H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum Wintersemester 2017/18

Übungen zur Vorlesung Schemata
—Blatt 8—

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass die Kategorie der $\mathbb{Z}_X$-Moduln äquivalent ist zur Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf X.

Aufgabe 2. Finde ein Beispiel für ein Schema X und eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ von $\mathscr{O}_X$-Moduln, für die die Prägarbe $U \mapsto \bigoplus_{i\in I} F_i(U)$ keine Garbe ist.

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathscr{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathscr{O}_X$-Modul F heißt lokal frei, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass $F|_U \cong (\mathscr{O}_X|_U)^{(I)}$ für eine, von x abhänginge, Menge I ist. Falls I für jedes x endlich ist, nennt man F endlich lokal frei. Ist F lokal frei, so ist für jedes x auch der $\mathscr{O}_{X,x}$-Modul F_x frei vom Rang $\#I$. Falls die Zuordnung $x \mapsto \mathrm{rk}(F_x)$ konstant ist, sagen wir von konstantem Wert n, so heißt n der Rang von F.

(i) Seien F, G und H drei $\mathscr{O}_X$-Moduln. Dann gibt es einen natürlichen Homomorphismus von $\mathscr{O}_X$-Moduln $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_X}(F, G) \otimes_{\mathscr{O}_X} H \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{O}_X}(F, G \otimes_{\mathscr{O}_X} H)$.

(ii) Sind F oder H endlich lokal frei, so ist der obige Homomorphismus ein Isomorphismus.

(iii) Ist L ein lokal freier $\mathscr{O}_X$-Modul von Rang 1, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus $L^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} L \to \mathscr{O}_X$. Aus diesem Grund nennt man einen lokal freien Modul von Rang 1 auch invertierbar.

Aufgabe 4. Sei R ein lokaler Hauptidealring (insbesondere also ein Integritätsbereich) mit Quotientenkörper K. Dann hat $\operatorname{Spec} R$ also höchstens zwei Elemente.

(i) Zeige, dass einen $\mathscr{O}_R$-Modul anzugeben äquivalent dazu ist ein Tripel (M, V, ρ) zu definieren, wobei M ein R-Modul ist, V ein K-Vektorraum und $\rho : M \otimes_R K \to V$ eine K-lineare Abbildung.

(ii) Genau dann ist der durch (M, V, ρ) definierte $\mathscr{O}_R$-Modul quasi-kohärent, wenn ρ ein Isomorphismus ist.

(iii) Finde ein Beispiel eines nicht quasi-kohärenten $\mathscr{O}_R$-Moduls.