KOMBINATORISCHE STATISTIKEN AUF ENDLICHEN COXETERGRUPPEN

j/w THOMAS KAHLE (MAGDEBURG)

CHRISTIAN STUMP

ANTRITTSVORLESUNG – 23. JAN 2019

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

ZUM AUFTAKT : EULER 1755

$$\mathfrak{S}_n = \{\pi : \{1,\dots,n\} \longrightarrow \{1,\dots,n\} \text{ BIJEKTIV}\}$$

$$\sum_{k\geq 0} k^n t^k = \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} t^{\mathrm{DES}\,\pi}, \qquad \mathrm{DES}\,\pi = |\{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}|$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \&c. = \frac{1}{1+x},$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \&c. = \frac{1}{(1+x)^2},$$

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \&c. = \frac{1-x}{(1+x)^3},$$

$$1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + \&c. = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4},$$

$$1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \&c. = \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5},$$

$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \&c. = \frac{1-26x+66xx-26x^3+x^4}{(1+x)^6},$$

$$1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3\ \&c. = \frac{1-57x+302xx-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7}$$

&c.

MEM. DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE BERLIN, 1768, p. 83

· KARTENDECK HAT $n = 52$ KARTEN.

WIE GUT IST GEGEBENE MISCHMETHODE?

MISCHEN IST WAHRSCHEINL. VERTEILUNG AUF S_n $\left(|S_{52}| \sim 8 \cdot 10^{67} \right)$.

- PERFEKTES MISCHEN IST GLEICHVERTEILUNG
- BOGENMISCHEN / ÜBERHANDMISCHEN (DIACONIS 1970–2000)

ZWEI MAẞE, WIE GUT MISCHMETHODE:

* "UP-DOWN-PATTERN" $\{ i : \pi(i) > \pi(i+1) \}$ LOKALE INFO

* "OUT-OF-ORDER-PATTERN"

$$\{ i<j : \pi(i) > \pi(j) \}$$ GLOBALE INFO

ÜBERSICHT

* KOMBINATORISCHE STATISTIKEN
  PERMUTATIONSSTATISTIKEN
  WERTE AUF ZUFÄLLIGEN PERMUTATIONEN
  GRENZWERTSÄTZE

* "INTERESSANTES VERHALTEN" VON
  STATISTIKEN RATEN

* VERALLGEMEINERUNGEN AUF
  ENDLICHE COXETERGRUPPEN

DEFINITION

SEI S ENDLICHE MENGE.

EINE STATISTIK AUF S IST EINE ABBILDUNG $st : S \longrightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

DIE DAZUGEHÖRIGE VERTEILUNG IST

$$G_{st}(z) = \sum_{x \in S} z^{st(x)} .$$

DEFINITION

SEI $f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i \in \mathbb{N}[z]$.

DIE REELLE ZUFALLSVARIABLE X_f IST GEGEBEN DURCH $\mathbb{P}(X_f = k) = \frac{[z^k]f}{f(1)} = \frac{a_k}{\sum_{i \geq 1} a_i}$.

* WIR UNTERSUCHEN $X_{st} := X_{G_{st}}$, ALSO DEN STATISTIKWERT AUF EINEM ZUFÄLLIGEN ELT.

ZUR ERINNERUNG

- $\mathbb{E}(X_{st}) = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} st(x)$ MITTELWERT
- $\mathbb{V}(X_{st}) = \mathbb{E}(X_{st}^2) - \mathbb{E}(X_{st})^2$ VARIANZ

ABSTIEGE IN PERMUTATIONEN

$$S_n = \{\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \text{ BIJEKTIV}\}$$

IN ZEILENNOTATION $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$

- ABSTIEGE

  $\mathrm{DES} : S_n \to \mathbb{N}, \quad \pi \mapsto |\{i : \pi(i) > \pi(i+1)\}|$

$n = 3$: $123 \quad 13|2 \quad 2|13 \quad 23|1 \quad 3|12 \quad 3|2|1$

$$G_{DES}^{(3)}(z) = 1 + 4z + z^2$$

- $G_{DES}^{(n)}(z)$ EULERSCHES POLYNOM

THEOREM (KLASSISCH)

$$\mathbb{E}\left(X_{DES}^{(n+1)}\right) = \frac{n}{2} \qquad \mathbb{V}\left(X_{DES}^{(n+1)}\right) = \frac{1}{12}(n+2)$$

BEWEIS

$$Y^{(i)} := \begin{cases} 1 \,;\, \pi(i) > \pi(i+1) \\ 0 \,;\, \pi(i) < \pi(i+1) \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n$$

$\mathbb{E}(Y^{(i)}) = \frac{1}{2}$, $\quad X_{DES}^{(n+1)} = Y^{(1)} + \dots + Y^{(n)}$ NICHT UNABHÄNGIG!

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(X_{DES}^{(n+1)}\right) = n/2$$

$$\mathbb{E}(Y^{(i)}Y^{(j)}) = \begin{cases} 1/2 \,;\, |i-j| = 0 & n \text{ SUMMANDEN} \\ 1/6 \,;\, |i-j| = 1 & 2(n-1) \text{ SUMMANDEN} \\ 1/4 \,;\, |i-j| > 1 & n^2 - 2(n-1) - n \text{ SUMMANDEN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}\left(X_{DES}^{(n+1)}\right) = \underbrace{\frac{n}{2} + \frac{2(n-1)}{6} + \frac{n^2 - 2(n-1) - n}{4}}_{\mathbb{E}((Y^{(1)} + \dots + Y^{(n)})^2)} - \underbrace{\frac{n^2}{4}}_{\mathbb{E}(X_{DES}^{(n+1)})^2} = \frac{n+2}{12} \qquad \square$$

INVERSIONEN IN PERMUTATIONEN

- INVERSIONEN

  $\mathrm{INV}: \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}, \quad \pi \mapsto |\{i<j : \pi(i) > \pi(j)\}|$

$n=3$:

123	132	213	231	312	321
0	1	1	2	2	3

$$G^{(3)}_{\mathrm{INV}}(z) = z^3 + 2z^2 + 2z + 1$$

$$= (1+z)(1+z+z^2) = [2]_z \cdot [3]_z$$

- $G^{(n)}_{\mathrm{INV}}(z) = [2]_z \cdot [3]_z \cdot \ldots \cdot [n]_z$

MACMAHONSCHES POLYNOM 1915

THEOREM (FOLKLORE)

SEIEN $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $f(z) = [d_1]_z \cdots [d_n]_z$.

$$\mathbb{E}(X_f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) \qquad \mathbb{V}(X_f) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} (d_i^2 - 1)$$

BEWEIS

SEI $X_d := X_{[d]_z}$ GLEICHVERTEILUNG AUF $\{0, 1, \dots, d-1\}$.

DANN $\mathbb{E}(X_d) = \dfrac{d-1}{2}$

$$\mathbb{V}(X_d) = \mathbb{E}(X_d^2) - \mathbb{E}(X_d)^2 = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{d-1} i^2 - \frac{(d-1)^2}{4}$$

$$\overset{\text{QUADRATISCHE PYRAMIDE}}{=} \frac{1}{6}(d-1)(2d-1) - \frac{1}{4}(d-1)^2 = \frac{1}{12}(d-1)(d+1)$$

SCHLIEẞLICH: $X_f = \underbrace{X_{d_1} + \dots + X_{d_n}}_{\text{UNABHÄNGIG}}$ $\square$

ABSTIEGE & INVERSE ABSTIEGE

- DESTIDES : $\mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$, $\pi \mapsto \mathrm{DES}(\pi) + \mathrm{DES}(\pi^{-1})$

THEOREM (CHATTERJEE - DIACONIS 2017)

ΔANDERE, NICHT SUPERSCHWER

$$\mathbb{E}\left(X^{(n+1)}_{\mathrm{DESTIDES}}\right) = n \qquad \mathbb{V}\left(X^{(n+1)}_{\mathrm{DESTIDES}}\right) = \frac{n+8}{6} - \frac{1}{n+1}$$

ZENTRALE GRENZWERTSÄTZE

DEFINITION

$\{X^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ SEQUENZ VON ZUFALLSVARIABLEN
WIE OBEN

DANN: $X^{(n)}$ HAT ZENTRALEN GRENZWERT

FALLS $\dfrac{X^{(n)} - \mathbb{E}(X^{(n)})}{\mathbb{V}(X^{(n)})^{1/2}} \xrightarrow[\text{IN VERTEILUNG}]{n \to \infty} N(0,1)$ STANDARD-NORMAL-VERTEILUNG

THEOREM (FOLKLORE, FOLKLORE, C-D 2017)
SCHWER!

X_{DES}, X_{INV}, $X_{DES+IDES}$ HABEN ZENTRALEN GRENZWERT

INTERESSANTES VERHALTEN RATEN MIT FINDSTAT.ORG

---

* FINDSTAT IST EINE ONLINE DATENBANK FÜR KOMBIN. STATISTIKEN & ABBILDUNGEN
  - ENTHÄLT ~ 300 PERM. STAT.
    ~ 1350 STAT. INSGESAMT
    ~ 150 ABBILDUNGEN

IDEE

DURCHSUCHE DATENBANK NACH STATISTIKEN MIT POLYNOMIELLER VARIANZ. (ODER RAT. FUNKTION)

ANSATZ

SEI $st : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ GEG.

(1) BERECHNE $G_{st}^{(n)}(z)$, $\mathbb{E}(X_{st}^{(n)})$, $\mathbb{V}(X_{st}^{(n)})$

FÜR $2 \leq n \leq N$ FÜR SINNVOLLES N.

(2) NUTZE LAGRANGE INTERPOLATION

UND FINDE (MÖGLICHERWEISE)

VERMUTUNG

$$\mathbb{V}(X_{st}^{(n)}) = f(n)/g(n)$$ FÜR SCHÖNE $f, g \in \mathbb{Z}[n]$.

MIT DIESEM NAIVEN ANSATZ FINDET MAN

- DIE OBIGEN THEOREME FÜR MITTELWERTE, VARIANZEN, GRENZWERTE
- WEITERE (UNBEKANNTE) VERTEILUNGEN IN DER DB MIT INTERESSANTEN VARS.
- SOWIE DIE NUN KOMMENDEN VERALLGEMEINERUNGEN

... ZUMINDEST VERMUTETERWEISE

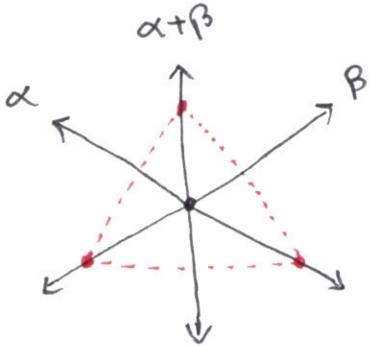
ABSTIEGE & INVERSIONEN IN COXETERGRUPPEN

SEI (W,S) ENDLICHES COXETERSYSTEM,

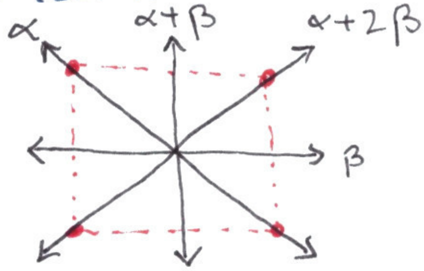
ALSO $W = \left\langle S : \begin{array}{ll} (st)^{m(s,t)} & = \mathbb{1} \\ s^2 & = \mathbb{1} \end{array} \right\rangle_{gp}$ ENDLICH

SEI $\Delta \subset \Phi^+ \subset \Phi$ WURZELSYSTEM MIT WEYLGRUPPE W.

EINFACH POSITIV



$\Phi = A_2$, $W(\Phi) = \mathrm{Sym}\,\triangle$
$\cong S_3$



$\Phi = B_2$, $W(\Phi) = \mathrm{Sym}\,\square$
$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes S_2$

- $\mathrm{DES}: W \longrightarrow \mathbb{N}, \quad w \longmapsto |\{\beta \in \Delta : w(\beta) \in -\Phi^+\}|$

  W-ABSTIEGE

- $\mathrm{INV}: W \longrightarrow \mathbb{N}, \quad w \longmapsto |\{\beta \in \Phi^+ : w(\beta) \in -\Phi^+\}|$

  W-INVERSIONEN

* DEFINITION IM WURZELSYSTEM

* ÄQUIVALENTE DEFINITION MIT HILFE VON SPIEGELUNGSARRANGEMENTS

THEOREM (KAHLE–ST. 2018+)

SEI (W,S) IRRED., ENDLICHES COXETERSYSTEM VOM RANG $|S| = n$, COXETERZAHL $\mathrm{ORD}(s_1 \cdots s_n) = h$, INVARIANTENGRADE $d_1, \ldots, d_n$ UND $m = \max\{m(s,t) = \mathrm{ord}(st) : s,t \in S\}$. DANN

(1) $\mathbb{E}(X_{DES}) = \frac{n}{2}$ $\quad \mathbb{V}(X_{DES}) = \frac{n-2}{12} + \frac{1}{m}$

(2) $\mathbb{E}(X_{INV}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ $\quad \mathbb{V}(X_{INV}) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(d_i^2 - 1)$

(3) $\mathbb{E}(X_{DES+IDES}) = n$ $\quad \mathbb{V}(X_{DES+IDES}) = 2\mathbb{V}(X_{DES}) + \frac{n}{h}$

EIN PAAR WORTE ZU DEN BEWEISEN

* X_{INV} IST EINFACH WIE OBEN ANGEGEBEN
* X_{DES} NUTZT NEBENKLASSENZERLEGUNG VON PARABOLISCHEN UNTERGRUPPEN
* $X_{\mathrm{DES+IDES}}$ CASE-BY-CASE ANALYSE DER IRRED. CARTAN-KILLING TYPEN

– UNIFORME AUSSAGEN SUGGERIEREN STRUKTURELLE / GEOMETRISCHE GRÜNDE

ZENTRALE GRENZWERTE

SEI $W^{(1)}, W^{(2)}, \dots$ BELIEBIGE SEQUENZ VON

KEINE INTERAKTION ANGEN.!

ENDL. COXETERGRUPPEN AUFST. RANGS.

THEOREM (KAHLE-ST. 2018+)

SEI $X^{(n)} = X_{DES}$ AUF $W^{(n)}$, $S_n^2 = \mathbb{V}(X^{(n)})$.

DANN

$X^{(n)}$ HAT ZENTRALEN GRENZWERT $\Leftrightarrow S_n \to \infty$.

THEOREM (KAHLE-ST. 2018+)

SEI $X^{(n)} = X_{INV}$ AUF $W^{(n)}$, $S_n^2 = \mathbb{V}(X^{(n)})$,

d_n = GRÖßTER INVARIANTENGRAD AUF $W^{(n)}$.

DANN

$X^{(n)}$ HAT ZENTRALEN GRENZW. $\Leftrightarrow d_n / S_n \to 0$.

BEMERKUNGEN

* DIE GRENZWERTSÄTZE GELTEN UNABHÄNGIG VON DEN KONKRETEN GRUPPEN
  ⇝ ASYMPTOTISCHE STRUKTUR HÄNGT NUR VOM RANG DER GRUPPE AB.
* DIE BEDINGUNGEN SIND "RANG 2" BED.
* UNS FEHLT GRENZWERTSATZ FÜR DES + IDES, DER NUR VOM RANG ABHÄNGT.

VIELEN DANK

FÜR

IHRE AUFMERKSAMKEIT !