H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2017/18

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 9—

Aufgabe 1. Sei $(f, f^\flat) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ ein Morphismus lokal geringer Räume. Zeige, dass $(f, f^\flat)$ genau dann eine abgeschlossene Einbettung ist, wenn $f : Y \to X$ eine abgeschlossene Einbettung topologischer Räume ist (d.h. ein Homöomorphismus auf eine abgeschlossene Teilmenge von X) und wenn $f^\flat : \mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Y$ surjektiv ist.

Aufgabe 2. Sei $(f, f^\flat) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ eine abgeschlossene Einbettung von lokal geringten Räumen und sei $(g, g^\flat) : (X', \mathscr{O}_{X'}) \to (X, \mathscr{O}_X)$ ein Morphismus lokal geringter Räume. Sei $I = \ker(f^\flat : \mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Y)$ und sei J das Bild des Homomorphismus $g^*I \to g^*\mathscr{O}_X = \mathscr{O}_{X'}$. Bezeichne den zu J gehörigen abgeschlossenen Teilraum mit $(Y', \mathscr{O}_{Y'})$ und die Einbettung mit $(f', f'^\flat) : (Y', \mathscr{O}_{Y'}) \to (X', \mathscr{O}_{X'})$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Morphismus $(g', g'^\flat) : (Y', \mathscr{O}_{Y'}) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ so gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(Y', \mathscr{O}_{Y'}) \arrow[r, "(f' f'^\flat)"] \arrow[d, "(g', g'^\flat)"] & (X', \mathscr{O}_{X'}) \arrow[d, "(g, g^\flat)"] \\
(Y, \mathscr{O}_Y) \arrow[r, "(f, f^\flat)"] & (X, \mathscr{O}_X)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Ferner ist das Diagramm oben sogar kartesisch in der Kategorie der lokal geringten Räume.

Aufgabe 3. Sei $(f, f^\flat) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ ein Morphismus lokal geringter Räume. Sei $X = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung von X. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $(f, f^\flat)$ ist eine abgeschlossene Einbettung.

(ii) Für jedes i ist der induzierte Morphismus $(f^{-1}(U_i), \mathscr{O}_Y|_{f^{-1}(U_i)}) \to (U_i, \mathscr{O}_X|_{U_i})$ eine abgeschlossene Einbettung.

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und seien $(f, f^\flat) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (X, \mathscr{O}_X)$ sowie $(f', f'^\flat) : (Y', \mathscr{O}_{Y'}) \to (X, \mathscr{O}_X)$ zwei abgeschlossene Einbettungen. Seien $I = \ker(f^\flat)$ und $I' = \ker(f'^\flat)$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt einen Morphismus $(g, g^\flat) : (Y, \mathscr{O}_Y) \to (Y', \mathscr{O}_{Y'})$ von lokal geringten Räumen, so dass $(f', f'^\flat) \circ (g, g^\flat) = (f, f^\flat)$ ist.

(ii) $I \supseteq I'$.

Ferner ist der Morphismus $(g, g^\flat)$ aus (i), im Falle seiner Existenz, eindeutig bestimmt und ebenfalls eine abgeschlossene Einbettung.