M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

# Übungen zur Linearen Algebra I
## —Blatt 6—

**Aufgabe* 1.** Sei $R$ ein Ring. Zeige:

(i) Für jedes $a \in R$ gilt $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(ii) Für alle $a, b \in R$ ist $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$.

(iii) Besitzt $R$ ein Einselement, so ist es eindeutig bestimmt.

(iv) Ist $R$ ein Körper und sind $a, b, c \in R$ mit $ab = ac$ und $a \neq 0$, so gilt bereits $b = c$.

**Aufgabe* 2.** Sei $\sqrt{2}$ die positive reelle Zahl, deren Quadrat 2 ist. Betrachte die Teilmenge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{Q} : \; x = a + b\sqrt{2}\}$ der reellen Zahlen. Zeige:

(i) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

(ii) Sind $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ mit $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$, so folgt $a = a'$ und $b = b'$.

(iii) Für $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ sind $x + y, xy \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und falls $x \neq 0$ ist, ist auch $x^{-1}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ enthalten.

(iv) Zeige, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen ein Körper ist.

**Aufgabe 3.** Sei $A$ eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, d.h. die Verknüpfung von $A$ werde mit $+$ bezeichnet, das neutrale Element mit 0 und das Inverse von $a \in A$ mit $-a$. Betrachte die Menge $\mathrm{End}(A)$ aller Gruppenhomomorphismen $f : A \to A$. Zeige:

(i) Seien $f, g \in \mathrm{End}(A)$. Definiere $f + g : A \to A$ durch $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ (für alle $a \in A$). Zeige, daß $\mathrm{End}(A)$ zusammen mit der Verknüpfung

$$+ : \mathrm{End}(A) \times \mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(A), \; (f, g) \mapsto f + g$$

eine abelsche Gruppe wird.

(ii) Zeige, daß für $f, g \in \mathrm{End}(A)$ auch die Komposition $f \circ g : A \to A$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(iii) Weise nach, daß $\mathrm{End}(A)$ zusammen mit Addition $+$ aus (i) und der Multiplikation

$$\cdot : \mathrm{End}(A) \times \mathrm{End}(A) \to \mathrm{End}(A), \; (f, g) \mapsto f \cdot g := f \circ g$$

ein Ring mit Eins wird.

**Aufgabe 4.** Sei $m$ eine ganze Zahl mit $m \geq 2$. Zeige, daß wenn $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Körper ist, $m$ schon eine Primzahl sein muß.

---

Abgabe am Montag, den **5.12.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.