.; Ziegler, G.M.: Proofs from THE BOOK, ^{4}2010, Chapter 8.)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 18.A**, p. 503 (1.4.2011)

Die Aufgabe enthält ein falsches Vorzeichen und eine unnötige Voraussetzung. Man ersetze sie durch:

Die stetige Funktion $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend. Dann ist $(-1)^{m+1}\int\limits_0^1 f(t)\,B_{2m+1}(t)\,dt \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. (Man benutze Beispiel 18.A.6 (1).)

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 18.B**, p. 511 (1.4.2011)

Den vorletzten Absatz von Abschnitt 18.B ersetze man durch folgenden Text:

Aus 18.B.6 lässt sich schnell der Primzahlsatz $\pi(x) \sim x/\ln x$ für ($x \in \mathbb{R}$ und) $x \to \infty$ mit einfachen funktionentheoretischen Mitteln folgern. Vgl. dazu Band 3 (Version 2010), Beispiel 7.G.15 und insbesondere Satz 7.G.20. Einen anderen funktionentheoretischen Beweis, der allerdings präzisere Abschätzungen für die Werte der ζ-Funktion auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ erfordert, findet man in dem (auch generell empfehlenswerten) Lehrbuch von E. Freitag und R. Busam: Funktionentheorie, Berlin 1993.

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 19.C, Beispiel 19.C.5 (4),** p. 556 (1.12.2011)

In der dritten Formelzeile des angegebenen Teilbeispiels muss es heißen

$$U_{\text{eff}} := U + \frac{2c_0^2 m}{r^2} = mgh(r) + \frac{2c_0^2 m}{r^2} \quad \text{statt} \quad U_{\text{eff}} := \frac{U + 2c_0^2 m}{r^2} = mgh(r) + \frac{2c_0^2 m}{r^2} \;.$$

Band 1, 3. Aufl. (Version 2010)**, 19.C, Aufg. 20**, p. 566 (1.7.2010)
In der letzten Zeile der Aufgabe muss es "Bd. 3, 8.C.4" statt "Bd. 4, 8.C.4" heißen.