



Das Haar'sche System
in Funktionenräumen vom Typ $A_{p,q}^s(\mathbb{R})$

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Markus Weimar
geb. am 28.02.1986 in Weimar

Betreuer: Prof. Dr. Hans-Jürgen Schmeißer
Jena, 8. September 2009

Zusammenfassung

Es ist seit langem wohlbekannt, dass das Haar'sche System eine unbedingte Basis in L_2 sowie allgemeiner in L_p , für $1 < p < \infty$, bildet. Die vorliegende Arbeit widmet sich nun der Frage, unter welchen Umständen dieses Funktionensystem eine unbedingte Basis in Funktionenräumen vom Besov- und Lizorkin-Triebel-Typ A_{pq}^s auf der reellen Achse und dem Einheitsintervall bildet. Diese Klassen von Räumen beinhalten viele bedeutende, klassische Funktionenräume und verallgemeinern das Resultat von A. Haar aus den Anfängen des 20. Jahrhunderts somit erheblich.

Als Hilfsmittel werden Waveletzerlegungen, atomare Darstellungen, lokale Mittel sowie punktweise Multiplikatoren und Maximalfunktionen verwendet. Weiterhin finden Dualitäts- und Interpolationsargumente Anwendung und es wird der Zusammenhang der Räume zu geeigneten Folgenräumen hergestellt. Die Ausführungen basieren dabei hauptsächlich auf dem Buchmanuskript „Bases in Function Spaces, Sampling, Discrepancy, Numerical Integration“ von H. Triebel aus dem Jahre 2009 und sind somit aktueller Forschungsgegenstand.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4
1.1 Grundlegende Notationen	4
1.2 Das Haar'sche System	6
1.3 Funktionenräume	9
1.4 Folgenräume	17
2 Hilfsmittel	24
2.1 Elementare Ungleichungen	24
2.2 Atomare Darstellungen	29
2.3 Wavelets	30
2.4 Dualität	35
2.5 Lokale Mittel	38
2.6 Interpolation	40
2.7 Gebiete und punktweise Multiplikatoren	43
3 Haar-Basen	45
3.1 Haar-Basen auf der reellen Achse	45
3.2 Haar-Basen im Einheitsintervall	68
Literaturverzeichnis	71
Abbildungsverzeichnis	72

Literaturverzeichnis

- [BL76] J. Bergh, J. Löfström: Interpolation Spaces - An Introduction. *Springer, Berlin (1976)*
- [FJ90] M. Frazier, B. Jawerth: A Discrete Transform and Decomposition of Distribution Spaces. *Journal of Functional Analysis Vol. 93, S. 34-170 (1990)*
- [MM00] O. Mendez, M. Mitrea: The Banach Envelopes of Besov and Triebel-Lizorkin Spaces and Applications to Partial Differential Equations. *The Journal of Fourier Analysis and Applications Vol. 6, Issue 5, S. 503-531(2000)*
- [RS96] T. Runst, W. Sickel: Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators and Nonlinear Partial Differential Equations. *De Gruyter, Berlin (1976)*
- [Ryc99] V.S. Rychkov: On a Theorem of Bui, Paluszński, and Taibleson. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics Vol. 227, S. 280-292 (1999)*
- [T78] H. Triebel: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1978)*
- [T83] H. Triebel: Theory of Function Spaces. *Birkhäuser, Basel (1983)*
- [T01] H. Triebel: The Structure of Functions. *Birkhäuser, Basel (2001)*
- [T06] H. Triebel: Theory of Function Spaces III. *Birkhäuser, Basel (2006)*
- [T08] H. Triebel: Function Spaces and Wavelets on Domains. *European Math. Soc. Publishing House, Zürich (2008)*
- [T09] H. Triebel: Bases in Function Spaces, Sampling, Discrepancy, Numerical Integration. *Buchmanuskript in Vorbereitung (Aug. 2009)*
- [Wer07] D. Werner: Funktionalanalysis. 6. kor. Auflage, *Springer, Berlin (2007)*