M. Reineke
H. Franzen
Ruhr-Universität Bochum

Wintersemester 2016/17

Übungen zur Linearen Algebra I
—Blatt 5—

Aufgabe* 1. Sei $U \subseteq S_4$ die Teilmenge bestehend aus den Permutationen $e = \mathrm{id}$, $a = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $c = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(i) Zeige, daß U eine Untergruppe von S_4 ist. Man nennt U die *Kleinsche Vierergruppe.*

(ii) Gib die Gruppentafel von U an.

Aufgabe* 2. Auf der Menge $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren wir die Multiplikation $\bullet : G \times G \to G$ durch

$$(n_1, h_1) \bullet (n_2, h_2) = (n_1 + (-1)^{h_1} n_2, h_1 + h_2).$$

(i) Zeige, daß G so zu einer Gruppe wird.

(ii) Die Elemente $a, b \in G$ seien $a = (0, 1)$ und $b = (1, 0)$. Weise nach, daß $a \bullet b \bullet a^{-1} = b^{-1}$ gilt.

Aufgabe 3. Sei M eine Menge. Für zwei Teilmengen X und Y von M definieren wir

$$X \bigtriangleup Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Man nennt $X \bigtriangleup Y$ die *symmetrische Differenz* von X und Y. Zeige, daß $\mathscr{P}(M)$ mit der symmetrischen Differenz eine abelsche Gruppe wird.

Aufgabe 4. Sei A eine abelsche Gruppe; wir notieren sie additiv. Man nennt $x \in A$ ein Torsionselement, falls es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $nx = 0$ gibt. Zeige, daß die Menge A_{tors} aller Torsionselemente von A eine Untergruppe von A ist.

Abgabe am Montag, den **28.11.2016**, um 10 Uhr. Einwurf in die Zettelkästen auf Ebene NA 02.

Aufgaben mit * müssen abgegeben werden und sind für die Bonuspunkte relevant. Diese Aufgaben werden mit maximal 4 Punkten bewertet.