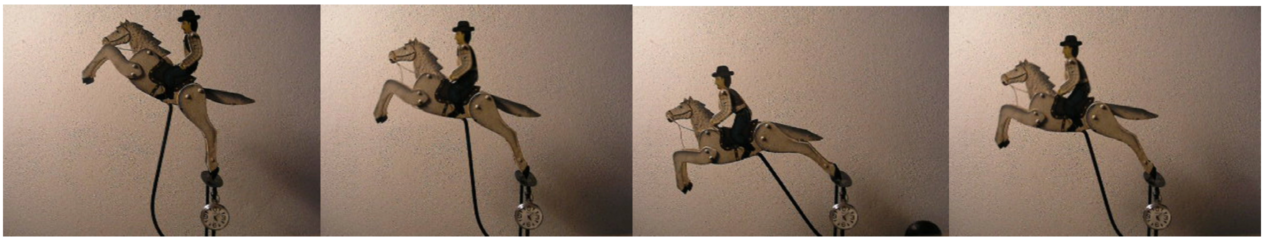
La freccia del tempo

di Alberto Abbondandolo



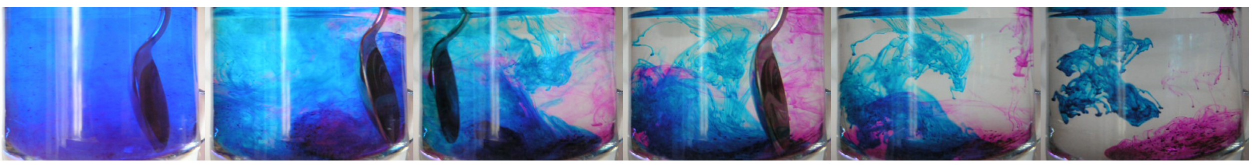
Navigando per il sito di *XlaTangente* ci si può imbattere in due video curiosi. Il primo (in alto quattro fotogrammi) mostra un pendolo piuttosto particolare: ha la forma di un cavaliere, con vari snodi in corrispondenza delle articolazioni dell'uomo e del cavallo. Il pendolo non è appeso, ma oscilla in equilibrio sulla punta degli zoccoli posteriori del cavallo, poggiati su una piattaforma. Un contrappeso bilancia perfettamente il peso di cavallo e cavaliere permettendo oscillazioni piuttosto ampie che producono un bell'effetto di cavaliere al galoppo.

Nel secondo video (in basso sei fotogrammi) vediamo un liquido violaceo, abbastanza uniforme. Il liquido viene mescolato lentamente da un cucchiaio, ma l'effetto è piuttosto strano: man mano che il cucchiaio mescola si creano zone più blu, zone più rosse e zone quasi trasparenti. Sembra che il blu e il rosso vogliano separarsi ed il processo continua anche dopo che il cucchiaio viene tolto: alla fine vediamo una massa rossa e una massa blu completamente separate, in sospensione in un liquido trasparente. Che razza di mistura potrà mai avere un tale comportamento?

Una didascalia ci informa che i due video hanno una cosa in comune. Un click del mouse e il mistero è svelato: entrambi i video sono in *reverse*, ossia sono stati rimontati al contrario. Vedendo il secondo video forse l'avevamo sospettato: la strana mistura altro non è che comunissima acqua in cui vengono fatte cadere due gocce di inchiostro blu e rosso, successivamente mescolate dal cucchiaio. Che anche il primo video avesse subito la stessa inversione era invece impossibile accorgersi, se non guardando attentamente cosa accade alle lancette di un orologio, che forse non avevamo nemmeno notato, posto poco sotto gli zoccoli posteriori del cavallo.

Ma il sito di *XlaTangente* non è l'unico ad ospitare curiosità di questo tipo. Fino a qualche mese fa su *YouTube* si poteva vedere un video - adesso rimosso dal sito web - in cui il regista e sceneggiatore Michel Gondry ricomponeva un cubo di Rubik con i piedi, senza nemmeno prestarvi troppa attenzione. Un altro utente di *Youtube* si è accorto del trucco e ce lo spiega in un video ancora disponibile all'indirizzo http://www.youtube.com/watch?v=orkdoCw6w6w: Michel Gondry è partito da un cubo di Rubik già composto, si è fatto riprendere mentre lo scomponeva con i piedi, infine ha rimontato il video in reverse. Il regista ha cercato di camuffare l'inversione inserendo sullo sfondo una persona che cammina all'indietro - quindi in avanti nel video invertito - ma il suo modo innaturale di camminare rivela il trucco.

Se sullo schermo invertire la freccia del tempo è cosa facile, sulla pagina scritta non è comunque impossibile: nel romanzo intitolato non a caso *The time arrow* Martin Amis mantiene que-



sta inversione dall'inizio alla fine della narrazione. Ecco come il protagonista racconta l'esperienza di un pasto in reverse:

Eating is unattractive too. [...] You select a soiled dish, collect some scraps from the garbage, and settle down for a short wait. Various items get gulped up into my mouth, and after a skilful massage with tongue and teeth I transfer them to the plate for additional sculpture with knife and fork and spoon. That bit's quite therapeutic at least, unless you're having soup or something, which can be a real sentence. Next you face the laborious business of cooling, of reassembly, of storage, before the return of these foodstuffs to the Superette, where, admittedly, I am promptly and generously reimbursed for my pains. Then you tool down the aisles with trolley or basket, returning each can or packet to its rightful place[1].

Ma torniamo ai due video del sito di XlaTangente. Abbiamo scoperto che i due video sono montati al contrario. Dunque è tutto chiarito? Beh, non proprio: resta il fatto che le leggi della meccanica, che regolano sia il moto del nostro cavaliere sia quello delle particelle di inchiostro nell'acqua, sono *perfettamente reversibili.* Questo significa che quel che vediamo nei due video in reverse non viola alcuna legge della fisica. Perché allora non vediamo mai una soluzione di acqua e inchiostro comportarsi come quella del secondo video? Anzi, come mai quasi tutti i fenomeni che ci circondano, da un piatto che cade e si rompe alla stessa vita degli esseri umani, mostrano un comportamento irreversibile? E cosa differenzia quei sistemi che, come il cavaliere o il sistema solare, sembrano interpretare alla lettera la reversibilità delle leggi fisiche?

Negli ultimi trent'anni del diciannovesimo secolo James Maxwell, William Thomson, e soprattutto il fisico austriaco Ludwig Boltzmann hanno risposto a queste domande.

Le leggi della meccanica sono reversibili

Conosciamo tutti l'equazione fondamentale della meccanica, la famosa equazione di Newton

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}.$$

L'equazione di Newton ci dice che l'accelerazione[2] ***a*** di un corpo - che pensiamo come un punto materiale privo di dimensioni - è pari alla risultante ***F*** delle forze che agiscono su di esso divisa per sua la massa *m*. Il fatto che in questa equazione compaia l'accelerazione ma non la velocità implica che l'equazione di Newton sia *reversibile*.

Immaginiamo ad esempio un Eurostar Roma-Milano che, superata da poco Firenze, acceleri su un rettilineo. In che direzione puntano la sua velocità e la sua accelerazione? Entrambe verso nord, ovviamente. Immaginiamo ora di filmare questo tratto di corsa del treno e di rivedere il video montato al contrario. In che direzione puntano adesso velocità ed accelerazione? Allo spettatore sembrerà che il treno proceda in direzione nord-sud e che sia frenando. Quindi la velocità adesso punta verso sud, mentre *l'accelerazione continua a puntare verso nord* (una frenata corrisponde ad un'accelerazione in direzione contraria al senso di marcia). La conclusione è che *invertendo la freccia del tempo l'accelerazione non cambia*[3]. Dato che né la forza che agisce su un corpo né tantomeno la sua massa cambiano invertendo la freccia del tempo, concludiamo che *l'equazione di Newton è invariante per inversione temporale*.

Per comprendere meglio cosa comporti questo tipo di invarianza abbiamo bisogno di capire come l'equazione di Newton determini il moto di un corpo. L'accelerazione ***a(t)*** all'istante *t* misura quanto rapidamente stia variando la velocità ***v(t)***, la quale a sua volta misura quanto rapidamente stia variando la posizione ***q(t)***. La forza ***F*** che agisce sul corpo dipende in generale dalla sua posizione: la forza di gravità esercitata dal nostro pianeta dipende dalla distanza dal centro della terra, la forza di richiamo di una molla dipende dl suo allungamento, la forza che attrae o respinge due cariche elettriche dipende dalla loro mutua distanza[4]. Ricapitolando: l'equazione di Newton ci dice che l'accelerazione è proporzionale alla forza, che dipende dalla posizione, la cui variazione a sua volta determina l'accele-

1 Martin Amis, *The time arrow*, Penguin 1991.

2 L'accelerazione e la forza sono grandezze vettoriali, in quanto servono tre componenti spaziali per determinarle. Adottiamo la convenzione di indicare in **grassetto** le grandezze vettoriali.

3 Il lettore che abbia dimestichezza con il moto circolare può provare ad eseguire lo stesso esperimento mentale con un treno che si muova in curva con velocità costante.

4 Vi sono anche forze, come quelle magnetiche, che dipendono dalla velocità del corpo su cui agiscono. In presenza di tali forze la reversibilità dell'equazione di Newton è da intendersi in un senso diverso da quello che discutiamo qui.

razione. Sembra il classico gatto che si morde la coda. Relazioni di questo tipo si dicono *equazioni differenziali*. Fortunatamente *tout se tient*: un importante teorema ci assicura che, fissate arbitrariamente *posizione* e *velocità iniziale* $\boldsymbol{q}(0)$ e $\boldsymbol{v}(0)$, esiste ed è unica una traiettoria $\boldsymbol{q}(t)$ che risolve l'equazione differenziale per tutti i tempi - passati e futuri - e rispetta le condizioni iniziali[5].

Se i corpi sono molti il numero delle equazioni aumenta ma la loro forma resta invariata: in presenza di N corpi abbiamo bisogno di $n=3N$ numeri, che indichiamo con $q_1, q_2, ..., q_n$, per determinare le posizioni, e di altrettanti numeri, indicati con $v_1, v_2, ..., v_n$, per determinare le velocità. Il numero n si dice numero dei *gradi di* libertà del sistema. L'evoluzione di quest'ultimo è determinata univocamente da un sistema di n equazioni differenziali e da n posizioni e n velocità iniziali.

Rientrano in questo formalismo tanto il pendolo a forma di cavaliere (anche se qui non si tratta di punti materiali, questo è un sistema con sei gradi di libertà e la forza è quella gravitazionale), quanto la soluzione di acqua e inchiostro (qui i gradi di libertà sono tantissimi, tre per ogni molecola d'acqua o di inchiostro, se le consideriamo puntiformi, ancora di più se teniamo anche conto della struttura tridimensionale delle molecole, in ogni caso un numero dell'ordine di 10^{24}, un 1 seguito da 24 zeri).

La reversibilità delle equazioni di Newton può quindi essere letta nel modo seguente: se le n funzioni $q_1(t), q_2(t), ..., q_n(t)$ rappresentano una possibile evoluzione di un certo sistema fisico, ossia costituiscono una soluzione del corrispondente sistema di equazioni differenziali, allora l'evoluzione in reverse, descritta dalle n funzioni $q_1(-t), q_2(-t), ..., q_n(-t)$, è ancora un'evoluzione possibile, in quanto risolve il medesimo sistema di equazioni con le *stesse posizioni iniziali* e le *velocità iniziali invertite*. In altre parole, se potessimo intervenire sulle singole molecole della soluzione di acqua e inchiostro ormai mescolata in modo da invertirne istantaneamente tutte le velocità, vedremmo l'inchiostro rosso e quello blu separarsi, proprio come nel video in reverse.

L'argomento di Boltzmann

Consideriamo un sistema con n gradi di libertà. È utile pensare alla sua dinamica in termini geometrici, introducendo lo *spazio delle fasi*. Uno *stato* del sistema è dato dai $2n$ numeri $q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n$, le posizioni e velocità di tutte le componenti del sistema, che come abbiamo visto determinano completamente l'evoluzione passata e futura. Così come due numeri individuano un punto sul piano bidimensionale e tre numeri ne individuano uno nello spazio tridimensionale, i $2n$ numeri

$$(q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n)$$

possono essere pensati come coordinate di un punto in uno spazio con $2n$ dimensioni, lo *spazio delle fasi*. Quindi lo spazio delle fasi è lo spazio di tutti i possibili stati del sistema e la sua dimensione è pari al doppio del numero dei gradi di libertà. L'evoluzione del sistema può adesso essere pensata come al moto di un punto nello spazio delle fasi.

Un vantaggio di questa astrazione è che possiamo parlare del *volume* di regioni dello spazio delle fasi. La definizione del volume nello spazio delle fasi $2n$-dimensionale è analoga alla definizione dell'area nel piano bidimensionale e del volume nello spazio tridimensionale: il volume del *cubo* Q costituito dagli stati $(q_1, q_2, ..., q_n, v_1, v_2, ..., v_n)$ dove ciascuna delle variabili q_j e v_j varia in un intervallo di ampiezza L è L^{2n}, mentre il volume di una regione qualsiasi si definisce approssimandola con tanti piccoli cubi.

Seguiamo il ragionamento con cui Boltzmann spiega la nascita dell'irreversibilità a partire da equazioni reversibili. La soluzione di acqua e inchiostro è un sistema troppo complicato, quindi consideriamone uno più semplice: un gas monoatomico dentro un contenitore diviso in due parti uguali da una parete mobile. All'inizio il gas occupa soltanto una metà del contenitore, poiché la parete gli impedisce l'accesso all'altra metà, poi la parete viene rimossa e il gas diventa libero di espandersi. Questo sistema mostra un chiaro comportamento irreversibile: una volta rimossa la parete il gas si espande in tutto il contenitore, fino a raggiungere una densità uniforme. Non ci aspettiamo di vederlo tornare spontaneamente nella metà di partenza.

Possiamo pensare agli atomi che compongono il gas come a particelle puntiformi tra le quali agisce una forza repulsiva che si attiva quando due particelle si avvicinano (o una si avvicina alle pareti del contenitore) oltre una certa soglia. Se il gas è composto da N atomi, questo sistema ha $3N$ gradi di libertà, dunque lo spazio delle fasi ha dimensione $6N$.

Nei sistemi isolati l'energia totale si conserva e

5 Questo è il contenuto del Teorema di Picard-Lindelöf o di Cauchy-Lipschitz, dal nome dei matematici a cui è associata la dimostrazione studiata ancora oggi nei corsi universitari.

questo fatto permette di confinare il moto entro determinate regioni dello spazio delle fasi. Per determinare la geometria di queste regioni avremmo bisogno di specificare meglio la forma analitica dell'energia, a sua volta dipendente dal tipo di interazione tra gli atomi. Qui ci accontentiamo di una semplificazione un po' rozza, ma che non snatura gli aspetti salienti di quello che sarebbe l'approccio corretto: supponiamo che la conservazione dell'energia totale abbia il solo effetto di costringere ciascuna particella ad avere una velocità non superiore ad una certa velocità massima, che indichiamo con M. Indichiamo con Γ la corrispondente regione nello spazio delle fasi: Γ è l'insieme degli stati ($\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \ldots, \boldsymbol{q_N}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_N}$) dove i $\boldsymbol{q_j}$ sono vettori posizione che variano nel contenitore, mentre i vettori velocità $\boldsymbol{v_j}$ hanno lunghezza al più M e direzione qualsiasi, ossia stanno dentro una sfera di raggio M.

A questo punto Boltzmann formula la sua famosa *ipotesi ergodica*: l'evoluzione di un generico stato invade tutto[6] lo spazio Γ trascorrendo pari *frazioni di tempo* in regioni di pari *volume*. Qua generico sta a significare che chiediamo che questa proprietà valga per tutti gli stati tranne che per eventuali stati eccezionali, che si richiede formino un insieme di volume nullo. Anche se molto difficile da dimostrare si tratta di un'ipotesi ragionevole, tenendo presente l'effetto delle interazioni tra le particelle.

Qual è il volume di Γ e quale il volume della regione A costituita da quegli stati che corrispondono alla situazione in cui tutto il gas occupa una metà - diciamo quella sinistra - del contenitore? Come abbiamo visto, Γ è costituito da quegli stati ($\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \ldots, \boldsymbol{q_N}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_N}$) dove i $\boldsymbol{q_j}$ variano nel contenitore, mentre i $\boldsymbol{v_j}$ variano entro una sfera di raggio M. Il contributo al volume di Γ di ciascun $\boldsymbol{q_j}$ è pari al volume del contenitore, che indichiamo con V, mentre quello di ciascun $\boldsymbol{v_j}$ è pari al volume della sfera di raggio M, ossia $4/3\ \pi\ M^3$. Moltiplicando tra loro tutti questi contributi troviamo che il volume di Γ è

$$\mathrm{vol}\ (\ \Gamma\ ) = V^N\ (4/3\ \pi\ M^3)^N.$$

Il calcolo del volume di A, la regione di Γ che corrisponde al gas nella metà sinistra del contenitore, è analogo: l'unica differenza è che adesso il contributo di ciascun $\boldsymbol{q_j}$ è pari a metà del volume del contenitore. Otteniamo quindi

$$\mathrm{vol}\ (\ \mathrm{A}\ ) = (V/2)^N\ (4/3\ \pi\ M^3)^N.$$

La quantità significativa è il rapporto tra questi due volumi:

$$\mathrm{vol}\ (\ A\ )\ /\ \mathrm{vol}\ (\ \Gamma\ ) = 1/2^N,$$

ovvero il volume di A è 2^N volte inferiore al volume di Γ. Dato che il numero N degli atomi di gas in un contenitore è tipicamente dell'ordine di 10^{23}, 2^N è un numero spaventosamente grande, un *1* seguito da qualcosa come $3{\cdot}10^{22}$ zeri. L'ipotesi ergodica garantisce che la frazione di tempo che lo stato del sistema trascorre dentro A è $1/2^N$, un numero incredibilmente piccolo. Anche senza essere risolte esplicitamente, le equazioni di Newton ci dicono che dopo che il gas ha abbandonato la metà sinistra del recipiente sarà molto improbabile ritrovarvelo, nel senso che il tempo che dobbiamo aspettare affinché ciò accada è di parecchi ordini di grandezza più grande dell'età dell'universo.

La conclusione di Boltzmann è che un comportamento irreversibile non è una conseguenza inevitabile delle equazioni della meccanica, ma ne è una conseguenza *altamente probabile*, e per sistemi con molti gradi di libertà questa probabilità è talmente grande da diventare, a tutti gli effetti pratici, una certezza.

Abbiamo visto che gli ingredienti dell'irreversibilità sono una certa *eccezionalità delle condizioni* iniziali (gli stati della regione A), un *gran numero di gradi di libertà* (che rende il volume di A piccolissimo rispetto a quello di Γ), e l'*ipotesi ergodica* (che permette di identificare volumi e tempi). In che misura questi diversi ingredienti concorrono alla formazione della freccia del tempo? E cosa ci impedisce di invertire artificialmente la freccia del tempo invertendo le velocità di tutte le componenti di un sistema? Ed infine come mai vi sono sistemi complessi, come i sistemi planetari o le galassie, che appaiono perfettamente reversibili? Potrete trovare risposte a queste ed altre domande leggendo la versione integrale di questo articolo, disponibile on-line sul sito http://www.xlatangente.it/xlatangente/plusSectById.do?id=7, ed esplorando la bibliografia là consigliata.

6 Qua "tutto" non va inteso in senso letterale: la traiettoria di uno stato è una curva regolare, ossia qualcosa di dimensione uno che non può riempire uno spazio di dimensione più alta. Quello che intendiamo è che qualunque regione di volume positivo prima o poi viene visitata dalla traiettoria.