

Kurven und Flächen

Gerhard Knieper
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
SS 2010

Version vom 22. Juli 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Kurventheorie	5
1.1	Euklidischer Raum	5
1.2	Längen von Kurven	7
1.3	Krümmung von Kurven	10
1.4	Kurven als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen	12
1.5	Ebene Kurventheorie	14
1.6	Globale Theorie ebener Kurven	18
1.7	Kurventheorie im \mathbb{R}^n	30
2	Flächentheorie	43
2.1	Immersionen und Untermannigfaltigkeiten	43
2.2	Tangentialraum und Normalraum	54
2.3	Geometrie von Hyperflächen	58
2.4	Rechnen in lokalen Koordinaten	66
3	Die innere Geometrie von Hyperflächen	73
3.1	Geodätische und die kovariante Ableitung	73
3.2	Die kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten	77
3.3	Das Theorema egregium	80
3.4	Extremaleigenschaften von Geodätischen	84
4	Differentialformen und Integralsätze	87
4.1	Differentialformen	87
4.2	Zurückholen (pull-back) von Differentialformen	95
4.3	Integration von Differentialformen	103
4.4	Integralsatz von Stokes	110
4.5	Die Volumenform und die klassischen Integralsätze	116
5	Der Satz von Gauß-Bonnet	129
5.1	Zusammenhangsform und der lokale Satz von Gauß-Bonnet	129
5.2	Der globale Satz von Gauß-Bonnet	137

Literaturauswahl:

- (1) Christian Bär
Elementare Differentialgeometrie
deGruyter Lehrbuch
- (2) M. do Carmo
Differentialgeometrie von Kurven und Flächen
Vieweg
- (3) W. Klingenberg
Eine Vorlesung über Differentialgeometrie
Springer Verlag, Heidelberger Taschenbücher
- (4) W. Kühnel
Differentialgeometrie, Kurven und Flächen
vieweg, Aufbaukurs Mathematik
- (5) B. O'Neill
Elementary Differential Geometry
Academic Press, 1966

Kapitel 1

Kurventheorie

1.1 Euklidischer Raum

Definition 1.1.1. Der *euklidische n -dimensionale Raum* ist der $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dann heißen

- $\|x\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}$ *Länge (Norm)* von x .
- $d(x, y) = \|x - y\|$ *Distanz (Abstand)* zwischen x, y .

Bemerkung. (\mathbb{R}^n, d) ist ein *metrischer Raum*.

Definition 1.1.2. Eine Abbildung $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Isometrie* (Bewegung), falls

$$d(Bx, By) = d(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Zwei Teilmengen $V, W \subset \mathbb{R}^n$ heißen *kongruent* (deckungsgleich), wenn es eine Isometrie des \mathbb{R}^n gibt, die V in W überführt.

Beispiel. Zwei Dreiecke im \mathbb{R}^2 sind kongruent, wenn die Längen ihrer Seiten paarweise übereinstimmen.

Satz 1.1.3. Eine Abbildung $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie genau dann, falls B von der Form $Bx = Ax + b$ mit

$$A \in O(n) := \{A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid A \text{ linear, } \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\}$$

und $b \in \mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. Sei $Bx = Ax + b$ mit $A \in O(n)$, so folgt

$$\|B(x) - B(y)\| = \|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\|.$$

Sei nun B eine Isometrie. Nehme zunächst $B(0) = 0$ an. Dann folgt

$$\|B(x)\| = \|B(x) - B(0)\| = \|x - 0\| = \|x\| ,$$

d.h. B ist normerhaltend. Mit Hilfe der Polarisationsformel erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle B(x), B(y) \rangle &= \frac{1}{2}(\|B(x)\|^2 + \|B(y)\|^2 - \|B(x) - B(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) = \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Also erhält B auch das Skalarprodukt. Zu zeigen bleibt die Linearität von B .

Sei e_1, \dots, e_n Standardbasis des \mathbb{R}^n . Da B das Skalarprodukt erhält, ist $B(e_1), \dots, B(e_n)$ ebenfalls eine Orthonormalbasis. Schreibe

$$B(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) B(e_j)$$

so folgt:

$$\alpha_i(x) = \langle B(x), B(e_i) \rangle = \langle x, e_i \rangle .$$

Insbesondere sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ linear, und somit ist auch B linear. Sei nun $B(0) = b \in \mathbb{R}^n$, so setze $C(x) = B(x) - b$. Dann ist $C(0) = 0$ und $\|C(x) - C(y)\| = \|B(x) - B(y)\| = \|x - y\|$, d.h. $C \in O(n)$. \square

Bemerkungen.

1. Da $A \in O(n)$ äquivalent zu $A^T A = \text{id}$ ist, folgt $\det A = \pm 1$. Eine Untergruppe von $O(n)$ bildet die spezielle *orthogonale Gruppe* $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$.
2. Die Menge $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ der Isometrien des \mathbb{R}^n bilden eine Gruppe. Sie heißt *Isometriegruppe* des \mathbb{R}^n .
3. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$, so definiert

$$\text{Iso}(D) := \{B \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n) \mid B(D) = D\}$$

eine Untergruppe von $\text{Iso}(\mathbb{R}^n)$. Je symmetrischer die Menge ist, desto größer ist die Untergruppe (s. Übungsaufgabe).

Definition 1.1.4. Eine Isometrie $B \in \text{Iso}(\mathbb{R}^n)$ mit $Bx = Ax + b$ heißt *orientierungserhaltend* (eigentlich), falls $A \in SO(n)$. Ist $A \in O(n) \setminus SO(n)$ (d.h. $\det A = -1$), so heißt B *orientierungsumkehrend* (uneigentlich).

Beispiel. *Spiegelungen* an Hyperebene sind orientierungsumkehrend, *Drehungen* um eine Achse sind orientierungserhaltend.

Bemerkung. Unter geometrischen Eigenschaften versteht man solche, die invariant unter Isometrien sind. Die Längen der Halbachsen einer Ellipse sind geometrische Eigenschaften, ihr minimaler Abstand zum Nullpunkt ist hingegen keine.

Im folgenden werden wir uns mit glatten Teilmengen des \mathbb{R}^n beschäftigen und ihre geometrischen Eigenschaften studieren. Die einfachsten Objekte sind die differenzierbaren Kurven.

1.2 Längen von Kurven

Definition 1.2.1. Eine *Kurve* ist eine stetige Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Bemerkung. Meistens verlangen wir von den Kurven, dass sie unendlich oft differenzierbar sind. Ist I nicht offen, so bedeutet die Differenzierbarkeit von $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, daß ein offenes Intervall $J \supset I$ existiert und eine differenzierbare Fortsetzung von c auf J .

Wir sind nicht an der Abbildung selbst, sondern an den geometrischen Eigenschaften der Bildmenge $c(I) \subset \mathbb{R}^n$ interessiert. Diese Bildmenge heißt auch unparametrisierte Kurve.

Definition 1.2.2. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ eine bijektive differenzierbare Abbildung mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in \tilde{I}$. Dann heißt φ eine Parametertransformation und $\tilde{c} = c \circ \varphi$ eine Reparametrisierung von c . Die Parametertransformation φ heißt *orientierungserhaltend* (*orientierungsumkehrend*), falls $\varphi'(t) > 0$ ($\varphi'(t) < 0$) für alle $t \in \tilde{I}$.

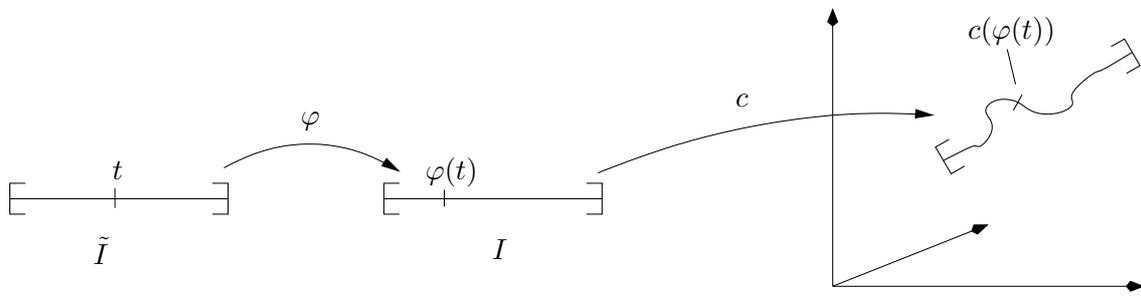


Abbildung 1.1: Reparametrisierung einer Kurve

Bemerkung. Wir sind an Eigenschaften interessiert, die invariant unter Parametertransformationen und Isometrien sind.

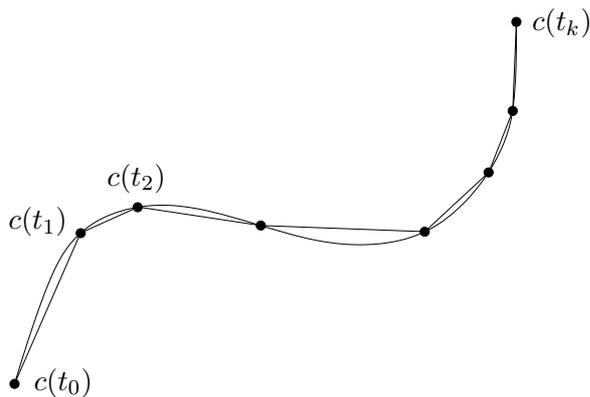


Abbildung 1.2: Längenapproximation durch Polygonzüge

Definition 1.2.3. (Länge einer Kurve)

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve. Dann heißt

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \mid k \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \right\}$$

die *Länge der Kurve* c . Kurven mit $L(c) < \infty$ heißen *rektifizierbar*.

Bemerkung. $L(c)$ ist also das Supremum der Längen einbeschriebener Polygone (siehe Abbildung 1.2). Es ist nicht schwer zu zeigen (s. Übungsaufgabe), dass $L(c)$ invariant unter Parametertransformationen und Isometrien ist. $L(c)$ muß nicht endlich sein, selbst dann nicht wenn die Kurve auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert ist (s. Übungsaufgabe). Der folgende Satz zeigt hingegen, dass stetig differenzierbare Kurven auf abgeschlossenen Intervallen rektifizierbar sind.

Satz 1.2.4. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve. Dann gilt:

$$L(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Bemerkung. Insbesondere ist c rektifizierbar, denn $\|\dot{c}(t)\|$ ist auf $[a, b]$ wegen der Stetigkeit von $\dot{c}(t)$ beschränkt.

Beweis. Wegen

$$c(t_{i+1}) - c(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{c}(t) dt$$

folgt aus der Definition des Integrals und Satz 8.3.4. (mein Skript zur Analysis)

$$\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{c}(t)\| dt$$

Wir erhalten

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| \leq \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

und somit

$$L(c) \leq \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Setze $\ell(t) = L(c|_{[a,t]})$. Sei $t > s$, so ist

$$\ell(t) - \ell(s) = L(c|_{[s,t]})$$

und es folgt:

$$\frac{\|c(t) - c(s)\|}{t - s} \leq \frac{\ell(t) - \ell(s)}{t - s} \leq \frac{\int_s^t \|\dot{c}(x)\| dx}{t - s}$$

Da die linke und rechte Seite für $t \rightarrow s$ gegen $\|\dot{c}(s)\|$ konvergieren erhalten wir

$$\ell'(s) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{\ell(t) - \ell(s)}{t - s} = \|\dot{c}(s)\|.$$

Also folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$L(c) = \ell(b) - \ell(a) = \int_a^b \ell'(s) ds = \int_a^b \|\dot{c}(s)\| ds.$$

□

Bemerkung. Der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow s} \frac{\ell(t) - \ell(s)}{t - s} = \|\dot{c}(s)\|$$

heißt *Geschwindigkeit der Kurve c* im Punkte $c(s)$.

Definition 1.2.5. Eine differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *nach der Bogenlänge parametrisiert*, falls für alle $s < t$, $s, t \in I$ gilt

$$L(c_{[s,t]}) = t - s.$$

Lemma 1.2.6. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve. c ist nach der Bogenlänge parametrisiert genau dann, falls $\|\dot{c}(t)\| = 1$.

Beweis. Ist c nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist

$$L(c_{[s,t]}) = \int_s^t \|\dot{c}(u)\| du = t - s,$$

und somit

$$\frac{d}{dt} L(c_{[s,t]}) = \|\dot{c}(t)\| = 1.$$

Ist $\|\dot{c}(t)\| = 1$ für alle $t \in I$, so folgt

$$L(c_{[s,t]}) = \int_s^t \|\dot{c}(u)\| du = t - s.$$

□

Wir müssen die Klasse der Kurven noch weiter einschränken, denn die Differenzierbarkeit von $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gewährleistet nicht, dass $c(I)$ „glatt“ ist.

Beispiel. $c(t) = (t^2, t^3)$ (*Neillsche Parabel*) Grund für dieses Phänomen ist, dass in $c(0)$ keine Tangente existiert, denn $\dot{c}(0) = 0$.

Definition 1.2.7. Eine differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls ihre Geschwindigkeit in jedem Punkte von Null verschieden ist, d.h. $\dot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Der Vektor $\dot{c}(t)$ heißt *Tangentenvektor* der Kurve c im Punkte $c(t)$.

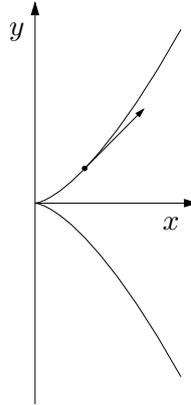


Abbildung 1.3: Neillsche Parabel mit einem Tangentialvektor

Satz 1.2.8. *Reguläre Kurven $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ lassen sich nach der Bogenlänge parametrisieren, d.h. es existiert eine Reparametrisierung $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ mit $\|\dot{\tilde{c}}(t)\| = 1$ für $\tilde{c} = c \circ \varphi$. Dabei kann φ sogar orientierungserhaltend gewählt werden.*

Beweis. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär, $a \in I$ und $\ell(t) = \int_a^t \|\dot{c}(s)\| ds$. Dann ist $\ell'(t) = \|\dot{c}(t)\| > 0$ und ℓ somit streng monoton wachsend. Setze $\ell(I) = \tilde{I}$ und $\varphi = \ell^{-1} : \tilde{I} \rightarrow I$. Dann erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel und der Regel über Differentiation der Umkehrabbildung:

$$\dot{\tilde{c}}(s) = \dot{c}(\varphi(s))\varphi'(s) = \dot{c}(\varphi(s))\frac{1}{\ell'(\varphi(s))} = \dot{c}(\varphi(s))\frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(s))\|}.$$

Insbesondere ist $\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = 1$. □

1.3 Krümmung von Kurven

Definition 1.3.1. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$\kappa_c(t) := \|\ddot{c}(t)\|$$

die *Krümmung* von c im Punkte $c(t)$.

Bemerkungen.

- (a) Wird die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen, so misst κ_c die Änderungsgeschwindigkeit der Tangente, m. a. W. die Krümmung ist um so größer, je schneller sich die Tangente ändert.
- (b) $\kappa_c(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{c}(t) = 0 \Leftrightarrow c(t) = v \cdot t + b$
d.h. die Krümmung ist genau dann null, falls c eine Gerade ist.
- (c) Für $n = 2$ werden wir der Krümmung noch ein Vorzeichen geben. Dies erlaubt zwischen Links- und Rechtskurven zu unterscheiden.

Definition 1.3.2. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär und sei $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ eine Reparametrisierung, so daß $c \circ \varphi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann setze

$$\kappa_c(t) := \kappa_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)) .$$

Lemma 1.3.3. Für eine reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$\kappa_c(t) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}(t)\|^2 \|\ddot{c}(t)\|^2 - \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle^2}}{\|\dot{c}(t)\|^3} .$$

Bemerkung. Insbesondere hängt obige Definition nicht von der Wahl von φ ab.

Beweis. Es gilt

$$\|\widehat{c \circ \varphi}(t)\| = 1 = \|\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| = |\varphi'(t)| \|\dot{c}(\varphi(t))\| . \quad (1.1)$$

Da $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, folgt

$$\begin{aligned} \kappa_{c \circ \varphi}(t) &= \|\ddot{c \circ \varphi}(t)\| = \left\| \frac{d}{dt}(\dot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)) \right\| \\ &= \|\ddot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi'^2(t) + \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t)\| , \end{aligned}$$

und damit ergibt sich für die Krümmung der Kurve c

$$\kappa_c(t) := \kappa_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)) = \|\ddot{c}(t) \cdot \varphi'^2(\varphi^{-1}(t)) + \dot{c}(t) \cdot \varphi''(\varphi^{-1}(t))\| .$$

Ist $\varphi'(t) > 0$, so folgt aus (1.1): $\varphi'(\varphi^{-1}(t)) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|} = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^{-\frac{1}{2}}$. Differenzieren wir diese Beziehung mit Hilfe der Kettenregel, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi''(\varphi^{-1}(t)) \cdot (\varphi^{-1})'(t) &= -\frac{1}{2} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \\ &= -\frac{\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|^3} . \end{aligned}$$

Wegen

$$(\varphi^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \|\dot{c}(t)\|$$

folgt

$$\begin{aligned} \kappa_c(t) &= \left\| \ddot{c}(t) \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^2} - \dot{c}(t) \frac{\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|^4} \right\| \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^3} \left\| \ddot{c}(t) \|\dot{c}(t)\| - \dot{c}(t) \frac{\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^3} \sqrt{\|\ddot{c}(t)\|^2 \|\dot{c}(t)\|^2 - 2 \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^2 + \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^2} . \end{aligned}$$

Am Ergebnis der Rechnung ändert sich nichts, falls $\varphi'(t) < 0$ für alle t ist. \square

Bemerkung. Man kann zeigen, dass κ_c eine geometrische Größe ist, d. h. invariant unter Reparametrisierungen und Isometrien.

Wir wollen zeigen, dass in der Ebene zu einer gegebenen Krümmungsfunktion eine Kurve existiert. Dazu müssen wir eine Differentialgleichung lösen.

1.4 Kurven als Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir ohne vollständige Beweise einige Fakten über gewöhnliche Differentialgleichungen. Details kann man zum Beispiel in meinem Skript zur Analysis, aber auch in jedem anderen Buch über Analysis oder gewöhnliche Differentialgleichungen finden. Der Grund, sie an dieser Stelle zu diskutieren, ist, dass Kurven meist nicht explizit gegeben sind, sondern oft als Lösungen von Differentialgleichungen definiert sind.

Sei J ein Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Ist $c : I \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve mit $I \subset J$ und

$$\dot{c}(t) = F(t, c(t)) , \quad (1.2)$$

so heißt c Lösung der durch F induzierten gewöhnlichen *Differentialgleichung* (1.2). Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, so heißt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = F(c(t))$$

autonom. Dabei interpretieren wir F als Vektorfeld auf U . Wir nennen die Lösungskurve auch Integralkurve.

Wenn wir in Zukunft von Differentialgleichungen sprechen, meinen wir immer gewöhnliche Differentialgleichungen im Sinne der obigen Definition.

Satz 1.4.1. (Picard-Lindelöf)

$F : J \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, wobei J ein Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Dann existiert zu jedem $(t_0, x_0) \in J \times U$ ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ und genau eine stetig differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\dot{c}(t) = F(t, c(t))$$

und der Anfangsbedingung

$$c(t_0) = x_0.$$

Beweis. Der Beweis beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz. Die zentrale Idee ist, dass $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösungskurve mit $c(t_0) = x_0$ beschreibt, falls c die Beziehung

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, c(s)) ds$$

erfüllt. Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass c Fixpunkt der Abbildung

$$\Phi : C^0(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \Phi(f)$$

mit

$$\Phi(f)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(s, f(s)) ds$$

ist. Man zeigt nun, dass Φ eine Kontraktion auf dem Banachraum $(C^0(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ darstellt. Dabei bezeichnet

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\| \mid t \in I_\delta\}$$

die Supremumsnorm. □

Bemerkung. Der Satz gilt unter der schwächeren Voraussetzung, dass F eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.

Das Intervall I auf dem die Lösung definiert ist, wird im Allgemeinen kleiner sein als J . Als Beispiel betrachte $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = -x^2$ und die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = -c^2(t) .$$

Dann ist $c(t) = \frac{1}{t}$ Lösung mit $c(1) = 1$. Die Lösung ist aber nicht auf ganz \mathbb{R} definiert. Lokale Existenz ist aber immer garantiert.

Von großer Bedeutung sind die linearen Differentialgleichungen.

Definition 1.4.2. Sei $A : I \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ eine stetige Kurve in den Raum der reellen $n \times n$ -Matrizen (d.h. die Komponenten von $A(t)$ sind stetige reellwertige Funktionen auf I). Dann heißt

$$\dot{c}(t) = A(t)c(t) \tag{1.3}$$

homogene lineare Differentialgleichung. Ist $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Kurve, so heißt die Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = A(t)c(t) + b(t)$$

inhomogene lineare Differentialgleichung. Hängen A und b nicht von t ab, so spricht man von linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkungen.

1. Die Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (1.3) bilden einen reellen Vektorraum, denn die Summe zweier Lösungen und das skalare Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung (Superpositionsprinzip). Die Lösungsmenge der inhomogenen linearen Differentialgleichung erhält man als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung plus eine allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.
2. Die Lösungen einer linearen Differentialgleichung existieren immer auf dem ganzen Definitionsintervall von A .
3. Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Dann ist die Lösung $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\dot{c}(t) = Ac(t)$$

mit $c(0) = x_0$ durch

$$c(t) = e^{At}x_0$$

gegeben. Dabei ist für jede Matrix $B \in M(n, \mathbb{R})$ die Matrix e^B durch die Exponentialreihe

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$$

definiert. Zur Berechnung von e^{At} kann man zum Beispiel der Matrix A ihre Jordansche Normalform zuordnen. Besonders einfach wird die Berechnung, wenn A diagonalisierbar ist.

1.5 Ebene Kurventheorie

Wir wollen nun zeigen, dass *ebene* Kurven (Kurven im \mathbb{R}^2) bis auf Isometrie durch ihre Krümmung bestimmt sind. Dies ist jedoch falsch, wenn wir der Krümmung kein Vorzeichen geben.

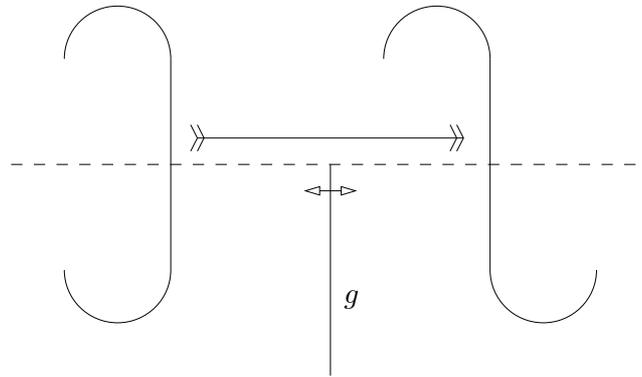


Abbildung 1.4: Nicht isometrische ebene Kurven mit gleicher Absolutkrümmung

Beispiel. Die beiden in 1.4 abgebildeten Kurven haben die gleiche Krümmung im Sinne von Definition 1.3.1 bzw. 1.3.2, sind aber nicht isometrisch. Der untere Teil der rechten Kurve entsteht durch Spiegelung des unteren Teils der linken Kurve an der eingezeichneten Geraden g . Der obere Teil der rechten Kurve entsteht durch Verschiebung aus dem linken oberen Teil.

Sei nun $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann folgt

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 2 \langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0.$$

Sei $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die *Linksdrehung* um $\pi/2$, d. h. ist $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ die *Standardbasis*, so gilt $J(e_1) = e_2$ und $J(e_2) = -e_1$. Die *Matrixdarstellung* bezüglich dieser Standardbasis ist somit durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, und es folgt

$$J \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(J entspricht in \mathbb{C} der Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$.) Insbesondere sind $J\dot{c}$, \ddot{c} orthogonal zu \dot{c} und somit linear abhängig. Definiere nun $\kappa_c(t)$ durch

$$\ddot{c}(t) = \kappa_c(t) J(\dot{c}(t)).$$

Dann gilt

$$|\kappa_c(t)| = \|\ddot{c}(t)\|,$$

d. h. bis auf das Vorzeichen stimmt die Definition der Krümmung von ebenen Kurven mit der Definition der Krümmung für höherdimensionale Kurven überein. Wie man aus der Abbildung 1.5 entnimmt, gilt $\kappa_c(t) < 0$ für Rechtskurven und $\kappa_c(t) > 0$ für Linkskurven.

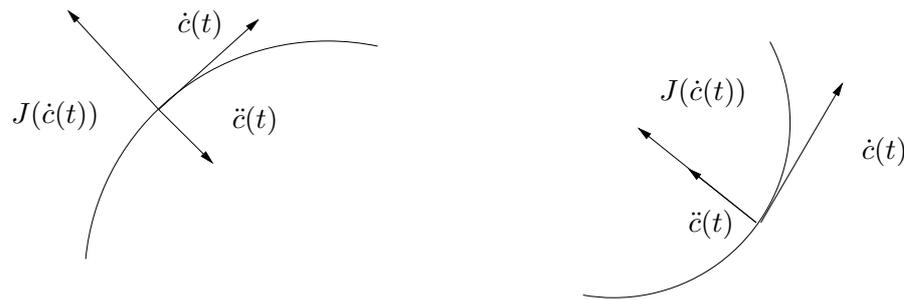


Abbildung 1.5: Krümmung ebener Kurven

Orientierungsumkehrende Parametertransformationen ändern das Vorzeichen der Krümmung, denn aus Rechtskurven werden Linkskurven.

Definition 1.5.1. Ist c eine reguläre ebene Kurve und φ orientierungserhaltende Parametertransformation, so dass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so definiere

$$\kappa_c(t) := \kappa_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)) .$$

Lemma 1.5.2. Für eine ebene reguläre Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt

$$\kappa_c(t) := \frac{\langle \ddot{c}(t), J\dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|^3} .$$

Außerdem ist κ_c invariant unter orientierungserhaltenden Parametertransformationen und eigentlichen Bewegungen. Desweiteren ändert κ_c sein Vorzeichen unter orientierungsumkehrenden Parametertransformationen bzw. Isometrien.

Beweis. (Übung) □

Bemerkung. Lemma 1.5.2 steht im Einklang mit Lemma 1.1.3, denn

$$|\langle \ddot{c}(t), J\dot{c}(t) \rangle| = \sqrt{\|\dot{c}(t)\|^2 \|\ddot{c}(t)\|^2 - \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle^2}$$

Sind nämlich $v, w \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\langle v, w \rangle^2 + \langle Jv, w \rangle^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 ,$$

denn ist $v \neq 0$, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass

$$w = \alpha \frac{v}{\|v\|} + \beta \frac{Jv}{\|v\|}$$

und somit folgt:

$$\|w\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{\langle w, v \rangle}{\|v\|} \right)^2 + \left(\frac{\langle w, J(v) \rangle}{\|v\|} \right)^2$$

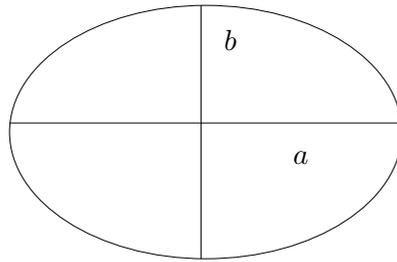


Abbildung 1.6: Ellipse

Beispiel. Die Menge

$$E = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

beschreibt eine *Ellipse* mit Halbachsen a und b . Die Kurve $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a, b > 0$ ist eine Parametrisierung der Ellipse. Da

$$\dot{c}(t) = (-a \sin t, b \cos t) \quad \text{und} \quad \ddot{c}(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$$

folgt

$$J\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \cos t \\ -a \sin t \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\kappa_c(t) = \frac{\langle \ddot{c}(t), J\dot{c}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Ist c *Kreis* von Radius r , so gilt $a = b = r$, und daher ist

$$\kappa_c(t) = \frac{r^2}{(r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r}.$$

Satz 1.5.3. (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie)

Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert bis auf eine orientierungserhaltende Isometrie genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\kappa_c(t) = \kappa(t)$.

Beweis. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, so gilt

$$\ddot{c}(t) = \kappa_c(t) \cdot J(\dot{c}(t)).$$

Dann löst die Tangentenkurve $T = \dot{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = \kappa_c(t) \cdot J(T(t)).$$

Zunächst beweisen wir, dass bis auf eine orientierungserhaltende Isometrie nur eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve existiert, deren Krümmung durch κ gegeben ist. Dazu betrachte zwei nach der Bogenlänge parametrisierte Kurven $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\kappa_\alpha(t) =$

$\kappa_\beta(t) = \kappa(t)$. Zu zeigen ist die Existenz einer orientierungserhaltenden Isometrie $B \in \text{Iso}(\mathbb{R}^2)$ mit $\beta(t) = B \circ \alpha(t)$. Wir müssen also die Existenz von $A \in \text{SO}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ nachweisen mit

$$\beta(t) = A\alpha(t) + b. \quad (1.4)$$

Sei $t_0 \in I$. Um A und b zu finden, werten wir die Gleichung (1.4) und ihre Ableitung im Punkte t_0 aus und erhalten die beiden Beziehungen

$$\beta(t_0) = A\alpha(t_0) + b$$

und

$$\dot{\beta}(t_0) = A\dot{\alpha}(t_0).$$

Da $\dot{\alpha}(t_0)$ und $\dot{\beta}(t_0)$ Einheitsvektoren sind, existiert genau eine Drehung $A \in \text{SO}(2)$, welche die zweite Gleichung erfüllt. Aus der ersten Gleichung bestimmen wir dann b . Nun müssen wir zeigen, dass die Gleichung (1.4) für alle $t \in I$ gilt. Betrachte die Kurve $\gamma(t) = A\alpha(t) + b$. Da die Krümmung unter orientierungserhaltenden Isometrien invariant ist, gilt

$$\kappa_\gamma(t) = \kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(t) = \kappa(t).$$

Insbesondere sind $T_\gamma(t) = \dot{\gamma}(t)$ und $T_\beta(t) = \dot{\beta}(t)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = \kappa(t) \cdot J(T(t)).$$

Da die Anfangsbedingungen $T_\gamma(t_0) = \dot{\gamma}(t_0) = \dot{\beta}(t_0) = T_\beta(t_0)$ übereinstimmen, folgt mit Satz 1.4.1

$$T_\gamma(t) = T_\beta(t).$$

Durch Integration erhalten wir

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \int_{t_0}^t T_\gamma(s) ds = \beta(t_0) + \int_{t_0}^t T_\beta(s) ds = \beta(t)$$

und somit gilt die Gleichung 1.4 für alle $t \in I$.

Nun wollen wir die Existenz einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve mit vorgegebener Krümmung nachweisen.

Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben und $t_0 \in I$. Sei $v_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v_0\| = 1$. Dann hat die Differentialgleichung

$$\dot{T}(t) = \kappa(t) \cdot J(T(t)) \quad (1.5)$$

genau eine Lösung $T : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $T(t_0) = v_0$. Außerdem ist $\|T(t)\| = 1$, denn

$$\langle T(t), T(t) \rangle' = 2\langle \dot{T}(t), T(t) \rangle = 2\kappa(t) \cdot \langle J(T(t)), T(t) \rangle = 0$$

Dies impliziert

$$\|T(t)\| = \|T(t_0)\| = 1.$$

Dann ist $c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t T(s) ds$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\kappa_c = \kappa$. \square

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir nun eine Methode zur Berechnung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c mit vorgegebener Krümmung κ mit $\kappa \in C^1(I)$ und den Anfangsbedingungen $c(t_0) = x_0$ und $\dot{c}(t_0) = T(t_0) = v_0$ angeben. Wegen $\|\dot{c}(t)\| = \|T(t)\| = 1$ existiert eine Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ (siehe Satz 1.6.1). Dann folgt aus (1.5)

$$\dot{T}(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \cdot \theta'(t) = \kappa(t) \cdot J(T(t)) = \kappa(t) \cdot (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\theta'(t) = \kappa(t) \Leftrightarrow \theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t \kappa(s) ds,$$

wobei $(\cos \theta(t_0), \sin \theta(t_0)) = v_0$. Dann ist

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) ds$$

eine Kurve mit $\kappa_c = \kappa$.

Beispiel. (*Cornusche Spirale*)

Diese Kurve ist dadurch charakterisiert, dass die Krümmung der Kurve proportional zur Weglänge ist, d.h.

$$\frac{\kappa(t)}{t} = a$$

für eine Konstante a . Diese Kurve ist im Straßenbau von Relevanz, da beim Befahren einer Straße solchen Kurvenverlaufes die Auslenkung des Lenkrades proportional zum zurückgelegten Weg ist. Mit den Anfangsbedingungen $c(0) = 0$ und $\dot{c}(0) = (1, 0)$ ergibt sich insbesondere $\theta(0) = 0$, und es folgt

$$\theta(t) = \int_0^t a \cdot s ds = \frac{a}{2} t^2,$$

und wir erhalten

$$c(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{a}{2}s^2\right) ds, \int_0^t \sin\left(\frac{a}{2}s^2\right) ds \right).$$

Man zeigt (Fresnelsche Integrale)

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{a}{2}s^2\right) ds = \int_0^\infty \sin\left(\frac{a}{2}s^2\right) ds = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

1.6 Globale Theorie ebener Kurven

Die Krümmung ist eine lokale Eigenschaft einer Kurve — sie hängt nur von dem Verhalten der Kurve in der Umgebung eines Punktes ab. Die Länge ist ein Beispiel für eine globale Eigenschaft.

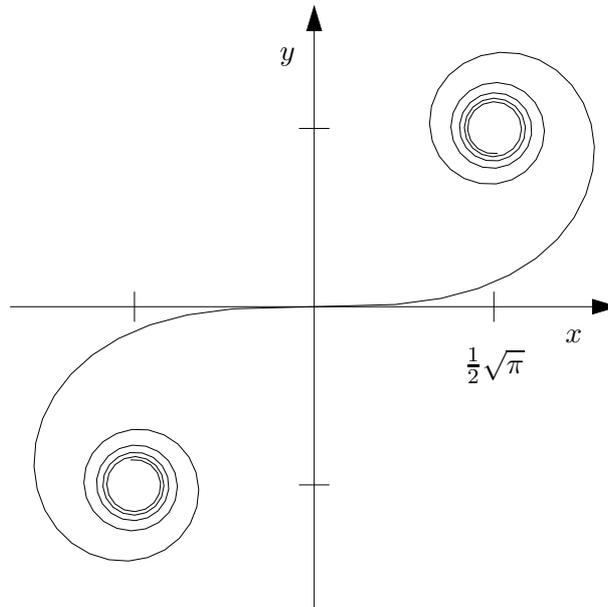


Abbildung 1.7: Cornusche Spirale

Wir wollen nun etwas subtilere globale Eigenschaften von geschlossenen ebenen Kurven kennen lernen, nämlich die *Tangentendrehzahl* und die *Umlaufzahl*. Dazu ist es zweckmäßig, die komplexe *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zu betrachten. Sie ist durch die Exponentialreihe

$$\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

definiert. Es gilt für $z = x + iy$

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Die Exponentialfunktion ist analytisch (holomorph) und somit unendlich oft differenzierbar. Auf dem Streifen

$$D = \{z \mid -\pi < \operatorname{im}(z) < \pi\}$$

ist

$$\exp : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

ein *Diffeomorphismus*. Die Umkehrabbildung

$$\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow D$$

heißt *Logarithmus* (genauer Hauptwert des Logarithmus). Insbesondere gilt für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in (-\pi, \pi)$

$$\log(e^x e^{iy}) = x + iy.$$

Die Funktion $\arg : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow (-\pi, \pi)$ mit $\arg(z) = \operatorname{im}(\log(z))$ heißt *Argument* von z . Sei

$$S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\} \cong \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

der Einheitskreis. Dann läßt sich jede Funktion $g : [a, b] \rightarrow S^1 \setminus \{-1\}$ darstellen als

$$g(t) = e^{i \arg(g(t))} .$$

Satz 1.6.1. Sei $f : [a, b] \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Dann existiert eine stetige Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = e^{i\varphi(t)} .$$

Die Abbildung φ ist bis auf eine Konstante der Form $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt, d.h. ist $\tilde{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein weitere Abbildung mit $f(t) = e^{i\tilde{\varphi}(t)}$, so gilt für alle $t \in [a, b]$

$$\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) = 2\pi k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung. Eine Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = e^{i\varphi(t)}$ heißt *Lift* oder *Polarwinkel-funktion* von f . Schreiben wir f reell, so erhalten wir $f(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit. Seien $\varphi, \tilde{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen mit $f(t) = e^{i\varphi(t)} = e^{i\tilde{\varphi}(t)}$. Dann gilt

$$e^{i(\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t))} = 1$$

und somit $\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t) = 2\pi k(t)$ mit $k(t) \in \mathbb{Z}$. Da $\varphi, \tilde{\varphi}$ stetig sind, ist auch $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{Z}$ stetig und somit ist k konstant. (Begründung?)

Nun müssen wir noch die Existenz beweisen. Sei also $f : [a, b] \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Da das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, ist f auch gleichmäßig stetig. Daher existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(t) - f(s)| < 1$ für alle $t, s \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$. Dies impliziert für alle $t, s \in [a, b]$ mit $|t - s| < \delta$

$$\left| \frac{f(t)}{f(s)} - 1 \right| < \frac{1}{|f(s)|} = 1,$$

sowie insbesondere $\frac{f(t)}{f(s)} \neq -1$. Somit können wir eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ wählen, mit

$$\frac{f(t)}{f(t_k)} \neq -1 \tag{1.6}$$

für alle $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Nun läßt sich die Funktion φ wie folgt stückweise definieren. Sei zunächst $\varphi(a)$ so gewählt, dass $f(a) = e^{i\varphi(a)}$ gilt. Da $\frac{f(t)}{f(a)} \neq -1$ für $t \in [a, t_1]$, folgt

$$\frac{f(t)}{f(a)} = e^{i \arg\left(\frac{f(t)}{f(a)}\right)}$$

und somit $f(t) = e^{i\varphi(t)}$ mit der auf $[a, t_1]$ stetigen Funktion $\varphi(t) = \arg\left(\frac{f(t)}{f(a)}\right) + \varphi(a)$. Sei nun die stetige Funktion $\varphi : [a, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = e^{i\varphi(t)}$$

für alle $t \in [a, t_k]$ schon definiert. Aus (1.6) folgt für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ die Darstellung

$$\frac{f(t)}{f(t_k)} = e^{i \arg\left(\frac{f(t)}{f(t_k)}\right)} .$$

Definiere nun $\varphi : [a, t_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{für } t \in [a, t_k] \\ \arg\left(\frac{f(t)}{f(t_k)}\right) + \varphi(t_k), & \text{für } t \in [t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

Dann ist φ stetig, und es folgt $e^{i\varphi(t)} = f(t)$ für $t \in [a, t_k]$ aus der Induktionsvoraussetzung. Für $t \in [t_k, t_{k+1}]$ gilt

$$e^{i\varphi(t)} = e^{i \arg\left(\frac{f(t)}{f(t_k)}\right)} e^{i\varphi(t_k)} = \frac{f(t)}{f(t_k)} f(t_k) = f(t).$$

Nach n Schritten erhalten wir schließlich die Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit den verlangten Eigenschaften. \square

Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, dass der Lift φ einer k -mal stetig differenzierbaren Funktion ebenfalls k -mal stetig differenzierbar ist.

Korollar 1.6.2. Ist $f : [a, b] \rightarrow S^1$ stetig und $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von f , dann ist $\varphi(b) - \varphi(a)$ unabhängig von der Wahl von φ . Ist $f(b) = f(a)$ (wir nennen dann f geschlossen), so ist

$$W_f := \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Die Zahl W_f heißt Windungszahl (oder Abbildungsgrad von f).

Beweis. Ist $\tilde{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein weiterer Lift von f , so ist $\tilde{\varphi} = \varphi + 2\pi k$, und daher ist $\tilde{\varphi}(b) - \tilde{\varphi}(a) = \varphi(b) - \varphi(a)$. Ist $f(b) = f(a)$, so ist $e^{i\tilde{\varphi}(b)} = e^{i\tilde{\varphi}(a)}$ und somit $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$. \square

Bemerkung. W_f misst, wie oft das Bild der Abbildung $f : [a, b] \rightarrow S^1$ mit $f(a) = f(b)$ den Kreis umwickelt. Das Vorzeichen gibt die Umlaufrichtung an.

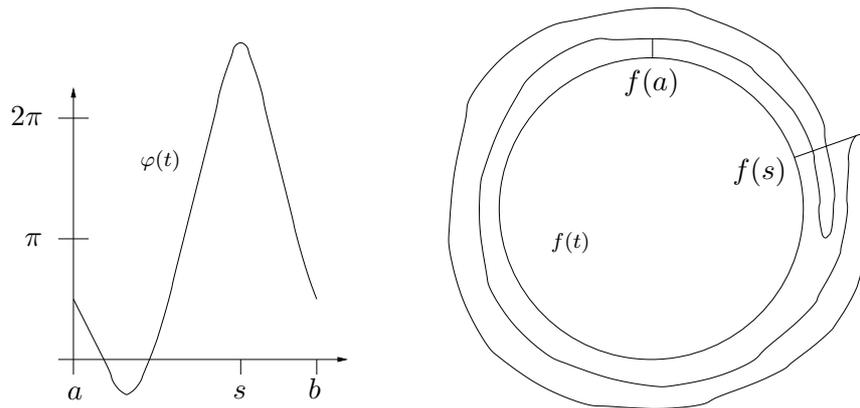


Abbildung 1.8: Eine Kurve mit Windungszahl Null

Beispiel. $f : [0, 2\pi] \rightarrow S^1$ mit $f(t) = e^{int}$. Dann ist $\varphi(t) = nt$ ein Lift von f und

$$\frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{2\pi} = n.$$

Lemma 1.6.3. *Ist $f : [a, b] \rightarrow S^1$ stetig und geschlossen und $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ orientierungserhaltende Parametertransformation, so gilt:*

$$W_f = W_{f \circ \alpha}.$$

Ist α orientierungsumkehrend so folgt:

$$W_f = -W_{f \circ \alpha}.$$

Beweis. Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lift von f , so ist $\varphi \circ \alpha : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ Lift von $f \circ \alpha$. Ist α orientierungserhaltend (bzw. orientierungsumkehrend), so gilt

$$\alpha(c) = a, \alpha(d) = b \quad \text{bzw.} \quad \alpha(c) = b, \alpha(d) = a$$

und somit folgt:

$$\begin{aligned} W_{f \circ \alpha} &= \begin{cases} \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi} & \text{falls } \alpha \text{ orientierungserhaltend} \\ \frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{2\pi} & \text{falls } \alpha \text{ orientierungsumkehrend.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} W_f & \text{falls } \alpha \text{ orientierungserhaltend} \\ -W_f & \text{falls } \alpha \text{ orientierungsumkehrend} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Lemma 1.6.4. *Es seien $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ geschlossene, stetige Kurven. Dann gilt:*

$$W_{f_1 \cdot f_2} = W_{f_1} + W_{f_2}.$$

Ist $f : [a, b] \rightarrow S^1$ nicht surjektiv, so ist $W_f = 0$.

Bemerkung. Insbesondere folgt $W_{1/f} = -W_f$ aus $\frac{1}{f} \cdot f = 1$ und

$$0 = W_{\frac{1}{f} \cdot f} = W_{1/f} + W_f.$$

Beweis. Sei $\varphi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lift von f_1 und $\varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lift von f_2 . Dann ist

$$e^{i\varphi_1} = f_1 \quad \text{und} \quad e^{i\varphi_2} = f_2$$

und

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = f_1 \cdot f_2,$$

d.h. $\varphi_1 + \varphi_2$ ist Lift von $f_1 \cdot f_2$. Daher folgt

$$W_{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1(b) + \varphi_2(b) - \varphi_1(a) - \varphi_2(a)) = W_{f_1} + W_{f_2}.$$

Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lift von f , d.h. $e^{i\varphi(t)} = f(t)$. Ist f nicht surjektiv, so ist wegen des Zwischenwertsatzes

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| < 2\pi$$

für alle $s, t \in [a, b]$. Da $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi k$, ist $k = 0$. □

Nun können wir die Invarianz der Windungszahl unter Homotopien beweisen.

Zwei *geschlossene* Kurven $f_0, f_1 : [a, b] \rightarrow S^1$ heißen *homotop*, wenn sie sich stetig ineinander deformieren lassen.

Definition 1.6.5. Seien $f_0, f_1 : [a, b] \rightarrow S^1$ stetig und geschlossen. Dann heißt f_0 homotop zu f_1 ($f_0 \simeq f_1$), falls eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S^1, \quad (s, t) \mapsto H(s, t) = H_s(t)$$

existiert mit $H_0(t) = f_0(t), H_1(t) = f_1(t)$, wobei $H_s : [a, b] \rightarrow S^1$ für alle $s \in [0, 1]$ geschlossen ist.

Satz 1.6.6. Sind $f_0, f_1 : [a, b] \rightarrow S^1$ stetige geschlossene homotope Kurven, so gilt

$$W_{f_0} = W_{f_1}.$$

Beweis. Sei $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ eine Homotopie mit $H_0 = f_0$ und $H_1 = f_1$. Da H gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|H_{s_1}(t) - H_{s_2}(t)| < 1$$

für alle $t \in [a, b]$ und $s_1, s_2 \in [0, 1]$ mit $|s_1 - s_2| < \delta$. Dies impliziert für alle $t \in [a, b]$ und $s_1, s_2 \in [0, 1]$ mit $|t - s| < \delta$

$$\left| \frac{H_{s_1}(t)}{H_{s_2}(t)} - 1 \right| < \frac{1}{|H_{s_2}(t)|} = 1,$$

und somit auch $\frac{H_{s_1}(t)}{H_{s_2}(t)} \neq -1$. Insbesondere ist die Abbildung $f : [a, b] \rightarrow S^1$ mit

$$f(t) = \frac{H_{s_2}(t)}{H_{s_1}(t)}$$

nicht surjektiv, und es folgt aus Lemma 1.6.4

$$0 = W_f = W_{H_{s_2}} - W_{H_{s_1}}.$$

Also ist $s \mapsto W_{H_s}$ lokal konstant und somit konstant auf $[a, b]$, da Intervalle zusammenhängend sind. \square

Mit Hilfe der Windungszahl lassen sich nun Umlaufzahl und Tangentendrehzahl wie folgt definieren:

Definition 1.6.7. (a) Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine geschlossene (stetige) Kurve und $p \notin \text{Bild } c$. Ist $f : [a, b] \rightarrow S^1$ die geschlossene Kurve mit

$$f(t) = \frac{c(t) - p}{\|c(t) - p\|},$$

so heißt

$$U(c, p) := W_f$$

die *Umlaufzahl* von c um p .

- (b) Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, differenzierbar geschlossene Kurve, d.h. $c(a) = c(b)$ und $\dot{c}(a) = \dot{c}(b)$. Dann ist die Tangentenkurve $\tau : [a, b] \rightarrow S^1$ mit $\tau(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$ ebenfalls geschlossen. Die Windungszahl

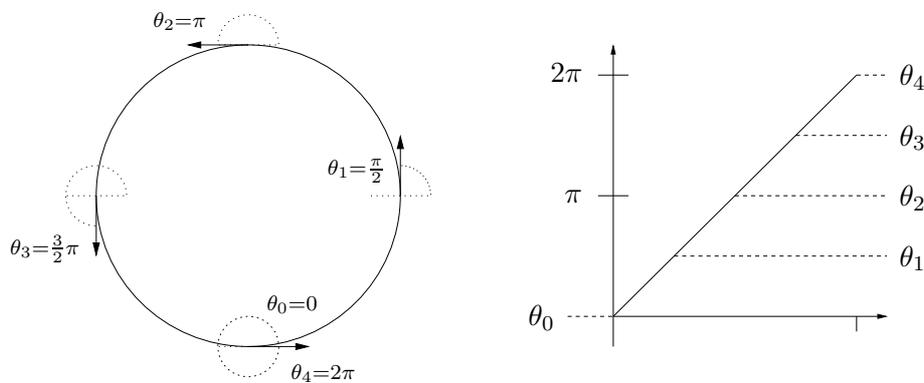
$$T(c) := W_\tau$$

heißt *Tangentendrehzahl* von c .

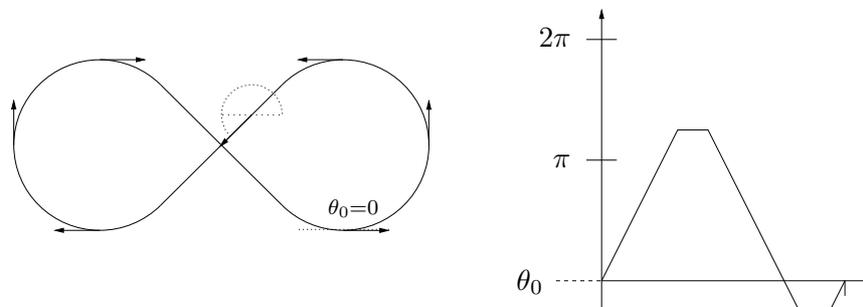
Beispiele.

- (1) Tangentendrehzahl: Ist θ der Lift von τ , so gilt $\tau(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$.

- (a) Einheitskreis



- (b) Die "Acht"



- (c) Kurve mit einem Selbstschnitt (siehe Abbildung 1.9)

- (2) Umlaufzahl (siehe Abbildung 1.10)

Definition 1.6.8. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre ebene Kurve. Dann heißt das Integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_c(t) \|\dot{c}(t)\| dt$$

die *Totalkrümmung* von c .

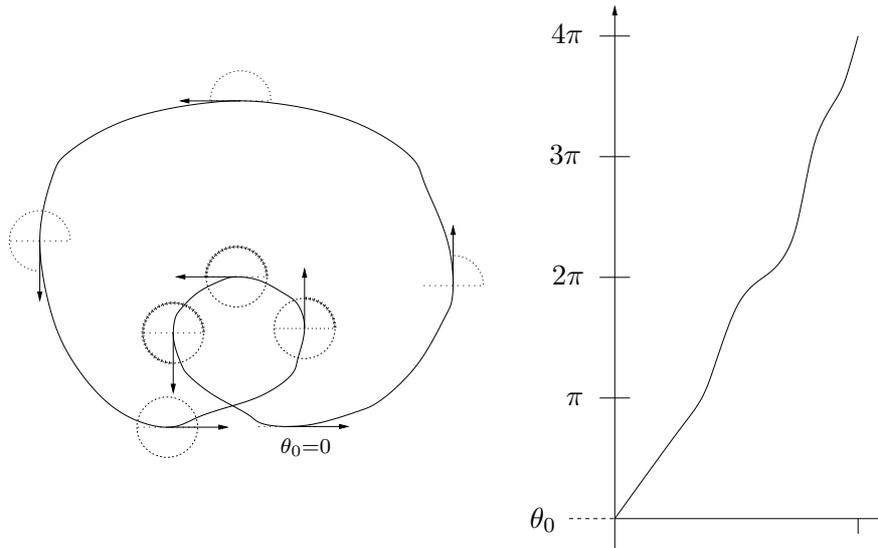


Abbildung 1.9: zu Beispiel 1(c)

Satz 1.6.9. Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre, ebene, geschlossene Kurve, so gilt

$$T(c) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_c(t) \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Bemerkung. Insbesondere ist die Totalkrümmung invariant unter orientierungserhaltenden Reparametrisierungen. Dies folgt auch aus der Transformationsformel.

Beweis. Betrachte die Krümmung

$$\kappa_c = \frac{\langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle}{\|\dot{c}\|^3} = \frac{1}{\|\dot{c}\|} \left\langle \frac{\ddot{c}}{\|\dot{c}\|}, J \left(\frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \right) \right\rangle.$$

Sei $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von

$$\tau(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}.$$

Dann gilt

$$\frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$$

und somit

$$\begin{aligned} \ddot{c}(t) &= \|\dot{c}(t)\|' \cdot (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) + \|\dot{c}(t)\| \cdot \dot{\theta}(t) \cdot (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \\ &= \|\dot{c}(t)\|' \cdot \tau(t) + \|\dot{c}(t)\| \cdot \dot{\theta}(t) \cdot J(\tau(t)). \end{aligned}$$

Wegen $J(z) \perp z$ folgt dann

$$\left\langle \frac{\ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}, J \left(\frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|} \right) \right\rangle = \left\langle \frac{\ddot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}, J(\tau(t)) \right\rangle = \dot{\theta}(t).$$

Damit erhalten wir

$$\kappa_c \cdot \|\dot{c}\| = \dot{\theta},$$

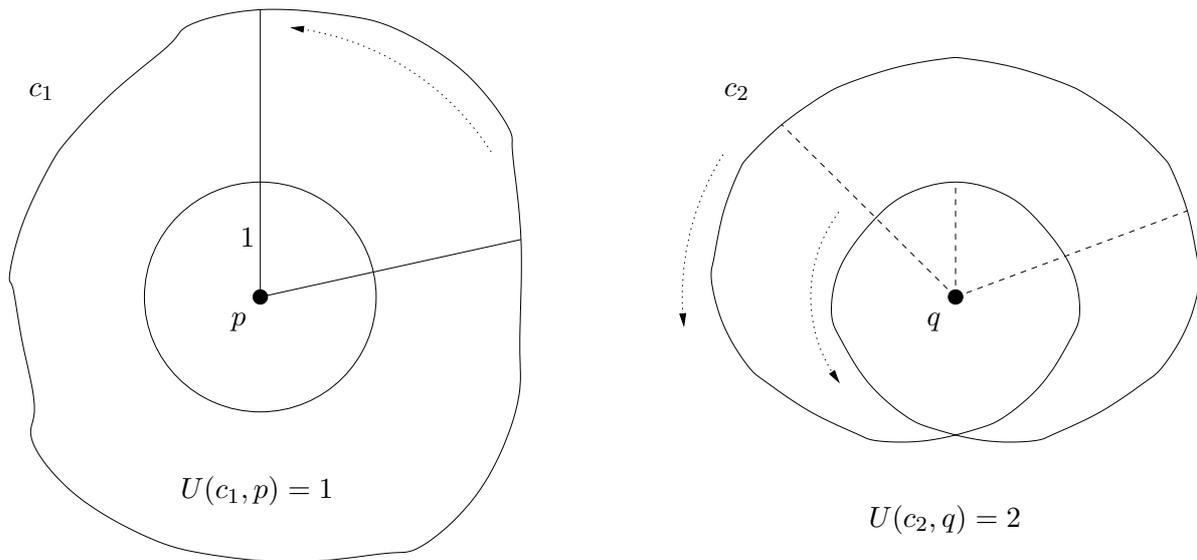


Abbildung 1.10: Zur Umlaufzahl

und es folgt

$$T(c) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \dot{\theta} dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_c \|\dot{c}\| dt.$$

□

Definition 1.6.10. Eine differenzierbar geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *einfach geschlossen*, falls $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv ist.

Satz 1.6.11. (H. Hopf)

Die Tangendrehzahl einer regulären, einfach geschlossenen ebenen Kurve ist $+1$ oder -1 .

Beweis. Wir können annehmen, dass c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann existiert eine Gerade, die c berührt, so dass c ganz auf einer Seite der Geraden liegt. Diese kann man folgendermaßen konstruieren:

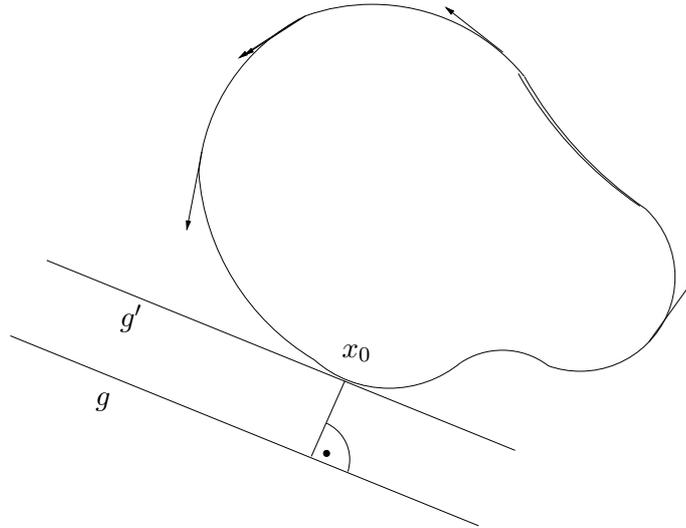
Wähle eine Gerade g mit $\text{Bild}(c) \cap g = \emptyset$. Wähle $x_0 \in \text{Bild } c$, so dass x_0 minimalen Abstand zu g hat, d. h.

$$d(x_0, g) = \inf\{d(c(t), g) \mid t \in [a, b]\}.$$

Die zu g parallele Gerade g' durch x_0 hat dann die verlangte Eigenschaft.

Nach Anwendung einer Isometrie können wir annehmen, dass $x_0 = 0$ ist, die Gerade g' mit der x -Achse übereinstimmt und c oberhalb der x -Achse verläuft. Außerdem können wir die Kurve c so parametrisieren, dass $c(0) = x_0 = 0$ gilt. Insbesondere ist dann $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve, L ihre Länge und $\dot{c}(0) = (\pm 1, 0)$.

Wir nehmen zunächst $\dot{c}(0) = (1, 0)$ an. Setze c periodisch fort durch $c(t + kL) = c(t)$, $t \in [0, L]$, $k \in \mathbb{Z}$. Die geniale Idee von H. Hopf bestand darin, zu zeigen, dass die Tangente $T(t) = \dot{c}(t)$ homotop zu der in der Abbildung 1.11 dargestellten Sekantenkurve ist. Die Idee



zur Konstruktion der Homotopie besteht darin, die Sekantenabbildung

$$F(x, y) = \frac{c(y) - c(x)}{\|c(y) - c(x)\|}$$

zu betrachten. Da die Kurve c keine Selbstschnitte besitzt, ist sie für $0 \leq x < y < L$ definiert. Sie besitzt eine stetige Fortsetzung in die Menge

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq L\},$$

gegeben durch

$$F(x, y) := \begin{cases} \frac{c(y) - c(x)}{\|c(y) - c(x)\|} & \text{für } x < y \text{ und } (x, y) \neq (0, L) \\ \dot{c}(x) & \text{für } x = y \\ -\dot{c}(0) = -\dot{c}(L) & \text{für } (x, y) = (0, L). \end{cases}$$

Zum Beweis betrachte eine Folge $(x_n, y_n) \in D$ mit $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, x_0)$, $x_n < y_n$ und $(x_n, y_n) \neq (0, L)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(x_n, y_n) &= \frac{c(y_n) - c(x_n)}{y_n - x_n} \frac{y_n - x_n}{\|c(y_n) - c(x_n)\|} \\ &= \left(\frac{c_1(y_n) - c_1(x_n)}{y_n - x_n}, \frac{c_2(y_n) - c_2(x_n)}{y_n - x_n} \right) \cdot \frac{y_n - x_n}{\|(c_1(y_n) - c_1(x_n), c_2(y_n) - c_1(x_n))\|} \end{aligned}$$

Aus dem Mittelwertsatz angewandt auf die Funktionen c_1 und c_2 folgt die Existenz von Zahlen $t_n, s_n \in (x_n, y_n)$ mit

$$c_1(y_n) - c_1(x_n) = \dot{c}_1(t_n)(y_n - x_n)$$

und

$$c_2(y_n) - c_2(x_n) = \dot{c}_2(s_n)(y_n - x_n).$$

Daraus folgt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\dot{c}_1(t_n), \dot{c}_2(s_n)) \cdot \frac{1}{\|\dot{c}_1(t_n), \dot{c}_2(s_n)\|} = \frac{(\dot{c}_1(x_0), \dot{c}_2(x_0))}{\|\dot{c}(x_0)\|} = \dot{c}(x_0).$$

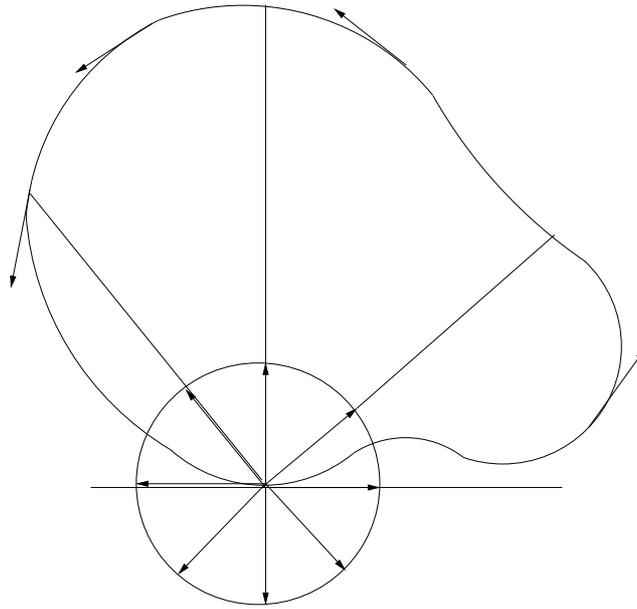


Abbildung 1.11: Sekantenkurve

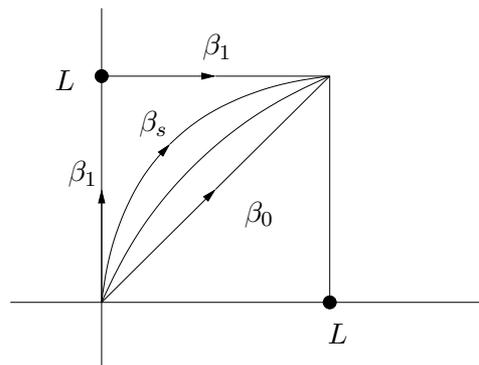
Genauso folgt:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,L)} F(x,y) = -\dot{c}(L)$$

denn

$$\frac{c(y) - c(x)}{\|c(y) - c(x)\|} = -\frac{c(x) - c(y-L)}{\|c(x) - c(y-L)\|} \rightarrow -\dot{c}(0) = -\dot{c}(L)$$

für $(x,y) \rightarrow (0,L)$. Betrachte nun die Diagonale $\beta_0 : [0, L] \rightarrow D$ mit $\beta_0(t) = (t, t)$. Dann gilt

Abbildung 1.12: Homotopie im Definitionsbereich von F

$F \circ \beta_0(t) = \dot{c}(t) = T(t)$. Betrachten wir die gegenüberliegenden Seiten $\beta_1 = [0, L] \rightarrow D$ mit

$$\beta_1(t) = \begin{cases} (0, 2t) & 0 \leq t \leq L/2 \\ (2t - L, L) & L/2 \leq t \leq L \end{cases}$$

so folgt:

$$F \circ \beta_1(t) = \left\{ \begin{array}{ll} F(0, 0) = \dot{c}(0) & t = 0 \\ F(0, 2t) = \frac{c(2t)}{\|c(2t)\|} & 0 < t < L/2 \\ F(0, L) = -\dot{c}(0) = -\dot{c}(L) & t = L/2 \\ F(2t - L, L) = -\frac{c(2t-L)}{\|c(2t-L)\|} = \frac{-c(2t)}{\|c(2t)\|} & L/2 < t < L \\ F(L, L) = \dot{c}(L) = -(-\dot{c}(0)) & t = L \end{array} \right\} =: \alpha(t)$$

Die Kurve $\alpha : [0, L] \rightarrow S^1$ ist die in Abbildung 1.11 dargestellte Sekantenkurve. Sie ist homotop zur Tangentenkurve T_c , was man wie folgt sieht: Wähle eine stetige Abbildung (siehe Abbildung 1.12) $\beta : [0, 1] \times [0, L] \rightarrow D$ mit

$$\beta(0, t) = \beta_0(t) \quad \text{und} \quad \beta(1, t) = \beta_1(t)$$

sowie

$$\beta_s(0) = (0, 0) \quad \text{und} \quad \beta_s(L) = (L, L).$$

Dann definiert $H : [0, 1] \times [0, L] \rightarrow S^1$ durch $H(s, t) = F \circ \beta(s, t)$ eine Homotopie mit $H(0, t) = T(t)$ und $H(1, t) = \alpha(t)$. Außerdem ist $H_s(0) = H_s(L) = \dot{c}(0)$. Insbesondere gilt wegen der Homotopieinvarianz der Windungszahl

$$T_c := W_T = W_\alpha.$$

Wir müssen daher nur noch $W_\alpha = \pm 1$ zeigen. Sei $\varphi : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ der Lift von α mit

$$e^{i\varphi(t)} = \alpha(t)$$

und $\varphi(0) = 0$ (wir haben $\dot{c}(0) = (1, 0)$ angenommen). Da die Kurve $\alpha([0, L/2])$ oberhalb der x -Achse liegt, gilt $\varphi([0, L/2]) \subset [0, \pi]$. Wegen $\alpha(L/2) = (-1, 0)$ folgt $\varphi(L/2) = \pi$.

Da $\alpha[L/2, L]$ unterhalb der x -Achse liegt und $\alpha(L) = (1, 0)$ ist, gilt $\varphi[L/2, L] \subset [\pi, 2\pi]$ und $\varphi(L) = 2\pi$.

Also erhalten wir

$$W_\alpha = \frac{2\pi - 0}{2\pi} = +1.$$

Ist $\dot{c}(0) = (-1, 0)$, so ergibt sich entsprechend $W_\alpha = -1$. □

Korollar 1.6.12. *Ist $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve, so gilt:*

$$\pm 1 = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_c(t) \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Beweis. Folgt aus Satz 1.6.9 und dem Hopfschen Umlaufsatz 1.6.11 □

Daraus ergibt sich nun die folgende Charakterisierung des Kreises.

Korollar 1.6.13. *(Charakterisierung des Kreises)*

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene Kurve mit $|\kappa_c(t)| \leq \alpha$. Dann ist $L(c) \geq 2\pi/\alpha$, wobei Gleichheit nur dann gilt, falls c ein Kreis mit Radius $\frac{1}{\alpha}$ ist.

Bemerkung. Es folgt also: unter allen einfach geschlossenen Kurven mit $|\kappa_c| \leq \alpha$ hat der Kreis die kleinste Länge.

Beweis. Aus Korollar 1.6.12 und der Annahme an die Krümmung von c folgt

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |\kappa_c(t)| \|\dot{c}(t)\| dt \leq \frac{\alpha}{2\pi} \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt = \frac{\alpha}{2\pi} L(c).$$

Gilt Gleichheit, so ist $|\kappa_c(t)| = \alpha$. Damit ist c ein Kreis mit Krümmung α (oder $-\alpha$ falls c in anderer Richtung durchlaufen wird). Der Radius ist damit $\frac{1}{\alpha}$. \square

1.7 Kurventheorie im \mathbb{R}^n

Ein Ziel dieses Abschnittes ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der ebenen Kurventheorie auf Kurven im \mathbb{R}^n . Ist $n > 2$, so reicht die Krümmung nicht mehr aus, um Kurven bis auf Isometrie zu charakterisieren. Dies zeigt folgendes Beispiel:

Betrachte die *Schraubenlinie* $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$. Die Formel der Krümmung ist gegeben durch $\kappa_c(t) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}(t)\|^2 \|\ddot{c}(t)\|^2 - \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle^2}}{\|\dot{c}(t)\|^3}$. Wegen

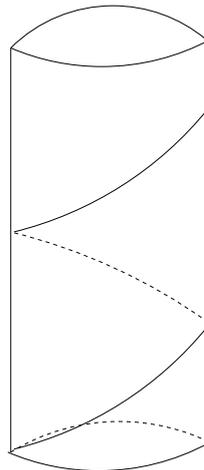


Abbildung 1.13: Schraubenlinie

$$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \quad \text{und} \quad \ddot{c}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

erhalten wir

$$\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle = 0$$

sowie

$$\|\dot{c}(t)\|^2 = \sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 2 \quad \text{und} \quad \|\ddot{c}(t)\|^2 = 1.$$

Daraus folgt

$$\kappa_c(t) = \frac{\|\dot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^2} = 1/2.$$

Insbesondere ist die Krümmung der Schraubenlinie konstant, aber sie ist nicht isometrisch zum Kreis.

Um nicht ebene Kurven bis auf Isometrie zu charakterisieren, werden wir ihr weitere geometrische Größen zuordnen. Die Idee besteht darin, jedem Punkt einer regulären Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine angepasste positiv orientierte ON-Basis $t \rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t))$ zuzuordnen, d. h. die Matrix bestehend aus den Spaltenvektoren $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ ist eine orthogonale Matrix mit Determinante Eins. Dann stellen wir ihre Ableitungen $\dot{f}_1(t), \dots, \dot{f}_n(t)$ bezüglich $f_1(t), \dots, f_n(t)$ dar. Die Matrix-Koeffizienten definieren dann weitere „Krümmungsgrößen“.

Bevor wir die allgemeine Konstruktion angeben, wollen wir den Sachverhalt im Falle ebener Kurven illustrieren.

Beispiel. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve.

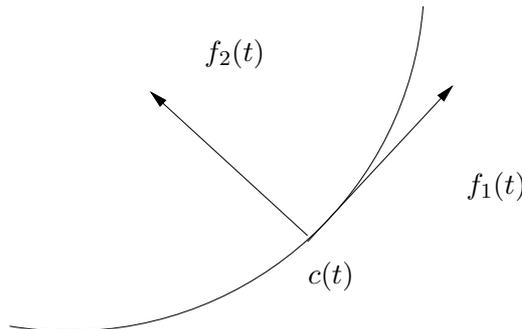


Abbildung 1.14: Frenet 2-Bein

Betrachte für jedes $t \in I$ die ON-Basis definiert durch

$$f_1(t) := \dot{c}(t) \quad \text{und} \quad f_2(t) := J(\dot{c}(t))$$

(siehe Abbildung 1.14). Dann folgt für ihre Ableitungen

$$\dot{f}_1(t) = \ddot{c}(t) = \kappa_c(t)J(\dot{c}(t)) = \kappa_c(t)f_2(t)$$

und

$$\dot{f}_2(t) = J(\ddot{c}(t)) = \kappa_c(t)J^2(\dot{c}(t)) = -\kappa_c(t)\dot{c}(t) = -\kappa_c(t) \cdot f_1(t),$$

weil $J^2 = -\text{id}$ ist.

f_1, f_2 heißt Frenet 2-Bein (*Frenetrahmen*) zu $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wegen

$$\det(\dot{c}(t), J(\dot{c}(t))) = \det \begin{pmatrix} c'_1(t) & -c'_2(t) \\ c'_2(t) & c'_1(t) \end{pmatrix} = (c'_1(t))^2 + (c'_2(t))^2 = 1$$

ist die Basis $f_1(t), f_2(t)$ für jedes t positiv orientiert.

Definition 1.7.1. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, und es seien $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n, i \in \{1, \dots, n\}$ differenzierbare Kurven. Dann heißt $\{f_1, \dots, f_n\}$ *Frenet n-Bein* für c , falls gilt:

(i) Für alle $t \in I$ ist

$$(f_1(t), \dots, f_n(t))$$

eine positiv orientierte ON-Basis.

(ii) Für alle $t \in I$ und alle $k \leq n - 1$ gilt

$$\text{Span}(f_1(t), \dots, f_k(t)) = \text{Span}(\dot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)).$$

(iii) Für alle $t \in I$ und alle $k \leq n - 1$ sind $(f_1(t), \dots, f_k(t))$ und $(\dot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t))$ gleichorientiert, d. h. für jedes $t \in I$ hat die Übergangsmatrix $(a_{ij}(t))$ gegeben durch

$$c^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^k a_{ij}(t) f_i(t)$$

positive Determinante.

Wesentlich für den Beweis der Existenz eines Frenet n -Beines ist das *Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren*. Wir benötigen folgende Version:

Lemma 1.7.2. *Es seien $v_1, \dots, v_k \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Dann existieren eindeutig bestimmte Vektoren w_1, \dots, w_k , für die gilt:*

(a) w_1, \dots, w_k sind orthonormal.

(b) $E_\ell = \text{Span}(v_1, \dots, v_\ell) = \text{Span}(w_1, \dots, w_\ell)$ für alle $\ell \in \{1, \dots, k\}$.

(c) (w_1, \dots, w_ℓ) und (v_1, \dots, v_ℓ) sind gleichorientiert für alle $\ell \in \{1, \dots, k\}$, d. h. die Übergangsmatrix (a_{ij}) gegeben durch $v_j = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ij} w_i$ hat positive Determinante.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion über $k \leq n$ geführt.

Induktionsanfang $k = 1$: Sei v_1 linear unabhängig, d. h. $v_1 \neq 0$. Dann ist w_1 durch die Eigenschaften (a), (b), (c) eindeutig festgelegt und gegeben durch

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Induktionsannahme: Für $k < n$ sei die Existenz und Eindeutigkeit gezeigt.

Zu zeigen: Sind $v_1, \dots, v_{k+1} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren, so existieren eindeutig bestimmte Vektoren w_1, \dots, w_{k+1} , die (a), (b) und (c) erfüllen.

Nach Induktionsannahme existieren zu v_1, \dots, v_k eindeutig bestimmte Vektoren w_1, \dots, w_k , die (a), (b) und (c) erfüllen. Dann ist $v_{k+1} \notin E_k = \text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$.

Die *orthogonale Projektion* von v_{k+1} auf E_k ist gegeben durch

$$\text{pr}_{E_k}(v_{k+1}) = \sum_{i=1}^k \langle w_i, v_{k+1} \rangle w_i,$$

denn die Skalarprodukte von $w'_{k+1} := v_{k+1} - \text{pr}_{E_k}(v_{k+1})$ mit den Vektoren $w_j, j = 1, \dots, k$ sind gleich Null. Setze

$$w_{k+1} := \frac{w'_{k+1}}{\|w'_{k+1}\|}.$$

Damit erfüllen (w_1, \dots, w_{k+1}) (a) und (b).

Betrachte für $\ell \leq k + 1$ die Übergangsmatrix $(w_1, \dots, w_\ell) \rightarrow (v_1, \dots, v_\ell)$, d. h. die Matrix

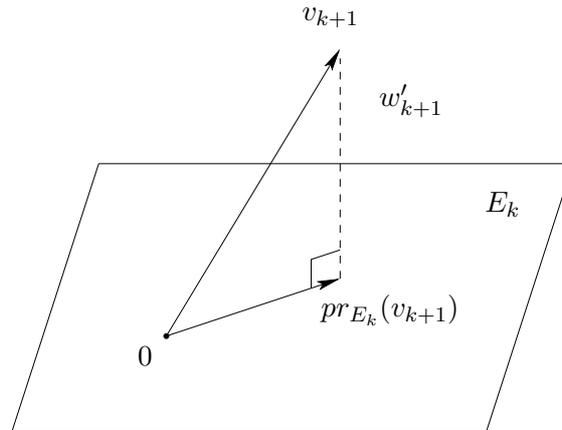


Abbildung 1.15: Orthogonale Projektion

$A_\ell := (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq \ell}$ mit $v_j := \sum_{i=1}^{\ell} a_{ij} w_i$. Da $v_j \in \text{Span}(w_1, \dots, w_j)$, ist $a_{ij} = 0$ für $i > j$, und somit hat A_ℓ obere Dreiecksgestalt, d. h.

$$A_\ell = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{\ell\ell} \end{pmatrix}.$$

Da (w_1, \dots, w_k) nach Induktionsannahme auch (c) erfüllen, ist $\det A_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} a_{ii} > 0$ für alle $\ell \leq k$. Insbesondere ist $a_{ii} > 0$ für alle $1 \leq i \leq k$. Nach Definition von w_{k+1} gilt

$$\langle v_{k+1}, w_{k+1} \rangle = \frac{1}{\|w'_{k+1}\|} \langle v_{k+1}, w'_{k+1} \rangle = \frac{1}{\|w'_{k+1}\|} \|w'_{k+1}\|^2 = \|w'_{k+1}\|$$

und somit folgt

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \langle w_i, v_{k+1} \rangle w_i = \sum_{i=1}^k \langle w_i, v_{k+1} \rangle w_i + \|w'_{k+1}\| w_{k+1}. \quad (1.7)$$

Insbesondere ist $a_{k+1,k+1} = \|w'_{k+1}\| > 0$, und die Vektoren (w_1, \dots, w_{k+1}) erfüllen auch die Eigenschaft (c).

Zu zeigen bleibt, dass der Vektor w_{k+1} durch die verlangten Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Sei \widehat{w}_{k+1} ein weiterer Vektor, so dass $(w_1, \dots, w_k, \widehat{w}_{k+1})$ die Eigenschaften (a), (b), (c) erfüllen. Aus (a) und (b) folgt

$$\widehat{w}_{k+1} \in \text{Span}(v_1, \dots, v_{k+1}) \text{ und } \widehat{w}_{k+1} \perp \text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(w_1, \dots, w_k).$$

Also gilt $w_{k+1} = \lambda \widehat{w}_{k+1}$, und da beide Vektoren normiert sind, ist $\lambda = \pm 1$. Daher gilt

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^k \langle w_i, v_{k+1} \rangle w_i + \|w'_{k+1}\| w_{k+1} = \sum_{i=1}^k \langle w_i, v_{k+1} \rangle w_i + \lambda \|w'_{k+1}\| \widehat{w}_{k+1}.$$

Wäre $\lambda = -1$, so hätte die Übergangsmatrix $(w_1, \dots, w_k, \widehat{w}_{k+1}) \rightarrow (v_1, \dots, v_{k+1})$ negative Determinante. \square

Satz 1.7.3. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^{n-1} -Kurve, so dass für alle $t \in I$ die Vektoren $\dot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind. Dann gibt es zu c genau ein Frenet n -Bein.

Beweis. Da die Vektoren $\dot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind, folgt aus dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt für alle $t \in I$ die Existenz und Eindeutigkeit von orthonormalen Vektoren $f_1(t), \dots, f_{n-1}(t)$, die die Eigenschaften (ii) und (iii) eines Frenet n -Beines erfüllen. Außerdem folgt aus dem Konstruktionsverfahren die Differenzierbarkeit von $f_1, \dots, f_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Desweiteren läßt sich $f_1(t), \dots, f_{n-1}(t)$ durch genau einen Vektor zu einer positiv orientierten ON-Basis ergänzen, d. h. eine Basis gleichorientiert zur Standardbasis e_1, \dots, e_n , also $\det(f_1(t), \dots, f_n(t)) = 1$. \square

Im nächsten Lemma zeigen wir, wie der Vektor $f_n(t)$ berechnet werden kann.

Lemma 1.7.4. Es sei (w_1, \dots, w_n) eine positiv orientierte ON-Basis und (e_1, \dots, e_n) die Standardbasis des \mathbb{R}^n . Dann gilt:

$$(i) \det(w_1, \dots, w_{n-1}, v) = \langle v, w_n \rangle \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

$$(ii) w_n = \sum_{i=1}^n \det(w_1, \dots, w_{n-1}, e_i) e_i.$$

Beweis.

$$(i) \text{ Ist } v \in \mathbb{R}^n, \text{ so gilt } v = \sum_{i=1}^n \langle v, w_i \rangle w_i, \text{ und wir erhalten}$$

$$\det(w_1, \dots, w_{n-1}, v) = \det(w_1, \dots, w_{n-1}, \langle v, w_n \rangle w_n) = \langle v, w_n \rangle.$$

(ii) Setzen wir in (i) für v den Vektor e_i ein, so folgt $\langle w_n, e_i \rangle = \det(w_1, \dots, w_{n-1}, e_i)$ und somit

$$w_n = \sum_{i=1}^n \langle w_n, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^n \det(w_1, \dots, w_{n-1}, e_i) e_i.$$

\square

Bemerkung. Aus (ii) folgt also:

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^n \det(f_1(t), \dots, f_{n-1}(t), e_i) e_i$$

und somit auch die Differenzierbarkeit von $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Allgemein definieren wir:

Definition 1.7.5. (Kreuzprodukt)

Es sei $w_1, \dots, w_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Dann heißt

$$w_1 \times \dots \times w_{n-1} = \sum_{i=1}^n \det(w_1, \dots, w_{n-1}, e_i) e_i \in \mathbb{R}^n$$

das *Kreuzprodukt* von w_1, \dots, w_{n-1} .

Bemerkungen.

1. Das Kreuzprodukt ist *schiefsymmetrisch*. Für $n = 3$ erhalten wir das aus der Schule bekannte Kreuzprodukt.

2. $w_1 \times \dots \times w_{n-1} \perp \text{Span}(w_1, \dots, w_{n-1})$, denn

$$\langle w_1 \times \dots \times w_{n-1}, w_i \rangle = \det(w_1, \dots, w_{n-1}, w_i) = 0$$

für $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

3. $\det(w_1, \dots, w_{n-1}, w_1 \times \dots \times w_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \det(w_1, \dots, w_{n-1}, e_i)^2 = \|w_1 \times \dots \times w_{n-1}\|^2$.

Daher ist $w_1 \times \dots \times w_{n-1}$ genau dann von null verschieden, falls w_1, \dots, w_{n-1} linear unabhängig sind. Sind nämlich w_1, \dots, w_{n-1} linear unabhängig, so existiert ein i , so dass w_1, \dots, w_{n-1}, e_i eine Basis ist und somit ist $\det(w_1, \dots, w_{n-1}, e_i)^2 > 0$.

Satz 1.7.6. (Frenet-Gleichungen)

Es sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte, glatte Kurve, und es seien $\dot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig für alle $t \in I$. Sei $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ das zu c assoziierte Frenet n -Bein. Dann existieren differenzierbare Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1(t) & 0 & \kappa_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\kappa_2(t) & 0 & \kappa_3(t) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1}(t) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Außerdem ist $\kappa_1 = \kappa_c$ die Krümmung der Kurve und $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}$ sind positiv.

Bemerkung. Die Ausdrücke

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{f}_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

sind $n \times n$ -Matrizen, deren i -te Zeilen aus den Vektoren $\dot{f}_i(t)$ und $f_i(t)$ bestehen. Die rechte Seite ist nach den Gesetzen der Matrixmultiplikation aufzufassen.

Beweis. Sei $\dot{f}_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} \dot{f}_j(t)$. Dann sind die Funktionen $w_{ij} = \langle \dot{f}_i, \dot{f}_j \rangle$ differenzierbar.

Wegen

$$\langle \dot{f}_i(t), \dot{f}_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

folgt

$$\langle \dot{f}_i, \dot{f}_j \rangle + \langle f_i, \dot{f}_j \rangle = w_{ij} + w_{ji} = 0,$$

und somit $w_{ij} = -w_{ji}$. Also ist die Matrix $W = (w_{ij})$ schiefsymmetrisch. Da $f_i(t) \in \text{Span}\{\dot{c}(t), \dots, c^{(i)}(t)\}$ ist, erhalten wir

$$\dot{f}_i(t) \in \text{Span}(\dot{c}(t), \dots, c^{(i+1)}(t)) = \text{Span}(f_1(t), \dots, f_{i+1}(t)).$$

Daraus folgt $w_{ij} = 0$ für $j > i + 1$. Insbesondere erfüllen die Funktionen $\kappa_i := w_{i,i+1}$ die Frenet-Gleichungen.

Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $f_1(t) = \dot{c}(t)$ und $\ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$.

Ist $n \geq 3$, so ist $f_2(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|}$, und somit folgt

$$\kappa_1(t) = \langle \dot{f}_1(t), f_2(t) \rangle = \langle \ddot{c}(t), \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} \rangle = \|\ddot{c}(t)\| = \kappa_c(t) .$$

Ist $n = 2$, so folgt $f_2(t) = J(\dot{c})$, denn die ON-Basis $(f_1(t), f_2(t))$ ist positiv orientiert. In diesem Falle gilt

$$\kappa_1(t) = \langle \dot{f}_1(t), f_2(t) \rangle = \langle \ddot{c}(t), J(\dot{c}) \rangle = \kappa_c(t) .$$

Zu zeigen bleibt für $n \geq 3$: $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$. Aus der Eigenschaft (iii) des Frenet n -Beines folgt für $i \leq n - 1$:

$$c^{(i)}(t) = a_{ii}(t)f_i(t) + b_{i-1}(t) \tag{1.8}$$

mit $a_{ii}(t) > 0$ und

$$b_{i-1}(t) \in \text{Span}(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t)) = \text{Span}(\dot{c}(t), \dots, c^{(i-1)}(t)) .$$

Durch differenzieren von 1.8 erhalten wir

$$c^{(i+1)}(t) = a_{ii}(t)\dot{f}_i(t) + \dot{a}_{ii}(t)f_i(t) + \dot{b}_{i-1}(t) ,$$

wobei $d_i(t) = \dot{a}_{ii}(t)f_i(t) + \dot{b}_{i-1}(t) \in \text{Span}(f_1(t), \dots, f_i(t))$ ist. Aus dieser Beziehung und den Frenet-Gleichungen folgt für $i \leq n - 2$ unter Beachtung von 1.8

$$\kappa_i(t) = \langle \dot{f}_i(t), f_{i+1}(t) \rangle = \frac{1}{a_{ii}(t)} \langle c^{(i+1)}(t), f_{i+1}(t) \rangle = \frac{a_{i+1,i+1}(t)}{a_{ii}(t)} > 0 .$$

□

Definition 1.7.7. Die Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die *Krümmungen* von c . Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine *Raumkurve*, so heißt $\tau = \kappa_2$ auch die *Torsion* von c .

Bemerkung. Das Frenet-Bein einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve im \mathbb{R}^3 mit $\ddot{c}(t) \neq 0$ ist gegeben durch

$$f_1(t) = \dot{c}(t), \quad f_2(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} \quad \text{und} \quad f_3(t) = f_1(t) \times f_2(t) .$$

Die zugehörigen Frenet Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(t) &= \kappa(t)f_2(t) , \\ \dot{f}_2(t) &= -\kappa(t)f_1(t) + \tau(t)f_3(t) , \\ \dot{f}_3(t) &= -\tau(t)f_2(t) . \end{aligned}$$

Die Torsion ist daher ein Maß für die Änderung des Vektors $f_2(t)$ normal zu der $(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))$ -Ebene.

Satz 1.7.8. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und $\ddot{c}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gilt: $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow c$ ist eine ebene Kurve.

Beweis. Da $\ddot{c}(t) \neq 0$ und $\ddot{c} \perp \dot{c}$, existiert das Frenet 3-Bein. Ist $\tau \equiv 0$, so folgt $\dot{f}_3 = 0$, und damit ist $f_3(t) = v_0$ konstant. Damit verläuft c in einer zu v_0 orthogonalen Ebene, denn ist

$$g(s) = \langle c(s) - c(0), v_0 \rangle,$$

so ist

$$g'(s) = \langle \dot{c}(s), v_0 \rangle = \langle f_1(s), f_3(s) \rangle = 0.$$

Damit ist g konstant, und da $g(0) = 0$ ist, ist $c(s) - c(0) \perp v_0$ für alle s . Liegt umgekehrt c in einer Ebene E , so wird diese von \dot{c} und \ddot{c} aufgespannt. Dann ist $f_3 \perp E$, und wegen $\|f_3\| = 1$ ist f_3 konstant. Also folgt $\tau = 0$ aus den Frenet-Gleichungen. \square

Definition 1.7.9. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so dass $\dot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig sind. Sei $\varphi : I' \rightarrow I$ eine orientierungserhaltende Reparametrisierung von c , so dass $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Definiere dann

$$\kappa_i(t) = (\kappa_i)_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)).$$

Bemerkung. Diese Definition ist nur sinnvoll, wenn die Ableitungen von $c \circ \varphi$ linear unabhängig sind bis zur Ordnung $n - 1$. Dies ist aber der Fall, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.7.10. (Invarianz des Frenet n -Beines und der Krümmungen)

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so dass $\dot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ für alle $t \in I$ linear unabhängig sind. Sei f_1, \dots, f_n Frenet n -Bein von c . Ist $\varphi : I' \rightarrow I$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation und $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $Bx = Ax + b$ eine Isometrie, so gilt:

(i) Die Ableitungen von $c \circ \varphi$ sind bis zur $(n - 1)$ -ten Ordnung linear unabhängig, und

$$f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi$$

ist das Frenet n -Bein von $c \circ \varphi$. Außerdem ist

$$(A(f_1), \dots, A(f_{n-1}), (\det A)A(f_n))$$

das Frenet n -Bein von $B \circ c$.

(ii) Für die Krümmungen der Kurve c gilt

$$(\kappa_i)_c(t) = \frac{\langle \dot{f}_i(t), f_{i+1}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|}$$

für alle $i = 1, \dots, n - 1$.

(iii) Invarianz der Krümmungen: Es gilt

$$\begin{aligned} (\kappa_i)_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)) &= (\kappa_i)_c(t) && \text{für } i \in \{1, \dots, n - 1\}, \\ (\kappa_i)_{B \circ c}(t) &= (\kappa_i)_c(t) && \text{für } i \in \{1, \dots, n - 2\}, \\ (\kappa_{n-1})_{B \circ c}(t) &= \det A (\kappa_{n-1})_c(t). \end{aligned}$$

Beweis.

(i) Ist $\tilde{c} = c \circ \varphi$, so gilt

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \text{und} \quad \ddot{\tilde{c}}(t) = \ddot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi'^2(t) + \dot{c}(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t).$$

Mittels Induktion erhalten wir

$$\tilde{c}^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k a_{jk}(t) c^{(j)}(\varphi(t)),$$

wobei $a_{kk}(t) = (\varphi'(t))^k > 0$ ist. Also hat die Übergangsmatrix (a_{ij}) Dreiecksgestalt, und ihre Determinante ist positiv. Insbesondere sind $(\dot{\tilde{c}}(t), \dots, \tilde{c}^{(n-1)}(t))$ linear unabhängig. Außerdem spannen für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ die Vektoren $(\dot{\tilde{c}}(t), \dots, \tilde{c}^{(k)}(t))$ und $(\dot{c}(\varphi(t)), \dots, c^{(k)}(\varphi(t)))$ den gleichen Untervektorraum auf und sind gleichorientiert. Daher spannen auch $(\dot{\tilde{c}}(t), \dots, \tilde{c}^{(k)}(t))$ und $(f_1 \circ \varphi(t), \dots, f_k \circ \varphi(t))$ den gleichen Untervektorraum auf und sind gleichorientiert. Da $(f_1 \circ \varphi(t), \dots, f_n \circ \varphi(t))$ eine positiv orientierte ON-Basis darstellt, erfüllt $f_1 \circ \varphi(t), \dots, f_n \circ \varphi(t)$ die Eigenschaften eines Frenet n -Beines für \tilde{c} . Ist $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ das Frenet n -Bein von \tilde{c} , so folgt aus der Eindeutigkeit

$$(\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_n(t)) = (f_1 \circ \varphi(t), \dots, f_n \circ \varphi(t)).$$

Ist $Bx = Ax + b$ eine Isometrie, so gilt

$$(B \circ c)^{(k)}(t) = A(c^{(k)}(t)).$$

Da für $k \leq n-1$

$$(\dot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)) \quad \text{und} \quad (f_1(t), \dots, f_k(t)) \tag{1.9}$$

den gleichen Untervektorraum aufspannen und gleichorientiert sind, gilt dies auch für

$$\left(\frac{d}{dt} B \circ c(t), \dots, (B \circ c)^{(k)}(t)\right) = (A(c^{(1)}(t)), \dots, A(c^{(k)}(t))) \quad \text{und} \quad (Af_1(t), \dots, Af_k(t))$$

denn die Übergangsmatrix stimmt mit der Übergangsmatrix von (1.9) überein. Außerdem ist die ON-Basis

$$(Af_1(t), \dots, Af_{n-1}(t), (\det A)Af_n(t))$$

positiv orientiert, denn

$$\det(Af_1(t), \dots, Af_{n-1}(t), (\det A)Af_n(t)) = \det A \cdot \det A \det(f_1(t), \dots, f_n(t)) = +1.$$

Dies impliziert (i).

(ii) Sei φ so gewählt, daß $c \circ \varphi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist und $\varphi' > 0$ ist. Dann ist $1 = \|\dot{c} \circ \varphi(t)\| \varphi'(t)$ und somit $\varphi'(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(\varphi(t))\|}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (\kappa_i)_c(t) &= (\kappa_i)_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)) = \widehat{\langle \dot{f}_i \circ \varphi, f_{i+1} \circ \varphi \rangle}(\varphi^{-1}(t)) \\ &= \langle \dot{f}_i(t) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t)), f_{i+1}(t) \rangle \\ &= \frac{\langle \dot{f}_i(t), f_{i+1}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\|}. \end{aligned}$$

(iii) Invarianz der Krümmungen:

Sei φ eine Reparametrisierung mit $\varphi' > 0$. Dann gilt für $i = 1, \dots, n-1$

$$(\kappa_i)_{c \circ \varphi}(\varphi^{-1}(t)) = \frac{\langle \widehat{f_i \circ \varphi}, \widehat{f_{i+1} \circ \varphi} \rangle(\varphi^{-1}(t))}{\|\widehat{c \circ \varphi}\|} = \frac{\langle f_i(t) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(t)), f_{i+1}(t) \rangle}{\|\dot{c}(t)\| \varphi'(\varphi^{-1}(t))} = (\kappa_i)_c(t).$$

Für $i \leq n-2$ folgt aus (i) und (ii)

$$(\kappa_i)_{Boc}(t) = \frac{\langle Af_i(t), Af_{i+1}(t) \rangle}{\|A\dot{c}(t)\|} = (\kappa_i)_c(t).$$

Ist $i = n-1$, so folgt

$$(\kappa_{n-1})_{Boc}(t) = \frac{\langle Af_{n-1}(t), (\det A)Af_n(t) \rangle}{\|A\dot{c}(t)\|} = \det A (\kappa_{n-1})_c(t).$$

□

Bemerkung. Dies zeigt, dass die Krümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ geometrische Eigenschaften der Kurven sind.

Lemma 1.7.11. Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve, so gilt

$$\kappa_1(t) = \kappa_c(t) = \frac{\sqrt{\|\dot{c}(t)\|^2 \|\ddot{c}(t)\|^2 - \langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle^2}}{\|\dot{c}(t)\|^3} = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

Sind $\dot{c}(t), \ddot{c}(t)$ linear unabhängig, so gilt für die Torsion

$$\kappa_2(t) = \tau(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \ddot{\ddot{c}}(t))}{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|^2}.$$

Beweis. Der Beweis sei zur Übung überlassen. □

Beispiel. Wir wollen nun für ein konkretes Beispiel einer Raumkurve das Frenet 3-Bein und ihre Krümmungen bestimmen. Betrachte die Schraubenlinie (*Helix*)

$$c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad \text{mit } a > 0.$$

Es gilt

$$\dot{c}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b) \quad \text{und} \quad \ddot{c}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0),$$

und somit folgt $\dot{c}(t) \perp \ddot{c}(t)$. Insbesondere existiert das Frenet 3-Bein. Es folgt

$$f_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{(-a \sin t, a \cos t, b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und

$$f_2(t) = \frac{\ddot{c}(t)}{\|\ddot{c}(t)\|} = \frac{(-a \cos t, -a \sin t, 0)}{a} = (-\cos t, -\sin t, 0).$$

Des Weiteren ist

$$f_3(t) = f_1(t) \times f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ a \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Krümmung von c

$$\kappa_c(t) = \frac{\langle \dot{f}_1(t), f_2(t) \rangle}{\|\dot{c}\|} = \frac{1}{a^2 + b^2} \langle (-a \cos t, -a \sin t, 0), (-\cos t, -\sin t, 0) \rangle = \frac{1}{a^2 + b^2} a.$$

Für die Torsion ergibt sich

$$\tau(t) = \frac{\langle \dot{f}_2(t), f_3(t) \rangle}{\|\dot{c}\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left\langle (\sin t, -\cos t, 0), \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (b \sin t, -b \cos t, a) \right\rangle = \frac{1}{a^2 + b^2} b.$$

Eine Raumkurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennt man eine Schraubelinie, falls ihre Krümmung und Torsion konstant sind.

Man kann zeigen: ist c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Schraubelinie, so existiert eine positive Funktion f mit

$$d(c(t), c(s)) = f(t - s).$$

Satz 1.7.12. (*Hauptsatz der Kurventheorie*)

Zu differenzierbaren Funktionen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\kappa_i > 0$ für $1 \leq i \leq n-2$ existiert bis auf Orientierungserhaltende Isometrie genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die $\dot{c}(t), \dots, c^{(n-1)}(t)$ linear unabhängig sind und für die $(\kappa_i)_c(t) = \kappa_i(t)$ gilt.

Beweis. Zunächst beweisen wir die Eindeutigkeit.

Seien $c_1, c_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Kurven mit $(\kappa_i)_{c_1}(t) = (\kappa_i)_{c_2}(t) = \kappa_i$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Sei $t_0 \in I$. Dann können wir annehmen:

$$c_1(t_0) = c_2(t_0) \quad \text{und} \quad (f_1^{c_1}(t_0), \dots, f_n^{c_1}(t_0)) = (f_1^{c_2}(t_0), \dots, f_n^{c_2}(t_0))$$

Dies können wir durch Verknüpfung von c_2 mit einer Orientierungserhaltenden Isometrie erreichen (siehe Satz 1.7.10 (i)). Beide Frenet n -Beine erfüllen die lineare Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{f}_1 \\ \vdots \\ \dot{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (1.10) bei gegebenen Anfangswerten folgt insbesondere

$$\dot{c}_1(t) = f_1^{c_1}(t) = f_1^{c_2}(t) = \dot{c}_2(t)$$

und

$$c_1(t) = c_1(t_0) + \int_{t_0}^t f_1^{c_1}(s) ds = c_2(t_0) + \int_{t_0}^t f_1^{c_2}(s) ds = c_2(t).$$

Nun wollen wir die Existenz beweisen.

Sei f_1, \dots, f_n Lösung von (1.10) mit $f_i(t_0) = e_i$, wobei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n ist.

Behauptung: $c(t) = \int_{t_0}^t f_1(s) ds$ ist eine Kurve mit den Krümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$.

Dazu genügt zu zeigen, dass $f_1(t), \dots, f_n(t)$ das Frenet n -Bein von c ist. Aus den Frenetgleichungen folgt dann, dass $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ die Krümmungen von c sind.

Dazu sind folgende Eigenschaften zu überprüfen:

(i) $f_1(t), \dots, f_n(t)$ ist positiv orientierte ON-Basis.

(ii) Für alle $k \leq n - 1$ gilt

$$\text{Span}(f_1(t), \dots, f_k(t)) = \text{Span}(\dot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)).$$

(iii) $(f_1(t), \dots, f_k(t))$ und $(\dot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t))$ sind gleichorientiert.

Wir zeigen zunächst (i). Die Differentialgleichung (1.10) läßt sich auch wie folgt schreiben: Ist

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R}),$$

so gilt: $\dot{F}(t) = A \cdot F$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies impliziert

$$\frac{d}{dt} F^t F = \dot{F}^t F + F^t \cdot \dot{F} = F^t A^t F + F^t A F = -F^t A F + F^t A F = 0,$$

denn die Matrix A ist schief-symmetrisch. Daraus folgt

$$F^t(t) \cdot F(t) = F^t(t_0) \cdot F(t_0) = \text{id},$$

weil $f_1(t_0), \dots, f_n(t_0)$ eine ON-Basis ist. Damit ist auch $f_1(t), \dots, f_n(t)$ für alle $t \in I$ eine ON-Basis, und es gilt $\det F(t) = \pm 1$. Da $\det F(t_0) = 1$ ist, ist auch $\det F(t) = +1$, denn $t \mapsto \det F(t)$ ist stetig.

Zu (ii) und (iii): Wir zeigen durch Induktion über k :

$$c^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k a_{kj}(t) f_j(t) \quad \text{und} \quad a_{kk}(t) > 0. \quad (1.11)$$

Sei $k = 1$. Dann ist $\dot{c}(t) = f_1(t)$ und somit $a_{11}(t) = 1$.

Die obige Beziehung gelte für alle $i \leq k \leq n - 2$. Sei also

$$c^{(k)}(t) = a_{kk}(t)f_k(t) + b(t) \quad \text{mit } b(t) \in \text{Span}(f_1(t), \dots, f_{k-1}(t)) = \text{Span}(\dot{c}(t), \dots, c^{(k-1)}(t)) .$$

Damit gilt

$$c^{(k+1)}(t) = a_{kk}(t)\dot{f}_k(t) + a(t) ,$$

wobei

$$a(t) = \dot{a}_{kk}(t)f_k(t) + \dot{b}(t) \in \text{Span}(f_1(t), \dots, f_k(t)) .$$

Aus der Differentialgleichung (1.10) folgt

$$\dot{f}_k(t) = -\kappa_{k-1}(t)f_{k-1}(t) + \kappa_k(t)f_{k+1}(t)$$

und

$$c^{(k+1)}(t) = a_{kk}(t)\kappa_k(t)f_{k+1}(t) + \tilde{a}(t) \quad \text{mit } \tilde{a}(t) \in \text{Span}(f_1(t), \dots, f_k(t)) .$$

Daraus folgt

$$a_{k+1k+1}(t) = a_{kk}(t) \cdot \kappa_k(t) > 0 \quad \text{für } k \leq n - 2 ,$$

und somit erhalten wir (1.11) für alle $k \leq n - 2$. □

Kapitel 2

Flächentheorie

2.1 Immersionen und Untermannigfaltigkeiten

Im Folgenden werden wir uns mit höherdimensionalen „glatten“ Teilmengen des \mathbb{R}^n beschäftigen. Anders als bei Kurven können im Allgemeinen solche Teilmengen nicht mit einer Parametrisierung dargestellt werden. Bevor wir uns mit dem Begriff der Untermannigfaltigkeit beschäftigen, wollen wir zunächst den Begriff der *Immersion* einführen. Er stellt eine direkte Verallgemeinerung des Begriffs der regulären Kurven dar.

Definition 2.1.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann heißt f eine *Immersion*, falls das Differential $Df(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ für alle $x \in U$ injektiv ist.

Bemerkungen.

- (1) Ist $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, so ist c genau dann eine Immersion, wenn c eine reguläre Kurve ist. Denn für $t \in (a, b)$ ist das Differential $Dc(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $Dc(t)(h) = \dot{c}(t) \cdot h$ gegeben. Daher ist $Dc(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ genau dann injektiv, falls $\dot{c}(t) \neq 0$ gilt.
- (2) Die Injektivität des Differentials $Df(x)$ ist äquivalent zur linearen Unabhängigkeit der partiellen Ableitungen

$$Df(x)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^n$$

für $i \in \{1, \dots, k\}$. Das Bild einer Immersion $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ stellen wir uns als k -dimensionales Flächenstück vor, welches auch Selbstdurchdringungen aufweisen kann. Die Vektoren $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x))$ spannen den *Tangentialraum* auf. Eine koordinatenunabhängige Definition des Tangentialraumes geben wir später.

- (3) Aus der Injektivität von $Df(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ folgt natürlich $k \leq n$.

Beispiele.

- (1) *Rotationsflächen:*

Sei $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = (x(t), 0, z(t))$ eine reguläre Kurve in der (x, z) -Ebene mit $x(t) > 0$. Die Regularität impliziert $x'(t)^2 + z'(t)^2 > 0$. Die *Rotationsfläche* mit Rotationsachse z ist dann durch

$$f(t, \alpha) = (x(t) \cos \alpha, x(t) \sin \alpha, z(t))$$

gegeben. Das Differential an der Stelle (t, α) ist

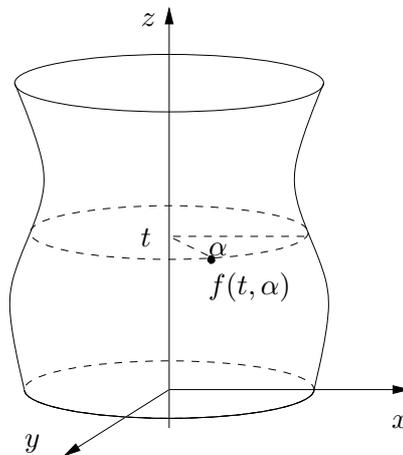


Abbildung 2.1: Rotationsfläche

$$Df(t, \alpha) = \begin{pmatrix} x'(t) \cos \alpha & -x(t) \sin \alpha \\ x'(t) \sin \alpha & x(t) \cos \alpha \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Spaltenvektoren senkrecht aufeinander stehen und von Null verschieden sind, sind sie linear unabhängig. Also ist $f : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Immersion.

(2) *Graphen:*

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann heißt die Menge

$$G_g := \{(u, v, g(u, v)) \mid (u, v) \in U\}$$

der *Graph* von g . Die Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(u, v) = (u, v, g(u, v))$ parametrisiert

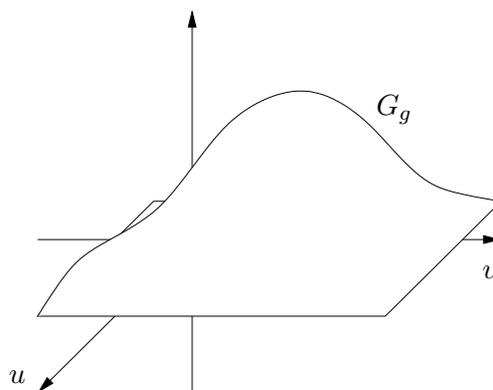


Abbildung 2.2: Graph von g

den Graphen von g , und es gilt

$$Df(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Da die Spaltenvektoren linear unabhängig sind, ist f eine Immersion.

Genau wie Kurven, lassen sich auch Immersionen reparametrisieren.

Definition 2.1.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Eine *Parametertransformation* ist ein Diffeomorphismus $\varphi : \tilde{U} \rightarrow U$ mit $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^k$ offen.

φ heißt *orientierungserhaltend* bzw. *orientierungsumkehrend*, falls $\det D\varphi(x) > 0$ bzw. $\det D\varphi(x) < 0$, für alle $x \in \tilde{U}$ gilt. Die Abbildung

$$\tilde{f} = f \circ \varphi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt dann eine *Reparametrisierung* von f .

Lemma 2.1.3. Ist f eine Immersion und \tilde{f} eine Reparametrisierung von f , so ist \tilde{f} ebenfalls eine Immersion.

Beweis. Der Beweis sei als Übung überlassen. □

Analog zum Begriff der Länge existiert der Begriff des Volumens eines Flächenstückes.

Definition 2.1.4. Seien $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Für jedes $x \in U$ sei $(g_{ij}(x))$ die $k \times k$ Matrix mit $g_{ij}(x) := \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \rangle$. Ist $A \subset U$ eine messbare Menge, so heißt

$$\text{vol}(f|_A) := \int_A \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_A(x) \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx$$

das *Volumen* von $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dabei ist das Integral im Sinne von Lebesgue aufzufassen. Ist diese Abbildung bis auf eine Menge von Maß Null injektiv, d. h. existiert eine Menge $C \subset A$ vom Maß Null, so dass $f : A \setminus C \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist, so heißt $\text{vol}(f|_A)$ auch das *Volumen von $f(A)$* . Dazu bemerken wir, dass das Integral sich nicht durch die Abänderung auf einer Menge vom Maß Null ändert.

Bemerkung. Die Matrix $(g_{ij}(x))$ ist symmetrisch und positiv definit. Die zugehörige quadratische Form heißt auch *erste Fundamentalform*. Die Determinante der Matrix $(g_{ij}(x))$ heißt *Gramsche Determinante*. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so ist $g_{11}(t) = \langle \frac{\partial}{\partial t} f(t), \frac{\partial}{\partial t} f(t) \rangle$ und daher

$$\sqrt{\det g_{11}(t)} = \left\| \frac{\partial}{\partial t} f(t) \right\| = \|\dot{f}(t)\|.$$

Also ist das Volumen einer Immersion die direkte Verallgemeinerung der Länge einer Kurve.

Übung: Zeige, dass $\text{vol}f|_A$ invariant ist unter Parametertransformationen und Isometrien.

Für die lokale Flächentheorie reicht der Begriff der Immersion aus. Es gibt zwei Gründe, an dieser Stelle den Begriff der *Mannigfaltigkeit* einzuführen:

- (1) Er ermöglicht „koordinatenfreie“ Darstellungen.

- (2) Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist nötig, wenn man globale Fragestellungen behandeln will.

Wir werden nun Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n betrachten. Wichtigster Spezialfall sind die 2-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 .

Bevor wir differenzierbare Strukturen auf Teilmengen des \mathbb{R}^n studieren, müssen wir ihre topologischen Strukturen erklären. Eine Topologie ist ein Mengensystem mit gewissen Eigenschaften. Ihre Elemente heißen offene Mengen.

Definition 2.1.5. Sei X eine Menge und $P(X)$ die Potenzmenge von X , d.h. die Menge aller Teilmengen von X . Sei $T(X) \subset P(X)$ ein Mengensystem. Ihre Elemente nennen wir *offene Mengen*. Dann heißt $(X, T(X))$ *topologischer Raum*, falls

- (1) \emptyset, X sind offen.
- (2) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
- (3) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Ein Mengensystem $T(X)$ mit solchen Eigenschaften heißt auch *Topologie* von X . Die Komplemente offener Mengen heißen *abgeschlossen*.

Beispiele.

- (1) Ist X eine beliebige Menge, so ist

$$T(X) = \{\emptyset, X\}$$

eine Topologie für X . Sie ist die größte Topologie für X .

- (2) Ist X eine beliebige Menge, so ist

$$T(X) = P(X)$$

eine Topologie für X . Sie enthält alle Teilmengen und ist somit die feinste Topologie für X .

- (3) Sei (X, d) metrischer Raum. Definiere

$$T_d(X) := \{U \subset X \mid \text{jeder Punkt in } U \text{ ist innerer Punkt}\}.$$

Dabei heißt $x \in U$ *innerer Punkt* von U , falls ein $\epsilon > 0$ existiert mit

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\} \subset U.$$

Dann heißt $(X, T_d(X))$ der durch die *Metrik d induzierte topologische Raum*.

- (4) Sei $(X, T(X))$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann definiert

$$\{U \cap A \mid U \in T(X)\}$$

eine Topologie auf A . Sie heißt auch *Relativtopologie*.

Ist (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$, so ist auch (A, d) ein metrischer Raum. Insbesondere gilt

$$T_d(A) = \{U \cap A \mid U \in T_d(X)\},$$

d. h. die durch d auf A induzierte Topologie ist die Relativtopologie.

Der Beweis dieser Aussagen sei als Übung überlassen.

Wichtig für uns wird die Relativtopologie für Teilmengen des \mathbb{R}^n sein. Als Beispiel betrachte

$$(\mathbb{R}, T_d(\mathbb{R})) \quad \text{mit} \quad d(x, y) = |x - y|.$$

Sei $A = [0, 1]$. Dann ist $[0, 1/2)$ offen in A , aber nicht in \mathbb{R} .

Auf topologischen Räumen sind stetige Abbildungen erklärt.

Definition 2.1.6. Seien X, Y topologische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ *stetig*, falls das Urbild offener Mengen unter f offen ist. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Bemerkungen.

- (1) Sind X, Y metrische Räume, so ist $f : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, falls $f : X \rightarrow Y$ folgenstetig ist. Dabei heißt f *folgenstetig*, falls für jede konvergente Folge $x_n \rightarrow x$ in X für ihre Bildfolge $f(x_n) \rightarrow f(x)$ gilt.
- (2) Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv, so folgt im Allgemeinen nicht die Stetigkeit der Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Als Beispiel betrachte die in der Zeichnung dargestellte Abbildung $f : (0, 1) \rightarrow f(0, 1) = Y \subset \mathbb{R}^2$. Die Abbildung f ist stetig und bijektiv, aber

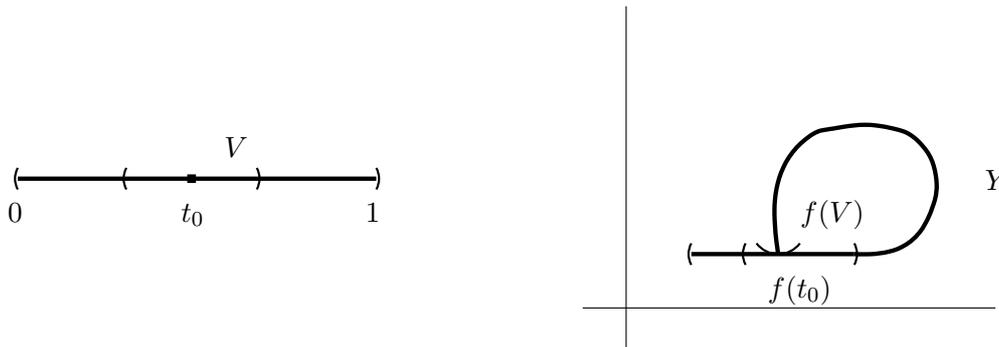


Abbildung 2.3: Stetige Bijektion

f^{-1} ist nicht stetig. Die Menge V ist offen in $(0, 1)$, aber $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ ist nicht offen in Y , denn es existiert keine offene Menge U in \mathbb{R}^2 mit $f(V) = U \cap \mathbb{R}^2$.

Nun wollen wir Teilmengen des \mathbb{R}^n betrachten, die neben der topologischen Struktur auch eine differenzierbare Struktur besitzen.

Definition 2.1.7. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^n , falls für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ sowie eine differenzierbare Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ existieren mit

- (i) $\varphi(U) = W \cap M$, und $\varphi : U \rightarrow W \cap M$ ist ein Homöomorphismus.
- (ii) φ ist eine Immersion, d. h. $D\varphi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist injektiv für alle $x \in U$.

Die Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *lokale Parametrisierung* von M . Ihre Inverse $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ heißt auch *Karte*.

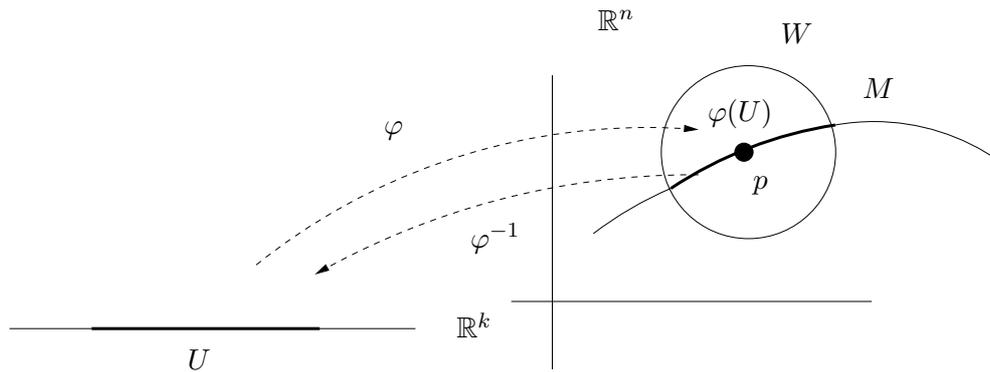


Abbildung 2.4: Lokale Parametrisierung

Bemerkung. Die Aussage (i) besagt, dass jede offene Teilmenge von M homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^k ist. Wegen (ii) folgt $k \leq n$.

Beispiele.

- (1) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist der Graph von g

$$M = G_g = \{(x, g(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{k+1} . Denn für $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ mit $x \mapsto (x, g(x))$ gilt:

- (i) φ ist Immersion (siehe Beispiel (2) nach Definition 2.1.1).
(ii) $\varphi(U) = M$, und $\varphi : U \rightarrow M$ ist ein Homöomorphismus, denn $\varphi^{-1} : M \rightarrow U$ mit $\varphi^{-1}(x, y) = x$ ist stetig.
- (2) Die *Sphäre* S^n definiert durch

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

ist eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} . Seien $N = (0, \dots, 0, 1)$ der Nordpol und $S = (0, \dots, 0, -1)$ der Südpol von S^n . Betrachte die stereographischen Projektionen

$$\psi_N : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \psi_N((x_1, \dots, x_{n+1})) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$$

und

$$\psi_S : S^n \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \psi_S((x_1, \dots, x_{n+1})) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Diese Abbildungen sind bijektiv und stetig.

Ihre Inversen $\varphi_N = \psi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus N$ und $\varphi_S = \psi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus S$

sind durch

$$\varphi_N(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x, \|x\|^2 - 1) \text{ und } \varphi_S(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}(2x, 1 - \|x\|^2)$$

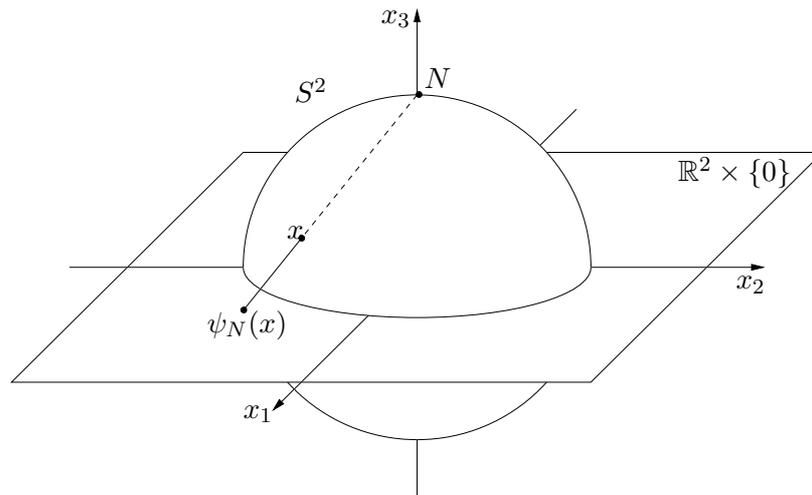


Abbildung 2.5: Stereographische Projektion vom Nordpol

gegeben. Die Anwendung der Kettenregel auf $\psi_N \circ \varphi_N = \text{id}$ und $\psi_S \circ \varphi_S = \text{id}$ impliziert die Injektivität der Differentiale von φ_N und φ_S . Insbesondere sind φ_N und φ_S lokale Parametrisierungen, da ihre Inversen ψ_N bzw. ψ_S stetig sind (sie sind sogar auf $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \neq 1\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \neq -1\}$ differenzierbar fortsetzbar).

Immersionen und Parametrisierungen lassen sich lokal zu Diffeomorphismen fortsetzen. Genauer gilt:

Satz 2.1.8. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Dann existieren zu jedem $x_0 \in U$ offene Umgebungen $V_0 \subset U \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n$ und $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ von $\varphi(x_0)$ sowie ein Diffeomorphismus $\phi : V_0 \rightarrow W_0$ mit

$$\phi(x, 0) = \varphi(x)$$

für alle $x \in U_0 = \{x \in U \mid (x, 0) \in V_0\}$. Insbesondere ist $\varphi : U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$ ein Homöomorphismus und somit $\varphi(U_0)$ eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Ist $\varphi : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung einer Untermannigfaltigkeit M , so können V_0 und W_0 so gewählt werden, dass $\varphi(U_0) = M \cap W_0$ gilt.

Beweis. Da

$$D\varphi(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k}(x_0) \end{pmatrix}$$

injektiv ist, sind k Zeilenvektoren linear unabhängig. Wir können annehmen, dass die ersten k Zeilen linear unabhängig sind. Dann ist die Matrix

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq k} =: A$$

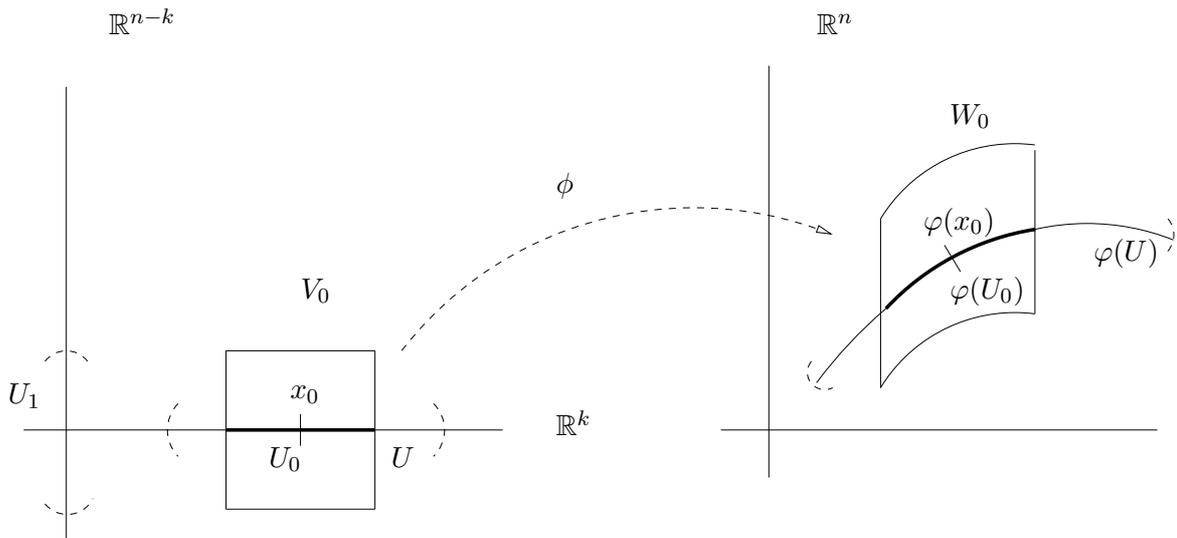


Abbildung 2.6: Lokale Fortsetzung von Immersionen

invertierbar. Sind die ersten k Zeilen nicht linear unabhängig, so betrachte eine Permutation $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Koordinaten, so dass $\tilde{\varphi} = P \circ \varphi$ die verlangte Eigenschaft besitzt. Betrachte nun die Abbildung $\phi : U \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\phi(x, y) = \varphi(x) + (0, y)$. Dann ist

$$D\phi(x_0, 0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & \text{id} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind. Nach dem Satz über inverse Funktionen besitzt ϕ eine lokale, stetig differenzierbare Umkehrung, d. h. es gibt eine offene Umgebung $V_0 \subset U \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n$ der Form $V_0 = U_0 \times U_1$ und eine offene Umgebung $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ von $\varphi(x_0) = \phi(x_0, 0)$, so dass $\phi : V_0 \rightarrow W_0$ ein Diffeomorphismus ist. Wegen $\varphi(x) = \phi(x, 0)$ für alle $x \in U_0$ und da $\phi : V_0 \rightarrow W_0$ insbesondere ein Homöomorphismus ist, ist auch $\varphi : U_0 \rightarrow \varphi(U_0)$ ein Homöomorphismus.

Sei nun $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zusätzlich eine lokale Parametrisierung einer Untermannigfaltigkeit M und $x_0 \in U$. Wegen der obigen Ausführungen existieren offene Umgebungen $V'_0 = U'_0 \times U'_1 \subset U \times \mathbb{R}^{n-k}$ von $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n$ und $W'_0 \subset \mathbb{R}^n$ von $\varphi(x_0)$ sowie ein Diffeomorphismus $\phi : V'_0 \rightarrow W'_0$ mit

$$\phi(x, 0) = \varphi(x)$$

für alle $x \in U'_0$. Da φ ein Homöomorphismus ist, ist $\varphi(U'_0)$ offen in M , und somit existiert eine offene Menge $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U'_0) = M \cap W_1$. Dann ist $W_0 = W_1 \cap W'_0$ eine offene Umgebung von $\varphi(x_0)$ und $\phi^{-1}(W_0) =: V_0$ eine offene Umgebung von $(x_0, 0) \in U \times \mathbb{R}^{n-k}$. Setzt man $U_0 := \{x \in U \mid (x, 0) \in V_0\}$, so folgt $\varphi(U_0) = W_0 \cap M$. \square

Dieser Satz zeigt auch, dass die Umkehrung von Parametrisierungen differenzierbare Fortsetzungen besitzen. Genauer gilt:

Lemma 2.1.9. (Differenzierbare Fortsetzungen von Karten)

Sei $\varphi : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung. Dann läßt sich die Karte $\varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow U$ lokal zu einer differenzierbaren Abbildung fortsetzen. Genauer gilt: Ist $p_0 = \varphi(x_0)$, so

existieren offene Umgebungen W_0 von p_0 in \mathbb{R}^n und $U_0 \subset U$ von x_0 sowie eine differenzierbare Abbildung $\psi : W_0 \rightarrow U_0$ mit

$$\psi(p) = \varphi^{-1}(p)$$

für alle $p \in \varphi(U_0)$.

Beweis. Wegen Satz 2.1.8 (siehe auch Abbildung 2.6) existieren zu x_0 offene Umgebungen V_0 von $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^n$ der Form $U_0 \times U_1$ und W_0 von $\varphi(x_0)$ sowie ein Diffeomorphismus $\phi : V_0 \rightarrow W_0$ mit $\phi(x, 0) = \varphi(x)$ für alle $x \in U_0$. Setze $\psi = pr \circ \phi^{-1}$, wobei $pr : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $pr(x, y) = x$ die Projektion auf \mathbb{R}^k bezeichnet. Ist $p \in \varphi(U_0)$, so existiert genau ein $x \in U_0$ mit $\varphi(x) = p$, und es folgt

$$\psi(p) = pr \circ \phi^{-1}(\varphi(x)) = pr(x, 0) = x = \varphi^{-1}(p).$$

□

Korollar 2.1.10. Sei $\varphi : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Sei $V \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f : V \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist $\varphi^{-1} \circ f : V \rightarrow U$ differenzierbar.

Beweis. Sei $y_0 \in V$ und $f(y_0) = p_0 = \varphi(x_0)$. Dann existiert eine offene Teilmenge $W_0 \subset \mathbb{R}^n$ von p_0 und eine differenzierbare Fortsetzung $\psi : W_0 \rightarrow U$ von φ^{-1} . Dann ist

$$\varphi^{-1} \circ f(y) = \psi \circ f(y)$$

für alle $y \in V$ mit $f(y) \in W_0$. Also folgt die Differenzierbarkeit von $\varphi^{-1} \circ f$ aus der Differenzierbarkeit von $\psi \circ f$ in y_0 . □

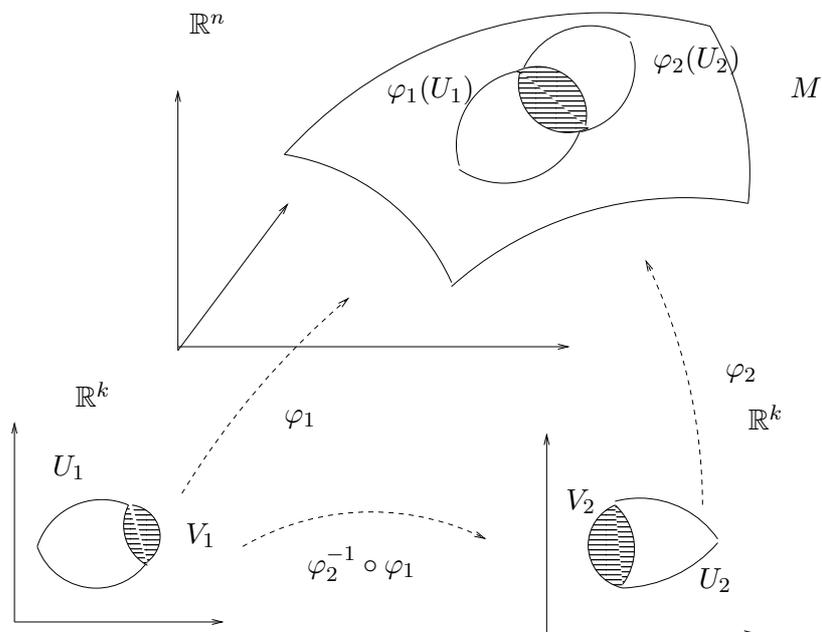


Abbildung 2.7: Kartenwechsel

Korollar 2.1.11. (Verträglichkeit der lokalen Parametrisierungen)

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi_1 : U_1 \rightarrow M$ sowie $\varphi_2 : U_2 \rightarrow M$ lokale Parametrisierungen. Betrachte die offenen Teilmengen des \mathbb{R}^k gegeben durch $V_1 := \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2))$ und $V_2 := \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2))$. Dann sind $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow V_2$ und $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow V_1$ differenzierbar.

Beweis. Da $\varphi_1 : V_1 \rightarrow \varphi_1(V_1) \subset \varphi_2(U_2)$ differenzierbar ist, folgt aus Korollar 2.1.10 die Differenzierbarkeit von $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow V_2$. Genauso folgt die Differenzierbarkeit von $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow V_1$. Da $(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2)^{-1} = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ist, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Bei der Definition "abstrakter Mannigfaltigkeiten" (d. h. Mannigfaltigkeiten, die nicht als Teilmengen von \mathbb{R}^n gegeben sind) ist die Differenzierbarkeit des Kartenwechsels Bestandteil der Definition.

Definition 2.1.12. (Differenzierbare Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten)

Es seien M, N Untermannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Die Abbildung F heißt *differenzierbar in* $p_0 \in M$, falls lokale Parametrisierungen $\varphi : U \rightarrow M$ mit $p_0 \in \varphi(U)$, sowie $\psi : V \rightarrow N$ mit $F(\varphi(U)) \subset \psi(V)$ existieren, so dass die Abbildung

$$f : U \rightarrow V \text{ mit } f = \psi^{-1} \circ F \circ \varphi$$

in $\varphi^{-1}(p_0)$ differenzierbar ist. F heißt *differenzierbar*, falls F für alle $p \in M$ differenzierbar ist.

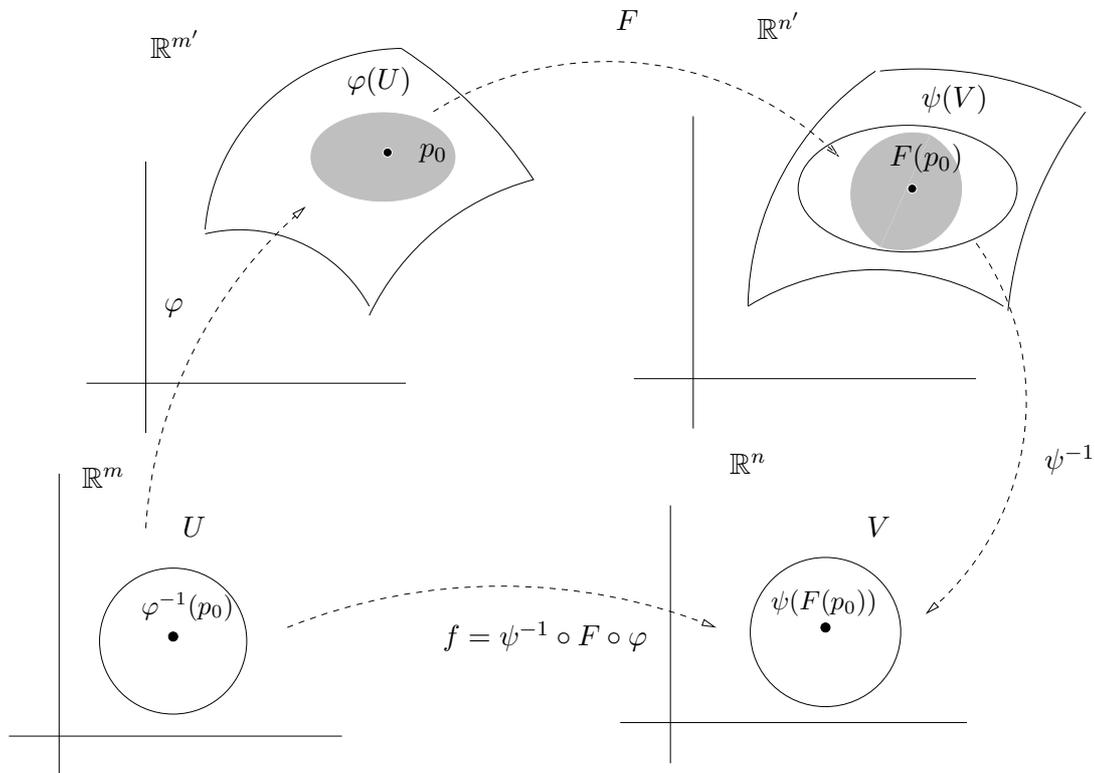


Abbildung 2.8: Differenzierbarkeit

Bemerkungen.

- (i) Die Definition hängt nicht von der Wahl der Parametrisierungen ab. Dies folgt aus der Differenzierbarkeit des Koordinatenwechsels.
- (ii) Sei M Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m und N Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Eine Abbildung $F : M \rightarrow N$ ist genau dann differenzierbar in $p \in M$, falls eine offene Umgebung V von $p \in \mathbb{R}^m$ und eine in p differenzierbare Abbildung $\tilde{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert mit $\tilde{F}|_{V \cap M} = F|_{V \cap M}$, d.h. genau dann, wenn eine lokale differenzierbare Fortsetzung von F existiert. Der Beweis folgt aus der differenzierbaren Fortsetzbarkeit einer Karte.
- (iii) Die Verkettung von differenzierbaren Abbildungen ist differenzierbar.

Oft werden Untermannigfaltigkeiten durch Gleichungssysteme beschrieben. Es gilt:

Satz 2.1.13. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist $a \in \mathbb{R}^k$ regulärer Wert von f , d. h. $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ surjektiv für alle $x \in f^{-1}(a)$, so ist $f^{-1}(a)$ eine $(n - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n .

Bemerkung. Aus der Surjektivität von $Df(x)$ folgt $n \geq k$.

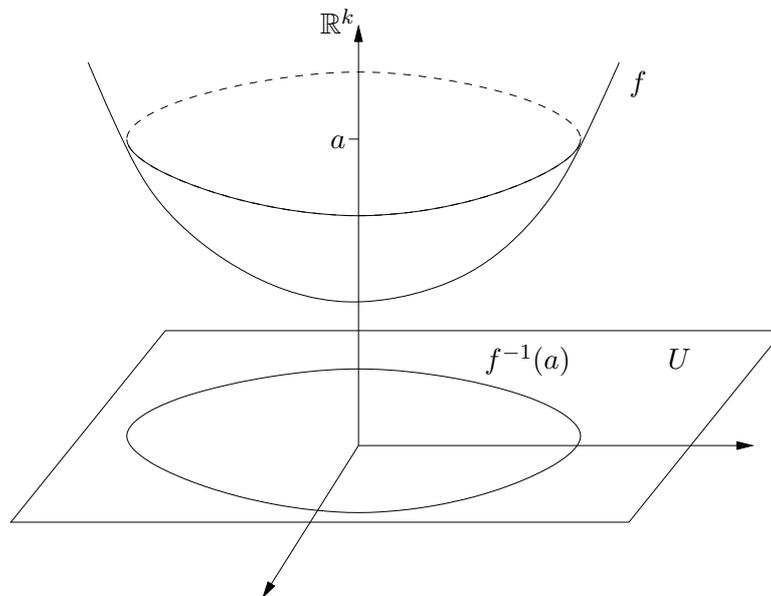


Abbildung 2.9: Das Urbild eines regulären Wertes ist eine Untermannigfaltigkeit

Beweis. Setze $u = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^{n-k}, y \in \mathbb{R}^k$. Es sei $(x_0, y_0) \in f^{-1}(a)$. Nach eventueller Permutation der Variablen nehmen wir an, dass

$$D_Y f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}(x_0, y_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k}(x_0, y_0) \right)$$

invertierbar ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen können wir die Gleichung $f(x, y) = a$ lokal nach y auflösen. Dies heißt, dass offene Umgebungen V_1 von $x_0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ und V_2 von $y_0 \in \mathbb{R}^k$ und eine Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$ existieren mit

$$f^{-1}(a) \cap (V_1 \times V_2) = \{(x, g(x)) \mid x \in V_1\} = G_g.$$

Damit folgt: zu jedem $(x_0, y_0) \in f^{-1}(a)$ existiert eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ der Form

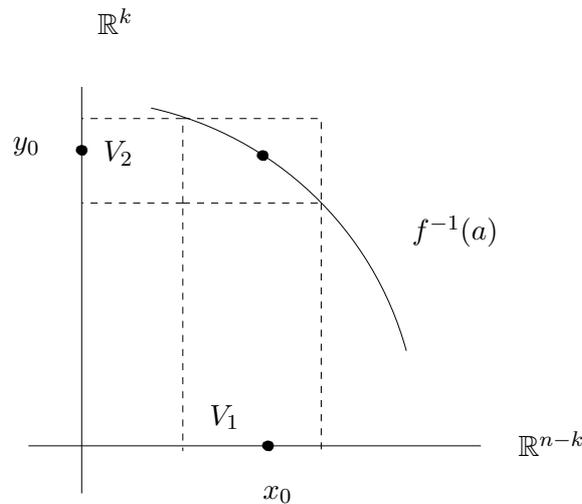


Abbildung 2.10: Regulärer Wert

$W = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ und eine lokale Parametrisierung $\varphi : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ von $f^{-1}(a)$ gegeben durch $\varphi(x) = (x, g(x))$ mit $\varphi(V_1) = W \cap f^{-1}(a)$. \square

2.2 Tangentialraum und Normalraum

Definition 2.2.1. (Tangentialraum)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann heißt

$$T_p M = \{\dot{c}(0) \mid c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M \text{ differenzierbare Kurve mit } c(0) = p, \epsilon > 0\}$$

Tangentialraum von $p \in M$. Die Elemente von $T_p M$ heißen *Tangentialvektoren*.

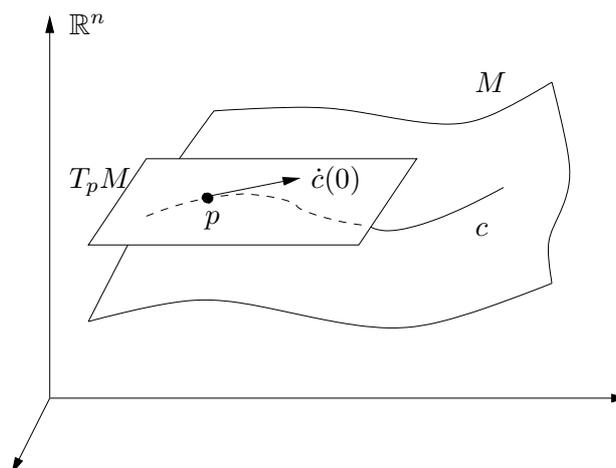


Abbildung 2.11: Tangentialraum

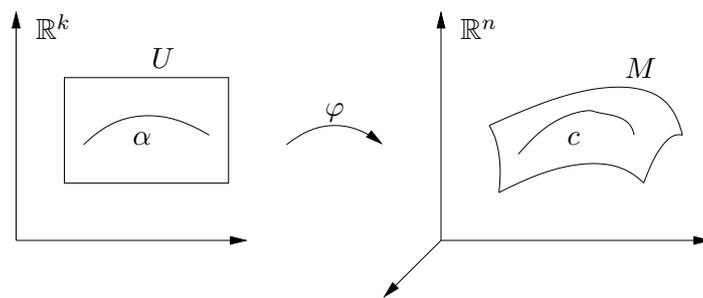
Satz 2.2.2. Sei $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung der k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit M mit $\varphi(x) = p$. Dann ist $T_p M = D\varphi(x)(\mathbb{R}^k)$. Insbesondere ist $T_p M$ ein k -dimensionaler linearer Untervektorraum des \mathbb{R}^n .

Beweis.

(i) Wir zeigen zunächst:

$$T_p M \subset D\varphi(x)(\mathbb{R}^k).$$

Sei $c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit $c(0) = p$, so dass $c(-\epsilon, +\epsilon) \subset \varphi(U)$. Sei $\alpha = \varphi^{-1} \circ c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow U$ die Urbildkurve von c unter φ . Dann gilt: $c = \varphi \circ \alpha$ und $\dot{c}(0) = D\varphi(\alpha(0))\dot{\alpha}(0) = D\varphi(x)\dot{\alpha}(0)$, wobei $\dot{\alpha}(0) \in \mathbb{R}^k$.



(ii) Wir zeigen nun

$$D\varphi(x)(\mathbb{R}^k) \subset T_p M.$$

Sei $w = D\varphi(x)(v) \in D\varphi(x)(\mathbb{R}^k)$, so betrachte die Kurve $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(t) = x + tv \in U$ für $t \in (-\epsilon, +\epsilon)$. Sei $c(t) = \varphi \circ \alpha(t)$, so folgt aus der Kettenregel: $\dot{c}(0) = D\varphi(x)(v) \in T_p M$.

Da $D\varphi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive lineare Abbildung ist, ist somit $D\varphi(\mathbb{R}^k) = T_p M$ ein k -dimensionaler linearer Untervektorraum des \mathbb{R}^n . \square

Bemerkung. Ist $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^k$ die Standardbasis, so bilden die Vektoren

$$D\varphi(x)(e_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

eine Basis von $T_p M$. Sie ist offensichtlich von der Parametrisierung abhängig.

Definition 2.2.3. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so heißt

$$N_p M = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in T_p M\} =: (T_p M)^\perp$$

der *Normalraum* von M in p . Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des \mathbb{R}^n .

Der Normalraum lässt sich für Untermannigfaltigkeiten, die durch Gleichungssysteme gegeben sind, ohne Kenntnis des Tangentialraumes beschreiben.

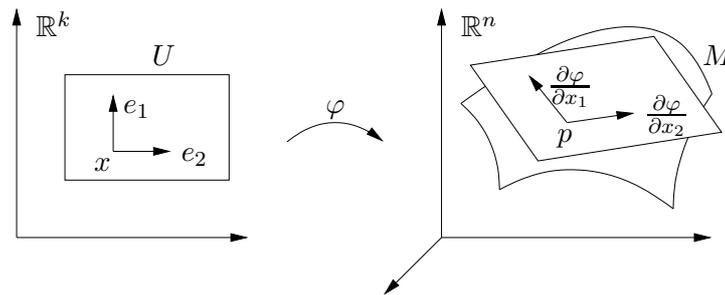
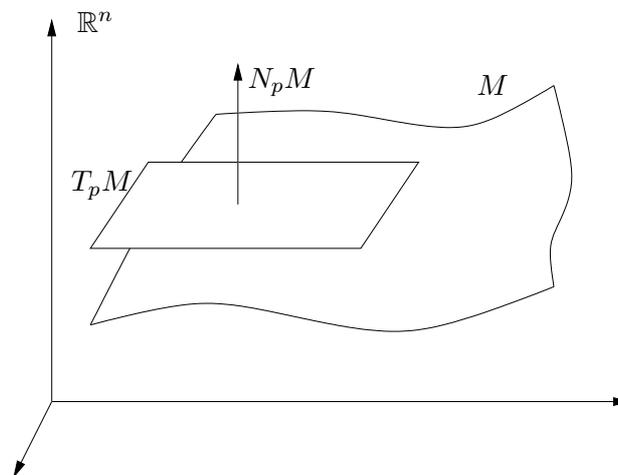
Abbildung 2.12: Basis des $T_p M$ 

Abbildung 2.13: Normalraum

Satz 2.2.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1, \dots, f_k) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^1 -Abbildung und $a \in \mathbb{R}^k$ ein regulärer Wert von f , d.h. für alle $p \in f^{-1}(a)$ ist das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ surjektiv. Dann sind die Vektoren

$$\text{grad } f_1(p), \dots, \text{grad } f_k(p)$$

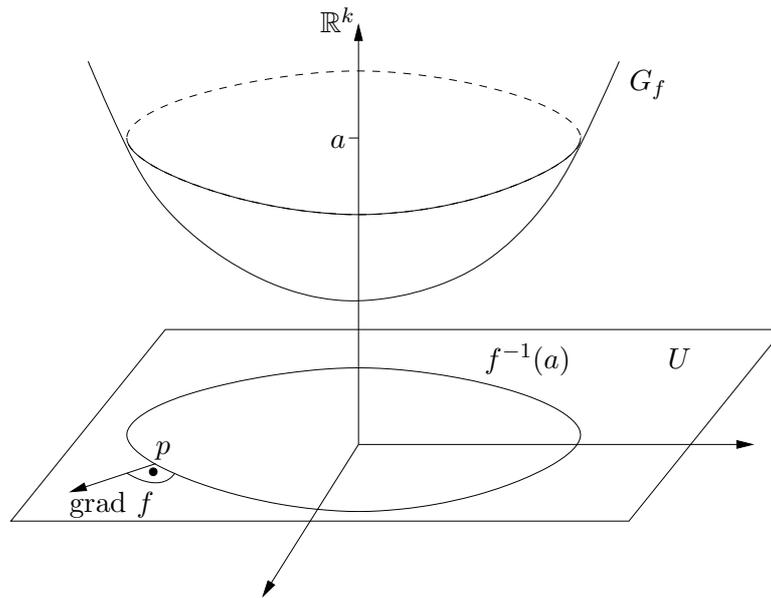
linear unabhängig und bilden eine Basis des Normalraumes $N_p M_a$ an die $(n-k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M_a = f^{-1}(a)$ im Punkte p .

Beweis. Da $Df(p)$ surjektiv ist und

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(p) \\ \vdots \\ \text{grad } f_k(p) \end{pmatrix}$$

die Jacobimatrix darstellt, sind die Vektoren $\text{grad } f_1(p), \dots, \text{grad } f_k(p)$ linear unabhängig. Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_a$ eine Kurve mit $c(0) = p$. Dann ist $f_i \circ c(t) = a_i$ die i -te Komponente von a und somit konstant, und es gilt

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_i \circ c(t) = \langle \text{grad } f_i(p), \dot{c}(0) \rangle,$$

Abbildung 2.14: $\text{grad } f_i$ stehen senkrecht auf M_a .

und daher ist $\text{grad } f_i(p) \in N_p M_a$. Da $N_p M_a$ das orthogonale Komplement zu $T_p M_a$ ist, folgt

$$N_p M_a \oplus T_p M = \mathbb{R}^n$$

und $\dim N_p M_a = n - (n - k) = k$. Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\text{grad } f_1(p), \dots, \text{grad } f_k(p)$ folgt somit die Behauptung. \square

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein regulärer Wert, falls $\text{grad } f(p) \neq 0$ für alle $p \in f^{-1}(a)$. Der Tangentialraum ist dann durch

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, \text{grad } f(p) \rangle = 0\} = \text{grad } f(p)^\perp$$

gegeben.

Definition 2.2.5. Es seien M, M' Mannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow M'$ differenzierbar in p . Dann heißt die Abbildung $DF(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} M'$ mit

$$DF(p)(\dot{c}(0)) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ c(t)$$

die Ableitung von F in p .

Bemerkungen.

- (i) $DF(p) : T_p M \rightarrow T_{F(p)} M'$ ist eine wohldefinierte lineare Abbildung, denn ist $\tilde{F} : V \rightarrow M'$ lokale differenzierbare Fortsetzung von F in einer Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von p , so gilt:

$$DF(p)(\dot{c}(0)) := \frac{d}{dt} F \circ c(0) = \frac{d}{dt} \tilde{F} \circ c(0) = D\tilde{F}(p)(\dot{c}(0)).$$

Die Linearität folgt aus der Linearität von $D\tilde{F}(p)$. Außerdem hängt die Definition nicht von der Wahl der Kurve c ab, sondern nur von $\dot{c}(0)$.

- (ii) Sind $F : M \rightarrow M', G : M' \rightarrow M''$ differenzierbare Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten, so gilt die Kettenregel

$$D(G \circ F)(p) = DG(F(p)) \circ DF(p),$$

denn ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$, so gilt:

$$D(G \circ F)(p)(\dot{c}(0)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} G \circ F(c(t)) = DG(F(p)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F \circ c(t) = DG(F(p))DF(p)(\dot{c}(0)).$$

2.3 Geometrie von Hyperflächen

Hyperflächen sind n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^{n+1} , d.h. die Kodimension dieser Untermannigfaltigkeiten ist 1. Analog zu den Kurven werden wir solchen Objekten Krümmungsgrößen zuordnen. Bei den Kurven war die Krümmung ein Maß für die Änderung des Tangentialvektors. Bei Untermannigfaltigkeiten werden die Krümmungsgrößen ein Maß für die Änderung des Tangentialraumes sein. Bei Hyperflächen ist der Tangentialraum durch die Richtung der Normalen bestimmt.

Definition 2.3.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $U \subset M$ offen. Eine differenzierbare Abbildung $N : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *Einheitsnormalenfeld* auf U , falls $\|N(p)\| = 1$ und $N(p) \perp T_p M$ für alle $p \in U$.

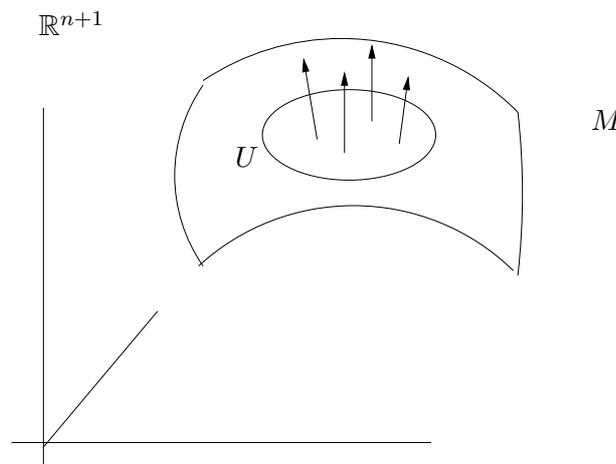


Abbildung 2.15: Einheitsnormalenfeld.

Bemerkung.

- (i) Da $\|N(p)\| = 1$ ist, können wir N als differenzierbare Abbildung $U \rightarrow S^n$ auffassen. Wir nennen sie auch *Gaußabbildung*.
- (ii) Ist N *Normalenfeld*, so auch $-N$.

Beispiele.

- (1) Die Gaußabbildung $N : S^n \rightarrow S^n$ der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist gegeben durch $N(p) = p$.

- (2) Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $a \in \mathbb{R}$ regulärer Wert von f . Dann ist $M = f^{-1}(a)$ eine Hyperfläche, und

$$N(p) = \frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}$$

definiert ein „globales“ differenzierbares Normalenfeld.

- (3) Lokal existieren immer Normalenfelder auf einer Untermannigfaltigkeit. Ist $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine lokale Parametrisierung, so definiert

$$N(\varphi(x)) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right\|}$$

ein differenzierbares Normalenfeld auf $\varphi(U) \subset M$.

Bemerkung. Global braucht ein differenzierbares Normalenfeld für eine Hyperfläche nicht zu existieren. Als Beispiel betrachte das *Möbiusband*.

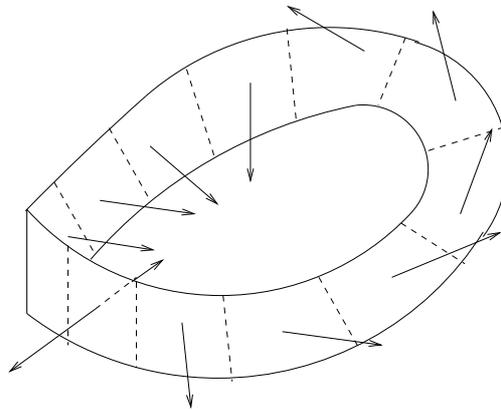


Abbildung 2.16: Möbiusband

Definition 2.3.2. Eine Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *orientierbar*, falls ein global definiertes differenzierbares Normalenfeld $N : M \rightarrow S^n$ existiert.

Man kann folgendes zeigen:

Lemma 2.3.3. Eine Hyperfläche M ist orientierbar genau dann, wenn eine Familie $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ von lokalen Parametrisierungen mit $\bigcup_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$ existiert (Atlas), so dass

$$\det D(\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)(x) > 0$$

für alle $\alpha, \beta \in A$.

Ist $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, so existiert für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung V von p und ein differenzierbares Normalenfeld $N : V \rightarrow S^n$. Wir sind an der Änderung des Normalenfeldes interessiert, also an ihrer Ableitung

$$DN(p) : T_p M \rightarrow T_{N(p)} S^n = N(p)^\perp = T_p M .$$

Satz 2.3.4. *Das Differential $DN(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ der Gaußabbildung ist ein symmetrischer Endomorphismus, d.h.*

$$\langle DN(p)v, w \rangle = \langle v, DN(p)w \rangle$$

für alle $v, w \in T_p M$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^{n+1} bezeichnet.

Beweis. Sei $p_0 \in M$. Es reicht, die Symmetrie für eine Basis von $T_{p_0} M$ nachzuweisen. Sei $\varphi : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung mit $\varphi(x_0) = p_0$. Dann bilden für alle $x \in U$ die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)$ eine Basis von $T_{\varphi(x)} M$. Aus $\langle N \circ \varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \rangle = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle N \circ \varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} N \circ \varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle N \circ \varphi(x), \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle \\ &= \left\langle DN(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle + \left\langle N \circ \varphi(x), \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$$

folgt für $x = x_0$:

$$\left\langle DN(\varphi(x_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) \right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) \right\rangle = \left\langle DN(\varphi(x_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) \right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0) \right\rangle.$$

□

Definition 2.3.5. Der symmetrische Endomorphismus

$$L_p := -DN(p) : T_p M \rightarrow T_p M$$

heißt *Weingartenabbildung* („Shapeoperator“). Die symmetrische 2-Form

$$II_p(v, w) = \langle L_p v, w \rangle$$

auf $T_p M$ heißt *zweite Fundamentalform*. Das auf $T_p M$ eingeschränkte Standardskalarprodukt

$$I_p(v, w) = \langle v, w \rangle$$

heißt *erste Fundamentalform*.

Aus der Linearen Algebra wissen wir: Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $A : V \rightarrow V$ symmetrischer Endomorphismus, so gilt:

- (i) V besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A .
- (ii) Alle Eigenwerte sind reell.

Die Eigenvektoren sind die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \{v \in V \mid \|v\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(v) = \langle A(v), v \rangle$. Dies zeigt man mit dem Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren (Variation unter Nebenbedingung).

Mittels der Weingartenabbildung werden wir Krümmungsgrößen definieren.

Definition 2.3.6. (Normalkrümmung)

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$. Dann heißt

$$\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle$$

die *Normalkrümmung* von c in p .

Bemerkung. Bezeichnet $\sphericalangle_p(N(p), \ddot{c}(0))$ den Winkel zwischen den Vektoren $N(p)$ und $\ddot{c}(0)$, so gilt

$$\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle = \cos(\sphericalangle_p(N(p), \ddot{c}(0))) \|\ddot{c}(0)\| = \cos(\sphericalangle_p(N(p), \ddot{c}(0))) |\kappa_c(0)| .$$

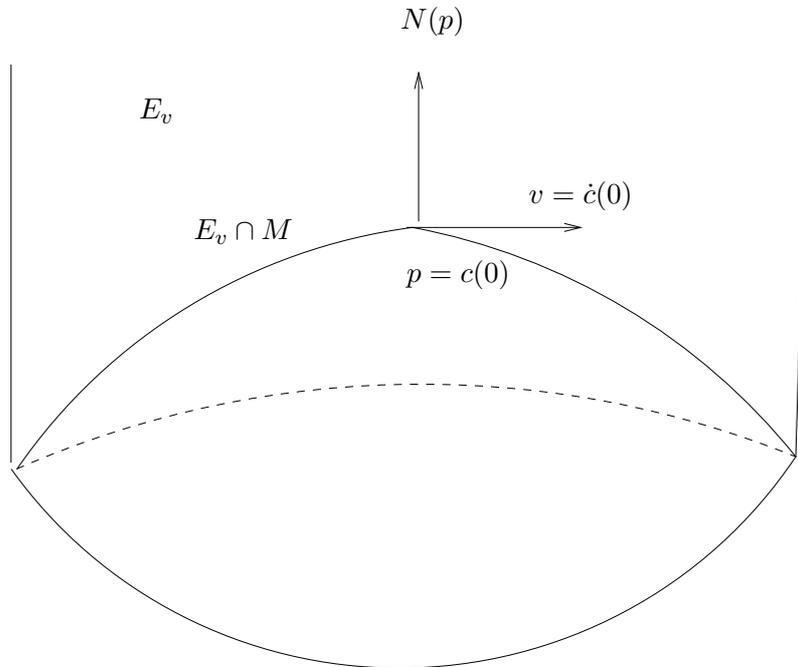


Abbildung 2.17: Normalschnitt.

Sei E_v die Ebene durch p , die von $v \in T_p M, \|v\| = 1$ und $N(p)$ aufgespannt wird. Dann beschreibt $E_v \cap M$ in der Nähe von p eine ebene Kurve. Sei $c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow E_v \cap M$ eine nach der Bogenlänge gegebene Parametrisierung von $E_v \cap M$ mit $\dot{c}(0) = v$. Dann ist

$$|\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle| = \|\ddot{c}(0)\| = |\kappa_c(0)|,$$

d.h. die Normalkrümmung ist $\pm \kappa_c(0)$, wobei c Parametrisierung des Normalschnittes ist.

Folgendes Lemma zeigt, dass die Normalkrümmung nur von $\dot{c}(0)$, aber nicht von $\ddot{c}(0)$ abhängt:

Lemma 2.3.7. (Meusnier)

Sei $c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve in M mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v \in T_p M$. Dann gilt

$$\langle L_p v, v \rangle = \langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle.$$

Beweis. Da $\langle \dot{c}(t), N(c(t)) \rangle = 0$ ist, folgt

$$\langle \ddot{c}(0), N(p) \rangle + \langle \dot{c}(0), DN(p)\dot{c}(0) \rangle = 0$$

und damit die Behauptung. □

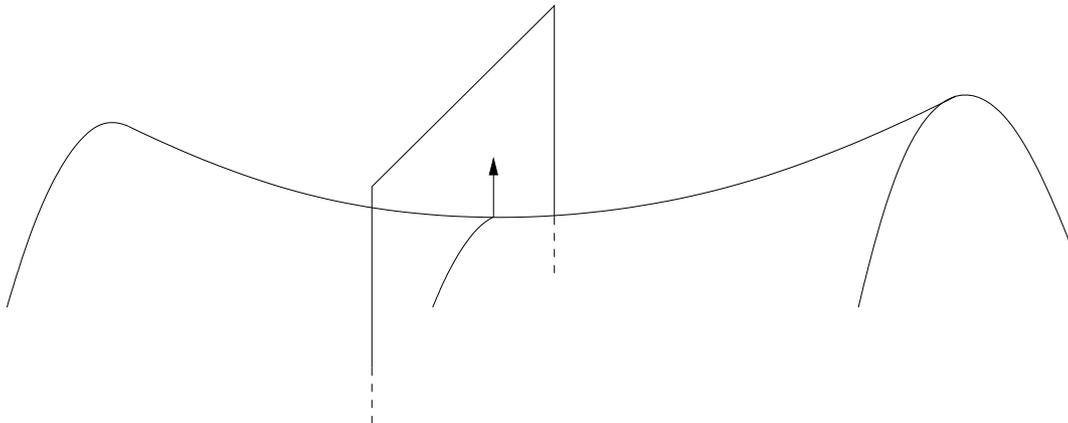
Bemerkungen.

- (i) Das Lemma von Meusnier zeigt, dass die Normalkrümmung einer in M verlaufenden Kurve durch die Krümmung der Hyperfläche erzwungen wird. Sie hängt nur von der Richtung der Kurve ab. Mit

$$k_p(v) := \langle L_p v, v \rangle$$

bezeichnen wir die *Normalkrümmung* in Richtung $v \in S_p M = \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\}$. Insbesondere ist $k_p(v) = \pm \kappa_c(0)$ falls c ein Normalschnitt mit $\dot{c}(0) = v$ ist.

- (ii) Es gilt $k_p(v) = k_p(-v)$. Außerdem ist $k_p(v) > 0$, falls die Fläche sich in Richtung $N(p)$ verbiegt. Verbiegt sich die Fläche in Richtung $-N(p)$, so ist $k_p(v) < 0$.



Aus der Normalkrümmung lassen sich weitere wichtige Krümmungsgrößen definieren.

Definition 2.3.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, $p \in M$ und $L_p = -DN(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ die Weingartenabbildung.

- (i) Die Eigenwerte $k_1(p), \dots, k_n(p)$ von L_p heißen die *Hauptkrümmungen* von M in p .
- (ii) Die Eigenvektoren von L_p heißen die *Hauptkrümmungsrichtungen*.
- (iii) $K(p) = \det L_p = k_1(p) \cdots k_n(p)$ heißt die *Gauß-Kronecker-Krümmung* von M in p . Ist $\dim M = 2$, so nennen wir $K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$ die *Gaußsche Krümmung*.
- (iv) $H(p) = \frac{1}{n} \text{Spur } L_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(p)$ heißt *mittlere Krümmung*.

Bemerkungen.

- (a) Die Hauptkrümmungsrichtungen (HKR) sind die kritischen Punkte der Normalkrümmung $k_p : S_p M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $S_p M = \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\}$ und $k_p(v) = \langle L_p v, v \rangle$.
- (b) Ist $k_i \neq k_j$ für $i \neq j$, so stehen die zugehörigen HKR senkrecht aufeinander.
- (c) Ist $\dim M = 2$ und $k_1 < k_2$, so ist

$$k_1(p) = \min_{v \in S_p M} k_p(v) < \max_{v \in S_p M} k_p(v) = k_2(p).$$

Außerdem hängt $K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p)$ nicht von der Wahl des Vorzeichens von N ab.

- (d) Die Gauß-Kronecker-Krümmung läßt sich geometrisch auch wie folgt interpretieren. Ist $N : M \rightarrow S^n$ eine Gaußabbildung und $W_k \subset M$ eine Folge von offenen Umgebungen von $p \in M$ mit $W_{k+1} \subset W_k$ und $\bigcap_{k=1}^{\infty} W_k = \{p\}$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}_{S^n}(N(W_k))}{\text{vol}_M(W_k)} = |K(p)|.$$

Für den Beweis wende man unter Beachtung von $|\det DN(p)| = |K(p)|$ die Transformationsformel an. Die Details seien als Übung überlassen.

Beispiele.

- (1) Zu $N \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\|N\| = 1$ betrachte die affine Ebene E durch $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ orthogonal zu N . Sie ist gegeben durch

$$E := \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p - p_0, N \rangle = 0\}.$$

Da N konstant ist, ist $DN_p = 0$ und alle Krümmungsgrößen sind null.

- (2) Für $r > 0$ betrachte die Sphäre mit Radius r mit Mittelpunkt 0 gegeben durch

$$S_r^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\| = r\}.$$

Insbesondere ist $N(p) = \frac{p}{r} = \frac{1}{r} \text{id}(p)$ ein Einheitsnormalenfeld von S_r^n und daher ist

$$DN(p)v = \frac{1}{r}v.$$

Also folgt für die Gauß-Kronecker-Krümmung und die mittlere Krümmung

$$K(p) = \det(-DN(p)) = \frac{(-1)^n}{r^n} \quad \text{und} \quad H(p) = \frac{1}{n} \text{Spur}(-DN(p)) = -\frac{1}{r}.$$

Definition 2.3.9. Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, so heißt $p \in M$ *Nabelpunkt*, falls

$$L_p = \lambda \text{id}.$$

Bemerkung. $L_p = \lambda \text{id}$ ist äquivalent zu

$$k_p(v) = \langle L_p v, v \rangle = \lambda \|v\|^2 = \lambda.$$

Also ist p ein Nabelpunkt, wenn die Normalkrümmung konstant ist. Ebenen und Sphären bestehen nur aus Nabelpunkten. Wir werden sehen, dass dies die einzigen Hyperflächen mit dieser Eigenschaft sind.

Satz 2.3.10. *Sind alle Punkte einer zusammenhängenden Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Nabelpunkte, so ist M Teil einer Sphäre oder Teil einer Hyperebene.*

Beweis.

- (1) Wir zeigen zunächst, dass die Aussage lokal richtig ist. Es sei $\varphi : U \rightarrow M$ lokale Parametrisierung, wobei U eine offene und zusammenhängende Menge ist. Nach Voraussetzung gilt

$$DN(\varphi(x)) = \lambda(x) \text{id}_{T_{\varphi(x)}M} \quad \text{mit } \lambda : U \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(N \circ \varphi)(x) = DN(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \quad (2.1)$$

folgt

$$\lambda(x) = \frac{\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(N \circ \varphi)(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\|^2}$$

und somit die Differenzierbarkeit von λ . Wir zeigen nun durch nochmaliges Differenzieren von 2.1, dass die Funktion λ konstant ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} N \circ \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + \lambda(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} N \circ \varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) + \lambda(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} \lambda(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x).$$

Da für $i \neq j$ die Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ linear unabhängig sind, folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Also ist λ konstant. Wir betrachten nun die Fälle $\lambda \equiv 0$ und $\lambda \neq 0$.

- (a) Ist $\lambda \equiv 0$, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} N \circ \varphi = 0$$

und somit ist $N \circ \varphi(x) =: N_0$ konstant. Also folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle N_0, \varphi(x) \rangle = \langle N_0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = \langle N \circ \varphi(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = 0$$

und somit $\langle N_0, \varphi(x) \rangle = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ und alle $x \in U$. Dies impliziert

$$\varphi(U) \subset E = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle N_0, p \rangle = a\}.$$

(b) Ist $\lambda \neq 0$, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi - \frac{1}{\lambda}N \circ \varphi)(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{1}{\lambda}DN(\varphi(x))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, und somit ist

$$\varphi(x) - \frac{1}{\lambda}N \circ \varphi(x) =: p_0$$

konstant. Dies impliziert

$$\|\varphi(x) - p_0\| = \frac{1}{\lambda},$$

d.h. $\varphi(U) \subset S(p_0, \frac{1}{\lambda})$ mit $S(p, r) = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|q - p\| = r\}$.

(a) und (b) zeigen: Ist $p \in M$, so existiert eine offene Umgebung von p , die entweder ganz in einer Sphäre oder in einer Ebene enthalten ist. Wir zeigen nun: Entweder liegt M ganz in einer Ebene oder ganz in einer Sphäre.

Sei $y_0 \in M$ und nehme an, daß eine Umgebung von y_0 in einer Ebene enthalten ist. Sei $y \in M$. Da M zusammenhängend ist, existiert eine stetige Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = y_0$ und $c(1) = y$. Zu jedem $t \in [0, 1]$ existiert eine offene Umgebung $U_t \subset M$ von $c(t)$, so daß U_t in einer Sphäre oder in einer Ebene enthalten ist. Da $c([0, 1]) \subset M$ kompakt ist (c ist stetig!) und die Umgebungen U_t mit $t \in [0, 1]$ eine offene Überdeckung bilden, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$U_{t_1}, \dots, U_{t_n}$$

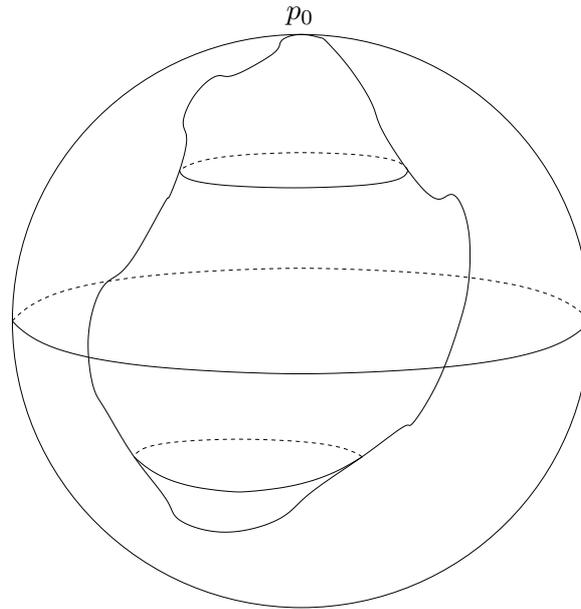
mit $t_i < t_{i+1}$. Da $U_{t_1} \ni c(0) = y_0$ in einer Ebene liegt, liegt auch U_{t_2} in derselben Ebene und somit auch U_{t_3}, \dots, U_{t_n} . Insbesondere liegt y in der gleichen Ebene wie y_0 . Liegt die Umgebung von y_0 in einer Sphäre, so folgt aus demselben Argument, daß jedes $y \in M$ in derselben Sphäre liegt.

□

Bemerkung. Die Topologie auf Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n ist die Relativtopologie. Daher sind Untermannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn zu jeder offenen Überdeckung von M bezüglich der Relativtopologie eine endliche Teilüberdeckung existiert. Dies ist äquivalent dazu, dass zu jeder offenen Überdeckung von M mit offenen Mengen des \mathbb{R}^n eine endliche Teilüberdeckung existiert. Wegen des Satzes von *Heine-Borel* ist dies gleichbedeutend damit, dass M eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Satz 2.3.11. *Sei M eine kompakte Fläche im \mathbb{R}^3 . Dann existiert ein $p \in M$ mit positiver Gaußscher Krümmung $K(p)$.*

Beweis. Da M kompakt ist, existiert ein $r > 0$, so dass $M \subset B(0, r) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \|q\| \leq r\}$ ist und die Randsphäre $S(0, r) = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \|q\| = r\}$ die Fläche M in einem Punkt p_0 berührt, d.h. es existiert ein $p_0 \in M \cap S(0, r)$. Um dies zu beweisen betrachte die differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(p) = \|p\|^2$. Da sie insbesondere stetig ist, nimmt sie ihr Maximum an, d.h. es existiert ein $p_0 \in M$ mit $f(p_0) \geq f(p)$ für alle $p \in M$. Somit ist r mit $r^2 = f(p_0)$ der gesuchte Radius. Wir zeigen nun, dass in p_0 die Krümmung von M größer ist als die der



Sphäre, d.h. $K(p_0) \geq \frac{1}{r^2} > 0$. Da f in $p_0 \in M$ sein Maximum annimmt, steht p_0 senkrecht auf $T_{p_0}M$, Denn ist $c : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$ eine beliebige Kurve mit $\dot{c}(0) \in T_{p_0}M$, so gilt

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ c(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle c(t), c(t) \rangle = 2\langle \dot{c}(0), p_0 \rangle.$$

Außerdem folgt

$$0 \geq \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f \circ c(t) = 2 \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle \dot{c}(t), c(t) \rangle = 2(\langle \ddot{c}(0), c(0) \rangle + \langle \dot{c}(0), \dot{c}(0) \rangle).$$

Ist $\dot{c}(0) = v$ mit $\|v\| = 1$, so folgt

$$\langle \ddot{c}(0), p_0 \rangle \leq -\langle v, v \rangle = -1.$$

Sei nun N die Gaußabbildung mit $N(p_0) = \frac{p_0}{\|p_0\|} = \frac{p_0}{r}$. Dann folgt mit dem Lemma von Meusnier

$$k_{p_0}(v) = \langle L_{p_0}(v), v \rangle = \langle \ddot{c}(0), N(p_0) \rangle = \langle \ddot{c}(0), \frac{p_0}{r} \rangle \leq -\frac{1}{r}.$$

Also gilt $k_1(p_0) \leq -\frac{1}{r}$ und $k_2(p_0) \leq -\frac{1}{r}$, und somit ist

$$K(p) = k_1(p_0) \cdot k_2(p_0) \geq \frac{1}{r^2}.$$

□

2.4 Rechnen in lokalen Koordinaten

Definition 2.4.1. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung.

- (a) Ist $I_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I_p(v, w) = \langle v, w \rangle$ die erste Fundamentalform, so heißen die Funktionen $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_{ij}(x) = I_{\varphi(x)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

die lokale Darstellung der ersten Fundamentalform bezüglich der lokalen Parametrisierung φ .

- (b) Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zusätzlich eine Hyperfläche, $L_p = -DN(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ die Weingartenabbildung, und $II_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $II_p(v, w) = \langle L_p v, w \rangle$ die zweite Fundamentalform. Dann heißen die Funktionen $h_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_{ij} = II_{\varphi(x)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right) = \left\langle L_{\varphi(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

die lokale Darstellung der zweiten Fundamentalform bezüglich der lokalen Parametrisierung φ .

Bemerkung. Die Matrizen $(g_{ij}(x))$ und $(h_{ij}(x))$ sind für jedes $x \in U$ symmetrische $(n \times n)$ -Matrizen. Darüber hinaus ist die Matrix $(g_{ij}(x))$ positiv definit. Die Koeffizienten $g_{ij}, h_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definieren differenzierbare Funktionen auf U . Sie bestimmen die erste und zweite Fundamentalform auf $\varphi(U)$ eindeutig. Denn sind $v = \sum_i v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$ und $w = \sum_j w_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)$ zwei Tangentialvektoren in $T_p M$, wobei $p = \varphi(x)$ ist, so gilt

$$I_p(v, w) = \sum_{i,j} v_i w_j g_{ij}(x) \quad \text{und} \quad II_p(v, w) = \sum_{i,j} v_i w_j h_{ij}(x).$$

Lemma 2.4.2. (Matrixdarstellung der Weingartenabbildung)

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $\varphi : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Sei $p = \varphi(x)$ und $a(x) = (a_{ij}(x))$ die Matrixdarstellung der Weingartenabbildung $L_p : T_p M \rightarrow T_p M$ bezüglich der Basis $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)$, d.h.

$$L_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).$$

Seien $g(x) = (g_{ij}(x))$ und $h(x) = (h_{ij}(x))$ die lokalen Darstellungen der ersten und zweiten Fundamentalform bezüglich der lokalen Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow M$, so gilt:

$$a(x) = g^{-1}(x) \cdot h(x)$$

oder

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n g^{ik}(x) h_{kj}(x),$$

wobei $g^{ik}(x)$ die Koeffizienten der zu g inversen Matrix darstellen.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 h_{ki}(x) &= h_{ik}(x) = \left\langle L_p \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{ji} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_{ji}(x) \cdot g_{jk}(x) \\
 &= \sum_{j=1}^n g_{kj}(x) a_{ji}(x).
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet für die Matrizen $a(x) = (a_{ij}(x))$ und $h(x) = (h_{ij}(x))$

$$h(x) = g(x)a(x) \text{ und somit auch } g^{-1}(x)h(x) = a(x).$$

□

Korollar 2.4.3. (*Gaußsche und mittlere Krümmung in lokalen Koordinaten*)

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung. Dann folgt für $p = \varphi(x)$:

$$K(p) = \det L_p = \det a(x) = \frac{\det h(x)}{\det g(x)}$$

und

$$H(p) = \frac{1}{n} \text{Spur } L_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}(x) = \sum_{i,k=1}^n g^{ik} h_{ki} = \sum_{i,k=1}^n h_{ik}(x) g^{ki}(x).$$

Lemma 2.4.4. (*Längenberechnung von Kurven in lokalen Koordinaten*)

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M^n$ eine lokale Parametrisierung und $c : I \rightarrow M^n$ eine Kurve mit $c(I) \subset \varphi(U)$. Sei $\gamma : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ die Kurve mit $\gamma = \varphi^{-1} \circ c$. Dann gilt:

$$L(c) = \int_I \left(\sum_{i,j=1}^n \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) g_{ij}(\gamma(t)) \right)^{1/2} dt.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \|\dot{c}(t)\|^2 &= \left\| \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma(t) \right\|^2 = \|D\varphi(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \right\|^2 \\
 &= \sum_{i,j} \dot{\gamma}_i(t) \cdot \dot{\gamma}_j(t) \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\gamma(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\gamma(t)) \right\rangle \\
 &= \sum_{i,j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) g_{ij}(\gamma(t)).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$L(c) = \int_I \|\dot{c}(t)\| dt = \int_I \left(\sum_{i,j} \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) g_{ij}(\gamma(t)) \right)^{1/2} dt$$

□

Bemerkung. Dies zeigt, aus den Koeffizienten g_{ij} lassen sich die Längen von Kurven in M berechnen. Wir haben schon gesehen, daß sich das Volumen einer Untermannigfaltigkeit aus den g_{ij} berechnen läßt. Ist $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung und $A \subset \varphi(U)$, so gilt

$$\text{vol}_M A = \int_{\varphi^{-1}(A)} \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx.$$

Von besonderer Wichtigkeit sind Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten, die die Längen von Kurven invariant lassen (Isometrien).

Definition 2.4.5. Seien M bzw. M' n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N bzw. $\mathbb{R}^{N'}$ und $F : M \rightarrow M'$ ein Diffeomorphismus. F heißt *Isometrie*, falls F die Längen von Kurven erhält, d. h. falls für alle Kurven $c : I \rightarrow M$ gilt:

$$L_{M'}(F \circ c) = L_M(c) .$$

Satz 2.4.6. (*Charakterisierung von Isometrien*)

Seien $M \subset \mathbb{R}^N, M' \subset \mathbb{R}^{N'}$ zwei Untermannigfaltigkeiten und $F : M \rightarrow M'$ ein Diffeomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) F ist eine Isometrie.

(b) Für alle $p \in M, v \in T_p M$ gilt:

$$\|DF(p)v\| = \|v\|.$$

(c) Für alle $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ gilt:

$$\langle DF(p)v, DF(p)w \rangle = \langle v, w \rangle .$$

Bemerkung. Die Aussage (c) läßt sich in lokalen Koordinaten wie folgt interpretieren. Ist $\varphi : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M , so ist $\psi = F \circ \varphi : U \rightarrow M'$ eine lokale Parametrisierung von M' . Ist

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

die lokale Darstellung der ersten Fundamentalform bezüglich φ , so gilt für die lokale Darstellung der ersten Fundamentalform bezüglich ψ

$$g'_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \left\langle DF(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), DF(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle .$$

Damit ist (c) äquivalent zu

$$g'_{ij}(x) = g_{ij}(x),$$

denn die $g_{ij}(x)$ bzw. $g'_{ij}(x)$ bestimmen die erste Fundamentalform auf $T_{\varphi(x)}M$ bzw. $T_{\psi(x)}M'$ eindeutig. Daher ist F genau dann eine Isometrie, falls $g'_{ij} = g_{ij}$ gilt.

Beweis. Aus (b) folgt (a), denn

$$L(F \circ c) = \int_I \|\widehat{F \circ c}(t)\| dt = \int_I \|DFc(t)\dot{c}(t)\| dt = \int_I \|\dot{c}(t)\| dt = L(c).$$

Aus (a) folgt (b): Sei $v \in T_p M$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ Kurve mit $\dot{c}(a) = v$. Betrachte $c|_{[a, t]} : [a, t] \rightarrow M$. Dann gilt $L(F \circ c|_{[a, t]}) = L(c|_{[a, t]})$ und somit

$$\int_a^t \|DF(c(s))\dot{c}(s)\| ds = \int_a^t \|\dot{c}(s)\| ds.$$

Differentiation nach t an der Stelle a impliziert

$$\|DF(p)v\| = \|v\|.$$

Die Äquivalenz von (b) und (c) folgt aus der *Polarisationsformel*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2).$$

□

Bemerkungen.

- Geometrische Eigenschaften und Größen, die unter Isometrien erhalten bleiben, gehören zur inneren Geometrie einer Untermannigfaltigkeit. Ein „Bewohner der Untermannigfaltigkeit“ kann diese bestimmen, ohne die Untermannigfaltigkeit verlassen zu müssen. Objekte der inneren Geometrie sind durch die erste Fundamentalform (die g_{ij} 's) bestimmt (dazu gehören die Länge einer Kurve in der Untermannigfaltigkeit und das Volumen).
- Die Hauptkrümmungen bleiben unter Isometrien im allgemeinen nicht erhalten. Als Beispiel betrachte den Zylinder und eine Ebene im \mathbb{R}^3 . Beide Flächen sind lokal isometrisch, d.h. für jeden Punkt des Zylinders gibt es eine offene Umgebung, die man isometrisch auf eine offene Umgebung der Ebene abbilden kann (Warum?). Im Gegensatz zur Ebene sind aber die Hauptkrümmungen des Zylinders nicht alle null. Wie wir bald sehen werden ist überraschenderweise die Gaußsche Krümmung von Flächen des \mathbb{R}^3 eine Größe der inneren Geometrie. Diese Aussage, die von Gauß bewiesen wurde, ist Gegenstand des Theorema Egregium. Wir werden dieses Theorem im nächsten Abschnitt beweisen.

Auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ kann man durch Vorgabe einer ersten Fundamentalform (ohne Benutzung eines umgebenden Raumes) neue Geometrien definieren, die nicht mit der Euklidischen Geometrie übereinstimmen. Das geht folgendermaßen:

Definition 2.4.7. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass für alle $x \in U$ die Matrix

$$(g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$$

symmetrisch und positiv definit ist. Dann heißt (U, g_{ij}) *lokaler Riemannscher Raum*.

Bemerkung. Die g_{ij} definieren ein punktabhängiges Skalarprodukt gegeben durch

$$I_x(v, w) = \sum_{i,j}^n v_i w_j g_{ij}(x)$$

für alle $v, w \in T_x U$. Der Tangentialraum von U im Punkte $x \in U$ besteht aus allen Vektoren des \mathbb{R}^n mit Fußpunkt x . Mit den schon bekannten Formeln ist es daher möglich in U die Länge von Kurven und das Volumen von messbaren Teilmengen zu bestimmen. Anders als in der euklidischen Geometrie sind die kürzesten Kurven im Allgemeinen kein Geraden mehr.

Beispiel. Der lokale Riemannsche Raum (U, g_{ij}) mit

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\} \quad \text{und} \quad g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}$$

heißt *hyperbolische Kreisscheibe*.

Kapitel 3

Die innere Geometrie von Hyperflächen

3.1 Geodätische und die kovariante Ableitung

Das erste Ziel dieses Abschnittes ist es, Kurven in einer Untermannigfaltigkeit zu definieren, die die Geraden im \mathbb{R}^n verallgemeinern.

Definition 3.1.1. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Eine zweimal differenzierbare Kurve $c : I \rightarrow M$ heißt *Geodätische* von M , falls für alle $t \in I$ gilt

$$\ddot{c}(t) \perp T_{c(t)}M .$$

Bemerkung.

Das *Newtonsche Gesetz* der Mechanik besagt: Kraft ist gleich Masse mal Beschleunigung. Mathematisch bedeutet dies das Folgende: Bewegt sich ein Teilchen mit Masse m in einem Kraftfeld $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so erfüllt die Bahnkurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Differentialgleichung

$$m \cdot \ddot{c}(t) = F(c(t)) .$$

Wirken auf das Teilchen keine Kräfte, d. h. ist $F = 0$, so folgt $c(t) = at + b$, und somit beschreibt das Teilchen eine Gerade. Physikalisch interpretiert beschreibt eine Geodätische auf einer Untermannigfaltigkeit M eine Bahnkurve eines Teilchens, auf das keine Kräfte einwirken, außer solchen, die es in der Untermannigfaltigkeit halten (Zwangskräfte).

Beispiel. Ein *Großkreis der Sphäre* S^2 mit Anfangspunkt $v_1 \in S^2$ ist parametrisierbar durch

$$c(t) = \cos t \cdot v_1 + \sin t \cdot v_2,$$

wobei $v_2 \perp v_1, \|v_2\| = 1$. Dann gilt

$$\ddot{c}(t) = -\cos t \cdot v_1 - \sin t \cdot v_2 = -c(t) \in N_{c(t)}S^2 \perp T_{c(t)}S^2 .$$

Also sind die Großkreise Geodätische in S^2 .

Gemäß der Definition scheinen Geodätische keine Objekte der inneren Geometrie zu sein. Jedoch ist, wie wir bald sehen werden, das Gegenteil richtig, da sie durch die erste Fundamentalform bestimmt sind. Insbesondere werden Geodätische unter Isometrien auf Geodätische abgebildet.

Lemma 3.1.2. *Ist $c : I \rightarrow M$ eine Geodätische, so ist ihre Geschwindigkeit $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$ konstant.*

Beweis. Sei $f(t) = \|\dot{c}(t)\|^2$. Dann folgt

$$f'(t) = 2\langle \dot{c}(t), \ddot{c}(t) \rangle = 0,$$

und somit ist f konstant. □

Das nächste Ziel besteht in der Definition der Ableitung von Vektorfeldern in Untermannigfaltigkeiten. Dies führt zur kovarianten Ableitung.

Definition 3.1.3. Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche.

- (a) Sei $V \subset M$ offen. Eine differenzierbare Abbildung $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *Vektorfeld auf M* , falls $X(p) \in T_p M$ für alle $p \in V$ gilt.
- (b) Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve. Eine differenzierbare Abbildung $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt *Vektorfeld längs c* , falls $F(t) \in T_{c(t)} M$ für alle $t \in I$ gilt.

Bemerkungen.

- (a) Ein Einheitsnormalenfeld $N : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ist kein Vektorfeld auf M , denn $N(p) \notin T_p M$.
- (b) Ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, so ist $\dot{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld längs c . Man nennt es auch *Tangentenfeld* von c . Ist $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ Vektorfeld auf M und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(I) \subset V$, so ist $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $F(t) = X \circ c(t)$ ein Vektorfeld längs c .
- (c) Ist $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung, so beschreiben

$$X_i(p) := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p))$$

Vektorfelder auf M , die auf $V = \varphi(U)$ definiert sind. Da die Felder $X_1(p), \dots, X_n(p)$ für jedes $p \in V$ eine Basis des Tangentialraumes $T_p M$ bilden, nennen wir sie auch die durch die lokale Parametrisierung induzierten *Basisvektorfelder*.

Wir wollen nun Vektorfelder differenzieren. Sei $V \subset M^n$ offen und $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld auf M^n . Dann ist die Ableitung $D_v X(p) := DX(p)(v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ in Richtung $v \in T_p M$ an der Stelle $p \in V$ im Allgemeinen kein Vektor in $T_p M$ mehr. Analoges gilt auch für Vektorfelder längs Kurven. Daher definieren wir:

Definition 3.1.4. Seien $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $N(p)$ Einheitsnormalenvektor in $p \in M^n$. Bezeichne mit

$$\text{pr}_p : \mathbb{R}^{n+1} = T_p M \oplus N_p M \rightarrow T_p M, \quad \text{pr}_p(v) = v - \langle v, N(p) \rangle N(p)$$

die *orthogonale Projektion* von \mathbb{R}^{n+1} auf $T_p M$.

- (a) Sei $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld auf M^n . Ist $p \in V$ und $v \in T_p M$, so heißt

$$\nabla_v X(p) := \text{pr}_p(D_v X(p)) = D_v X(p) - \langle D_v X(p), N(p) \rangle N(p) \in T_p M$$

die *kovariante Ableitung* von X im Punkte p in Richtung v .

(b) Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve und $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld längs c . Dann heißt

$$\frac{D}{dt}F(t) = \text{pr}_{c(t)}\left(\frac{d}{dt}F(t)\right) = \frac{d}{dt}F(t) - \left\langle \frac{d}{dt}F(t), N(p) \right\rangle N(p)$$

die kovariante Ableitung von F im Punkte $t \in I$.

Bemerkungen.

(a) Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve. Dann ist $\dot{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld längs c , und es gilt

$$\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = \text{pr}_{c(t)}(\ddot{c}(t)) .$$

Also ist $c : I \rightarrow M$ genau dann eine Geodätische, falls $\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

(b) Ist $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld auf M^n , $c : I \rightarrow V$ eine Kurve und $F(t) = X \circ c(t)$, so gilt

$$\frac{D}{dt}F(t) = \text{pr}_{c(t)}\left(\frac{d}{dt}X \circ c(t)\right) = \text{pr}_{c(t)}(DX(c(t))\dot{c}(t)) = \nabla_{\dot{c}(t)}X(c(t)) .$$

(c) Die kovariante Ableitung läßt sich auch mittels der Weingartenabbildung $L_p = -DN(p)$ beschreiben, denn ist $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $\dot{c}(0) = v \in T_pM$, so folgt aus $0 = \langle X \circ c(t), N \circ c(t) \rangle$

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X \circ c(t), N \circ c(t) \rangle = \langle D_vX(p), N(p) \rangle + \langle X(p), D_vN(p) \rangle$$

und somit

$$\nabla_vX(p) = D_vX(p) - \langle X(p), L_p(v) \rangle N(p) .$$

(d) Sind $X, Y : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ Vektorfelder, so schreiben wir

$$\nabla_XY(p) := \nabla_{X(p)}Y(p)$$

für die kovariante Ableitung von Y in Richtung X . Insbesondere ist $\nabla_XY : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ wieder ein Vektorfeld. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $v \in T_pM$, so schreiben wir

$$v(f) := Df(p)(v)$$

für die Richtungsableitung von f in Richtung v . Ist $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$, so folgt

$$v(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t) .$$

Ist $X : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld, so setzen wir

$$Xf(p) = X(p)(f) = Df(p)(X(p)) .$$

Die kovariante Ableitung besitzt folgende Eigenschaften:

Lemma 3.1.5. Sei $V \subset M$ offen, $X, Y, Z : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ Vektorfelder auf M und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gilt:

- (a) $\nabla_{X+Y}Z(p) = \nabla_XZ(p) + \nabla_YZ(p)$,
 (b) $\nabla_{fX}Z(p) = f(p)\nabla_XZ(p)$,
 (c) $\nabla_X(Y+Z)(p) = \nabla_XY(p) + \nabla_XZ(p)$,
 (d) $\nabla_X(fY)(p) = X(f)(p)Y(p) + f(p)\nabla_XY(p)$,
 (e) $Z(\langle X, Y \rangle)(p) = \langle \nabla_ZX(p), Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_ZY(p) \rangle$.

Beweis. (a) - (d) sind als Übung überlassen. Wir betrachten nur (e): Sei $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = Z(p)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Z(\langle X, Y \rangle)(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle X \circ c(t), Y \circ c(t) \rangle = \langle DX(p)(\dot{c}(0)), Y(p) \rangle + \langle X(p), DY(p)(\dot{c}(0)) \rangle \\ &= \langle \nabla_{Z(p)}X(p) + \text{Normalanteil}, Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_{Z(p)}Y(p) + \text{Normalanteil} \rangle \\ &= \langle \nabla_ZX(p), Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_ZY(p) \rangle. \end{aligned}$$

□

Definition 3.1.6. Sind $X, Y : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ Vektorfelder auf $V \subset M^n$, so heißt

$$[X, Y](p) = \nabla_XY(p) - \nabla_YX(p) = D_XY(p) - D_YX(p)$$

die *Lieklammer* von X, Y .

Bemerkung. Das zweite Gleichheitszeichen in der Definition der Lieklammer folgt aus der Symmetrie der Weingartenabbildung $L_p : T_pM \rightarrow T_pM$, denn es gilt

$$\nabla_XY(p) = D_XY(p) - \langle Y(p), L_p(X(p)) \rangle N(p).$$

Seien M^n eine Hyperfläche, $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung und

$$X_i(p) := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) \quad 1 \leq i \leq n$$

die durch φ induzierten Basisvektorfelder. Dann gilt für $\varphi(x) = p$ wegen $X_i(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(x + te_i)$ die Beziehung

$$D_{X_i}X_j(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_j(\varphi(x + te_i)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x + te_i) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x). \quad (3.1)$$

Also gilt

$$[X_i, X_j](p) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}(x) = 0.$$

Für beliebige Vektorfelder verschwindet die Lieklammer nicht. Ist $[X, Y] = 0$, so sagen wir, dass die Vektorfelder kommutieren (man kann zeigen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die zugehörigen Flüsse kommutieren).

Das nächste Ziel besteht darin zu zeigen, dass die kovariante Ableitung zur inneren Geometrie gehört, also durch die 1.Fundamentalform festgelegt ist. Damit gehören auch die Geodätischen zur inneren Geometrie.

3.2 Die kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten

Seien M^n eine Hyperfläche, $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung und

$$X_i(p) := \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)) \quad 1 \leq i \leq n$$

die durch φ induzierten Basisvektorfelder sowie $N : \varphi(U) \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Einheitsnormalenfeld von $\varphi(U)$. Dann gilt für $p = \varphi(x)$

$$D_{X_i} X_j(p) = \nabla_{X_i} X_j(p) + \langle X_j(p), L_p(X_i(p)) \rangle N(p) = \nabla_{X_i} X_j(p) + h_{ij}(x) N(p),$$

denn aus der lokalen Darstellung der zweiten Fundamentalform folgt

$$\langle X_i(p), L_p(X_i(p)) \rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), L_{\varphi(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = h_{ji}(x) = h_{ij}(x).$$

Da $\nabla_{X_i} X_j(p) \in T_p M$ sind, existieren Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\nabla_{X_i} X_j(p) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) X_k(p). \quad (3.2)$$

Lemma 3.2.1. *Sei (g_{ij}) die lokale Darstellung der ersten Fundamentalform bezüglich der lokalen Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow M$ und $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ die zu (g_{ij}) inverse Matrix. Dann gilt*

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell}(x) \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x) \right).$$

Insbesondere sind die Koeffizienten $\Gamma_{ij}^k(x)$ symmetrisch in i, j , d. h. es gilt

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x).$$

Beweis. Sei $p = \varphi(x)$. Multiplizieren wir (3.2) mit X_ℓ , so erhalten wir unter Benutzung von (3.1)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) g_{k\ell}(x) &= \langle \nabla_{X_i} X_j(p), X_\ell(p) \rangle = \langle D_{X_i} X_j(p), X_\ell(p) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} \right\rangle(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} \right\rangle(x) - \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell}(x) \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{\ell s} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} \right) g^{\ell s} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \underbrace{\sum_{\ell=1}^n g_{k\ell} g^{\ell s}}_{\delta_{ks}} = \Gamma_{ij}^s.$$

Die Symmetrie der Koeffizienten $\Gamma_{ij}^k(x)$ ergibt sich unmittelbar aus der Formel. \square

Definition 3.2.2. Sei $\varphi : U \rightarrow M$ ein Karte. Die oben mittels φ definierten Funktionen $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *Christoffelsymbole* assoziiert zu φ .

Wegen des vorangegangenen Lemmas sind die Christoffelsymbole Objekte der inneren Geometrie.

Lemma 3.2.3. Die kovariante Ableitung ist durch die Christoffelsymbole eindeutig festgelegt. Genauer gilt: Seien $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine Karte, $X : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld auf $\varphi(U) \subset M$ und

$$X(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) X_i(p)$$

die Darstellung von X mittels der zu φ gehörigen Basisvektorfelder X_i und Koordinatenfunktionen $f_i : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $p = \varphi(x)$ und $v \in T_p M$ mit $v = \sum_{j=1}^n a_j X_j(p)$, so gilt

$$\nabla_v X(p) = \sum_{k=1}^n \left(v(f_k) + \sum_{i,j=1}^n f_i(p) a_j \Gamma_{ij}^k(x) \right) X_k(p). \quad (3.3)$$

Ist $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld längs der Kurve $c : I \rightarrow M^n$ mit $c(I) \subset \varphi(U)$ und

$$F(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) X_i(c(t))$$

die Darstellung von F bezüglich der Basisvektorfelder X_i , dann gilt

$$\frac{D}{dt} F(t) = \sum_{k=1}^n \left(f'_k(t) + \sum_{i,j=1}^n f_i(t) \gamma'_j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) X_k(c(t)), \quad (3.4)$$

wobei

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \varphi^{-1} \circ c : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

die lokale Darstellung der Kurve c bezüglich der Parametrisierung φ bezeichnet.

Beweis. Aus den Rechenregeln für die kovariante Ableitung sowie Lemma folgt

$$\begin{aligned} \nabla_v X(p) &= \sum_{i=1}^n \nabla_v (f_i X_i) = \sum_{i=1}^n v(f_i) X_i(p) + f_i(p) \nabla_v X_i(p) \\ &= \sum_{i=1}^n v(f_i) X_i(p) + \sum_{i,j=1}^n f_i(p) a_j \nabla_{X_j} X_i(p) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(v(f_k) + \sum_{i,j=1}^n f_i(p) a_j \Gamma_{ij}^k(x) \right) X_k(p). \end{aligned}$$

Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, $F : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein Vektorfeld längs c und

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \varphi^{-1} \circ c : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n,$$

sowie

$$F(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) X_i(c(t)) \quad \text{mit} \quad X_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p)).$$

Dann gilt

$$\frac{D}{dt} F(t) = \sum_{i=1}^n f_i'(t) X_i(c(t)) + \sum_{i=1}^n f_i(t) \nabla_{\dot{c}(t)} X_i(c(t)).$$

Da

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) &= \widehat{\varphi \circ \gamma}(t) = D\varphi(\gamma(t))\gamma'(t) = \sum_{j=1}^n \gamma_j'(t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(\gamma(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n \gamma_j'(t) X_j(c(t)) \end{aligned}$$

ist, folgt

$$\nabla_{\dot{c}(t)} X_i(c(t)) = \sum_{j=1}^n \gamma_j'(t) \nabla_{X_j} X_i(c(t)) = \sum_{j,k=1}^n \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X_k(c(t))$$

und somit die Behauptung. \square

Korollar 3.2.4. *Die kovariante Ableitung und somit auch die Geodätischen gehören zur inneren Geometrie.*

Bemerkung. Die Geodätischen sind Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Denn ist $c : I \rightarrow M^n$ eine Kurve und $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung mit $c(I) \subset \varphi(U)$ und $\gamma(t) = \varphi^{-1} \circ c(t)$, so gilt $\dot{c}(t) = D\varphi(\gamma(t))\gamma'(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i'(t) X_i(c(t))$.

Mit Formel (3.4) aus Lemma 3.2 folgt

$$\frac{D}{dt} \dot{c}(t) = \sum_{k=1}^n \left(\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^n \gamma_i'(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) X_k(c(t)).$$

$c : I \rightarrow M$ ist also genau dann eine Geodätische auf M , falls für alle $k = 1, 2, \dots, n$ gilt

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j=1}^n \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k \circ \gamma = 0. \quad (3.5)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung kann man folgendermaßen als System erster Ordnung schreiben: Setze $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \gamma_1', \dots, \gamma_n')$. Dann

ist 3.5 äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= y_1 \\
 &\vdots \\
 x'_n &= y_n \\
 y'_1 &= - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \Gamma_{ij}^1(x_1, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 y'_n &= - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \Gamma_{ij}^n(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sei $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in U \times \mathbb{R}^n$ so definiere das Vektorfeld

$$F : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

durch

$$F_i(x, y) = y_i \quad \text{und} \quad F_{i+k}(x, y) = - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \Gamma_{ij}^k(x_1, \dots, x_n)$$

für $i, k \in \{1, \dots, n\}$. Dann lässt sich (3.6) auch in der prägnanten Form

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = F(x(t), y(t))$$

schreiben und ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung. Da das Vektorfeld F stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf, dass zu jedem Anfangswert $(x, v_0) \in U \times \mathbb{R}^n$ ein maximales Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und genau eine Kurve $(x, y) : I \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ existiert mit $x(0) = x$ und $y(0) = v_0$, die (3.6) löst. Damit löst $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ auch die Gleichungen (3.5) und somit ist $c : I \rightarrow M$ mit $c(t) = \varphi \circ \gamma(t)$ eine Geodätische. Dies überträgt sich zu folgenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Geodätische: Zu jedem Tangentialvektor $v \in T_p M$ existiert ein Intervall I mit $0 \in I$ und genau eine Geodätische $c : I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.

3.3 Das Theorema egregium

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass die Gaußkrümmung einer Riemannschen Fläche zur inneren Geometrie gehört. Dies ist die Aussage des *Theorema egregium*.

Dazu beweisen wir zunächst das folgende Lemma für Vektorfelder auf \mathbb{R}^n :

Lemma 3.3.1. *Es seien X, Y, Z Vektorfelder auf einer offenen Menge des \mathbb{R}^n . Dann gilt*

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = D_{[X, Y]} Z .$$

Beweis. Sei $X = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ und $Y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 D_X D_Y Z &= \sum_{i=1}^n \xi_i D_{e_i} \left(\sum_{j=1}^n \eta_j D_{e_j} Z \right) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} D_{e_j} Z + \xi_i \eta_j D_{e_i} D_{e_j} Z \\
 &= \sum_{i=1}^n \xi_i D_{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} e_j} Z + \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j D_{e_i} D_{e_j} Z \\
 &= \sum_{i=1}^n \xi_i D_{D_{e_i} Y} Z + \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &= D_{D_X Y} Z + \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = D_{D_X Y - D_X Y} Z = D_{[X, Y]} Z .$$

□

Bemerkung. Diese Identität gilt auch für Vektorfelder auf Untermannigfaltigkeiten, da man sie auf offene Teilmengen des umgebenden Raumes differenzierbar fortsetzen kann.

Satz 3.3.2. (Gauß- und Codazzigleichungen)

Seien $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, X, Y, Z Vektorfelder auf M^n und $LX(p) = L_p(X(p))$, wobei $L_p = -DN(p)$ die Weingartenabbildung zu einem gegebenen Normalenfeld bezeichnet. Dann gelten die folgenden Gleichungen:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \langle Z, LY \rangle LX - \langle Z, LX \rangle LY \quad (\text{Gaußgleichung})$$

$$\nabla_X (LY) - \nabla_Y (LX) - L([X, Y]) = 0 \quad (\text{Codazzigleichung})$$

Bemerkung. Der Ausdruck

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

ist ein Vektorfeld, das durch kovariante Ableitung definiert ist, und deshalb ein Objekt der inneren Geometrie. Das Gleiche gilt somit auch für die rechte Seite der Gaußgleichung. Außerdem hängt der Vektor $R(X, Y)Z(p) \in T_p M$ nur von den Werten der Vektorfelder X, Y, Z im Punkte p ab, denn die rechte Seite der Gaußgleichung hat diese Eigenschaft. Daher ist für jedes $p \in M$ die Abbildung

$$R_p : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

mit $R_p(x, y)z = (R(X, Y)Z)(p)$, wobei X, Y, Z Vektorfelder mit $X(p) = x, Y(p) = y$ und $Z(p) = z$ sind, wohldefiniert und linear in jeder Komponente. Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen *Tensoren*. Der Tensor R heißt *Krümmungstensor* oder auch Riemannscher Krümmungstensor.

Beweis. Seien X, Y, Z Vektorfelder auf M . Aus

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle Y, LX \rangle N$$

folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z &= \nabla_X (D_Y Z - \langle Z, LY \rangle N) \\ &= D_X (D_Y Z - \langle Z, LY \rangle N) - \langle D_Y Z - \langle Z, LY \rangle N, LX \rangle N \\ &= D_X D_Y Z - (\langle D_X Z, LY \rangle + \langle Z, D_X LY \rangle) N - \langle Z, LY \rangle D_X N - \langle D_Y Z, LX \rangle N \\ &= D_X D_Y Z + \langle Z, LY \rangle LX \\ &\quad - (\langle \nabla_X Z, LY \rangle + \langle Z, \nabla_X LY \rangle + \langle \nabla_Y Z, LX \rangle) N \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung von Lemma 3.3.1

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= D_{[X, Y]} Z + \langle Z, LY \rangle LX - \langle Z, LX \rangle LY \\ &\quad - (\langle Z, \nabla_X (LY) \rangle - \langle Z, \nabla_Y (LX) \rangle) N . \end{aligned}$$

Subtrahieren wir von dieser Identität die Beziehung

$$\nabla_{[X, Y]} Z = D_{[X, Y]} Z - \langle Z, L([X, Y]) \rangle N ,$$

so folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z &= \langle Z, LY \rangle LX - \langle Z, LX \rangle LY \\ &\quad - (\langle Z, \nabla_X (LY) \rangle - \langle Z, \nabla_Y (LX) \rangle - \langle Z, L([X, Y]) \rangle) N . \end{aligned}$$

Aus dem Tangentialanteil dieser Identität erhalten wir unmittelbar die Gaußgleichung

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \langle Z, LY \rangle LX - \langle Z, LX \rangle LY .$$

Der Normalanteil liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Z, \nabla_X (LY) - \langle Z, \nabla_Y (LX) - \langle Z, L([X, Y]) \rangle \rangle \\ &= \langle Z, \nabla_X (LY) - \nabla_Y (LX) - L([X, Y]) \rangle . \end{aligned}$$

Da diese Identität für alle Vektorfelder Z gelten muss, erhalten wir die Codazzigliedung. \square

Korollar 3.3.3. (Theorema Egregium):

Sei $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche und $\varphi : U \rightarrow M^n$ eine lokale Parametrisierung. Dann gilt für $X_i(p) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(p))$ mit $p = \varphi(x)$

$$\begin{aligned} \langle R(X_i(p), X_j(p))X_k(p), X_\ell(p) \rangle &= \langle X_k(p), L_p(X_j(p)) \rangle \langle X_\ell(p), L_p(X_i(p)) \rangle \\ &\quad - \langle X_k(p), L_p(X_i(p)) \rangle \langle X_j(p), L_p(X_\ell(p)) \rangle \\ &= h_{kj}(x)h_{i\ell}(x) - h_{ki}(x)h_{j\ell}(x) . \end{aligned}$$

Insbesondere ist die linke und somit auch die rechte Seite für alle $i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$ eine Größe der inneren Geometrie, und für $n = 2$ gilt

$$K(p) = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{\det(g_{ij})} = \frac{\langle R(X_2(p), X_1(p))X_1(p), X_2(p) \rangle}{\det(g_{ij})} .$$

Daher ist die Gaußkrümmung einer Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine Größe der inneren Geometrie.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Gaußgleichung. \square

Bemerkungen.

- (a) Im Falle gerader Dimension $\dim M = n$ kann man zeigen, dass die Gauß-Kroneckerkrümmung eine Größe der inneren Geometrie ist, denn in diesem Fall kann man $\det(h_{ij})$ über 2×2 Unterdeterminanten entwickeln. Genauer gilt

$$\det(h_{ij}) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} n!} \sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{sign} \sigma \text{sign} \tau (h_{\sigma(1)\tau(1)} h_{\sigma(2)\tau(2)} - h_{\sigma(1)\tau(2)} h_{\sigma(2)\tau(1)}) \cdots \\ \cdot (h_{\sigma(n-1)\tau(n-1)} h_{\sigma(n)\tau(n)} - h_{\sigma(n-1)\tau(n)} h_{\sigma(n)\tau(n-1)}) .$$

Also ist $\det(h_{ij})$ eine Größe der inneren Geometrie.

- (b) Aus dem Theorema Egregium folgt insbesondere, dass die Gaußkrümmung invariant unter Isometrien zwischen Flächen ist, d.h. ist $F : M \rightarrow M'$ eine Isometrie, so gilt

$$K_M(p) = K_{M'}(F(p)) .$$

Insbesondere existiert keine Isometrie, die eine offene Menge der Sphäre von Radius r auf eine offene Teilmenge der Ebene abbildet. Denn die Sphäre hat Gaußkrümmung $\frac{1}{r^2}$, während die Ebene Gaußkrümmung 0 besitzt. Somit können keine maßstabstreuen Karten der Erde existieren.

- (c) Sei (U, g_{ij}) ein 2-dimensionaler Riemannscher Raum (z.B. auch der Parameterbereich U einer Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow M^2$ einer 2-dimensionalen Fläche mit $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \rangle$). Die Gaußkrümmung in $x \in U$ errechnet man nun folgendermaßen:

- (1) Man bestimmt zunächst die 8 Christoffelsymbole $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß Lemma 3.2.1.
- (2) Man bestimmt $\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle$, wobei X_1, X_2 die konstanten Vektorfelder $X_1(x) = e_i$ sind. Dazu berechnet man:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_2(x) &= \nabla_{X_1} (\Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2)(x) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1}(x) X_1(x) + \Gamma_{22}^1(x) \nabla_{X_1} X_1(x) \\ &\quad + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_1}(x) X_2(x) + \Gamma_{22}^2(x) \nabla_{X_1} X_2(x) \\ &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1}(x) X_1(x) + \Gamma_{22}^1(x) (\Gamma_{11}^1(x) X_1(x) + \Gamma_{11}^2(x) X_2(x)) \\ &\quad + \frac{\partial \Gamma_{22}^2}{\partial x_1}(x) X_2(x) + \Gamma_{22}^2(x) (\Gamma_{12}^1(x) X_1(x) + \Gamma_{12}^2(x) X_2(x)) \end{aligned}$$

Genauso berechnet man

$$\nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_2(x)$$

und schließlich $\langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle$ unter Beachtung von $\langle X_i(x), X_j(x) \rangle = g_{ij}(x)$.

- (3) Schließlich erhält man $K(x) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))} \langle R(X_1, X_2)X_2, X_1 \rangle$.

Wir bemerken nochmal, dass die Weingartenabbildung eines lokalen Riemannschen Raumes nicht existiert. Trotzdem läßt sich die Gaußkrümmung mit Hilfe der g_{ij} 's ausrechnen. Die wesentliche Aussage des Theorema Egregium ist gerade, dass man die Weingartenabbildung zur Berechnung der Gaußkrümmung gar nicht benötigt.

3.4 Extremaleigenschaften von Geodätischen

Von geraden Linien im Raum ist bekannt, daß sie die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte darstellen. Für Geodätische auf Hyperflächen gilt diese globale Eigenschaft im allgemeinen nicht: Betrachte als Beispiel ein Segment c eines Großkreises auf der Einheitssphäre.

Falls $L(c) > \pi$ ist, gibt es eine kürzere Verbindung zwischen den Endpunkten von c .

Wir werden aber sehen, daß kürzeste Verbindungskurven zweier Punkte stets Geodätische sind. Diese Kürzeste sind aber im allgemeinen nicht eindeutig; z. B. gibt es unendlich viele Kürzeste vom Nordpol zum Südpol. Man kann aber zeigen, dass die kürzesten Verbindungen genügend nahe beieinanderliegender Punkte immer eindeutig sind (Differentialgeometrie 1).

Definition 3.4.1. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve. Eine *Variation von c* ist eine differenzierbare Abbildung

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto \alpha_s(t) := \alpha(s, t)$$

mit $\epsilon > 0$ und $\alpha(0, t) = c(t)$. Das längs c definierte Vektorfeld

$$X(t) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t) \in T_{c(t)}M$$

nennt man das zu α gehörende *Variationsvektorfeld*.

Falls $\alpha_s(a) = c(a)$ und $\alpha_s(b) = c(b)$ für alle $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ gilt, nennt man die Variation α *eigentlich*.

Bemerkung. Für eigentliche Variationen gilt offenbar $X(a) = 0$ und $X(b) = 0$.

Lemma 3.4.2. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve, d.h. $A := \|\dot{c}(t)\| > 0$. Sei $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ eine Variation von c und X das zugehörige Variationsfeld. Sei $L(s) = L(\alpha_s)$. Dann gilt

$$L'(0) = \frac{1}{A} \left(\langle X(b), \dot{c}(b) \rangle - \langle X(b), \dot{c}(a) \rangle - \int_a^b \langle X(t), \ddot{c}(t) \rangle dt \right).$$

Beweis. Es gilt

$$L(\alpha_s) = \int_a^b \|\dot{\alpha}_s(t)\| dt = \int_a^b \langle \dot{\alpha}_s(t), \dot{\alpha}_s(t) \rangle^{1/2} dt.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \frac{1}{2\|\dot{c}(t)\|} 2 \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s \partial t}(0, t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, t) \right\rangle dt = \frac{1}{A} \int_a^b \left\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial s}(0, t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, t) \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{A} \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \langle X(c(t)), \dot{c}(t) \rangle - \langle X(t), \ddot{c}(t) \rangle dt \\ &= \frac{1}{A} \left(\langle X(b), \dot{c}(b) \rangle - \langle X(a), \dot{c}(a) \rangle - \int_a^b \langle X(t), \ddot{c}(t) \rangle dt \right). \end{aligned}$$

□

Satz 3.4.3. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve, die mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Dann sind äquivalent:

(a) $c : [a, b] \rightarrow M$ ist Geodätische.

(b) Für jede eigentliche Variation $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ von c gilt

$$L'(0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\alpha_s) = 0.$$

Beweis. Aus (a) folgt (b), denn ist c eine Geodätische und α eigentliche Variation, so folgt

$$L'(0) = -\frac{1}{A} \int_a^b \langle X(t), \ddot{c}(t) \rangle dt = 0,$$

wobei $A = \|\dot{c}(t)\|$ ist. Wir zeigen nun: aus (b) folgt (a). Sei also $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve mit $A = \|\dot{c}(t)\|$, die die Eigenschaft (b) erfüllt. Angenommen $c : [a, b] \rightarrow M$ ist keine Geodätische. Dann existiert $t_0 \in (a, b)$ mit $\text{pr}_{c(t_0)} \ddot{c}(t_0) \neq 0$. Setze $X(t) = \text{pr}_{c(t)} \ddot{c}(t)$. Wähle eine Karte $\varphi : U \rightarrow M$ mit $c(t_0) \in \varphi(U)$ und eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$, $f(t_0) > 0$ und $c(\text{supp} f) \subset \varphi(U)$, sowie $f(a) = f(b) = 0$. Dann ist $X_0(t) = f(t)X(t)$ ein Variationsvektorfeld einer eigentlichen Variation α . Denn ist Y_0 das Vektorfeld längs $\gamma = \varphi^{-1} \circ c$ mit $D\varphi(\gamma(t))Y_0(t) := X_0(t)$, so setze

$$\alpha(s, t) := \varphi(\gamma(t) + sY_0(\gamma(t))).$$

Dann folgt

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \alpha(s, t) = X_0(t).$$

Also erhalten wir mit Lemma 3.4.2

$$L'(0) = -\frac{1}{A} \int_a^b f(t) \langle \text{pr}_{c(t)} \ddot{c}(t), \text{pr}_{c(t)} \ddot{c}(t) \rangle dt < 0$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Korollar 3.4.4. Seien $p, q \in M$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(a) = p, c(b) = q$ und konstanter Geschwindigkeit $t \rightarrow \|\dot{c}(t)\|$. Gilt für jede andere Kurve $\gamma : [a', b'] \rightarrow M$ mit $\gamma(a') = p, \gamma(b') = q$

$$L(c) \leq L(\gamma), \tag{3.7}$$

so ist c eine Geodätische.

Beweis. Die Eigenschaft 3.7 impliziert Aussage (b) von Satz 3.4.3.

□

Also sind kürzeste Kurven stets Geodätische, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Bemerkung. Umgekehrt müssen Geodätische aber nicht kürzeste sein (siehe das Beispiel der Sphäre). Man kann aber zeigen: Geodätische sind lokal kürzeste Kurven, d. h. für eine Geodätische $c : [a, b] \rightarrow M$ und $p = c(t)$ existiert $\epsilon > 0$, so dass c die kürzeste Verbindung von p zu $c(s)$ ist, falls $|s - t| < \epsilon$. Das wollen wir aber hier nicht beweisen.

Kapitel 4

Differentialformen und Integralsätze

Ziel dieses Abschnittes ist es die Integration auf gekrümmten Objekten wie zum Beispiel Kurven oder allgemeiner Untermannigfaltigkeiten zu definieren. Die Integranden werden im Allgemeinen keine Funktionen sondern Differentialformen sein. Dieser Integrationsbegriff leistet deutlich mehr, als nur die Berechnung von Volumina.

4.1 Differentialformen

Definition 4.1.1. Sei V ein Vektorraum der Dimension n über \mathbb{R} und $V^k := \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}}$.

Eine Abbildung

$$\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt *alternierende* oder *schiefssymmetrische k -Form*, falls

- (i) sie *multilinear* ist, d.h. für jedes $1 \leq j \leq k$

$$\alpha(\dots, \lambda v_j + \mu v'_j, \dots) = \lambda \alpha(\dots, v_j, \dots) + \mu \alpha(\dots, v'_j, \dots)$$

gilt, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v_j, v'_j \in V$ und alle anderen Variablen festgehalten werden;

- (ii) sie *alternierend* ist, d.h.

$$\alpha(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\alpha(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$$

für alle $v_i, v_j \in V$.

Der Dualraum $V^* = L(V, \mathbb{R})$ zu V ist der Vektorraum aller alternierenden 1-Formen. Die Menge aller k -Formen auf V bezeichnen wir mit $\Lambda^k(V^*)$. Insbesondere ist $\Lambda^1 V^* = V^*$. Wir setzen $\Lambda^0(V^*) := \mathbb{R}$.

Bemerkungen.

- (a) $\Lambda^k(V^*)$ ist ein Vektorraum über \mathbb{R} . Ist $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ und S_k die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \dots, k\}$ (eingeführt in der linearen Algebra), so gilt für jedes $\sigma \in S_k$

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign } \sigma \alpha(v_1, \dots, v_k),$$

wobei $\text{sign } \sigma$ das Vorzeichen der Permutation bezeichnet.

(b) Die Determinante ist eine alternierende n -Form auf \mathbb{R}^n und somit ist $\det \in \Lambda^n((\mathbb{R}^n)^*)$.

(c) Ist $v \in \mathbb{R}^3$ und ist $\alpha : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\alpha(v_1, v_2) = \det(v, v_1, v_2),$$

so ist $\alpha \in \Lambda^2((\mathbb{R}^3)^*)$

Physikalische Interpretation von α : Beschreibt v das Geschwindigkeitsfeld einer konstanten Strömung, so lässt sich $\alpha(v_1, v_2)$ als der Fluss durch das durch v_1, v_2 aufgespannte, orientierte Parallelogramm ansehen. Die Reihenfolge der Vektoren v_1, v_2 gibt die Orientierung des Parallelogrammes an. Sie bestimmt, ob die Strömung das Parallelogramm in positiver oder negativer Richtung durchläuft.

(d) Bedingung (ii) ist äquivalent zu

$$\alpha(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$$

für alle $v \in V$, wie man durch Anwendung von (i) für $v = v_i + v_j$ nachrechnet.

Definition 4.1.2 (*Äußeres Produkt (Dachprodukt)* von 1-Formen). Es seien V ein reeller Vektorraum und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(V^*) = V^*$ 1-Formen. Dann heißt

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k : V^k \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}$$

das *äußere Produkt* oder *Dachprodukt* des k -Tupels von 1-Formen $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Bemerkungen.

(a) Aus der Definition der Determinante folgt:

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k(V^*).$$

(b) Betrachte die lineare Abbildung $L : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $L(v) = (\alpha_1(v), \dots, \alpha_k(v))$. Dann beschreibt $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(v_1, \dots, v_k)$ das "orientierte" Volumen des durch die Vektoren $L(v_1), \dots, L(v_k)$ aufgespannten Parallelotops $P = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i L(v_i) \mid 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$.

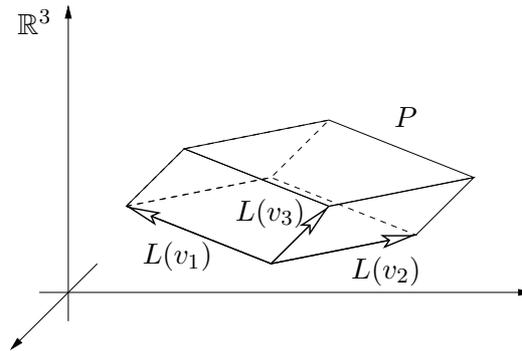
(c) Das Dachprodukt besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Seien $\alpha'_i, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1(V^*) = V^*$ 1-Formen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge (\lambda \alpha'_i + \mu \alpha_i) \wedge \dots \wedge \alpha_k = \lambda (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha'_i \wedge \dots \wedge \alpha_k) + \mu (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_i \wedge \dots \wedge \alpha_k).$$

(ii) Ist $\sigma \in S_k$, so gilt

$$\alpha_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\sigma(k)} = \text{sign } \sigma \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k.$$

Abbildung 4.1: Parallelotop im \mathbb{R}^3

Sei $e_1, \dots, e_n \in V$ eine Basis von V und $e_j^* \in V^*$ die Linearform definiert durch $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$ (aus der linearen Algebra wissen wir, dass eine lineare Abbildung durch Vorgabe ihre Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt wird). Dann sind e_1^*, \dots, e_n^* eine Basis von V^* . Der Beweis wurde in der Vorlesung durchgeführt. Sie heißt die zu e_1, \dots, e_n *duale Basis*.

Mit Hilfe der dualen Basis erhält man wie folgt eine Basis für $\Lambda^k(V^*)$:

Satz 4.1.3. Sei $e_1, \dots, e_n \in V$ Basis von V und $e_1^*, \dots, e_n^* \in \Lambda^1(V^*)$ die duale Basis. Dann ist

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

eine Basis von $\Lambda^k(V^*)$.

Beweis. Die Vektoren $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V^*)$ sind linear unabhängig: Dazu nehme man an, es sei

$$\alpha := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* = 0 \quad (4.1)$$

für gewisse $a_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$.

Für das geordnete k -Tupel $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ gilt:

$$e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \det \begin{pmatrix} e_{i_1}^*(e_{j_1}) & \dots & e_{i_1}^*(e_{j_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{i_k}^*(e_{j_1}) & \dots & e_{i_k}^*(e_{j_k}) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn ist die Determinante ungleich null, so ist die erste Spalte der obigen Matrix von null verschieden. Daher existiert ein $\ell \in \{1, \dots, k\}$ mit $e_{i_\ell}^*(e_{j_1}) = 1$, d.h. $i_\ell = j_1$. Da die erste Zeile ebenfalls von null verschieden ist, muss $\ell = 1$ gelten. Denn wäre $\ell \geq 2$, so ist $i_1 < i_\ell = j_1$ und somit ist $i_1 \neq j_m$ für alle $m \in \{1, \dots, k\}$, d.h. $e_{i_1}^*(e_{j_m}) = 0$. Also ist $i_1 = j_1$. Genauso folgt: $i_2 = j_2, \dots, i_m = j_m$.

Wenden wir nun α aus (4.1) auf $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ mit $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ an, so folgt also $a_{j_1, \dots, j_k} = 0$.

Auf der anderen Seite spannen die Vektoren

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

den Vektorraum $\Lambda^k(V^*)$ auf. Ist nämlich $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, so folgt:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*,$$

denn beide Seiten stimmen auf allen k -Tupeln $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ mit $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ überein. Da durch die Werte auf den geordneten k -Tupeln $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \in V^k$ eine k -Form eindeutig bestimmt wird (Beweis!), folgt die Behauptung. \square

Bemerkung. Ist $\dim V = n$, so folgt $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$. Insbesondere ist $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$ und $\dim \Lambda^k(V^*) = 0$ für $k > n$.

Das äußere Produkt von 1-Formen lässt sich wie folgt zu einem äußeren Produkt von k -Formen mit ℓ -Formen ausdehnen:

Satz 4.1.4. *Es gibt genau eine Abbildung*

$$\Lambda^k(V^*) \times \Lambda^\ell(V^*) \rightarrow \Lambda^{k+\ell}(V^*),$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\alpha \wedge \beta$ ist linear in jedem Faktor, d.h. für alle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in \Lambda^k(V^*)$ und $\beta_1, \beta_2, \beta \in \Lambda^\ell(V^*)$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta \quad \text{und} \quad \alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$$

sowie

$$\lambda(\alpha \wedge \beta) = (\lambda\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (\lambda\beta).$$

(ii) Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell \in \Lambda^1(V^*)$, so gilt:

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) \wedge (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_\ell) = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_\ell.$$

Beweis.

(a) Existenz: Sei $e_1, \dots, e_n \in V$ eine Basis und $e_1^*, \dots, e_n^* \in \Lambda^1(V^*) = V^*$ die duale Basis. Seien

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \Lambda^k(V^*) \quad \text{und} \quad \beta = \sum_{j_1 < \dots < j_\ell} b_{j_1, \dots, j_\ell} e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_\ell}^* \in \Lambda^\ell(V^*),$$

so definiere

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_\ell}} a_{i_1 \dots i_k} b_{j_1, \dots, j_\ell} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_\ell}^*. \quad (4.2)$$

Diese Definition erfüllt die verlangten Eigenschaften, was man durch Nachrechnen überprüft.

(b) Eindeutigkeit: Ist \wedge ein Dachprodukt mit den Eigenschaften (i) und (ii), so ist " \wedge " nach Wahl einer Basis $e_1, \dots, e_n \in V$ von der Form (4.2). \square

Bemerkung.

(a) Wir lassen auch den Fall $k = 0$ bzw. $\ell = 0$ zu. Für $\lambda \in \mathbb{R} = \Lambda^0(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \Lambda^k(V)$ setze

$$\lambda \wedge \alpha := \alpha \wedge \lambda := \lambda \cdot \alpha.$$

(b) Es gelten folgende weitere Rechenregeln für $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$ und $\gamma \in \Lambda^m(V^*)$:

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

und

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k \cdot \ell} \beta \wedge \alpha.$$

Der Beweis sei als Übung überlassen.

Nun wollen wir Differentialformen auf offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n definieren.

Definition 4.1.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\omega : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ heißt *Differentialform vom Grade k (k -Form)*. Eine k -Form $\omega : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ heißt *m -mal stetig differenzierbar*, falls für alle Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ die reellwertige Abbildung

$$p \mapsto \omega(p)(v_1, \dots, v_k)$$

auf U m -mal stetig differenzierbar ist. Wir bezeichnen mit $\Omega_m^k(U)$ die Menge der m -mal stetig differenzierbaren k -Formen auf U . Die Menge aller unendlich oft differenzierbaren k -Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet.

Bemerkungen.

(a) Da $\Lambda^0((\mathbb{R}^n)^*) = \mathbb{R}$, entspricht $\Omega_m^0(U)$ der Menge der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^m(U)$ auf U und $\Omega^0(U)$ der Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $C^\infty(U)$.

(b) Sei $f \in C^\infty(U)$ so ist

$$df := Df : U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$$

ein Element in $\Omega^1(U)$. Sei e_1, \dots, e_n die kanonische Basis, so gilt $df(p)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ und somit

$$df(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) e_j^*$$

(c) Sind $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ die kanonischen Koordinatenfunktionen auf $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. $x_i(p_1, \dots, p_n) = p_i$ und e_1, \dots, e_n die kanonische Basis des \mathbb{R}^n , so folgt

$$dx_i(p)e_j = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}.$$

Insbesondere ist $dx_1(p), \dots, dx_n(p)$ für jedes $p \in U$ die zu e_1, \dots, e_n duale Basis von $(\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^1((\mathbb{R}^n)^*)$.

Ist ω eine k -Form, so existieren wegen Satz 4.1.3 Funktionen $a_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k}(p) dx_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(p).$$

Wegen $\omega(p)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = a_{i_1 \dots i_k}(p)$ ist ω genau dann m -mal stetig differenzierbar, falls alle Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ m -mal stetig differenzierbar sind.

Definition 4.1.6. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω, η seien k -Formen auf U und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann definiere das Produkt $\lambda\omega : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ und die Summe $\omega + \eta : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ durch

$$(\lambda\omega)(p) = \lambda\omega(p) \quad \text{und} \quad (\omega + \eta)(p) = \omega(p) + \eta(p).$$

Sind ω eine k - und η eine ℓ -Form, so definiere ihr Dachprodukt $\omega \wedge \eta : U \rightarrow \Lambda^{k+\ell}((\mathbb{R}^n)^*)$ durch

$$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p).$$

Bemerkung. Sind $\omega, \eta \in \Omega_m^k(U)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lambda\omega + \mu\eta \in \Omega_m^k(U)$, d.h. $\Omega_m^k(U)$ ist bezüglich der Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum über \mathbb{R} . Sind $\omega \in \Omega_m^k(U), \eta \in \Omega_m^\ell(U)$, so ist $\omega \wedge \eta \in \Omega_m^{k+\ell}(U)$. Entsprechende Aussagen gelten auch für $\Omega^k(U)$.

Das Differential von k -Formen kann wie folgt definiert werden:

Definition 4.1.7. Sei $\omega \in \Omega_1^k(U)$ gegeben durch

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Dann heißt

$$d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

die *äußere Ableitung* oder das *Differential* von ω .

Bemerkungen.

(a) $d\omega$ ist eine $k+1$ -Form. Ist $m \geq 1$ und $\omega \in \Omega_m^k(U)$, so ist $d\omega \in \Omega_{m-1}^{k+1}(U)$.

(b) Ist $\omega = f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann ist $d\omega = df$ eine 1-Form auf U . In Kapitel 8 hatten wir das Differential einer Funktion f mit Df bezeichnet. Um eine einheitliche Schreibweise zu gewährleisten, bevorzugen wir im Kontext der Differentialformen die Bezeichnung df für \mathbb{R} -wertige Funktionen.

(c) Ist $\omega \in \Omega_1^1(U)$ mit $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$, so ist $da_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_j$ und somit

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_j \wedge dx_i + \sum_{j < i} \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_j \wedge dx_i \\ &= - \sum_{i < j} \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_i \wedge dx_j + \sum_{j < i} \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_j \wedge dx_i \\ &= - \sum_{i < j} \frac{\partial}{\partial x_j} a_i dx_i \wedge dx_j + \sum_{i < j} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j dx_i \wedge dx_j \quad (\text{durch Umbenennung von } i \text{ und } j) \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_j - \frac{\partial}{\partial x_j} a_i \right) dx_i \wedge dx_j. \end{aligned}$$

Insbesondere ist für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$:

$$ddf = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

- (d) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\omega : U \rightarrow \Lambda^k((\mathbb{R}^n)^*)$ eine differenzierbare k -Form. Ihre äußere Ableitung $d\omega$ lässt sich auch koordinatenfrei definieren. Für Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ betrachte die reellwertige Abbildung

$$p \mapsto \omega(p)(v_1, \dots, v_k).$$

Definiere nun

$$\eta(p)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} D(\omega(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{k+1}))(p)(v_i),$$

wobei \hat{v}_i bedeutet, dass v_i ausgelassen werden soll. Dann gilt: η ist eine $k+1$ -Form und $d\omega = \eta$. (siehe auch Aufgabe 4 von Blatt 1: dort soll dies für $k=1$ gezeigt werden.)

Satz 4.1.8. (a) Seien $\omega, \eta \in \Omega_1^k(U)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist

$$d(\lambda\omega + \mu\eta) = \lambda d\omega + \mu d\eta.$$

Insbesondere definiert für $m \geq 1$ die äußere Ableitung $d : \Omega_m^k(U) \rightarrow \Omega_{m-1}^{k+1}(U)$ einen linearen Operator.

- (b) Ist $\omega \in \Omega_1^k(U)$ und $\eta \in \Omega_1^\ell(U)$, so ist

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \in \Omega_0^{k+\ell}(U).$$

- (c) Ist $\omega \in \Omega_2^k(U)$, so ist

$$d\omega = 0.$$

Beweis.

- (a) ist trivial.

- (b) Wegen der Linearität der äußeren Ableitung reicht es aus, (b) für ω, η von der Form

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =: f \cdot dx_I \quad \text{und} \quad \eta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} =: g \cdot dx_J$$

mit $f, g \in C^1(U)$ zu beweisen (solche Differentialformen heißen auch *Monome*):

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(f g dx_I \wedge dx_J) = (g \cdot df + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g dx_J) + (-1)^k (f dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

- (c) Wegen der Linearität von d genügt es wieder, ω von der Form

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} =: f dx_I$$

zu betrachten. Dann ist $d\omega = df \wedge dx_I$ und wegen Teil (b) folgt mit Bemerkung (c) nach Definition 4.1.7:

$$d\omega = df \wedge dx_I - df \wedge d(1 \cdot dx_I) = df \wedge dx_I - df \wedge d(1) \wedge dx_I = 0.$$

□

Bezüge zur Vektoranalysis: Wir wollen einige Bezüge zur Vektoranalysis auf dem \mathbb{R}^3 aufzeigen. Diese wird in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften häufig dem Gebrauch von Differentialformen vorgezogen.

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann können wir F eine 1-Form $\omega_F^1 \in \Omega_1^1(U)$ und eine 2-Form $\omega_F^2 \in \Omega_1^2(U)$ zuordnen: Setze

$$\omega_F^1(p)(v) = \langle F(p), v \rangle \quad \text{und} \quad \omega_F^2(p)(v_1, v_2) := \det(F(p), v_1, v_2) = \langle F(p), (v_1 \times v_2) \rangle$$

mit dem Kreuzprodukt \times in \mathbb{R}^3 . Sind $F = (F_1, F_2, F_3)$ die Komponenten des Vektorfeldes, so gilt:

$$\omega_F^1 = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 \quad \text{sowie} \quad \omega_F^2 = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Umgekehrt lässt sich jeder 1-Form und 2-Form auf $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Vektorfeld zuordnen. Man rechnet nun leicht nach:

- (a) $df = \omega_{\text{grad } f}^1$ für jede C^1 -Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) $d\omega_F^1 = \omega_{\text{rot } F}^2$,
- (c) $d\omega_F^2 = \text{div } F dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Dabei folgt (a) aus $df(p)(v) = \langle \text{grad } f(p), v \rangle \forall v \in \mathbb{R}^3$. Beweis zu (b):

$$\begin{aligned} d\omega_F^1 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Beweis zu (c):

$$\begin{aligned} d\omega_F^2 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Da $dd\omega = 0$, so folgt für jede C^2 -Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$0 = dd f = d\omega_{\text{grad } f}^1 = \omega_{\text{rot grad } f}^2$$

und somit $\text{rot grad } f = 0$. Außerdem folgt für jedes C^2 -Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$0 = dd\omega_F^1 = d\omega_{\text{rot } F}^2 = \text{div rot } F dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

und somit $\text{div rot } F = 0$.

Vektorfelder und 1-Formen lassen sich in allen Dimensionen identifizieren. Ab Dimension 4 existieren jedoch keine Beziehungen zwischen Vektorfeldern und 2-Formen. Ist $U \subset \mathbb{R}^4$ offen und $\omega \in \Omega_1^2(U)$, so benötigt man eine Abbildung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^6$, um ω darzustellen. Da 2-Formen auf $U \subset \mathbb{R}^4$ in der relativistischen Elektrodynamik eine wichtige Rolle spielen, führt man, wenn man die Sprache der Differentialformen umgehen will, so genannte "Sechser"-Vektoren ein.

4.2 Zurückholen (pull-back) von Differentialformen

Wir wollen nun das Integral von k -Formen definieren. Dazu benötigen wir die Operation des Zurückholens von Differentialformen.

Definition 4.2.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar und ω eine k -Form auf U . Dann heißt die auf V durch

$$(\varphi^*\omega)(p)(v_1, \dots, v_k) := \omega(\varphi(p))(D\varphi(p)(v_1), \dots, D\varphi(p)(v_k)), \quad p \in V, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$$

definierte k -Form die mittels φ zurückgeholte k -Form und wird mit $\varphi^*\omega$ notiert. Ist ω eine 0-Form, d.h. eine Funktion f auf U , so ist

$$(\varphi^*\omega)(p) = \varphi^*f(p) = f \circ \varphi(p).$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

Lemma 4.2.2. Seien $V \subset \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow U$ eine C^1 -Abbildung. Dann gilt:

(a) Sind ω_1, ω_2 k -Formen auf U und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so folgt

$$\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$$

und

$$\varphi^*(f\omega_1) = (f \circ \varphi)\varphi^*(\omega_1) = \varphi^*f \wedge \varphi^*(\omega_1).$$

(b) Sind $f_1, \dots, f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Funktionen, so gilt:

$$\varphi^*(df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = d(f_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi).$$

(c) Ist ω eine k -Form auf U und η eine ℓ -Form auf U , so gilt:

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta.$$

(d) Ist $W \subset \mathbb{R}^\ell$ offen, $\psi : W \rightarrow V$ eine C^1 -Abbildung und ω eine k -Form auf U , so gilt:

$$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*\omega).$$

Beweis.

(a) folgt unmittelbar aus der Definition von φ^* .

(b) Betrachte Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$ und $p \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \varphi^*(df_1 \wedge \dots \wedge df_k)(p)(v_1, \dots, v_k) &= (df_1 \wedge \dots \wedge df_k)(\varphi(p))(D\varphi(p)(v_1), \dots, D\varphi(p)(v_k)) \\ &= df_1(\varphi(p)) \wedge \dots \wedge df_k(\varphi(p))(D\varphi(p)(v_1), \dots, D\varphi(p)(v_k)) \\ &= \det \begin{pmatrix} df_1(\varphi(p))D\varphi(p)(v_1) & \dots & df_1(\varphi(p))D\varphi(p)(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ df_k(\varphi(p))D\varphi(p)(v_1) & \dots & df_k(\varphi(p))D\varphi(p)(v_k) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} d(f_1 \circ \varphi)(p)(v_1) & \dots & d(f_1 \circ \varphi)(p)(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ d(f_k \circ \varphi)(p)(v_1) & \dots & d(f_k \circ \varphi)(p)(v_k) \end{pmatrix} \\ &= d(f_1 \circ \varphi)(p) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi)(p)(v_1, \dots, v_k) \\ &= (d(f_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi))(p)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

(c) Ist $k = 0$, d.h. $\omega = f$ eine Funktion und η eine ℓ -Form auf U , so gilt:

$$\varphi^*(f\eta) = (f \circ \varphi)\varphi^*\eta = \varphi^*f \wedge \varphi^*\eta.$$

Wegen (a) genügt es, (c) für ω und η der Form

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \text{ und } \eta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

mit $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ zu zeigen, wobei $x_1, \dots, x_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ die kanonischen Koordinatenfunktionen bezeichnen. Dann folgt aus (a) und (b) :

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi)d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \text{ und } \varphi^*\eta = (g \circ \varphi)d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_\ell}$$

mit $\varphi_j = x_j \circ \varphi$. Wegen

$$\omega \wedge \eta = (f \cdot g)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$$

folgt daher mit (b):

$$\varphi^*(\omega \wedge \eta) = (f \circ \varphi) \cdot (g \circ \varphi)d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} \wedge d\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{j_\ell} = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\eta.$$

(d) Sei als Übung überlassen. □

Bemerkung. Sei $\varphi : V \rightarrow U$ eine $m + 1$ -mal stetig differenzierbare Abbildung und $\omega \in \Omega_j^k(U)$ mit $j \leq m$. Dann ist $\varphi^*\omega \in \Omega_j^k(V)$. Also definiert

$$\varphi^* : \Omega_j^k(U) \rightarrow \Omega_j^k(V)$$

wegen 4.2.2(a) einen linearen Operator.

Beispiel. Auf $U = \mathbb{R}^2$ mit den Standard-Koordinaten x_1, x_2 sei die 2-Form $\omega = dx_1 \wedge dx_2$ gegeben. Um diese in Polarkoordinaten darzustellen, soll ω mittels $\varphi : V := (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow U$, $\varphi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$ zurückgezogen werden. Es gilt

$$d\varphi_1(r, \phi) := d(x \circ \varphi)(r, \phi) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r, \phi) dr + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \phi}(r, \phi) d\phi = \cos \phi dr - r \sin \phi d\phi$$

sowie

$$d\varphi_2(r, \phi) := d(y \circ \varphi)(r, \phi) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r, \phi) dr + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \phi}(r, \phi) d\phi = \sin \phi dr + r \cos \phi d\phi$$

und somit nach Lemma 4.2.2 (b):

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega(r, \phi) &= d\varphi_1 \wedge d\varphi_2(r, \phi) = (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) \wedge (\sin \phi dr + r \cos \phi d\phi) \\ &= r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)dr \wedge d\phi = r dr \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Die äußere Ableitung kommutiert mit dem Zurückziehen von Differentialformen, d.h. es gilt:

Lemma 4.2.3. Seien $V \subset \mathbb{R}^m, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : V \rightarrow U$ eine C^2 -Abbildung und $\omega \in \Omega_1^k(U)$. Dann folgt

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*d\omega.$$

Beweis. Wegen Satz 4.1.8(a) und obiger Bemerkung sind $d\varphi^*, \varphi^*d : \Omega_1^k(U) \rightarrow \Omega_0^{k+1}(V)$ lineare Operatoren. Also genügt es wieder, die Aussage für Elemente $\omega \in \Omega_1^k(U)$ der Form

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

zu beweisen. Dann gilt

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}$$

und wegen Satz 4.1.8 (b) folgt

$$d(\varphi^*\omega) = d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k} + f \circ \varphi d(d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}).$$

Durch Induktion über k zeigt man mit Satz 4.1.8(b)

$$d(d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) = 0,$$

denn

$$d(d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}) = d(d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_{k-1}}) \wedge d\varphi_{i_k} + (-1)^{k-1} d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_{k-1}} \wedge dd\varphi_{i_k} = 0 + 0 = 0.$$

Außerdem ist $d(f \circ \varphi) = (df \circ \varphi)D\varphi = \varphi^*df$, denn aus der Definition von φ^* und der Kettenregel folgt

$$\varphi^*df(p)(v) = df(\varphi(p))(D\varphi(p)(v)) = d(f \circ \varphi)(p)(v)$$

für alle $p \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Daher folgt aus Lemma 4.2.2 (b) und (c)

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*df \wedge \varphi^*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \varphi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \varphi^*d\omega.$$

□

Nun wollen wir der Frage nachgehen, wann eine k -Form $\omega \in \Omega^k(U)$ eine Stammform $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ besitzt, d.h. wann die Gleichung $d\eta = \omega$ eine Lösung besitzt. Wegen Satz 4.1.8 (c) ist $d\omega = 0$ ein notwendiges Kriterium dafür.

Definition 4.2.4. Eine Differentialform $\omega \in \Omega_1^k(U)$ heißt *exakt*, falls sie eine Stammform besitzt. Sie heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$ gilt.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf wichtige Anwendungen der Differentialformen in der Topologie. Sie sind in der Vorlesung nicht behandelt worden.

Bemerkungen.

- (a) Die geschlossenen sowie die exakten k -Formen bilden Untervektorräume von $\Omega^k(U)$, denn es gilt:

$$\{\text{geschlossene } k\text{-Formen}\} = \ker(d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)),$$

$$\{\text{exakte } k\text{-Formen}\} = \text{Bild}(d : \Omega^{k-1}(U) \rightarrow \Omega^k(U)).$$

Wegen Satz 4.1.8 (c) sind exakte Formen geschlossen. Der Quotientenraum

$$H^k(U) := \{\text{geschlossene } k\text{-Formen}\} / \{\text{exakte } k\text{-Formen}\}$$

heißt k -te de Rham'sche Kohomologiegruppe. Für $k = 0$ definiert man:

$$H^0(U) := \{\text{geschlossene } 0\text{-Formen}\} = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid df = 0\}.$$

Ist U zusammenhängend, so ist $H^0(U)$ die Menge der auf U konstanten Funktionen. Also folgt in diesem Falle $H^0(U) \cong \mathbb{R}$.

Das Lemma von Poincaré (siehe unten) impliziert für $k \geq 1$ und U sternförmig : $H^k(U) = \{0\}$, denn wegen des Lemmas von Poincaré ist jede geschlossene Form auf U auch exakt.

(b) Es gilt: $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq \{0\}$. Betrachte die sogenannte Windungsform

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Dann ist $d\omega = 0$, aber ω ist nicht exakt. Man kann zeigen: $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$.

Nun wollen wir das Lemma von Poincaré beweisen, d.h. wir zeigen, dass jede geschlossene k -Form auf einer sternförmigen Menge exakt ist.

Zu einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ betrachte zunächst die Zylindermenge

$$[0, 1] \times U = \{(t, x) \mid t \in [0, 1], x \in U\}.$$

Sei $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge, die $[0, 1] \times U$ enthält. Jede k -Form η auf V lässt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$\eta(t, x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} a_{i_1 \dots i_{k-1}}(t, x) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} + \tilde{\eta}(t, x),$$

wobei

$$\tilde{\eta}(t, x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} b_{j_1 \dots j_k}(t, x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k},$$

d.h. $\tilde{\eta}$ besteht aus allen Monomen, die dt nicht enthalten. Definiere für $k \geq 1$ die Abbildung K vom Raum der stetigen k -Formen auf V in den Raum der $k-1$ -Formen auf U durch

$$(K(\eta))(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} \left(\int_0^1 a_{i_1 \dots i_{k-1}}(t, x) dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$$

für $x \in U$. Damit ist $K : \Omega_0^k(V) \rightarrow \Omega_0^{k-1}(U)$ ein linearer Operator.

Lemma 4.2.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Teilmenge mit $[0, 1] \times U \subset V$. Seien $\psi_0, \psi_1 : U \rightarrow V$ definiert durch

$$\psi_0(x) = (0, x) \quad \text{und} \quad \psi_1(x) = (1, x).$$

Dann gilt für $\eta \in \Omega_1^k(V)$:

$$d(K(\eta)) + K(d\eta) = \psi_1^* \eta - \psi_0^* \eta. \quad (4.3)$$

Beweis. Da beide Seiten in (4.3) linear von η abhängen, genügt es, beide Seiten für Monome zu überprüfen.

1. Fall: Zunächst sei η von der Form:

$$\eta(t, x) = f(t, x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} = f(t, x)dt \wedge dx_I.$$

Dann folgt aus $df(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)dx_i$ wegen $dt \wedge dt = 0$:

$$d\eta(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)dx_i \wedge dt \wedge dx_I = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)dt \wedge dx_i \wedge dx_I.$$

Dies impliziert

$$K(d\eta)(x) = - \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)dt \right) dx_i \wedge dx_I.$$

Mittels Differentiation unter dem Integral gilt

$$d(K(\eta))(x) = d \left(\left(\int_0^1 f(t, x)dt \right) dx_I \right) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)dt \right) dx_i \wedge dx_I.$$

Wir erhalten:

$$d(K(\eta)) + K(d\eta) = 0$$

Auf der anderen Seite folgt aus Lemma 4.2.2 (b)

$$\psi_0^* \eta = (f \circ \psi_0)d(t \circ \psi_0) \wedge d(x_{i_1} \circ \psi_0) \wedge \dots \wedge d(x_{i_{k-1}} \circ \psi_0)$$

und

$$\psi_1^* \eta = (f \circ \psi_1)d(t \circ \psi_1) \wedge d(x_{i_1} \circ \psi_1) \wedge \dots \wedge d(x_{i_{k-1}} \circ \psi_1).$$

Da $t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die erste Koordinate ist, d.h. $t(s, x) = s$, so folgt

$$t \circ \psi_0(x) = 0 \text{ und } t \circ \psi_1(x) = 1 \text{ und somit } d(t \circ \psi_i) = 0 \text{ für } i \in \{0, 1\}.$$

Also erhalten wir

$$\psi_0^* \eta = \psi_1^* \eta = 0$$

und daher ist die Behauptung im 1. Fall bewiesen.

2. Fall:

Sei nun η ein Monom der Form $\eta = f \cdot dx_I$, wobei $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Dann ist $K(\eta) = 0$ und somit auch $dK(\eta) = 0$. Da

$$d\eta(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dt \wedge dx_I + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)dx_i \wedge dx_I,$$

folgt aus der Definition des Operators K :

$$K(d\eta)(x) = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dt \right) dx_I = f(1, x)dx_I - f(0, x)dx_I.$$

Aus Lemma 4.2.2 (b) folgt

$$\psi_1^* \eta(x) = f \circ \psi_1(x) d(x_{i_1} \circ \psi_1) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ \psi_1) = f(1, x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = f(1, x) dx_I$$

sowie analog

$$\psi_0^* \eta(x) = f(0, x) dx_I.$$

Daher ist die Behauptung auch im 2. Fall bewiesen. \square

Definition 4.2.6. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich $p \in A$, falls für jedes $x \in A$ die Verbindungsgerade $c(t) = p + t(x - p), t \in [0, 1]$ ganz in A verläuft.

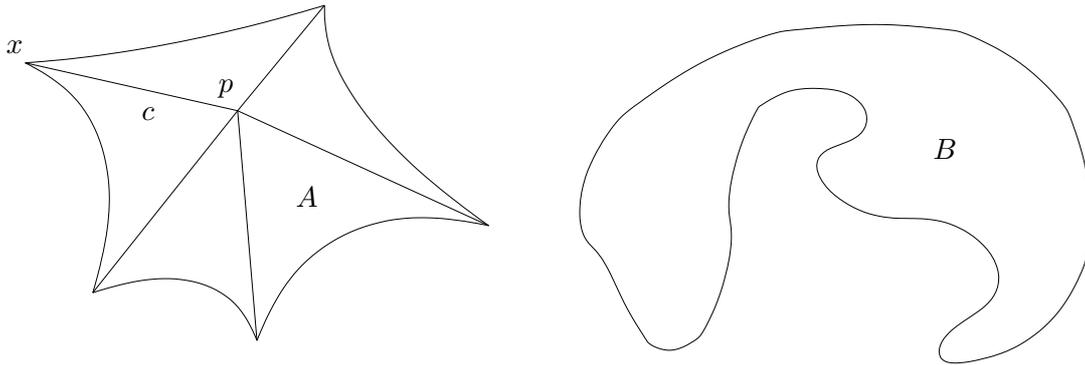


Abbildung 4.2: A sternförmig, B nicht sternförmig

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ sternförmige Menge und $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Abbildung mit $\varphi(t, x) = t \cdot x$. Dann enthält $V := \varphi^{-1}(U)$ die Menge $[0, 1] \times U$. Obiges Lemma impliziert somit das folgende Korollar.

Korollar 4.2.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ sternförmige offene Menge und $\omega \in \Omega_1^k(U)$. Dann ist $\varphi^* \omega \in \Omega_1^k(V)$ und es gilt:

$$d(K(\varphi^* \omega)) + K(d\varphi^* \omega) = \omega.$$

Beweis. Sei $\omega \in \Omega_1^k(U)$ und $\eta := \varphi^* \omega$. Dann ist wegen Lemma 4.2.5

$$d(K(\eta)) + K(d\eta) = \psi_1^* \eta - \psi_0^* \eta,$$

wobei $\psi_0, \psi_1 : U \rightarrow V$ mit $\psi_0(x) = (0, x)$ und $\psi_1(x) = (1, x)$. Da $\varphi \circ \psi_1(x) = 1 \cdot x = x$ und $\varphi \circ \psi_0(x) = 0$, folgt

$$\psi_1^* \eta = \psi_1^* \varphi^* \omega = (\varphi \circ \psi_1)^* \omega = \text{id}^* \omega = \omega \quad \text{und} \quad \psi_0^* \eta = (\varphi \circ \psi_0)^* \omega = 0^* \omega = 0$$

und somit die Behauptung. \square

Aus diesem Korollar erhält man nun, dass jede geschlossene k -Form auf einer sternförmigen Menge eine Stammform besitzt.

Satz 4.2.8 (Lemma von Poincaré). Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig und ω eine geschlossene k -Form auf U . Dann ist ω exakt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Annahmen sei U sternförmig bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ und ω geschlossen. Dann folgt mit Lemma 4.2.3 $d\varphi^* \omega = \varphi^* d\omega = 0$ und eingesetzt in Korollar 4.2.7 somit $d(K(\varphi^* \omega)) = \omega$, d.h. ω ist exakt. \square

Das Lemma von Poincaré liefert auch eine Methode zur Berechnung von Stammformen für geschlossene Formen auf sternförmigen Mengen.

Korollar 4.2.9. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine bezüglich $0 \in \mathbb{R}^n$ sternförmige offene Menge und

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \Omega_m^k(U)$$

für ein $k, m \geq 1$. Sei

$$\eta(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \int_0^1 t^{k-1} a_{i_1 \dots i_k}(tx) dt x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \widehat{dx_{i_\ell}} \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei $\widehat{dx_{i_\ell}}$ die Auslassung von dx_{i_ℓ} anzeigt. Dann ist $\eta \in \Omega_m^{k-1}(U)$ und falls ω geschlossen ist, folgt $d\eta = \omega$.

Beweis. Aus der Definition von η folgt sofort: $\eta \in \Omega_m^{k-1}(U)$.

Wie im Beweis von Korollar 4.2.7 betrachte die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t, x) = t \cdot x$. Dann enthält $V := \varphi^{-1}(U)$ die Menge $[0, 1] \times U$. Man zeigt nun:

$$K(\varphi^* \omega) = \eta. \quad (4.4)$$

Dann folgt aus Korollar 4.2.7 $d\eta = \omega$, falls ω geschlossen ist. Wegen der Linearität des Operators $K\varphi^* : \Omega_m^k(U) \rightarrow \Omega_m^{k-1}(U)$ genügt es, die Identität (4.4) für Monome zu zeigen. Sei also $\omega \in \Omega_m^k(U)$ von der Form

$$\omega(x) = f(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Dann gilt:

$$\varphi^* \omega(t, x) = f(tx) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Da $\varphi_{i_\ell}(t, x) = tx_{i_\ell}$, folgt

$$d\varphi_{i_\ell} = x_{i_\ell} dt + t dx_{i_\ell}.$$

Man zeigt nun durch Induktion über k :

$$d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}(t, x) = t^k dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} t^{k-1} x_{i_\ell} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \widehat{dx_{i_\ell}} \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Nach Definition des Operators K folgt

$$K(\varphi^* \omega)(x) = \sum_{\ell=1}^k (-1)^{\ell-1} \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt x_{i_\ell} dx_{i_1} \wedge \dots \widehat{dx_{i_\ell}} \dots \wedge dx_{i_k}$$

und daraus die Behauptung. □

Nun diskutieren wir einige Anwendungen des Lemmas von Poincaré.

Anwendungen des Lemmas von Poincaré :

- (a) Sei $\omega \in \Omega^k(U)$ eine unendlich oft differenzierbare k -Form auf einer offenen Teilmenge U des \mathbb{R}^n . Gesucht wird eine Lösung $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ der Differentialgleichung

$$d\eta = \omega.$$

Wegen $dd\eta = 0$ ist $d\omega = 0$ eine notwendige Bedingung für ihre Lösbarkeit. Ist nun U sternförmig, so ist diese notwendige Bedingung wegen des Lemmas von Poincaré auch hinreichend.

Wie sieht die Gesamtheit der Lösungen

$$\mathcal{L}_\omega := \{\eta \in \Omega^{k-1}(U) \mid d\eta = \omega\}$$

aus? Ist η_0 eine spezielle Lösung (diese kann mit Hilfe des Korollars 4.2.9 berechnet werden), so ist für jedes $\beta \in \Omega^{k-2}(U)$ auch $\eta = \eta_0 + d\beta$ wegen $dd\beta = 0$ eine Lösung. Ist umgekehrt η eine beliebige Lösung, so ist die Differenz $\eta - \eta_0 \in \Omega^{k-1}(U)$ geschlossen. Also existiert wieder wegen des Lemmas von Poincaré ein $\beta \in \Omega^{k-2}(U)$ mit $\eta - \eta_0 = d\beta$. Dies zeigt, dass \mathcal{L}_ω ein affiner Unterraum von $\Omega^{k-1}(U)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_\omega = \{\eta_0 + d\beta \mid \beta \in \Omega^{k-2}(U)\}.$$

- (b) Teil (a) hat folgende Anwendungen in der Vektoranalysis. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene und sternförmige Menge und $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion. Dann existiert aus folgendem Grund ein Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{div} F = g.$$

Betrachte die 3-Form $\omega = g dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Diese Differentialform ist – wie alle 3-Formen in \mathbb{R}^3 – geschlossen und damit existiert eine 2-Form η mit $d\eta = \omega$. Wegen den Ausführungen zur Vektoranalysis auf Seite 94 existiert ein Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\omega_F^2 = \eta$. Also folgt $d\eta_F^2 = \operatorname{div} F dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ und somit $\operatorname{div} F = g$. Ist $F_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine spezielle Lösung, so ist die Menge aller Lösungen von der Form

$$\{F_0 + \operatorname{rot} G \mid G : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ unendlich oft differenzierbar}\}.$$

Denn für jede beliebige Lösung $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt $\operatorname{div}(F - F_0) = 0 \Rightarrow d\omega_{F-F_0}^2 = 0$. Wie in (a) gezeigt, existiert eine 1-Form β mit $d\beta = \omega_{F-F_0}^2$. Sei $G : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ das zu β gehörige Vektorfeld, also $\beta = \omega_G^1$. Dann ist $\omega_{\operatorname{rot} G}^2 = d\beta = \omega_{F-F_0}^2$ und somit ist $\operatorname{rot} G = F - F_0$.

Sei nun $H : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein unendlich oft differenzierbares Vektorfeld. Gesucht ist die Menge aller Vektorfelder $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot} F = H.$$

Mit analogen Argumenten wie oben folgt unter Beachtung des oben zitierten Beipieles: Diese Gleichung hat genau dann eine Lösung, falls $\operatorname{div} H = 0$ gilt. Ist F_0 eine spezielle Lösung, so ist die Gesamtheit der Lösungen von der Form

$$\{F_0 + \operatorname{grad} f \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ unendlich oft differenzierbar}\}.$$

Die Lösungen heißen auch *Vektorpotentiale* von H .

4.3 Integration von Differentialformen

Wir wollen nun das Integral einer k -Form auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n erklären. Zunächst definieren wir das Integral einer stetigen k -Form $\omega \in \Omega_0^k(U)$ auf einer offenen Teilmenge U des \mathbb{R}^k . Für jede solche k -Form ω existiert eine stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\omega(x) = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Definition 4.3.1 (Integral von k -Formen auf dem \mathbb{R}^k). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\omega \in \Omega^k(U)$ mit

$$\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Ist $A \subset U$ Lebesgue-messbar, so heißt ω integrierbar über A , falls das Lebesgue-Integral von f über A existiert. Man definiert:

$$\int_A \omega := \int_A f(x)d\lambda^k(x) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x) \cdot \chi_A(x)d\lambda^k(x).$$

Bemerkung. Statt $\lambda^k(x)$ schreibt man auch $d^k x$ oder dx . Ist $\omega \in \Omega_0^k(U)$ und A kompakt, also abgeschlossen und beschränkt, so ist ω über A integrierbar. Insbesondere gilt:

$$\int_A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \lambda^k(A).$$

Daher nennt man $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$ auch die *Volumenform* des \mathbb{R}^k .

Genau wie wir 1-Formen auf dem \mathbb{R}^n über Kurven im \mathbb{R}^n integriert haben, lassen sich k -Formen auf dem \mathbb{R}^n über “ k -dimensionale Mengen” im \mathbb{R}^n integrieren.

Definition 4.3.2 (Integral von k -Formen auf dem \mathbb{R}^n). Seien $V \subset \mathbb{R}^k$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen mit $k \leq n$. Seien $\omega \in \Omega_0^k(U)$ eine stetige k -Form und $\varphi : V \rightarrow U$ eine C^1 -Abbildung. Dann ist $\varphi^*\omega \in \Omega_0^k(V)$. Ist $A \subset V$ messbar und $\varphi^*\omega$ integrierbar über A , so definiere

$$\int_{(\varphi, A)} \omega := \int_A \varphi^*\omega.$$

Falls $A = V$, schreibe $\int_{\varphi} \omega$ statt $\int_{(\varphi, V)} \omega$.

Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega \in \Omega_0^1(U)$ eine stetige 1-Form. Ist $\gamma : I \rightarrow U$ eine differenzierbare Kurve, so ist

$$\int_{\gamma} \omega = \int_I \gamma^*\omega.$$

Da $\gamma^*\omega \in \Omega_0^1(I)$, ist $\gamma^*\omega(t) = f(t)dt$ für $t \in I$ und somit

$$f(t) = \gamma^*\omega(t)(1) = \omega(\gamma(t))D\gamma(t)(1) = \omega(\gamma(t))\dot{\gamma}(t).$$

Insbesondere stimmt diese Definition mit der Definition der Kurvenintegrale, so wie in den Übungen definiert überein.

Das Integral $\int_{\varphi} \omega$ kann unter einer Reparametrisierung von φ nur das Vorzeichen ändern.

Definition 4.3.3. Seien $V \subset \mathbb{R}^k, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow U$ eine C^1 -Abbildung. Ist $W \subset \mathbb{R}^k$ offen, so heißt eine Abbildung $\psi : W \rightarrow U$ *Reparametrisierung* von φ , falls es einen Diffeomorphismus $T : W \rightarrow V$ gibt mit $\psi = \varphi \circ T$.

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow \psi = \varphi \circ T & \uparrow \varphi \\ W & \xrightarrow{T} & V \end{array}$$

Ist $\det DT(x) > 0$ für alle $x \in W$, so heißt die Reparametrisierung *orientierungserhaltend*. Ist $\det DT(x) < 0$ für alle $x \in W$, so heißt sie *orientierungsumkehrend*.

Bemerkung. Sei W eine zusammenhängende Menge, so ist jede Reparametrisierung orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend, denn in diesem Falle ist $\det DT(x) > 0$ oder $\det DT(x) < 0$ für alle $x \in W$.

Lemma 4.3.4. Seien $V \subset \mathbb{R}^k, U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega \in \Omega_0^k(U)$ und $\varphi : V \rightarrow U$ eine C^1 -Abbildung. Ist $\psi : W \rightarrow U$ eine orientierungserhaltende (orientierungsumkehrende) Reparametrisierung von φ , so gilt:

$$\int_{\varphi} \omega = + \int_{\psi} \omega, \quad \left(\int_{\varphi} \omega = - \int_{\psi} \omega \right).$$

Beweis. Zunächst gilt mit $\psi = \varphi \circ T$:

$$\int_{\psi} \omega = \int_W \psi^* \omega = \int_W (\varphi \circ T)^* \omega = \int_W T^* \varphi^* \omega.$$

Da $\varphi^* \omega \in \Omega_0^k(V)$ und $V \subset \mathbb{R}^k$, gilt für eine stetige Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\varphi^* \omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

und somit folgt aus Lemma 4.2.2(b)

$$T^* \varphi^* \omega = (g \circ T) dT_1 \wedge \dots \wedge dT_k \in \Omega_0^k(W),$$

wobei $W \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Teilmenge ist und $T = (T_1, \dots, T_k)$ die Komponentendarstellung von T . Also gilt:

$$(dT_1 \wedge \dots \wedge dT_k)(p) = a(p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

für eine stetige Funktion $a : W \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen

$$(dT_1 \wedge \dots \wedge dT_k)(p)(e_1, \dots, e_k) = \det \begin{pmatrix} dT_1(p)(e_1) & \dots & dT_1(p)(e_k) \\ \vdots & & \vdots \\ dT_k(p)(e_1) & \dots & dT_k(p)(e_k) \end{pmatrix} = \det DT(p)$$

erhalten wir $a(p) = \det DT(p)$ für jedes $p \in W$ und daher

$$T^* \varphi^* \omega(p) = (g \circ T(p)) \det dT(p) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Also gilt

$$\int_{\psi} \omega = \int_W (g \circ T(p)) \det DT(p) d\lambda^k(p).$$

Auf der anderen Seite ergibt sich aus der Transformationsformel:

$$\int_W g \circ T(p) |\det DT(p)| d\lambda^k(p) = \int_{T(W)} g d\lambda^k = \int_V g d\lambda^k = \int_{\varphi} \omega.$$

Ist also $\det DT > 0$, so folgt $\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi} \omega$. Ist $\det DT < 0$, so folgt $\int_{\varphi} \omega = - \int_{\psi} \omega$. \square

Nun wollen wir Differentialformen über Untermannigfaltigkeiten integrieren. Dies geschieht mittels lokaler Parametrisierungen. Lokale Parametrisierungen sind die Umkehrabbildungen von Karten (siehe Bemerkung (b) nach Definition ?? und Bemerkung (c) nach Definition ??).

Definition 4.3.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Familie $\{(\varphi_{\alpha}, V_{\alpha})\}_{\alpha \in I}$ von offenen Mengen $V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ und lokalen Parametrisierungen

$$\varphi_{\alpha} : V_{\alpha} \rightarrow \varphi_{\alpha}(V_{\alpha}) =: U_{\alpha} \subset \mathbb{R}^N$$

mit

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_{\alpha} = M.$$

heißt *Atlas* aus Parametrisierungen für M .

Zu jeder Untermannigfaltigkeit existiert ein Atlas aus lokalen Parametrisierungen. Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass die lokalen Parametrisierungen unendlich oft differenzierbar sind.

Definition 4.3.6. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine *Differentialform vom Grade k* auf M ist eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M)$$

mit $\omega(p) \in \Lambda^k(T_p^* M)$ für alle $p \in M$. Die Differentialform ω heißt m -mal *stetig differenzierbar*, falls für jede lokale Parametrisierung $\varphi_{\alpha} : V_{\alpha} \rightarrow U_{\alpha} \subset M$ die zurückgeholte Differentialform

$$\omega_{\alpha} := \varphi_{\alpha}^* \omega$$

mit

$$\varphi_{\alpha}^* \omega(x)((u_1), \dots, (u_k)) := \omega(\varphi_{\alpha}(x))(D\varphi_{\alpha}(x)u_1, \dots, D\varphi_{\alpha}(x)u_k)$$

für $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ und $x \in V_{\alpha}$ m -mal stetig differenzierbar ist. Die Menge aller m -mal stetig differenzierbaren k -Formen auf M bezeichnen wir mit $\Omega_m^k(M)$. Mit $\Omega^k(M)$ bezeichnen wir die unendlich oft differenzierbaren k -Formen auf M . Die auf der offenen Menge $V_{\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ definierte Differentialform $\omega_{\alpha} = \varphi_{\alpha}^* \omega$ nennen wir auch *lokale Darstellung* von ω bezüglich der Parametrisierung φ_{α} .

Bemerkung. Seien $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow U_\alpha \subset M$ und $\varphi_\beta : V_\beta \rightarrow U_\beta \subset M$ zwei lokale Parametrisierungen mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Definiere $V_{\beta\alpha} = \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ und $V_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Dann ist $T_{\alpha\beta} : V_{\alpha\beta} \rightarrow V_{\beta\alpha}$ mit $T_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ ein Diffeomorphismus, und es gilt für die lokalen Darstellungen ω_α und ω_β :

$$\omega_\alpha = T_{\alpha\beta}^* \omega_\beta, \quad (4.5)$$

denn

$$T_{\alpha\beta}^* \omega_\beta = T_{\alpha\beta}^* \varphi_\beta^* \omega = (\varphi_\beta \circ T_{\alpha\beta})^* \omega = \varphi_\alpha^* \omega = \omega_\alpha.$$

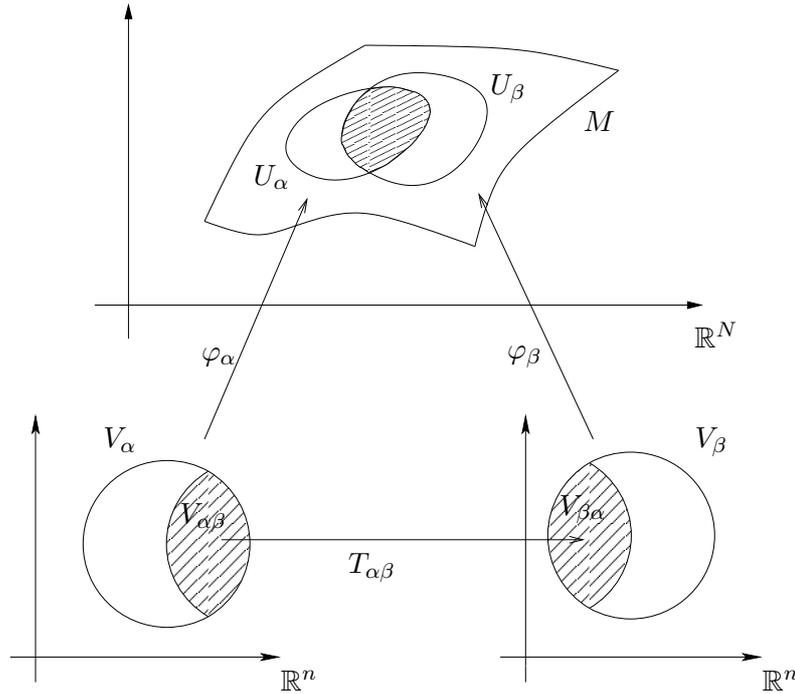


Abbildung 4.3:

Lemma 4.3.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas aus Parametrisierungen für M . Seien $\omega_\alpha \in \Omega_m^k(V_\alpha)$, $\alpha \in I$, eine Familie von m -mal stetig differenzierbaren k -Formen, die die Kompatibilitätsbedingungen

$$\omega_\alpha = T_{\alpha\beta}^* \omega_\beta \text{ für alle } \alpha, \beta \in I \text{ mit } \varphi_\alpha(V_\alpha) \cap \varphi_\beta(V_\beta) \neq \emptyset \quad (4.6)$$

erfüllen. Dann existiert genau eine k -Form $\omega \in \Omega_m^k(M)$ mit $\varphi_\alpha^* \omega = \omega_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Beweis. Sei $p \in M$ und $v_1, \dots, v_k \in T_p M$. Wähle ein $\alpha \in I$ mit $p \in \varphi_\alpha(V_\alpha)$. Dann existieren genau ein $x \in V_\alpha$ und eindeutige Vektoren $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ mit $p = \varphi_\alpha(x)$ und $v_j = D\varphi_\alpha(x)(u_j)$. Definiere nun

$$\omega(p)(v_1, \dots, v_k) := \omega_\alpha(x)(u_1, \dots, u_k).$$

Zu zeigen ist, dass diese Definition nicht von der Wahl von α abhängt. Sei also $\beta \in I$ mit $p \in \varphi_\beta(V_\beta)$. Dann existieren wieder genau ein $x' \in V_\beta$ und eindeutige Vektoren $u'_1, \dots, u'_k \in \mathbb{R}^n$

mit $p = \varphi_\beta(x')$ und $v_j = D\varphi_\beta(x)(u'_j)$. Zu zeigen ist

$$\omega_\alpha(x)(u_1, \dots, u_k) = \omega_\beta(x')(u'_1, \dots, u'_k).$$

Es gilt

$$x' = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x) = T_{\alpha\beta}(x)$$

und aus der Kettenregel folgt:

$$u'_j = (D\varphi_\beta(x'))^{-1} D\varphi_\alpha(x)(u_j) = D\varphi_\beta^{-1}(p) D\varphi_\alpha(x)(u_j) = D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)(u_j) = DT_{\alpha\beta}(x)(u_j).$$

Also erhalten wir zusammen mit den Kompatibilitätsbedingungen (4.6):

$$\begin{aligned} \omega_\beta(x')(u'_1, \dots, u'_k) &= \omega_\beta(T_{\alpha\beta}(x))(DT_{\alpha\beta}(x)(u_1), \dots, DT_{\alpha\beta}(x)(u_k)) = T_{\alpha\beta}^* \omega_\beta(x)(u_1, \dots, u_k) \\ &= \omega_\alpha(x)(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

□

Dieser Sachverhalt ermöglicht es uns, die äußere Ableitung einer Differentialform auf einer Untermannigfaltigkeit zu definieren.

Definition 4.3.8. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Atlas aus Parametrisierungen für M . Sei $m \geq 1$ und $\omega \in \Omega_m^k(M)$. Dann definiere ihr Differential

$$d\omega \in \Omega_{m-1}^{k+1}(M)$$

als die eindeutig bestimmte $(k+1)$ -Form in M mit $\varphi_\alpha^* d\omega = d\omega_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Bemerkung. Die Familie $d\omega_\alpha \in \Omega_{m-1}^{k+1}(V_\alpha)$, $\alpha \in I$, erfüllt wegen

$$d\omega_\alpha = d(T_{\alpha\beta}^* \omega_\beta) = T_{\alpha\beta}^* d\omega_\beta$$

die Kompatibilitätsbedingungen (4.6). Daher ist $d\omega$ wegen Lemma 4.3.7 wohldefiniert.

Wir wollen nun das Integral von n -Formen über n -dimensionale Untermannigfaltigkeiten definieren.

Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine lokale Parametrisierung und $\omega \in \Omega_0^n(M)$ eine stetige n -Form, so ist es naheliegend, $\int_U \omega$ durch $\int_V \varphi^* \omega$ zu erklären. Sei $\psi : W \rightarrow U$ eine weitere lokale Parametrisierung, so ist $T := \varphi^{-1} \circ \psi : W \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus und somit ψ eine Reparametrisierung von φ . Daher gilt wegen Lemma 4.3.3

$$\int_W \psi^* \omega = \pm \int_V \varphi^* \omega$$

je nachdem, ob T orientierungserhaltend oder umkehrend ist.

Definition 4.3.9. Eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt *orientierbar*, falls ein Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$ aus Parametrisierungen für M existiert mit

$$\det DT_{\alpha\beta}(x) > 0$$

für alle $x \in \varphi_\alpha^{-1}((\varphi_\alpha(V_\alpha) \cap (\varphi_\beta(V_\beta)))$. Der Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$ heißt dann *orientiert*.

Definition 4.3.10. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$. Sei $\omega \in \Omega_0^n(M)$, so dass

$$\text{supp } \omega := \overline{\{x \in M \mid \omega(x) \neq 0\}} \subset \varphi_\alpha(V_\alpha)$$

für ein $\alpha \in I$. Dann definiere

$$\int_M \omega := \int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^* \omega.$$

Die Menge $\text{supp } \omega$ heißt auch *Träger* (engl. support) der Form ω .

Bemerkung. Die Definition des Integrals hängt nicht von der Wahl der lokalen Parametrisierung φ_α ab, d.h. ist $\text{supp } \omega \subset \varphi_\alpha(V_\alpha) \cap \varphi_\beta(V_\beta)$, so folgt

$$\int_{V_\alpha} \varphi_\alpha^* \omega = \int_{V_\beta} \varphi_\beta^* \omega.$$

Falls der Träger von ω nicht im Bildbereich einer einzelnen lokalen Parametrisierung liegt, bedient man sich einer Technik, die man die "Zerlegung der Eins" nennt.

Definition 4.3.11. Eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ der Untermannigfaltigkeit M heißt *lokal endlich*, falls für jedes $\alpha \in I$ die Menge

$$\{\beta \in I \mid U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset\}$$

endlich ist. Ein Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$ aus Parametrisierungen für M heißt *lokal endlich*, falls die offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ der Untermannigfaltigkeit M mit $U_\alpha = \varphi_\alpha(V_\alpha)$ lokal endlich ist.

Satz 4.3.12. Sei $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung einer Untermannigfaltigkeit M . Dann existiert eine Zerlegung der Eins angepasst an $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, d.h. es existiert eine Familie von C^∞ -Funktionen $\rho_\alpha : M \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\text{supp } \rho_\alpha = \overline{\{p \in M \mid \rho_\alpha(p) \neq 0\}} \subset U_\alpha \text{ und } \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha(p) = 1 \quad \forall p \in M.$$

Bemerkung. Da die Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ lokal endlich ist, sind für jedes $p \in M$ nur endlich viele Summanden in $\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha(p)$ ungleich null.

Beweis. Wir beweisen die Aussage nur für kompakte Mannigfaltigkeit und eine endliche Überdeckung U_1, \dots, U_n . Betrachte dann zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $W(x)$ mit $\overline{W(x)} \subset U_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. $\bigcup_{x \in M} W(x)$ überdeckt M und da M kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung. Also existieren $k_i \in \mathbb{N}$ und endlich viele Punkte $x_{i,j}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, k_i\}$, mit $x_{i,j} \in U_i$ und

$$\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} W(x_{i,j}) = M.$$

Setze

$$W_i := \bigcup_{j=1}^{k_i} W(x_{i,j}),$$

so ist $W_i \subset U_i$ offen mit $\overline{W_i} \subset U_i$ und $\bigcup_{i=1}^n W_i = M$. Konstruiere nun C^∞ -Funktionen $f_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_i(p) > 0$ für $p \in W_i$ und $f_i(p) = 0$ für $p \in M \setminus W_i$. Definiere dann

$$\rho_i(p) = \frac{f_i(p)}{\sum_{j=1}^n f_j(p)}.$$

□

Definition 4.3.13. Sei M eine orientierbare n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$, so dass die Überdeckung $\varphi(V_\alpha) = U_\alpha$ lokal endlich ist. Sei $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Zerlegung der Eins angepasst an $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Sei ω eine n -Form auf M , so definiere:

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in I} \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Bemerkung. Aus der Eigenschaft der Zerlegung der Eins folgt: $\omega = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \cdot \omega$.

Außerdem kann man zeigen, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins ist.

Eine orientierte Untermannigfaltigkeit induziert eine Orientierung der Tangentialräume. Eine Orientierung auf einem Vektorraum ist die Wahl einer Äquivalenzklasse von geordneten Basen.

Definition 4.3.14. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und

$$GB(V) = \{(b_1, \dots, b_n) \mid \{b_1, \dots, b_n\} \text{ Basis von } V\}$$

die Menge der *geordneten* Basen auf V . Zwei geordnete Basen $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_n)$ heißen *äquivalent* (in Zeichen $B \sim C$), falls die Determinante der linearen Abbildung $T : V \rightarrow V$ mit $T(b_i) = c_i$ positiv ist. Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis, so bezeichnen wir mit

$$[B] := \{C \mid C \in GB(V), C \sim B\}$$

die Äquivalenzklasse von B . Unter einer *Orientierung* auf V verstehen wir die Wahl einer Äquivalenzklasse. Ihre Elemente heißen orientierte Basen.

Die durch die kanonische Basis (e_1, \dots, e_n) des \mathbb{R}^n induzierte Orientierung $[(e_1, \dots, e_n)]$ heißt *Standardorientierung* oder *kanonische Orientierung*. Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ ein Isomorphismus. Dann heißt $[(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))]$ die durch φ *induzierte Orientierung* auf V .

Bemerkungen.

- Es existieren genau zwei Äquivalenzklassen von geordneten Basen auf V . Haben wir eine Orientierung festgelegt, so nennen wir ihre Elemente auch *positiv* orientierte Basen. Die Elemente der anderen Klasse heißen dann *negativ* orientierte Basen.
- Zwei Isomorphismen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ induzieren genau dann die gleiche Orientierung, falls

$$\det(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) > 0.$$

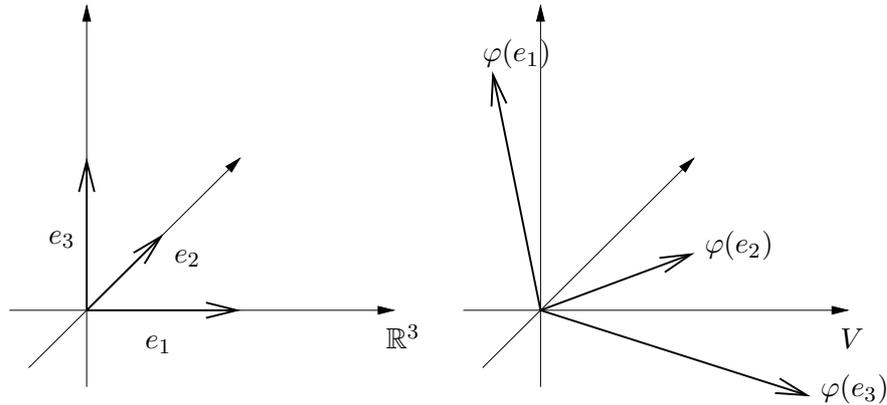


Abbildung 4.4: induzierte Orientierung

- (c) Ist M eine orientierbare Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha)_{\alpha \in I}$, so induzieren die Isomorphismen $D\varphi_\alpha(x_\alpha) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ mit $\varphi_\alpha(x_\alpha) = p$ alle die gleiche Orientierung auf $T_p M$, denn ist $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$, so ist

$$\det DT_{\alpha\beta}(x_\alpha) = \det D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x_\alpha) > 0.$$

4.4 Integralsatz von Stokes

Nun wollen wir den Integralsatz von Stokes beweisen. Dazu benötigen wir den Begriff der Untermannigfaltigkeiten mit Rand.

Untermannigfaltigkeiten sind lokal diffeomorph zu offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind lokal diffeomorph zu offenen Teilmengen des Halbraumes

$$H^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}.$$

Die Menge

$$\partial H^n = \{(0, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

heißt *Rand* von H^n . Der Rand von H^n ist ein Vektorraum isomorph zu \mathbb{R}^{n-1} . Analog zur Definition der Untermannigfaltigkeit ohne Rand in ?? definieren wir:

Definition 4.4.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ heißt *n*-dimensionale *Untermannigfaltigkeit mit Rand* des \mathbb{R}^N , falls für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^N$ und ein Diffeomorphismus $\psi : W \rightarrow W' \subset \mathbb{R}^N$ existiert mit

$$\psi(W \cap M) = W' \cap (H^n \times \{0\}),$$

wobei $0 \in \mathbb{R}^{N-n}$. Die Einschränkung von ψ auf $W \cap M$ heißt auch *Karte*. Die Menge der Punkte $p \in M$ mit

$$\psi(p) \in W' \cap (\partial H^n \times \{0\})$$

heißen die *Randpunkte* der Untermannigfaltigkeit. Mit ∂M bezeichnen wir die Menge aller Randpunkte von M .

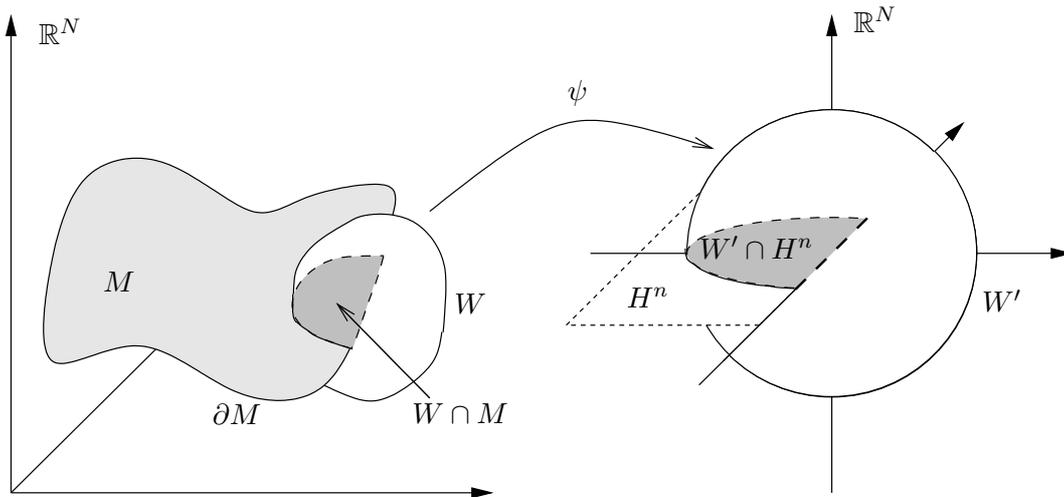


Abbildung 4.5: Untermannigfaltigkeit mit Rand

Bemerkungen.

- (a) Die Definition der Randpunkte hängt nicht von der Wahl der Karte ab. Falls $\partial M = \emptyset$, erhalten wir eine Untermannigfaltigkeit ohne Rand im Sinn der Definition ??.
- (b) Die Menge $W' \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ ist von der Form $V \times \{0\}$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die auf $\psi^{-1}(V \times \{0\})$ eingeschränkte Abbildung

$$\psi : \psi^{-1}(V \times \{0\}) \rightarrow V \times \{0\} \cong V$$

ist bijektiv. Die Inverse

$$\varphi : V \rightarrow \psi^{-1}(V \times \{0\}) \subset W$$

ist eine Immersion. Ihre Einschränkung $\varphi|_{V \cap H^n} : V \cap H^n \rightarrow W \cap M$ heißt *lokale Parametrisierung* von M .

- (c) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann existieren Familien $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}^n$ und $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \mathbb{R}^N$ offener Mengen sowie eine Familie von lokalen Parametrisierungen $\varphi_\alpha|_{V_\alpha \cap H^n} : V_\alpha \cap H^n \rightarrow W_\alpha \cap M =: U_\alpha$ mit $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$. Eine solche Familie heißt *Atlas* aus lokalen Parametrisierungen für M .

Lemma 4.4.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$ und mit Atlas $\varphi_\alpha : V_\alpha \cap H^n \rightarrow W_\alpha \cap M =: U_\alpha, \alpha \in I$. Sei $J = \{\beta \in I \mid V_\beta \cap \partial H^n \neq \emptyset\}$. Dann ist ∂M eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ohne Rand, und die Abbildungen

$$\varphi_\beta : V_\beta \cap \partial H^n \rightarrow \partial M, \text{ mit } \beta \in J$$

bilden einen Atlas für ∂M . Ist $(\varphi_\alpha, V_\alpha \cap H^n)_{\alpha \in I}$ ein orientierter Atlas für M , so ist auch $(\varphi_\beta, V_\beta \cap \partial H^n)_{\beta \in J}$ ein orientierter Atlas für ∂M .

Bemerkungen.

- (a) ∂M ist im Allgemeinen nicht zusammenhängend (siehe Beispiele auf Seite 113).
- (b) Sei $p = \varphi_\alpha(x) \in M$, so ist $T_p M$ durch $(D\varphi_\alpha(x)(e_1), \dots, D\varphi_\alpha(x)(e_n))$ orientiert. Ist $p \in \partial M$, so ist $T_p \partial M$ durch $(D\varphi_\alpha(x)(e_2), \dots, D\varphi_\alpha(x)(e_n))$ orientiert. Diese Orientierung heißt die durch M induzierte Orientierung.

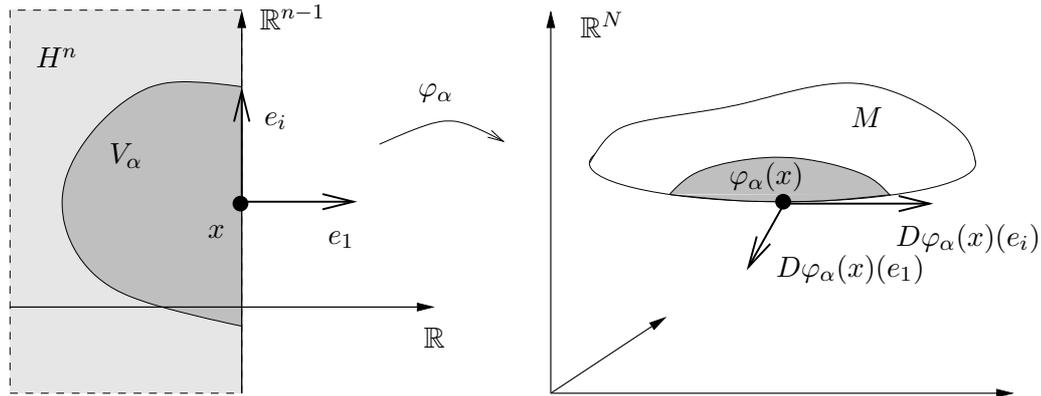


Abbildung 4.6: induzierte Orientierung

Beweis. Dass $(\varphi_\beta, V_\beta \cap \partial H^n)_{\beta \in J}$ ein Atlas für ∂M ist, folgt aus der entsprechenden Eigenschaft des Atlas für M , denn ∂H^n ist isomorph zum Vektorraum \mathbb{R}^{n-1} . Zu zeigen bleibt, dass dieser orientiert ist.

Seien $\varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow W_\alpha$ und $\varphi_\beta : V_\beta \rightarrow W_\beta$ mit $x \in \partial H^n \cap V_\alpha$ und $y \in \partial H^n \cap V_\beta$, so dass $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(y) = p \in \partial M$. Betrachte das Differential $D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dieses Differential ist ein Vektorraumisomorphismus mit $(n-1)$ -dimensionalem invariantem Unterraum $\partial H^n = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(0, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$, d.h. $D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)(\partial H^n) = \partial H^n$. Daraus erhalten wir die Darstellung

$$D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)(e_1) = \lambda_1 e_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i e_i,$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq 0$. Wir zeigen:

$$\det D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)|_{\partial H^n} > 0.$$

Betrachte für $t \in (-\epsilon, 0]$ und $\epsilon > 0$ genügend klein die Kurve

$$c(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t)) = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha(x + t e_1).$$

Dann ist $c_1(t) < 0$ für $t \in (-\epsilon, 0)$ und $c_1(0) = 0$. Da $\dot{c}_1(0) = \lambda_1 \neq 0$ muss $\lambda_1 > 0$ gelten. Sei für $i \geq 2$

$$D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)(x)(e_i) = \sum_{j=2}^n a_{ij} e_j,$$

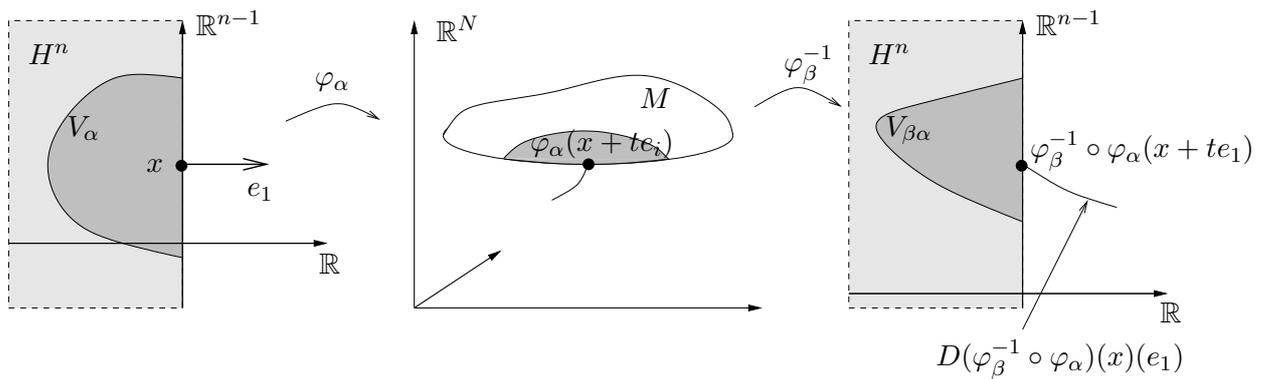


Abbildung 4.7: zum Beweis von Lemma 4.4.2

so erhalten wir, weil der Atlas für M orientiert ist:

$$0 < \det D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha)(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \det(a_{ij}).$$

Da $\lambda_1 > 0$, folgt

$$\det(a_{ij}) = \det D(\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha)|_{\partial H^n}(x) > 0.$$

□

Beispiele.

- (a) M Untermgfk. im \mathbb{R}^2 , (b) K^3 Kugel im \mathbb{R}^3 , (c) M Zylinder im \mathbb{R}^3

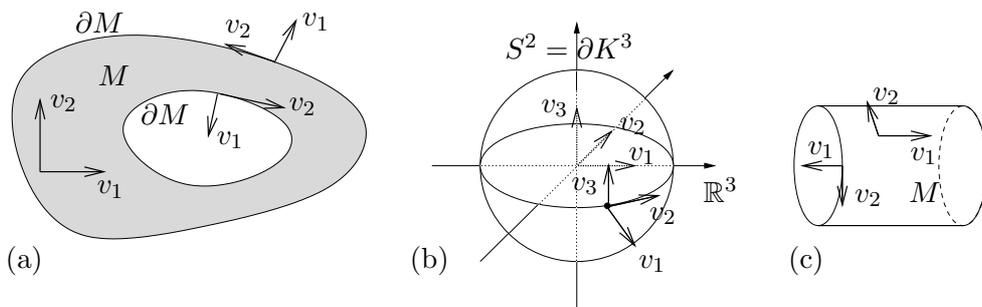


Abbildung 4.8: Beispiele

Satz 4.4.3 (Satz von Stokes). Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M . Sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form auf M mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dabei benutzen wir auf ∂M die durch M induzierte Orientierung.

Beweis. Wir werden den Beweis in mehreren Schritten durchführen.

1. Sei $M = H^n \subset \mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung und ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form auf M mit kompaktem Träger. Wir können aufgrund der Linearität der äußeren Ableitung und des Integrals annehmen, dass ω ein Monom ist, d.h.

$$\omega = a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit $a_j \in C^1(M)$ mit kompaktem Träger. ($\widehat{dx_j}$ bedeutet, dass dx_j ausgelassen wird.) Dann folgt:

$$d\omega = \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n = (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Aus der Definition des Integrals ergibt sich:

$$\int_{H^n} d\omega = (-1)^{j-1} \int_{H^n} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x) d\lambda^n(x)$$

wobei λ^n das Lebesguemaß auf \mathbb{R}^n bezeichnet. Da a_j kompakten Träger hat, existiert ein $K > 0$ mit $a_j(x) = 0$ für alle x mit $|x_j| \geq K$. Mit Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

- (a) Für $j = 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{H^n} d\omega &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x) d\lambda^1(x_1) \right) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, x_2, \dots, x_n) d\lambda^{n-1}(x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

- (b) Für $j > 1$ erhalten wir:

$$\int_{H^n} d\omega \stackrel{\text{Fubini}}{=} (-1)^{j-1} \int_{(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x) d\lambda^1(x_j) \right) d\lambda^{n-1}(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n) = 0.$$

Betrachte die Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial H^n$ des Randes von H^n mit

$$\varphi(y) = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1}) = (0, y_1, \dots, y_{n-1}).$$

Da φ eine lineare Abbildung ist, folgt $D\varphi(y) = \varphi$ und somit

$$(D\varphi(y)(e_1), \dots, D\varphi(y)(e_{n-1})) = (e_2, \dots, e_n).$$

Daher ist $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial H^n$ orientierungserhaltend und es folgt

$$\int_{\partial H^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi^* \omega,$$

wobei

$$\varphi^*\omega = (a_j \circ \varphi)d\varphi_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\varphi_j} \wedge \dots \wedge d\varphi_n.$$

Weil $\varphi_1(y_1, \dots, y_{n-1}) = 0$ folgt $d\varphi_1 \equiv 0$ und $\varphi_j(y_1, \dots, y_{n-1}) = y_{j-1}$ für $j > 1$, gilt:

$$\varphi^*\omega = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq 1 \\ (a_1 \circ \varphi)dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} & \text{für } j = 1. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial H^n} \omega &= \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq 1 \\ \int_{\mathbb{R}^{n-1}} a_1(0, y_1, \dots, y_{n-1})d\lambda^{n-1}(y) & \text{für } j = 1 \end{cases} \\ &= \int_{H^n} d\omega. \end{aligned}$$

2. Sei nun M eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und orientiertem Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha \cap H^n)_{\alpha \in I}$. Es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form mit kompaktem Träger und $\text{supp } \omega \subset \varphi_\alpha(V_\alpha \cap H^n)$ für ein $\alpha \in I$. Dann hat $\varphi_\alpha^*\omega$ – und somit auch $d(\varphi_\alpha^*\omega)$ – einen kompakten Träger in $H^n \cap V_\alpha$ und es folgt aus 1.:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{V_\alpha \cap H^n} \varphi_\alpha^*d\omega \stackrel{4.2.3}{=} \int_{V_\alpha \cap H^n} d(\varphi_\alpha^*\omega) = \int_{H^n} d(\varphi_\alpha^*\omega) \\ &\stackrel{1.}{=} \int_{\partial H^n} \varphi_\alpha^*\omega = \int_{V_\alpha \cap \partial H^n} \varphi_\alpha^*\omega \stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

3. Sei nun M wie oben und ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form mit kompaktem Träger. Dann existiert eine endliche Menge $I' \subset I$ mit $\text{supp } \omega \subset \bigcup_{\alpha \in I'} \varphi_\alpha(V_\alpha)$. Sei $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I'}$ eine Zerlegung der Eins angepasst an $\varphi_\alpha(V_\alpha \cap H^n)$. Insbesondere sind die Träger von $\rho_\alpha \omega$ kompakt und enthalten in $\varphi_\alpha(V_\alpha \cap H^n)$. Daher folgt aus 2.:

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d \sum_{\alpha \in I'} \rho_\alpha \omega = \sum_{\alpha \in I'} \int_M d(\rho_\alpha \omega) \stackrel{2.}{=} \sum_{\alpha \in I'} \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega \\ &= \int_{\partial M} \sum_{\alpha \in I'} \rho_\alpha \omega = \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.4.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit $\partial M = \emptyset$. Ist ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form mit kompaktem Träger, so gilt:

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus dem Satz von Stokes. □

Als Anwendung des Satzes von Stokes betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel. Sei $\omega(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$, so gilt:

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂A . Dann folgt:

$$n\lambda^n(A) = \int_A d\omega = \int_{\partial A} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Betrachte insbesondere die abgeschlossene Kugel $A = K^n(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$. Dann gilt $\partial K^n(0, r) = S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$. Für $n = 2$ erhalten wir

$$\lambda^2(K^2(0, r)) = \frac{1}{2} \int_{\partial K^2(0, r)} x_1 dx_2 - x_2 dx_1.$$

Sei $\varphi : [0, 2\pi) \rightarrow S^1(r)$ die Parametrisierung mit $\varphi(t) = r(\cos t, \sin t)$. Diese ist kompatibel mit der auf $\partial K^2(0, r) = S^1(r)$ gegebenen Orientierung. Dann ist

$$\int_{S^1(r)} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t) dt = 2\pi r^2.$$

Insbesondere folgt: $\lambda^2(K(0, r)) = \pi r^2$.

4.5 Die Volumenform und die klassischen Integralsätze

Jeder orientierbaren Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ der Dimension n lässt sich eine ausgezeichnete n -Form zuordnen. Sei (w_1, \dots, w_n) eine positiv orientierte Basis in $T_p M \subset \mathbb{R}^N$. Der Tangentialraum $T_p M$ ist als Untervektorraum des \mathbb{R}^N bezüglich des auf $T_p M$ eingeschränkten Standardskalarproduktes des \mathbb{R}^N ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Nach dem Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt existiert genau eine ON -Basis (b_1, \dots, b_n) mit

$$b_k = \sum_{j=1}^k a_{jk} w_j$$

und $a_{jk} \in \mathbb{R}$ sowie $a_{kk} > 0$. Damit hat die lineare Abbildung $T : T_p M \rightarrow T_p M$ mit $T(w_j) = b_j$ positive Determinante, denn ihre Matrixdarstellung ist bezüglich der Basis (w_1, \dots, w_n) durch die obere Dreiecksmatrix (a_{jk}) gegeben, und die Diagonale hat nur positive Einträge. Insbesondere ist die Basis (b_1, \dots, b_n) positiv orientiert. Wir definieren nun:

Definition 4.5.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit der Dimension n und sei $p \in M$. Sei (b_1, \dots, b_n) eine positiv orientierte ON-Basis von $T_p M$, so definiere für $v_1, \dots, v_n \in T_p M$:

$$dM(p)(v_1, \dots, v_n) := \det \begin{pmatrix} \langle b_1, v_1 \rangle & \dots & \langle b_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_n, v_1 \rangle & \dots & \langle b_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Die Differentialform dM heißt *Volumenform*.

Bemerkung. Wegen $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ folgt

$$dM(p) = b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^*.$$

Vorsicht: Die Volumenform dM ist nicht das Differential einer $(n-1)$ -Form (auch wenn ihre Notation dies suggeriert).

Das folgende Lemma der linearen Algebra ist für das Arbeiten mit der Volumenform nützlich.

Lemma 4.5.2. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und $\alpha \in \Lambda^n(V^*)$. Dann gilt für jede Basis $(v_1, \dots, v_n) \in V$

$$\det (v_i^*(T(v_j)))_{i,j \leq n} = \det T$$

und

$$\alpha(T(v_1), \dots, T(v_n)) = \det T \cdot \alpha(v_1, \dots, v_n).$$

Beweis. Sei (t_{ij}) die Matrixdarstellung von T bezüglich der Basis (v_1, \dots, v_n) , d.h.

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^n t_{ij} v_i.$$

Dann folgt $t_{ij} = v_i^*(T(v_j))$ und somit die erste Aussage. Betrachte die von null verschiedene n -Form $v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*$. Da $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$ existiert genau ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha = \lambda \cdot v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*.$$

Insbesondere folgt aus der Definition des Dachproduktes :

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \lambda \cdot v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*(v_1, \dots, v_n) = \lambda.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \alpha(T(v_1), \dots, T(v_n)) &= \lambda \cdot v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*(T(v_1), \dots, T(v_n)) \\ &= \lambda \det (v_i^*(T(v_j)))_{i,j \leq n} \\ &= \det T \cdot \alpha(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Seien (b_1, \dots, b_n) und (c_1, \dots, c_n) zwei geordnete Basen von $T_p M$ und $T : V \rightarrow V$ der Endomorphismus mit $T(b_i) = c_i$. Dann folgt aus Lemma 4.5.2

$$\det T \cdot c_1^* \wedge \dots \wedge c_n^* = b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^*$$

durch Anwendung beider Seiten auf das n -Tupel (c_1, \dots, c_n) . Sind (b_1, \dots, b_n) und (c_1, \dots, c_n) positiv orientierte ON-Basen so ist $\det T = 1$, denn T ist dann eine orthogonale Abbildung mit positiver Determinante. Insbesondere ist die Volumenform unabhängig von der Wahl der positiv orientierten ON-Basis.

Die Volumenform besitzt folgende lokale Darstellung.

Lemma 4.5.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierbare Untermannigfaltigkeit, dM die Volumenform, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung mit $\varphi(x) = p \in M$. Dann gilt

$$\varphi^* dM(x) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei die $n \times n$ Matrix $(g_{ij}(x))$ durch

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle$$

gegeben ist.

Bemerkung. In dieser Darstellung kommt die ON-Basis nicht mehr vor. Dieser Darstellung zeigt auch die Differenzierbarkeit von dM . Für $\det(g_{ij}(x))$ schreiben wir manchmal auch kurz $g(x)$.

Beweis. Da $\varphi^* dM \in \Omega^n(V)$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ folgt

$$\varphi^* dM(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Aus der Definition von dM erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi^* dM(x)(e_1, \dots, e_n) = dM(x)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle b_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \rangle & \dots & \langle b_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \rangle & \dots & \langle b_n, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \rangle \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei (b_1, \dots, b_n) eine beliebige orientierte ON-Basis von $T_p M$ ist. Betrachte die zugehörige Matrix $A = (a_{jk}) \in M(n, \mathbb{R})$ mit $a_{jk} = \langle b_j, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \rangle$, so gilt

$$(A^T A)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^n \left\langle b_k, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right\rangle \left\langle b_k, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \right\rangle = g_{ij}(x).$$

Daraus folgt

$$f^2(x) = (\det A)^2 = \det A A^T = \det((g_{ij}(x))_{i,j \leq n})$$

und somit die Aussage. □

Es gilt das folgende Kriterium für die Orientierbarkeit einer Untermannigfaltigkeit.

Satz 4.5.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. M ist genau dann orientierbar, falls eine n -Form $\omega \in \Omega^n(M)$ existiert mit $\omega(p) \neq 0$ für alle $p \in M$.

Beweis. Sei M orientierbar, so ist die Volumenform eine nirgends verschwindende n -Form, denn

$$dM(p) = b_1^* \wedge \dots \wedge b_n^*$$

für eine (und somit jede) positiv orientierte ON-Basis (b_1, \dots, b_n) .

Sei nun umgekehrt ω eine nirgends verschwindende n -Form, so können wir die Tangentialräume $T_p M$ wie folgt orientieren: Wir nennen eine geordnete Basis $(v_1, \dots, v_n) \in T_p M$ positiv orientiert, falls

$$\omega(p)(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

Dies definiert eine Orientierung auf $T_p M$, denn ist $T : T_p M \rightarrow T_p M$ ein Isomorphismus, so sind nach Definition (v_1, \dots, v_n) und $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ genau dann gleich orientiert, falls $\det T > 0$. Da wegen Lemma 4.5.2

$$\omega(p)(T(v_1), \dots, T(v_n)) = \det T \cdot \omega(p)(v_1, \dots, v_n)$$

gilt, ist dies genau dann der Fall, falls $\omega(p)(T(v_1), \dots, T(v_n)) > 0$.

Einen Atlas kompatibel mit dieser Orientierung erhält man dann wie folgt:

Ist $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow U \subset M$ eine Parametrisierung und ist

$$\omega(p)(D\varphi(x)(e_1), \dots, D\varphi(x)(e_n)) < 0$$

für ein $x \in V$ (und damit für alle $x \in V$), so betrachte die Spiegelung $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$S(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ersetze φ durch die Parametrisierung $\tilde{\varphi} = \varphi \circ S : \tilde{V} \rightarrow M$ mit $\tilde{V} =: S^{-1}(V)$, so ist

$$D\tilde{\varphi}(x)(e_1) = D\varphi(S(x))(S(e_1)) = -D\varphi(S(x))(e_1)$$

und $D\tilde{\varphi}(x)(e_j) = D\varphi(S(x))(e_j)$ für $j \geq 2$. Daher ist

$$\omega(p)(D\tilde{\varphi}(x)(e_1), \dots, D\tilde{\varphi}(x)(e_n)) > 0.$$

Durch dieses Verfahren konstruiert man aus einem Atlas einen orientierten Atlas. □

Definition 4.5.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit mit Volumenform dM . Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, d.h.

$$f \circ \varphi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$$

sei Borel-messbar für alle $\alpha \in I$. Dann heißt $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (*Lebesgue-*)integrierbar, falls die n -Form $f dM$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f dM$$

das (*Lebesgue-*)Integral von f .

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Eine solche Untermannigfaltigkeit heißt auch *Hyperfläche*.

Satz 4.5.6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche. Dann ist M genau dann orientierbar, falls ein stetiges Einheitsnormalenfeld $N : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ existiert, d.h. eine stetige Abbildung mit $N(p) \perp T_p M$ und $|N(p)| = 1$ für alle $p \in M$. Wenn ein solches Feld existiert, so definiert*

$$\omega(p)(v_1, \dots, v_n) = \det(N(p), v_1, \dots, v_n)$$

eine nirgends verschwindende n -Form. Diese Form ist dann auch die Volumenform von M .

Beweis. Sei $N : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld, so definiere

$$\omega(p)(v_1, \dots, v_n) = \det(N(p), v_1, \dots, v_n)$$

für $v_j \in T_p M$. Diese Form definiert wegen Satz 4.5.4 eine Orientierung auf M . Ist (b_1, \dots, b_n) eine positiv orientierte ON -Basis von $T_p M$, so ist $(N(p), b_1, \dots, b_n)$ eine ON -Basis von \mathbb{R}^{n+1} und es gilt

$$\omega(p)(b_1, \dots, b_n) = 1.$$

Da alternierende $(n+1)$ -Formen in \mathbb{R}^{n+1} bis auf einen Vorfaktor eindeutig bestimmt sind, ist $\omega(p)$ die zugehörige Volumenform $dM(p)$.

Für die umgekehrte Richtung benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 4.5.7. *Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig und $n \geq 2$. Sei*

$$v_1 \times \dots \times v_n := \sum_{i=1}^{n+1} \det(v_1, \dots, v_n, e_i) e_i.$$

Dann folgt:

$$\langle v_1 \times \dots \times v_n, v_j \rangle = 0$$

und

$$\det(v_1, \dots, v_n, v_1 \times \dots \times v_n) > 0.$$

Beweis.

$$\langle v_1 \times \dots \times v_n, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \det(v_1, \dots, v_n, e_i) \langle e_i, v_j \rangle = \det(v_1, \dots, v_n, v_j) = 0.$$

Außerdem ist

$$\det(v_1, \dots, v_n, v_1 \times \dots \times v_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \det(v_1, \dots, v_n, e_i) \det(v_1, \dots, v_n, e_i) > 0,$$

denn ist $\det(v_1, \dots, v_n, e_i) = 0$ für alle i , so wäre e_i von v_1, \dots, v_n linear abhängig für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Dies ist unmöglich, da (e_1, \dots, e_{n+1}) eine Basis von \mathbb{R}^{n+1} ist. \square

Bemerkungen.

- (a) Für $n = 2$ ist “ \times ” gerade das aus der Schule bekannte Kreuzprodukt.
- (b) Seien $v = v_1 \times \dots \times v_n$ und $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein weiterer Vektor orthogonal zu den Vektoren v_1, \dots, v_n mit $\det(v_1, \dots, v_n, w) > 0$. Dann ist $w = \lambda v$ mit $\lambda > 0$. Gilt insbesondere $\|v\| = \|w\|$, so ist $v = w$.
- (c) Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, so definieren wir ein stetiges Einheitsnormalenfeld wie folgt: Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \cap H^n \rightarrow M$ eine positiv orientierte Parametrisierung, so definiere für $p = \varphi(x)$

$$N(p) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) \right\|}.$$

Wegen Lemma 4.5.7 ist $N(p) \perp T_p M$.

Fortsetzung des Beweises von Satz 4.5.6 .

Sei also nun $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche mit orientiertem Atlas $(\varphi_\alpha, V_\alpha \cap H^n)_{\alpha \in I}$. Für jede Parametrisierung $\varphi_\alpha : V_\alpha \cap H^n \rightarrow M$ definiert N_α aus der obigen Bemerkung ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf $\varphi_\alpha(V_\alpha) \subset M$. Ist M orientierbar, so betrachte zwei positiv orientierte Parametrisierungen $\varphi_\alpha : V_\alpha \cap H^n \rightarrow M$, $\varphi_\beta : V_\beta \cap H^n \rightarrow M$.

Falls $p = \varphi_\alpha(x) = \varphi_\beta(y) \in M$, so stimmen die mittels φ_α bzw. φ_β definierten Einheitsnormalenfelder $N_\alpha(p)$ bzw. $N_\beta(p)$ wegen $N_\alpha(p) \perp T_p M \perp N_\beta(p)$ und $\|N_\alpha(p)\| = 1 = \|N_\beta(p)\|$ bereits bis eventuell auf ein Vorzeichen überein. Nach Lemma 4.5.7 sind sowohl $\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n}(x), N_\alpha(p)\right)$ als auch $\left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_n}(y), N_\beta(p)\right)$ positive Basen von \mathbb{R}^{n+1} . Weil $\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_n}(x)\right)$ und $\left(\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_n}(y)\right)$ gleich orientiert sind, müssen auch $N_\alpha(p)$ und $N_\beta(p)$ gleich orientiert sein. Daher ist $N_\alpha(p) = N_\beta(p)$ und N hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung ab.

□

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierbare 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und N ein Einheitsnormalenfeld. Dann ist die durch N induzierte Volumenform von M gegeben durch

$$dM(p)(v_1, v_2) = \det(N(p), v_1, v_2) = \langle N(p), v_1 \times v_2 \rangle.$$

Sei $w \in \mathbb{R}^3$, so gilt:

$$\langle w, N(p) \rangle \cdot \det(N(p), v_1, v_2) = \det(w, v_1, v_2)$$

für alle $v_1, v_2 \in T_p M$. Denn sind v_1, v_2 linear abhängig, so sind beide Seiten gleich 0. Andernfalls schreibe

$$w = \alpha N(p) + \beta v_1 + \gamma v_2.$$

Dann gilt: $\langle w, N(p) \rangle = \alpha$ und $\det(w, v_1, v_2) = \alpha \det(N(p), v_1, v_2) = \alpha dM(p)(v_1, v_2)$.

Um den klassischen Stokesschen Integralsatz formulieren und beweisen zu können, greifen wir auf die auf Seite 94 gemachten Bemerkungen zur Vektoranalysis zurück. Für ein differenzierbares Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ haben wir die 1-Form w_F^1 bzw. die 2-Form w_F^2 durch

$$\omega_F^1(x)(v) = \langle F(x), v \rangle \quad \text{bzw.} \quad \omega_F^2(x)(v_1, v_2) = \det(F(x), v_1, v_2)$$

definiert. Dann gilt:

$$d\omega_F^1 = \omega_{\text{rot } F}^2$$

wobei $\text{rot } F$ die Rotation des Vektorfeldes F bezeichnet.

Satz 4.5.8 (Klassischer Integralsatz von Stokes).

Seien $M \subset U$ mit $U \subset \mathbb{R}^3$ offen eine 2-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_M \langle \text{rot } F, N \rangle dM = \int_{\partial M} \omega_F^1 = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle dS,$$

wobei T das orientierte Einheitstangentienfeld längs $S = \partial M$ ist.

Beweis. Aus dem allgemeinen Integralsatz von Stokes folgt mit den Ausführungen auf Seite 94 zur Vektoranalysis:

$$\int_M \omega_{\text{rot } F}^2 = \int_M d\omega_F^1 = \int_{\partial M} \omega_F^1.$$

Es gilt für $v_1, v_2 \in T_p M$:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{rot } F}^2(p)(v_1, v_2) &= \det(\text{rot } F(p), v_1, v_2) = \langle \text{rot } F(p), N(p) \rangle \cdot \det(N(p), v_1, v_2) \\ &= \langle \text{rot } F(p), N(p) \rangle \cdot dM(p)(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Da $\omega_F^1(p) = f(p)dS(p)$ (genauer ω_F^1 aufgefasst als 1-Form auf der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit $S = \partial M$) gilt

$$\omega_F^1(p)(T(p)) = \langle F(p), T(p) \rangle = f(p)dS(p)(T(p)) = f(p),$$

und somit folgt die Behauptung. \square

Wir wollen uns nun einer speziellen Form des Gaußschen Satzes für 3-dimensionale Untermannigfaltigkeiten M des \mathbb{R}^3 mit Rand ∂M zuwenden. Solche Untermannigfaltigkeiten werden manchmal auch Gebiete im \mathbb{R}^3 mit glattem Rand genannt. Diese Untermannigfaltigkeiten werden durch die Standardvolumenform $dM = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ orientiert. Ein beliebtes Beispiel ist die Kugel im \mathbb{R}^3 . Wieder benutzen wir die Bemerkungen zur Vektoranalysis auf Seite 94.

Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld, das auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $M \subset U$ definiert ist. Dann gilt

$$d\omega_F^2 = \text{div } F dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

mit $\text{div } F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(x)$. Sei $N : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ das Einheitsnormalenfeld mit $d(\partial M)(p)(v_1, v_2) = \det(N(p), v_1, v_2)$ für alle $p \in \partial M$ und $v_1, v_2 \in T_p \partial M$ (dieses heißt auch äußeres Normalenfeld). Dann folgt aus obigen Bemerkungen:

$$\omega_F^2(p)(v_1, v_2) = \langle F(p), N(p) \rangle \det(N(p), v_1, v_2) = \langle F(p), N(p) \rangle d(\partial M)(p)(v_1, v_2)$$

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir somit die folgende spezielle Form des Gaußschen Satzes.

Satz 4.5.9 (Klassischer Integralsatz von Gauß).

Seien $U \subset \mathbb{R}^3$, $M \subset U$ eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_M \operatorname{div} F(x) dM(x) = \int_{\partial M} \langle F(p), N(p) \rangle d(\partial M)(p)$$

Man kann den Gaußschen Satz auf beliebige Untermannigfaltigkeiten mit Rand verallgemeinern. Dazu muss man die Divergenz eines Vektorfeldes F auf einer beliebigen orientierten Untermannigfaltigkeit definieren.

Definition 4.5.10. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

- (a) Ein Vektorfeld $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ auf $M \subset \mathbb{R}^N$ ist eine Abbildung mit $F(p) \in T_p M$ für alle $p \in M$. F heißt m -mal stetig differenzierbar, falls für jede Parametrisierung $\varphi : V \rightarrow M$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Abbildung $F \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ m -mal stetig differenzierbar ist.
- (b) Sei ω eine k -Form auf M und $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Vektorfeld, so heißt die $(k-1)$ -Form $i_F \omega$ mit

$$i_F \omega(p)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(p)(F(p), v_1, \dots, v_{k-1})$$

das innere Produkt von F und ω .

- (c) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Volumenform dM und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt die eindeutig bestimmte Funktion $\operatorname{div} F : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(i_F dM)(p) = \operatorname{div} F(p) dM(p)$$

die Divergenz des Vektorfeldes F auf M .

Bemerkungen.

- (a) Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : V \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, so ist für jedes $x \in V$ das Differential $D\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ ein Vektorraumisomorphismus. Ist nun F ein Vektorfeld auf M , so heißt das Vektorfeld $\varphi^* F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi^* F(x) := (D\varphi(x))^{-1}(F(\varphi(x)))$$

das mittels der Karte φ auf V zurückgeholte Vektorfeld. Sei $(F_1(x), \dots, F_n(x)) = \varphi^* F(x)$, so gilt

$$F(\varphi(x)) = D\varphi(x)(\varphi^* F(x)) = \sum_{i=1}^n F_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).$$

Also sind die Komponenten von $\varphi^* F(x)$ die Koeffizienten des Vektors $F(\varphi(x))$ bezüglich der Basis $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x)\right)$ von $T_{\varphi(x)} M$.

- (b) Sei ω eine k -Form auf M , so folgt

$$\varphi^*(i_F \omega) = i_{\varphi^* F} \varphi^*(\omega)$$

auf M . Zum Beweis betrachte $u_1, \dots, u_{k-1} \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jedes $x \in V$:

$$\begin{aligned} \varphi^*(i_F \omega)(x)(u_1, \dots, u_{k-1}) &= i_{F\omega}(\varphi(x))(D\varphi(x)(u_1), \dots, D\varphi(x)(u_{k-1})) \\ &= \omega(\varphi(x))(F(\varphi(x)), D\varphi(x)(u_1), \dots, D\varphi(x)(u_{k-1})) \\ &= \omega(\varphi(x))(D\varphi(x)(\varphi^*F(x)), D\varphi(x)(u_1), \dots, D\varphi(x)(u_{k-1})) \\ &= \varphi^*\omega(x)(\varphi^*F(x), u_1, \dots, u_{k-1}) \\ &= i_{\varphi^*F}(\varphi^*\omega)(x)(u_1, \dots, u_{k-1}). \end{aligned}$$

(c) i ist linear in F , d.h. für Vektorfelder F, G auf M und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$i_{\lambda F + \mu G} = \lambda i_F + \mu i_G.$$

(d) Sei $F = (F_1, \dots, F_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf der offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ die Volumenform bezüglich der Standardorientierung auf \mathbb{R}^n . Dann gilt

$$i_F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$$

und somit

$$d(i_F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Also ist die Divergenz des Vektorfeldes $F : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der Standardvolumenform des \mathbb{R}^n gegeben durch

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x).$$

Allgemein erhält man für die Divergenz eines Vektorfeldes bezüglich einer Untermannigfaltigkeit und eines beliebigen Koordinatensystems:

Lemma 4.5.11. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Volumenform dM und F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf M . Sei $\varphi : V \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, so gilt*

$$\operatorname{div} F(\varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\sqrt{g}F_i)}{\partial x_i}(x),$$

wobei $(F_1(x), \dots, F_n(x)) = \varphi^*F(x)$ die lokale Darstellung des Vektorfeldes F bezüglich der Parametrisierung φ ist und $g = \det(g_{ij})$ (vgl. Bem. nach 4.5.3).

Beweis. Nach Definition der Divergenz gilt für $p \in M$:

$$d(i_F dM)(p) = \operatorname{div} F(p) dM(p).$$

Sei $\varphi : V \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, so folgt aus Lemma 4.2.3 und obiger Bemerkung (a) für $x \in V$:

$$\varphi^*(d(i_F dM))(x) = d(\varphi^*(i_F dM))(x) = d(i_{\varphi^*F}(\varphi^* dM))(x).$$

Wegen Lemma 4.5.3 und obiger Bemerkung (d) erhalten wir:

$$\begin{aligned} i_{\varphi^*F}\varphi^*(dM)(x) &= \sqrt{g(x)}i_{\varphi^*F}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(x) \\ &= \sqrt{g(x)} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} F_j(x) dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_j} \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Also folgt zusammen mit den obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(\varphi(x))\sqrt{g(x)}dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n &= \varphi^*(\operatorname{div} F dM)(x) = \varphi^*(i_F dM)(x) \\ &= d(i_{\varphi^*F}\varphi^*dM)(x) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\sqrt{g}F_i)}{\partial x_i}(x) \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. \square

Um den Gaußschen Integralsatz formulieren und beweisen zu können, benötigen wir den Begriff des äußeren Normalenfeldes für eine positiv orientierte berandete Untermannigfaltigkeit. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand ∂M , so ist $T_p\partial M \subset T_pM$ ein Unterraum der Dimension $n-1$ von T_pM . Man definiert nun:

Definition 4.5.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Rand ∂M und $p \in \partial M$. Sei $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p\partial M$ eine positiv orientierte Basis, so heißt der eindeutige Vektor $N(p) \perp T_p\partial M$ mit $\|N(p)\| = 1$, für den $(N(p), v_1, \dots, v_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis des T_pM bildet, *äußerer Einheitsnormalenvektor*. Das Vektorfeld $p \mapsto N(p)$ heißt *äußeres Einheitsnormalenfeld* von M .

Bemerkung. Sei $d(\partial M)$ die mit der Orientierung von ∂M kompatible Volumenform, so gilt

$$i_N dM(p) = d(\partial M)(p)$$

für alle $p \in \partial M$. Denn ist (b_1, \dots, b_{n-1}) eine positiv orientierte ON -Basis von $T_p\partial M$, so folgt

$$i_N dM(p)(b_1, \dots, b_{n-1}) = dM(p)(N(p), b_1, \dots, b_{n-1}) = 1,$$

denn $(N(p), b_1, \dots, b_{n-1})$ ist eine positiv orientierte ON -Basis von T_pM .

Es gilt nun der folgende wichtige Integralsatz.

Satz 4.5.13 (Gaußscher Satz). Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit mit orientiertem Rand ∂M . Sei $N : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^N$ das äußere Einheitsnormalenfeld. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ auf M :

$$\int_M \operatorname{div} F dM = \int_{\partial M} \langle F, N \rangle d(\partial M).$$

Beweis. Aus dem allgemeinen Integralsatz von Stokes und der Definition der Divergenz folgt:

$$\int_M \operatorname{div} F dM = \int_M d(i_F dM) = \int_{\partial M} i_F dM.$$

Betrachte die Zerlegung von F in Normal- und Tangentialanteil

$$F(p) = \langle F(p), N(p) \rangle N(p) + T(p)$$

mit $T(p) \in T_p \partial M$. Dann folgt aufgrund der Linearität von i :

$$i_F dM = i_{\langle F, N \rangle N} dM + i_T dM = \langle F, N \rangle i_N dM,$$

denn die $(n-1)$ -Form $i_T dM$ verschwindet auf ∂M , weil die Vektoren $T(p), v_1, \dots, v_{n-1} \in T_p \partial M$ linear abhängig sein müssen. Aus Definition 4.5.12 und anschließender Bemerkung folgt somit die Behauptung. \square

Bemerkung. Der Gaußsche Integralsatz erlaubt auch die folgende physikalische Interpretation der Divergenz eines Vektorfeldes. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte m -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von n -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N mit $M_m \subset M$ und Rand ∂M_m . Wir sagen, dass diese Folge gegen p konvergiert, falls zu jeder Umgebung $U \subset M$ von p ein m_0 existiert mit $M_m \subset U$ für alle $m \geq m_0$. Sei zum Beispiel $(r_m)_{m \in \mathbb{N}} > 0$ eine gegen 0 konvergente Folge, so definiert $M_m := M \cap K(p, r_m)$ eine solche Folge. Es folgt dann aus dem Gaußschen Integralsatz für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ auf M

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} M_m} \int_{M_m} \operatorname{div} F dM_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{vol} M_m} \int_{\partial M_m} \langle F, N \rangle d(\partial M_m).$$

Dabei wird der Quotient

$$\frac{1}{\operatorname{vol} M_m} \int_{\partial M_m} \langle F, N \rangle d(\partial M_m)$$

als der Fluss des Vektorfeldes F durch ∂M_m pro Volumeneinheit interpretiert.

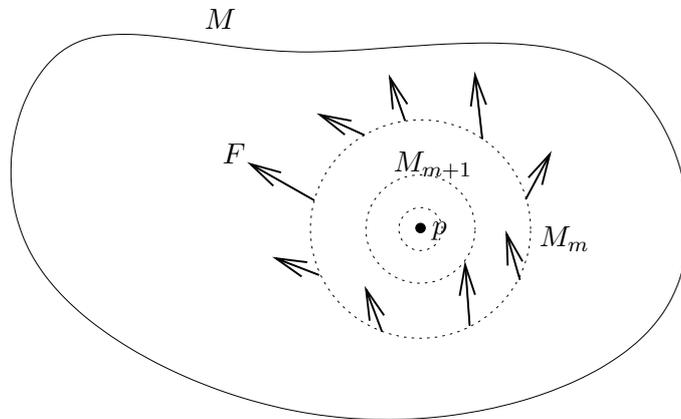


Abbildung 4.9: Anschauliche Bedeutung der Divergenz

Ist zum Beispiel F das Geschwindigkeitsfeld einer in M strömenden Flüssigkeit, so stellt der Quotient die pro Zeiteinheit und Volumeneinheit nach außen strömende Flüssigkeitsmenge dar. Daher heißt $\operatorname{div} F(p)$ auch die *Quellenstärke* des Vektorfeldes F im Punkte p . Das Vektorfeld F heißt *quellenfrei* oder *divergenzfrei*, falls $\operatorname{div} F(p) = 0$ für alle $p \in M$ gilt.

Aus dem Gaußschen Integralsatz lassen sich weitere wichtige Integralformeln ableiten. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte n -dimensionale Untermannigfaltigkeit ohne Rand und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei $df(p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ das Differential von f (siehe Definition ??), so ist der Gradient von f das durch

$$df(p)v = \langle \text{grad } f(p), v \rangle$$

definierte Vektorfeld $\text{grad } f$ auf M . Mit

$$\Delta := \text{div grad} : C^2(M) \rightarrow C^0(M)$$

bezeichnen wir den *Laplace-Beltrami Operator* auf M . Sei nun $A \subset M$ eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^N mit der Orientierung von M und orientiertem Rand ∂A . Ist N das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂A , so heißt für jedes $p \in \partial M$

$$\partial_N f := Df(p)N(p) = \langle \text{grad } f(p), N(p) \rangle$$

die *Normalenableitung* von f . Dann gelten die folgenden Greenschen Formeln.

Satz 4.5.14 (Greensche Formeln). *Es seien $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit, $A \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und $f, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger. Dann gelten folgende Formeln.*

1. *Greensche Formel 1. Art*

$$\int_A h(x)\Delta f(x) + \langle \text{grad } h(x), \text{grad } f(x) \rangle dA(x) = \int_{\partial A} h(x)\partial_N f(x)d(\partial A)(x)$$

2. *Greensche Formel 2. Art*

$$\int_A (h(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta h(x))dA(x) = \int_{\partial A} h(x)\partial_N f(x) - f(x)\partial_N h(x)d(\partial A)(x).$$

Beweis. Betrachte das Vektorfeld $F = h \text{ grad } f$. Dann folgt:

$$\text{div } F(x) = \langle \text{grad } h(x), \text{grad } f(x) \rangle + h(x)\Delta f(x).$$

Der Beweis dieser Identität kann durch Rechnung in lokalen Koordinaten geführt werden. Wenden wir den Integralsatz von Gauß auf das Vektorfeld F an, so erhalten wir die Greensche Formel 1. Art. Zum Beweis der Greenschen Formel 2. Art betrachte die beiden Greenschen Formeln 1. Art die durch Vertauschung von f und g entstehen. Die Subtraktion beider Gleichungen ergibt dann die Greensche Formel 2. Art. \square

Kapitel 5

Der Satz von Gauß-Bonnet

Wir kommen nun zu einem fundamentalen Satz der Flächentheorie, der eine verblüffende Beziehung zwischen geometrischen Größen (Gaußkrümmung, geodätische Krümmung) und einer topologischen Invarianten (Eulercharakteristik) beschreibt.

5.1 Zusammenhangsform und der lokale Satz von Gauß-Bonnet

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $U \subset M$ offen und $N : U \rightarrow S^2$ die Gaußabbildung. Definiere $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$ durch $J_p(v) = N(p) \times v$. Für alle $v \in T_p M$ die von null verschieden sind, definiert das Paar $(v, N(p) \times v)$ bezüglich der durch N vorgegebenen Orientierung eine positiv orientierte Basis, denn aus der Definition 1.7.5 des Kreuzproduktes folgt

$$\det(N(p), v, N(p) \times v) = \sum_{i=1}^3 \det(N(p), v, e_i)^2 > 0$$

falls e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des \mathbb{R}^3 ist. Sei nun $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld auf M mit $\|X(p)\| = 1$ für alle $p \in M$. Dann heißt

$$\omega_p(v) := \langle DX(p)v, JX(p) \rangle = \langle \nabla_v X(p), JX(p) \rangle$$

Zusammenhangsform bezüglich X .

Lemma 5.1.1. *Es gilt für alle $p \in M$ und $v \in T_p M$*

$$\begin{aligned}\nabla_v X(p) &= \omega_p(v) JX(p) \\ \nabla_v JX(p) &= -\omega_p(v) X(p)\end{aligned}$$

Beweis. Da $1 = \langle X(p), X(p) \rangle$ folgt $\langle \nabla_v X(p), X(p) \rangle = 0$ und somit

$$\nabla_v X(p) = \langle \nabla_v X(p), JX(p) \rangle JX(p) = \omega_p(v) JX(p)$$

Aus $\langle X(p), JX(p) \rangle = 0$ folgt durch Differentiation in Richtung $v \in T_p M$

$$\langle \nabla_v X(p), JX(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_v JX(p) \rangle = 0$$

Da $1 = \langle JX(p), JX(p) \rangle$ folgt ebenfalls $\langle \nabla_v JX(p), JX(p) \rangle = 0$ und somit

$$\nabla_v JX(p) = \langle \nabla_v JX(p), X(p) \rangle X(p) = -\omega_p(v) X(p).$$

□

Mittels der Abbildung J läßt sich die geodätische Krümmung von Kurven auf Flächen definieren. Sie ist die direkte Verallgemeinerung der Krümmung von ebenen Kurven.

Definition 5.1.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $c : I \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann heißt

$$\kappa_c(t) := \langle \ddot{c}(t), J\dot{c}(t) \rangle$$

die geodätische Krümmung von c .

Bemerkung. Es gilt: $\langle \frac{D}{dt}\dot{c}(t), J\dot{c}(t) \rangle = \langle \ddot{c}(t), J\dot{c}(t) \rangle$. Ist $c : I \rightarrow M$ nach der Bogenlänge parametrisiert, so folgt $\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = \kappa_c(t)J\dot{c}(t)$. Sie ist daher genau dann eine Geodätische, falls $\kappa_c(t) = 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Lemma 5.1.3. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und ω die Zusammenhangsform bezüglich eines Vektorfeldes $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf M mit $V \subset M$ offen. Sei $c : I \rightarrow V$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve und

$$\dot{c}(t) = \cos \theta(t)X(c(t)) + \sin \theta(t)JX(c(t))$$

für eine differenzierbare Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\kappa_c(t) = \dot{\theta}(t) + \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)).$$

Bemerkung. θ ist wie bei den ebenen Kurven bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\dot{c}(t) &= -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t)X(c(t)) + \cos \theta(t)\nabla_{\dot{c}(t)}X(c(t)) \\ &\quad + \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)JX(c(t)) + \sin \theta(t)\nabla_{\dot{c}(t)}JX(c(t)) \\ &= -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t)X(c(t)) + \cos \theta(t)\omega_{c(t)}(\dot{c}(t))JX(c(t)) \\ &\quad + \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)JX(c(t)) + \sin \theta(t)\omega_{c(t)}(\dot{c}(t))X(c(t)) \\ &= \dot{\theta}(t)(\cos \theta(t)JX(c(t)) - \sin \theta(t)X(c(t))) \\ &\quad + \omega_{c(t)}(\dot{c}(t))(\cos \theta(t)JX(c(t)) - \sin \theta(t)X(c(t))) \\ &= (\dot{\theta}(t) + \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)))J(\dot{c}(t)). \end{aligned}$$

Da andererseits $\frac{D}{dt}\dot{c}(t) = \kappa_c(t)J\dot{c}(t)$ gilt, folgt die Behauptung. \square

Satz 5.1.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $N : V \rightarrow S^2$ eine Gaußabbildung definiert auf einer offenen Menge $V \subset M$. Sei $dM_p(v_1, v_2) = \det(N(p), v_1, v_2)$ die Volumenform assoziiert zu N . Sei $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektorfeld auf M und ω die zugehörige Zusammenhangsform. Dann gilt

$$d\omega_p = -K(p)dM_p$$

für alle $p \in V$.

Beweis. Sei $\varphi : U \rightarrow M$ eine lokale orientierte Parametrisierung. Dann gilt:

$$\varphi^* dM(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)} dx_1 \wedge dx_2$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\varphi^* \omega(x) = f_1(x) dx_1 + f_2(x) dx_2$$

mit

$$f_i(x) = \varphi^* \omega(x)(e_i) = \omega(\varphi(x)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right) = \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)} X, JX \rangle$$

Es gilt

$$d\varphi^* \omega(x) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \right) dx_1 \wedge dx_2$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, JX \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, JX \rangle + \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} JX \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, JX \rangle - \omega(\varphi(x)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right) \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, X \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, JX \rangle - \omega(\varphi(x)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \right) \omega(\varphi(x)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right) \langle JX, X \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X, JX \rangle \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) &= \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} X - \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x)} \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x)} X, JX \rangle \\ &= \langle R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right) X, JX \rangle \end{aligned}$$

Schreibe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = a_i X + b_i JX$$

so gilt

$$a_i = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), X \right\rangle \quad \text{und} \quad b_i = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), JX \right\rangle.$$

Da der Krümmungstensor R schiefsymmetrisch in den beiden ersten Einträgen ist, folgt

$$\begin{aligned} R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \right) X &= R(a_1 X + b_1 JX, a_2 X + b_2 JX) X \\ &= a_1 b_2 R(X, JX) X + b_1 a_2 R(JX, X) X \\ &= (b_1 a_2 - a_1 b_2) R(JX, X) X. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite folgt mit

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g_{ij}(x)} &= \det \begin{pmatrix} \langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \rangle & \langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \rangle \\ \langle JX, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) \rangle & \langle JX, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) \rangle \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{aligned}$$

$$R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x)\right) X = -\sqrt{\det g_{ij}(x)} R(JX, X) X.$$

Auf Grund des Theorema egregiums folgt

$$\begin{aligned}\langle R(JX, X) X, JX \rangle &= \langle X, LX \rangle \langle L(JX), JX \rangle - \langle X, L(JX) \rangle \langle LX, JX \rangle \\ &= \det L = K(p),\end{aligned}$$

denn

$$\begin{pmatrix} \langle X, LX \rangle & \langle X, L(JX) \rangle \\ \langle JX, LX \rangle & \langle JX, L(JX) \rangle \end{pmatrix}$$

ist die Matrixdarstellung der Weingartenabbildung L bezüglich der ON -Basis (X, JX) . \square

Definition 5.1.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $N : M \rightarrow S^2$ die zur Orientierung gehörende Gaußabbildung. Seien $v, w \in T_p M$ von Null verschiedene Vektoren und $v_0 = \frac{v}{\|v\|}$ und $w_0 = \frac{w}{\|w\|}$ die zugeordneten Einheitsvektoren. Dann heißt die eindeutig bestimmte Zahl $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit

$$w_0 = \cos \theta v_0 + \sin \theta J(v_0),$$

der orientierte Winkel zwischen v und w : Dabei ist $J(v_0) = N(p) \times v_0$.

Definition 5.1.6. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, so heißt $c : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise differenzierbare, reguläre geschlossene Kurve, falls $c(a) = c(b)$ und eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

existiert, so dass die Einschränkungen $c_i := c_{[t_i, t_{i+1}]}$ stetig differenzierbare reguläre Kurven sind (c_i differenzierbar bedeutet, dass c_i eine differenzierbare Fortsetzung auf ein offenes Intervall besitzt).

Die Kurve $T : [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$T(t) = \begin{cases} \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} & \text{für } t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_n\} \\ \lim_{t \searrow t_i} \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} & \text{für } t = t_i \text{ und } 0 \leq i \leq n-1 \\ T(b) = \lim_{t \searrow t_0} \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = T(a) & \end{cases}$$

heißt Tangentenkurve von c . Die Punkte $c(t_i)$ heißen Ecken von c . Die Ecke $c(t_i)$ heißt nicht trivial, falls die Tangentenkurve in t_i unstetig ist. Die Ecke $c(t_i)$ heißt nicht entartet, falls $T(t_i^+) = \lim_{t \nearrow t_i} T(t) \neq -T(t_i^-)$ gilt.

Wir betrachten im Folgenden nur solche geschlossenen Kurven für die alle Ecken $c(t_i)$ nicht entartet sind. Für solche Kurven wollen wir in Analogie zu den ebenen Kurven (siehe Definition 1.6.7) eine Tangentendrehzahl definieren. Dazu benötigen wir ein Referenzfeld X und eine Orientierung bezüglich derer wir die Rotation der Tangentenkurve messen können. Für die Definition benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 5.1.7. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, $V \subset M$ offen $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein normiertes Vektorfeld auf M . Sei $c : [a, b] \rightarrow V$ eine stückweise differenzierbare, reguläre geschlossene Kurve mit zugeordneter Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Dann existiert eine Funktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(t) = \cos(\theta(t))X(c(t)) + \sin(\theta(t))JX(c(t))$$

die auf $[a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_n\}$ stetig ist und in t_1, \dots, t_n die Eigenschaft

$$\theta(t_i) = \lim_{t \nearrow t_i} \theta(t) + \epsilon_i$$

besitzt, wobei ϵ_i der orientierte Winkel zwischen $T(t_i^+) = \lim_{t \nearrow t_i} T(t)$ und $T(t_i)$ bezeichnet. Die Funktion θ heißt Polarwinkelfunktion und ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π definiert. Wegen $T(b) = T(a)$ ist

$$T(c) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

und hängt nur von der Wahl der Orientierung und des Vektorfeldes X ab. $T(c)$ heißt Tangendrehzahl von c bezüglich X und der Orientierung von M .

Es gilt die folgende Verallgemeinerung des Umlaufsatzes von H. Hopf.

Satz 5.1.8. Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, $U \subset \mathbb{R}^2$ ein offene Menge und $\varphi : U \rightarrow M$ eine positiv orientierte Parametrisierung. Sei $c : [a, b] \rightarrow \varphi(U)$ eine einfach differenzierbar geschlossene, stückweise differenzierbare, reguläre Kurve, so gilt $T(c) = \pm 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst: es genügt anzunehmen, dass $c : [a, b] \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve ist, d.h. das c keine Ecken besitzt. Dazu betrachte eine einfach geschlossene Kurve $\tilde{c} : [a, b] \rightarrow M$, die aus c durch Abrunden der Ecken entsteht (siehe Zeichnung). Dabei seien $\tilde{\theta}$ bzw. von \tilde{c} die Polarwinkelfunktionen von c bezüglich des normierten Vektorfeldes $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$X(p) := \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(p))}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(p))\|}$$

Dann gilt:

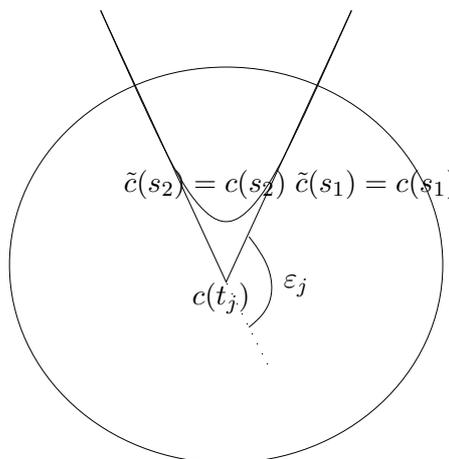


Abbildung 5.1: δ -Ball um $c(t_j)$

$$\tilde{\theta}(s_2) - \tilde{\theta}(s_1) = \theta(s_2) - \theta(s_1) + 2k\pi \quad (5.1)$$

Ist δ klein genug, so folgt:

$$|\theta(s_2) - \theta(s_1) - \epsilon_j| < \epsilon \quad (5.2)$$

$$|\tilde{\theta}(s_2) - \tilde{\theta}(s_1) - \epsilon_j| < \epsilon \quad (5.3)$$

Falls $\epsilon > 0$ klein genug gewählt, folgt aus (5.1), (5.2) und (5.3):

$$\tilde{\theta}(s_2) - \tilde{\theta}(s_1) = \theta(s_2) - \theta(s_1).$$

Dies impliziert $T(c) = T(\tilde{c})$ und somit reicht es aus, die Behauptung für glatte Kurven zu zeigen.

Nehme an, dass c glatt ist und betrachte $\gamma = \varphi^{-1} \circ c : [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$. Diese ist eine positiv orientierte, einfach geschlossene Kurve in der Euklidischen Ebene. Die Idee ist nun auf γ den Hopfschen Umlaufsatz anzuwenden. Dies ist leider nicht direkt möglich, da θ über das Skalarprodukt der Fläche, also die g_{ij} 's, und nicht bezüglich der Euklidischen Metrik definiert ist.

Genauer geht man wie folgt vor: die Skalarprodukte $g_x : T_x\mathbb{R}^2 \times T_x\mathbb{R}^2$ sind für jedes $x \in U$ so definiert, dass das Differential

$$D\varphi(x) : (T_x\mathbb{R}^2, g_x) \rightarrow (T_{\varphi(x)}M, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3})$$

für jedes $x \in U$ eine Isometrie ist. Insbesondere folgt $g_x(e_i, e_j) = g_{ij}(x)$. Betrachte nun für $s \in [0, 1]$ und $x \in U$ die Metrik

$$g_x^s = (1 - s)g_x + s\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Insbesondere sind $g_x^0 = g_x$, $g_x^1 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ und somit definiert $s \mapsto g_x^s$ eine stetige Deformation der Flächenmetrik in die euklidische Metrik. Sei

$$E(x) = D\varphi(x)^{-1}X(\varphi(x))$$

so ist $E(x) = \frac{e_1}{\sqrt{g_x(e_1, e_1)}}$. Ist

$$E^\perp(x) = D\varphi(x)^{-1}JX(\varphi(x))$$

so bilden $E(x), E^\perp(x) \in T_x\mathbb{R}^2$ eine *ON*-Basis bezüglich g_x . Diese ist in $T_x\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$ positiv orientiert, denn φ ist positiv orientiert. Betrachte nun die stetige Deformation $E_s(x), E_s^\perp(x)$ dieser *ON* Basis, die durch die Eigenschaften

$$E_s(x) = \frac{e_1}{\sqrt{g_x^s(e_1, e_1)}}, \quad g_x^s(E_s^\perp(x), E_s^\perp(x)) = 1, \quad g_x^s(E_s^\perp(x), E_s(x)) = 0$$

eindeutig bestimmt wird. Insbesondere bilden für jedes $s \in [0, 1]$ die Vektoren $E_s(x), E_s^\perp(x)$ eine positiv orientierte *ON*-Basis bezüglich g_x^s und es ist $E_1(x) = e_1$ sowie $E_1^\perp(x) = e_2$. Ist nun $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polarwinkelfunktion der Tangentenkurve von $T_c(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$ bezüglich X, JX , so gilt

$$T_c(t) = \cos \theta(t)X(c(t)) + \sin \theta(t)JX(c(t))$$

und somit

$$T_\gamma(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|_0} = D\varphi(\gamma(t))^{-1}(T_c(t)) = \cos \theta(t)E(\gamma(t)) + \sin \theta(t)E^\perp(\gamma(t)).$$

Also definiert θ auch eine Polarwinkelfunktion von γ bezüglich der g^0 -ON-Basis Vektorfelder E, E^\perp . Sei nun $\theta_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polarwinkelfunktion von γ bezüglich der g^s -ON-Basis Vektorfelder E_s, E_s^\perp , d.h.

$$T_\gamma(t) = \cos \theta_s(t) E_s(\gamma(t)) + \sin \theta_s(t) E_s^\perp(\gamma(t)).$$

Nun sind für alle $t \in [a, b]$ die Funktionen $s \rightarrow \theta_s(t)$ stetig. Insbesondere ist $s \rightarrow \theta_s(b) - \theta_s(a)$ stetig und $\theta_s(b) - \theta_s(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Also ist $\theta_s(b) - \theta_s(a)$ konstant und daher

$$\frac{\theta_0(b) - \theta_0(a)}{2\pi} = \frac{\theta_1(b) - \theta_1(a)}{2\pi} = \pm 1$$

denn die euklidische Tangendrehzahl von γ ist nach Hopf $= \pm 1$. \square

Definition 5.1.9. Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit oder ohne Rand ∂M und $\varphi : U \rightarrow M$ eine positiv orientierte lokale Parametrisierung. Sei $D \subset U$, so dass D homöomorph zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe ist, dessen Rand ∂D Bild einer stückweise differenzierbaren, reguläre einfach geschlossenen Kurve γ ist, deren Ecken nicht entartet sind. Dann heißt $\Omega = \varphi(D)$ Polygon und $\partial\Omega$ ist Bild der Kurve $c = \varphi \circ \gamma$. Ist γ positiv orientiert so auch $c = \varphi \circ \gamma$ und die orientierten Winkel in den Ecken von c heißen äußere Winkel.

Bemerkung. c ist genau dann positiv orientiert falls für alle $t \in [a, b]$ das Paar $N_a(t), \dot{c}(t)$ eine orientierte Basis von M ist, wobei $N_a \in T_{c(t)}M$ das nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor $N_a \in T_{c(t)}M$ längs c bezeichnet. Nach Definition der Orientierung von $\partial\Omega$ stimmt dann der Durchlaufsinne von c mit der induzierten Randorientierung überein. Die Tangendrehzahl von c ist 1.

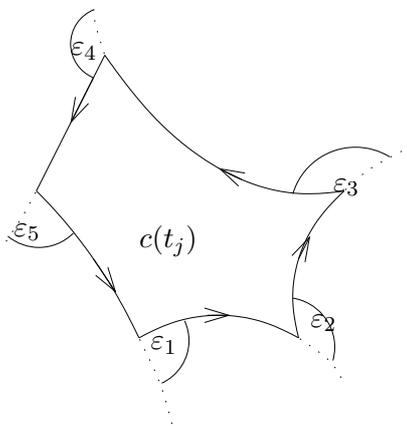


Abbildung 5.2: Polygon mit Außenwinkeln ε_j .

Satz 5.1.10. (Gauß-Bonnet-Formel):

Die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ berande ein Polygon Ω im mathematisch positiven Sinne. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} K dM + \int_a^b \kappa_c(t) dt + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi,$$

wobei $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ die Außenwinkel des Polygons Ω sind, κ_c die geodätische Krümmung von c bezüglich der in M gegebenen Orientierung, und dM das kanonische Flächenelement von M bezeichnet.

Beweis. Sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ einer Unterteilung gemäß der Ecken von c und $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polarwinkelfunktion. Dann gilt wegen obiger Bemerkung und Lemma 5.1.3

$$\begin{aligned} 2\pi &= \theta(b) - \theta(a) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \dot{\theta}(t) dt \right) + \epsilon_j \\ &= \int_a^b \kappa_c(t) dt - \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \\ &= - \int_c \omega + \int_a^b \kappa_c(t) dt + \sum_{j=1}^n \epsilon_j. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt wegen Satz 5.1.4

$$d\omega = -KdM$$

und daher mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\int_c \omega = \int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = - \int_{\Omega} KdM.$$

(Streng genommen müssen wir für die Anwendung des Satzes von Stokes voraussetzen, dass der Rand glatt ist. Jedoch gilt der Satz auch noch falls der Rand nur endlich viele Ecken besitzt.)

Dies impliziert nun die Gauß-Bonnet-Formel. \square

Als nächstes wollen wir die Winkelsumme in Dreiecken diskutieren.

Definition 5.1.11. Sei M eine orientierte Fläche. Ein 3-Eck $\Delta \subset M$ ist ein Polygon mit genau 3 Ecken. Bestehen die Randkurven aus geodätischen Segmenten, so spricht man von einem geodätischen Dreieck. Sind ϵ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ so heißen $\alpha_i = \pi - \epsilon_i$ Innenwinkel des Dreieckes.

Korollar 5.1.12. (Winkelsumme in Dreiecken):

Sei $\Delta \subset M$ ein Dreieck in einer orientierten Fläche M . Die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [a, b] \rightarrow M$ berande ein Polygon Ω im mathematisch positiven Sinne. Dann gilt:

$$\int_{\Delta} KdM + \int_a^b \kappa_c(t) dt = \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi.$$

Ist insbesondere das Dreieck geodätisch, so gilt

$$\int_{\Delta} KdM = \sum_{i=1}^3 \alpha_i - \pi.$$

Bemerkung. Ist also die Krümmung K positiv so folgt $\sum_{i=1}^3 \alpha_i \geq \pi$ und ist K negativ so gilt $\sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq \pi$. Besonders einfach lässt sich dies im Falle der Sphäre illustrieren.

Beweis. Aus der Gauß-Bonnet-Formel folgt:

$$\int_{\Delta} K dM + \int_a^b \kappa_c(t) dt = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i = 2\pi - \sum_{i=1}^3 \pi - \alpha_i = 2\pi - 3\pi + \sum_{i=1}^3 \alpha_i.$$

□

5.2 Der globale Satz von Gauß-Bonnet

Unser nächstes Ziel ist es, aus Satz 5.1.10 eine globale Version des Satzes von Gauß-Bonnet herzuleiten. Eine wichtige Rolle spielt hierbei der Begriff der Eulercharakteristik.

Definition 5.2.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit glattem Rand ∂M wobei auch $\partial M = \emptyset$ erlaubt ist. Eine endliche Menge $\mathcal{P} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N\}$ von Polygonen heißt *Pflasterung von M* , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $M = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$

(b) Für alle $i \neq j : \Omega_i \cap \Omega_j$ ist entweder leer oder eine einzelne Ecke oder eine gemeinsame Seite der Polygone Ω_i, Ω_j .

Eine Pflasterung \mathcal{P} von M heißt *Triangulierung*, falls alle Polygone Dreiecke sind. Sei e, k, f die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen einer Pflasterung \mathcal{P} . Dann nennt man

$$\chi(M, \mathcal{P}) = e - k + f$$

die Eulercharakteristik von M (bezüglich der Pflasterung \mathcal{P}).

Beispiel. Eine Triangulierung der Sphäre S^2 :

Satz 5.2.2. (Satz von Gauß-Bonnet):

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit Rand ∂M , der sich aus einfach geschlossenen Kurven c_1, \dots, c_n zusammensetzt. Die c_i werden alle im mathematisch positiven Sinne durchlaufen. Dann gilt für jede Pflasterung \mathcal{P} von M :

$$\int_M K dM + \sum_{i=1}^n \int_{c_i} \kappa_{c_i} ds = 2\pi \chi(M, \mathcal{P}).$$

Beweis. Sei $\mathcal{P} = \{\Omega_1, \dots, \Omega_f\}$. Seien $\{\epsilon_{1k}, \dots, \epsilon_{\ell(k),k}\}$ die $\ell(k)$ Außenwinkel von Ω_k . Aus Satz 5.1.10 folgt

$$2\pi = \int_{\Omega_k} K dM + \int \kappa_{b_k}(t) dt + \sum_{i=1}^{\ell(k)} \epsilon_{ik}$$

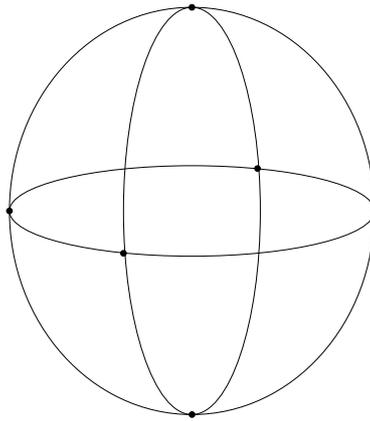


Abbildung 5.3: $e - k + f = 8 - 14 + 8 = 2 = \chi(S^2, \mathcal{P})$.

wobei b_k die positiv orientierte und nach Bogenlänge parametrisiert Randkurve von Ω_k bezeichnet. Durch Aufsummieren erhalten wir:

$$2\pi f = \int_M K dM + \sum_{k=1}^f \int \kappa_{b_k}(t) dt + \sum_{k=1}^f \sum_{i=1}^{\ell(k)} \epsilon_{ik}.$$

Jede Innenkante der Pflasterung ist gemeinsame Kante von 2 Polygonen. Die Kanten werden jeweils mit unterschiedlicher Orientierung durchlaufen. Daher heben sich die Beiträge der geodätischen Krümmung der orientierten inneren Kanten weg und es folgt

$$2\pi f = \int_M K dM + \sum_{i=1}^n \int \kappa_{c_i}(t) dt + \sum_{k=1}^f \sum_{i=1}^{\ell(k)} (\pi - \alpha_{ik})$$

wobei α_{ik} die Innenwinkel von Ω_k bezeichnen.

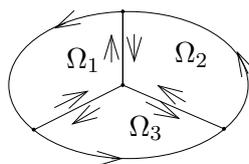


Abbildung 5.4:

Seien \mathcal{E}_I bzw. \mathcal{E}_A die Innenecken bzw. Außenecken der Pflasterung: Bezeichne für eine Ecke $v \in \Omega \in \mathcal{P}$ mit $\alpha_v(\Omega)$ den Innenwinkel von Ω zur Ecke v . Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^f \sum_{i=1}^{\ell(k)} (\pi - \alpha_{ik}) = \sum_{v \in \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_R} \sum_{\{\Omega \in \mathcal{P} | v \in \Omega\}} \pi - \alpha_v(\Omega)$$

Bezeichne für eine Ecke v mit

$$N_v = \text{Anzahl der Kanten, die sich in } v \text{ treffen}$$

so gilt für $v \in \mathcal{E}_I$

$$N_v = \text{Anzahl der Polygone } \Omega \in \mathcal{P} \text{ die die Ecke } v \text{ enthalten,}$$

und für $v \in \mathcal{E}_R$

$$N_v - 1 = \text{Anzahl der Polygone } \Omega \in \mathcal{P} \text{ die die Ecke } v \text{ enthalten.}$$

Da die Summe der Winkel für jeden inneren Eckpunkt 2π beträgt, folgt

$$\sum_{\{\Omega \in \mathcal{P} | v \in \Omega\}} \pi - \alpha_v(\Omega) = N_v \pi - 2\pi.$$

für alle $v \in \mathcal{E}_I$. Da für $v \in \mathcal{E}_R$ die Summe der Winkel π beträgt, erhalten wir

$$\sum_{\{\Omega \in \mathcal{P} | v \in \Omega\}} \pi - \alpha_v(\Omega) = (N_v - 1) \cdot \pi - \pi = N_v \cdot \pi - 2\pi$$

für alle $v \in \mathcal{E}_R$. Also folgt

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_R} \sum_{\{\Omega \in \mathcal{P} | v \in \Omega\}} \pi - \alpha_v(\Omega) &= \sum_{v \in \mathcal{E}_I \cup \mathcal{E}_R} (N_v \cdot \pi - 2\pi) \\ &= 2\pi k - 2\pi e, \end{aligned}$$

denn jede Kante besitzt 2 Ecken. Damit ergibt sich endgültig:

$$2\pi f - 2\pi k + 2\pi e = 2\pi \chi(M, \mathcal{P}) = \int_M K dM + \sum_{i=1}^n \int_{c_i} \kappa_{c_i} ds.$$

□

Bemerkung. Daraus folgt, dass die Eulercharakteristik einer orientierten Fläche nicht von der Wahl der Pflasterung abhängt. Wir definieren daher

$$\chi(M) := \chi(M, \mathcal{P}).$$

Es sei schließlich noch erwähnt, daß jede kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand eine Triangulierung zuläßt.

Beispiel. M_g sei eine kompakte Fläche ohne Rand mit g Löchern. Wir wissen, dass die

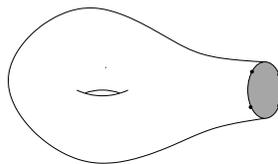
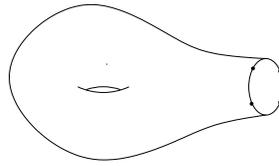


Abbildung 5.5: M_1 ist der Torus mit $\chi_{M_1} = 0$

Abbildung 5.6: M'_1 ist der Torus ohne Deckel

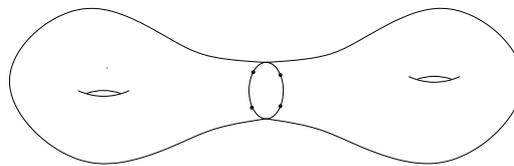
Eulercharakteristik des Torus $M_1 = T^2$ verschwindet. Betrachte die obige Darstellung des Torus M_1 . Wir wollen daraus die Eulercharakteristik der Brezelfläche M_2 bestimmen. Seien f, k, e die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken einer Pflasterung von M_1 , bestehend aus Vierecken. Wir entfernen den Deckel, welches ein Polygon in M_1 darstellt. Dann gilt für die Anzahl der Flächen f' , Kanten k' und Ecken e' von M'_1 :

$$f' = f - 1, k' = k \text{ und } e' = e.$$

Damit erhalten wir für die Eulercharakteristik von M'_1 :

$$\chi_{M'_1} = f' - k' + e' = f - k + e - 1 = -1$$

Nun kleben wir zwei Kopien M'_1 an den Kanten des Vierecks zusammen und erhalten für die Anzahl der Flächen f'' , Kanten k'' und Ecken e'' : $f'' = 2f'$, $k'' = 2k' - 4 = 2k - 4$ und

Abbildung 5.7: M_2 entsteht aus dem Zusammenkleben zweier Kopien von M'_1

$e'' = 2e' - 4 = 2e - 4$. Damit ergibt sich

$$\chi_{M_2} = 2f' - (2k - 4) + (2e - 4) = 2(f' - k' + e') = -2.$$

Index

- Abbildungsgrad, 21
- abgeschlossen, 46
- Ableitung, 57
- Abstand, 5
- Atlas, 59

- Basisvektorfelder, 72

- Christoffelsymbole, 76
- Codazzigleichung, 78
- Cornusche Spirale, 18

- Diffeomorphismus, 20
- Differentialgleichung, 12
 - autonome, 12
- differenzierbar, 52
- Distanz, 5
- Drehung, 6

- Einheitsnormalenfeld, 58
- Ellipse, 16
- Exponentialfunktion, 19

- folgenstetig, 47
- Frenet n -Bein, 31
- Frenetraumen, 31
- Fundamentalform
 - erste \sim , 45, 60
 - zweite \sim , 60

- Gauß-Kronecker-Krümmung, 62
- Gaußabbildung, 58
- Gaußgleichung, 78
- Gaußsche Krümmung, 62
- Geodätische, 71
- Geschwindigkeit, 72
- Geschwindigkeit der Kurve, 9
- Gram-Schmidt, 32
- Gramsche Determinante, 45
- Graph, 44
- Großkreis der Sphäre, 71

- Hauptkrümmungen, 62
- Hauptkrümmungsrichtungen, 62
- Hauptsatz der ebenen Kurventheorie, 17
- Heine-Borel, 65
- Helix, 39
- Homöomorphismus, 47
- homotop, 23
- Homotopie, 23
- hyperbolische Ebene, 70
- Hyperflächen, 58
 - orientierbare, 59

- Immersion, 43
- innerer Punkt, 46
- Invarianz, 37
- Isometrie, 5, 69
 - orientierungserhaltende, 6
 - orientierungsumkehrende, 6
- Isometriegruppe, 6

- Karte, 47
- kongruent, 5
- kovariante Ableitung, 72
- Krümmung, 10
- Krümmungen, 36
- Krümmungstensor, 79
- Kreis, 16
- Kreuzprodukt, 34
- Kurve, 7
 - ebene, 14, 37
 - einfach geschlossene, 26
 - geschlossene, 23
 - kürzeste, 83
 - nach der Bogenlänge parametrisierte, 9
 - reguläre, 9

- Länge, 5
- Länge der Kurve, 8
- Lieklammer, 74
- Lift, 20

- Linksdrehung, 15
- Lipschitzbedingung, 12
- Logarithmus, 20
- lokale Parametrisierung, 47
- lokaler Riemannscher Raum, 70

- Möbiusband, 59
- Mannigfaltigkeit, 45
- Matrixdarstellung, 15
- Metrik, 46
- metrischer Raum, 5
- Meusnier, 61
- mittlere Krümmung, 62

- Nabelpunkt, 63
- Neillsche Parabel, 9
- Newtonsche Gesetz, 71
- Norm, 5
- Normalenfeld, 58
- Normalkrümmung, 61
- Normalraum, 55

- offene Mengen, 46
- orthogonale Gruppe, 6
- orthogonale Projektion, 32
- Orthonormalisierungsverfahren, 32

- Parametertransformation, 7, 45
 - orientierungserhaltende, 7
 - orientierungstreue, 45
 - orientierungsumkehrende, 7
- Picard-Lindelöf, 12
- Polarisationsformel, 70
- Polarwinkelfunktion, 20

- Raumkurve, 36
- regulärer Wert, 53
- rektifizierbar, 8
- Relativtopologie, 46
- Reparametrisierung, 45
- Rotationsfläche, 43

- schiefsymmetrisch, 35
- Schraubenlinie, 30
- Sphäre, 48
- Spiegelung, 6
- Standardbasis, 15
- Stereographische Projektion, 49

- stetig, 47

- Tangentendrehzahl, 19, 24
- Tangentenfeld, 72
- Tangentialraum, 43, 54
- Tangentialvektoren, 54
- Tensoren, 79
- Theorema Egregium, 80
- Theorema egregium, 78
- Topologie, 46
- topologischer Raum, 46
- Torsion, 36
- Totalkrümmung, 24

- Umlaufzahl, 19, 23
- Untermannigfaltigkeit, 47

- Variation, 81
 - eigentliche, 81
- Variationsvektorfeld, 81
- Vektorfeld, 72
- Volumen, 45

- Weingartenabbildung, 60
- Windungszahl, 21
 - Invarianz der \sim , 23