

# Seminar über Nichtstandardanalysis

## Literatur

- [AFHL] Sergio Albeverio, Jens Erik Fenstad, Raphael Høegh-Krohn, Tom Lindström. *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*. Academic Press, Orlando-New York-London 1986.
- [C] Nigel Cutland (ed.). *Nonstandard Analysis and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney 1988.
- [D] Martin Davis. *Applied Nonstandard Analysis*. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney-Toronto 1977.
- [DD] Francine Diener, Marc Diener (eds.). *Nonstandard Analysis in Practice*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1995.
- [G] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals*. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg 1998.
- [HK] J. M. Henle, E. M. Kleinberg. *Infinitesimal Calculus*. The MIT Press, Cambridge (Massachusetts)-London 1979 (Eine gut motivierte sehr intuitive Einführung für Studienanfänger!)
- [HL] A. E. Hurd, P. A. Loeb. *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. Academic Press, Inc., Orlando-San Diego-New York usw. 1985.
- [K] H. J. Keisler. *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Prindle, Weber & Schmidt, Boston 1976.
- [La] Detlef Laugwitz. *Infinitesimalrechnung*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich 1978.
- [Li] Tom Lindstrøm. „An Invitation to Nonstandard Analysis“. In [C].
- [LG] Robert Lutz, Michel Goze. *Nonstandard Analysis, a Practical Guide with Applications*. Lecture Notes in Mathematics 881. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1981.
- [LR] Dieter Landers, Lothar Rogge. *Nichtstandard Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1994.
- [N] E. Nelson. „Internal Set Theory: a New Approach to Nonstandard Analysis“. *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 1165-1198.
- [P] A. Prestel. „Non-Standard Analysis“. In: Ebbinghaus et. al. *Zahlen*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1992.
- [Robe] Alain Robert. *Nonstandard Analysis*. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore 1988.
- [Robi] A. Robinson. *Non-Standard Analysis*. North Holland 1970. (Das klassische Werk des Erfinders der Theorie, Zugang über Modelltheorie.)
- [V] M. Väth. *Nonstandard Analysis*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2007.

Mit Ausnahme der Arbeit von Nelson stehen die wichtigsten dieser Bücher in der Seminarbibliothek (im Bibliotheksbüro), damit sie jederzeit verfügbar sind zur Benutzung in der Bibliothek.

## Vortragsthemen

Die folgende Themeneinteilung ist nur als groben Vorschlag zu sehen. Themen können vorgezogen oder auf den nächsten Vortrag verschoben werden, wenn dadurch die Einhaltung des zeitlichen Rahmens erleichtert wird. Falls Sie bei der Vorbereitung feststellen, daß Ihr Thema zu viel oder zu wenig Stoff für eine Sitzung beinhaltet, sprechen Sie bitte mit mir über eine Änderung der Stoffeinteilung.

Die Literaturangaben sind natürlich auch nur ein Vorschlag. Zur Vorbereitung Ihres Vortrags müssen Sie nicht alle relevanten Bücher verwenden; Sie können sich diejenigen aussuchen, mit denen Sie am besten arbeiten können.

**Vortrag 1.** Einführung und historischer Hintergrund (Wassermann, wenn kein Student eindringlich wünscht, diesen Vortrag zu halten)

**Vortrag 2** und **Vortrag 3.** Filter, Ultrafilter, die Ultrapotenzkonstruktion der hyperreellen Zahlen, hyperreelle Zahlen als nichtarchimedischer angeordneter Erweiterungskörper  ${}^*\mathbf{R}$  von  $\mathbf{R}$ . Erweiterung von Funktionen und Relationen von  $\mathbf{R}$  zu  ${}^*\mathbf{R}$ , Standardteile, die Nichtstandarderweiterung von bekannten Mengen.

**Vortrag 4.** Formale Sprachen, Aussagen, Modelle für Aussagen, das Übertragungsprinzip und sein Beweis.

**Vortrag 5.** Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit und bekannte Sätze, die damit zusammenhängen.

**Vortrag 6.** Differentiation, Integration, Folgen von Funktionen.

**Vortrag 7.** Interne Mengenlehre (Nelson's „Internal Set Theory“)

**Vortrag 8.** Verallgemeinerung der Ultrapotenzkonstruktion: Oberstrukturen, die formale Sprache dazu, Ultrapotenzen, das Übertragungsprinzip, „intern“ und „extern“.

Folgende Themen können ohne weiteres ersetzt werden oder ergänzt werden durch Anwendungen aus anderen Gebieten der Mathematik, falls der Vortragende oder andere Teilnehmer dies wünschen.

**Vortrag 9.** Nichtstandardtopologie, Definitionen und Grundeigenschaften

**Vortrag 10.** Nichtstandardtopologie: metrische Räume, Banachräume, Hilberträume

**Vortrag 11.** Nichtstandardmethoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Loeb Maße

**Vortrag 12.** Vervollständigung und p-adische Zahlen

**Vortrag 13.** Unendliche Kombinatorik und der Satz von Ramsey

**Vortrag 14.** Die Van der Pol Gleichung, Enten und Flüsse

**Vortrag 15.** Nichtstandardanalysis in Unterricht und Didaktik

## Literaturvorschläge für diese Vorträge

Die Auswahl von geeigneter Literatur, mit deren Hilfe man sich in ein neues Gebiet der Mathematik gut einarbeiten kann, ist immer Geschmacksache; jeder Autor hat seinen eigenen Zugang und seine eigene Art, Dinge zu erklären, und gerade bei einem etwas „esoterischen“ Thema wie Nichtstandardanalysis hängt es sehr von der Person des Empfängers ab, welche Art der Darlegung verständlich ist und welche nicht. Folgende Vorschläge entsprechen *meinem* Geschmack, aber wenn Sie damit nicht gut klar kommen, lohnt es sich, auch die hier nicht erwähnten Werke aus der Literaturliste zu Hilfe zu ziehen. Hier meine Empfehlungen:

Für alle Vorträge bis auf 7 und 12–15: [HL]

Für 2, 3, 4 außerdem: [P] und teilweise [V]

Für 5, 6 und teilweise für 8 außerdem [G] [V]

Für 7: [N] [Robe], eventuell [DD], [LG]

Für Vorträge über Anwendungen: [Robe] [C] [G] [DD] [LG] [V] [AFHL], bei den späteren Vorträgen speziell:

Für 9: [V]

Für 11: [HL] [C] [AFHL] [G] [LR]

Für 12 und 13: [G]

Für 14: [LG] [DD]

Für 15: [DD] und selber recherchieren!