

Vorlesung zur Veranstaltung Vermessungskunde



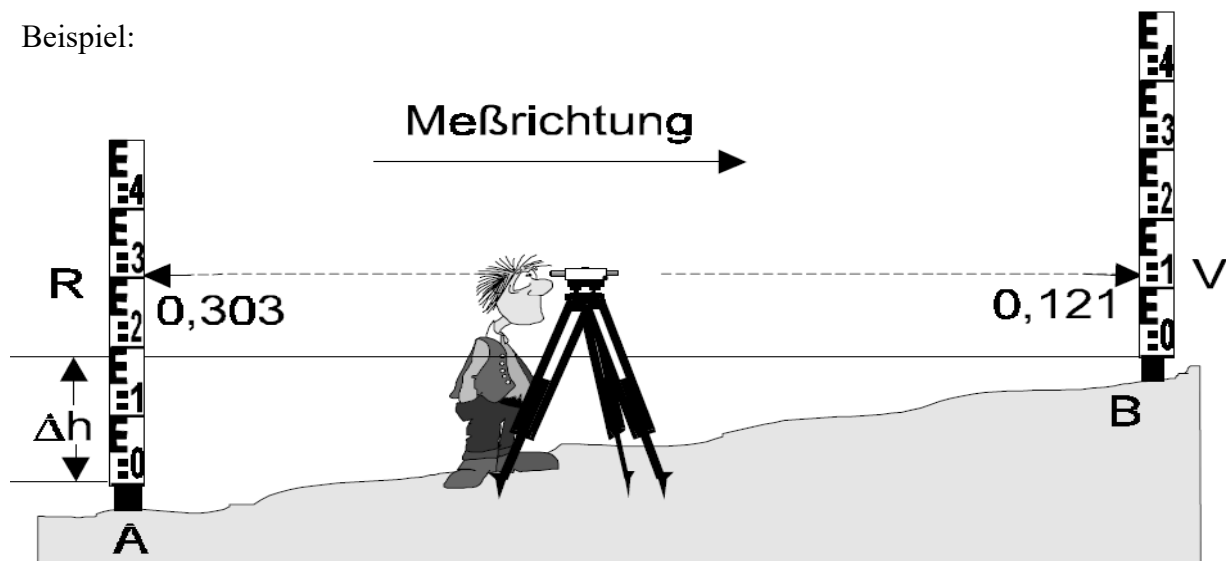
**Skript Teil 6: Nivellement**

Unter NIVELLIEREN versteht man das Messen von Höhenunterschieden mit einer horizontalen Zielung. Diese wird mit einem Nivellier hergestellt, das im Wesentlichen aus einem Fernrohr mit Fadenkreuz besteht. Die Zielachse des Fernrohres wird mit Libellen oder Kompensatoren (automatische Nivelliere) horizontalisiert. Die Bezugsfläche für Höhen ist die mittlere Meereshöhe (am Amsterdamer Pegel), die das Geoid repräsentiert. Diese Fläche wird nach anbringen verschiedener Korrekturterme als Normalhöhennull (NHN) bezeichnet. Die NHN-Höhen haben die über viele Jahrzehnte im Einsatz befindlichen NN-Höhen (Normal-Null-Höhen) abgelöst. In Bochum beträgt der Unterschied zwischen NN-Höhen und NHN-Höhen wenige Zentimeter. Im Gegensatz zu diesen „Gebrauchshöhen“ bzw. „Geoid-Höhen“ gibt es noch die „geometrischen Höhen“, d.h. Höhen, die sich auf das Ellipsoid beziehen. Ein Beispiel für „ellipsoidische Höhen“ sind „GPS-Höhen“. In Bochum beträgt der Unterschied zwischen Geoid-Höhen und ellipsoidischen Höhen ca. 45 m!

Bei einem Nivellement werden die Werte für die horizontale Ziellinie an lotrecht gestellten Maßstäben (Nivellierlatten) abgelesen. Die Ablesung und Registrierung der Werte kann manuell oder automatisch (bei Digitalnivellieren) erfolgen.

Der Höhenunterschied zweier Punkte ergibt sich aus den zugehörigen Lattenablesungen, die mit Rückwärts (R) und Vorwärts (V) bezeichnet werden. Er wird vorzeichenrichtig aus der Differenz zwischen der Rückwärts- und der Vorwärtsablesung (Steigen = + ; Fallen = - ) berechnet.

Beispiel:



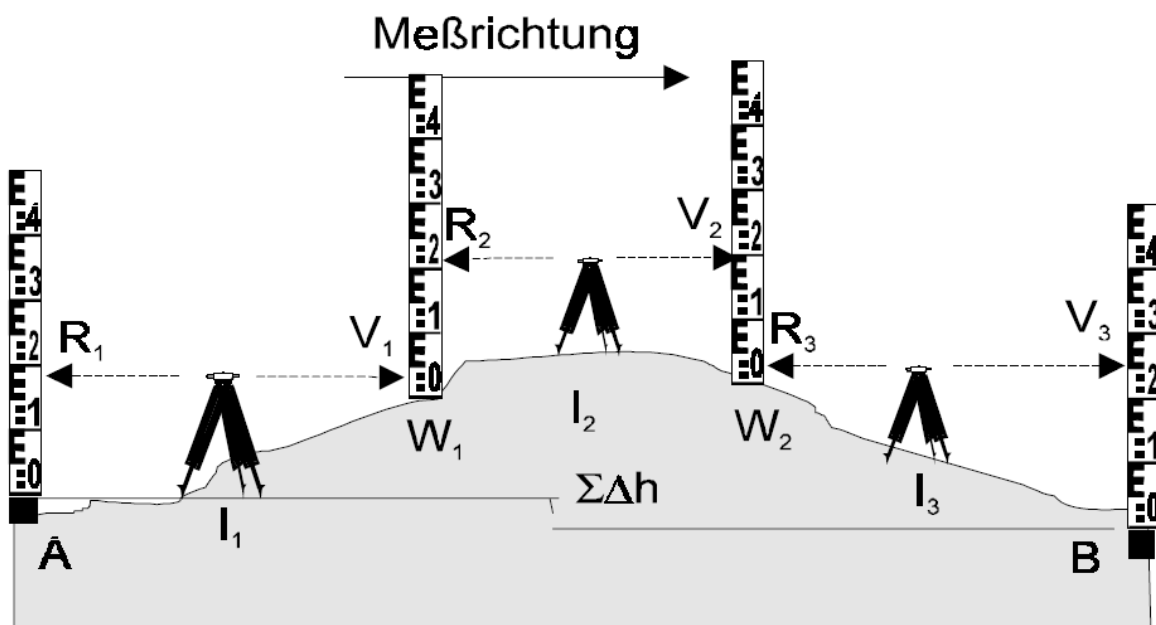
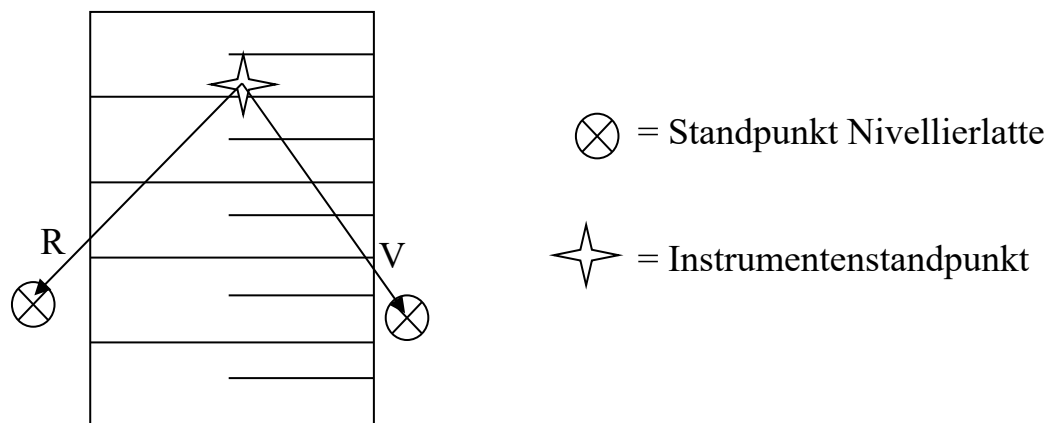
$$\Delta h = R - V$$

$$\Delta h = R - V = 0,303 - 0,121 = + 0,182 \text{ m}$$

Ist im Beispiel die Höhe des Ausgangspunktes  $A = + 85,604 \text{ m NHN}$ , so erhält man die Höhe des Endpunktes B durch Addition des Höhenunterschiedes.

$$HB = HA + \Delta h = 85,604 + 0,182 = 85,786 \text{ m NHN}$$

Ist der Endpunkt B vom Anfangspunkt A so weit entfernt, dass B nicht durch eine einzelne Instrumentenaufstellung erreicht werden kann, wird, vom Anfangspunkt A ausgehend, die oben beschriebene Höhenbestimmung so oft aneinandergereiht, bis der Endpunkt B erreicht ist. Die Zwischenpunkte müssen nicht dauerhaft vermarktet werden. Der Abstand einer Anzielung soll 50 m nicht überschreiten. Ebenso sind zu kurze Entfernungen beim Anzielen zu vermeiden. Im steilen Gelände lässt sich das oft nur erreichen, wenn das Nivellier seitlich versetzt zur zwischen den Lattenstandpunkten aufgebaut wird.



Das Instrument wird in  $I_1$  aufgestellt und  $R_1$  und  $V_1$  werden abgelesen. Dann stellt der Beobachter das Instrument in  $I_2$  auf und liest  $R_2$  und  $V_2$  ab. Beim Umsetzen des Instruments ist darauf zu achten, dass sich die Höhe des Lattenaufsetzpunktes im Wechsellattenpunkt  $W_1$  nicht verändert. Aus diesem Grund werden die Latten stets auf spezielle Aufsetzplatten (sogenannte Frösche) gestellt. Die Messung endet im vorliegenden Beispiel auf  $I_3$  mit der

Vorwärtsablesung  $V_3$ . Der Gesamthöhenunterschied  $\Delta H$  zwischen den Punkten A und B errechnet sich aus der Summe aller Einzelhöhenunterschiede.

Eine Rechenkontrolle wird durch zweimaliges Berechnen von  $\Delta H$  erreicht,

1. aus  $\Sigma \Delta h$  und
2. aus  $\Sigma R - \Sigma V$ .

Während der Messung aufgetretene Fehler werden hierdurch nicht aufgedeckt, sondern nur Rechenfehler. Das Nivellement sollte deshalb niemals auf einem Neupunkt beendet, sondern bis zu einem zweiten, höhenmäßig bekannten Festpunkt weitergeführt und dort abgeschlossen werden. Beginnt man an einem höhenmäßig bekannten Punkt und schließt an einem anderen höhenmäßig bekannten Punkt ab, so wurde ein *Nivellements zug* gemessen.

Der zwischen den Festpunkten gemessene Ist-Höhenunterschied wird dann zur Kontrolle mit dem Sollhöhenunterschied, der sich aus der Differenz der Festpunkthöhen ergibt, verglichen.

$$H_B - H_A = \Delta H_{\text{SOLL}}$$

Wenn kein zweiter Festpunkt in der Nähe ist, kann das Nivellement auch zum ersten Festpunkt zurückgeführt werden (= *Nivellementsschleife*). Dabei ergibt sich als Messkontrolle  $\Delta H_{\text{SOLL}} = 0$ . Dieser Fall sollte die Ausnahme bleiben, weil er nur eine Kontrolle der Messung bewirkt, jedoch eine eventuelle Veränderung des Anschlusspunktes durch Baumaßnahmen etc. nicht aufdecken kann. Eine vom Betrag gleiche Höhenänderung von zwei Anschlusspunkten ist dagegen sehr unwahrscheinlich.

## NIVELLEMENTSARTEN

Höhenmessungen werden nach Genauigkeit und Verwendungszweck unterschieden. Die Genauigkeit eines Nivellements wird durch die Standardabweichung  $\sigma$  für 1 km Nivellement in mm / km festgelegt, die die mittlere zufällige Unsicherheit einer Höhenmessung bezogen auf ein Nivellement von einem Kilometer Länge angibt. Eine Unterteilung nach Genauigkeit ergibt

Nivellement	Standardabw. $\sigma_{1\text{km}}$ für 1 km Nivellement
Einfaches oder Baunivellement	$> \pm 3,0 \text{ mm / km}$
Technisches oder Ingenieurnivellement	$\pm 3,0 \text{ mm / km bis } \pm 1,0 \text{ mm / km}$
Feinnivellement	$< \pm 1,0 \text{ mm / km}$

Die Standardabweichung  $\sigma_s$  für eine konkrete Strecke  $s$  ergibt sich aus  $\sigma_{1\text{km}}$  nach dem Varianzfortpflanzungsgesetz zu:

$$\sigma_s = \sigma_{1\text{km}} \sqrt{s}$$

Beispiel:

$$\sigma_{1\text{km}} = \pm 3,0 \text{ mm}$$

Für zwei Punkte, die 3 km voneinander entfernt sind, ergibt sich der Höhenunterschied  $\Delta H$  danach mit einer zu erwartenden Standardabweichung  $\sigma_{\Delta H} = \pm 3,0 \cdot 1,7 \text{ mm} = \pm 5,1 \text{ mm}$ ; bei einer Entfernung von  $s = 500 \text{ m}$  entsprechend zu  $\sigma_{\Delta H} = \pm 3,0 \cdot 0,7 \text{ mm} = \pm 2,1 \text{ mm}$ .

Die bei einem Nivellement erreichbare Genauigkeit hängt vom Beobachter, dem Instrument, den Nivellierlatten, dem Messverfahren und den Verhältnissen (Boden, Wetter etc.) ab. Bei genaueren Messungen muss strikt auf die Einhaltung gleicher Zielweiten für die Vorwärts- bzw. Rückwärtsblicke geachtet werden, um Einflüsse aus Zielachsfehler (Restneigung der Zielachse) sowie Erdkrümmung und Refraktion zu eliminieren.

Ziel des Nivellements ist die Bestimmung der Höhe von Neupunkten im Anschluss an vorhandene Höhenfestpunkte.

Informationen über diese Festpunkte (NivP-Übersicht, NivP-Beschreibung und NivP-Kartei) erhält man z.B. beim Kataster- oder Vermessungsamt der Stadt oder des Kreises. Die Vorgehensweise beim Festpunktnivellement entspricht immer der folgenden Reihenfolge:

- 1) Latte auf Höhenfestpunkt (Höhenbolzen) A aufstellen
- 2) Nivellier in max. 50 m Entfernung fest aufstellen und grob horizontieren
- 3) Latte in A anzielen, genau horizontieren und Ablesung  $r_1$  (**Rückblick**)
- 4) Instrument bleibt stehen, Latte wandert zum Wechsellpunkt  $WP_1$  (max. 50 m)
- 5) Latte auf  $WP_1$  anzielen, genau horizontieren und Ablesung  $v_1$  (**Vorblick**)
- 6) Latte bleibt auf  $WP_1$  stehen, Instrument wechselt nach  $I_2$ , fest aufstellen, grob horizontieren
- 7) Latte in  $WP_1$  anzielen, genau horizontieren und Ablesung  $r_2$
- 8) Instrument bleibt stehen, Latte wandert nach  $WP_2$ , bzw.  $HP_1$

Der Höhenunterschied ergibt sich aus Rückblick minus Vorblick:  $\Delta h = r - v$

**Beachte:** Wenn die Latte wandert bleibt das Instrument stehen, wenn das Instrument wandert bleibt die Nivellierlatte stehen. Eines von beiden muss die Höhe übertragen!

Die Auswertung eines Festpunktnivellements zeigt folgendes Feldbuch:

Nivellement							
Ziel-punkt	Ziel-weite	Ablesung		Delta h		H (vorl.) m	H (NHN) m
		Rückbl.	Vorbl.	Steigen +	Fallen -		
A	27	1,263					37,602
1	29		1,538		-0,275	37,327	37,326
	30	1,761					
2	30		1,862		-0,101	37,226	37,225
	31	1,920					
3	30		1,803	0,117		37,343	37,341
	32	1,710					
NP 1	32		1,612	0,098		37,441	37,438
	31	1,561					
4	30		1,502	0,059		37,500	37,497
	31	1,490					
E	32		1,572		-0,082	37,418	37,414
$\Sigma$	365	9,705	9,889	0,274	-0,458		

Hierin sind A und E die höhenmäßig bekannten Anschlusspunkte und NP 1 der höhenmäßig neu zu bestimmende Punkt. Der Neupunkt NP 1 und die Punkte 1 – 4 sind die Wechsellpunkte (= temporäre Zwischenpunkte der Nivellierlatte). Die Instrumentenstandpunkte werden im Feldbuch nicht vermerkt!

Als Probe muss gelten: Summe Rückblick - Summe Vorblick = Summe Delta h

Die Differenz der Sollhöhe ( $E_{Soll}$ ) zur gemessenen Höhe des Punktes E ( $E_{Ist}$ ) ergibt den Widerspruch  $w = E_{Soll} - E_{Ist}$ . Wenn  $w > f_{Max}$  (Fehlergrenze) ist, muss die Messung wiederholt oder die Ursache des Fehlers gefunden werden. Wenn  $w < f_{Max}$  ist, muss  $w$  streckenproportional auf alle gemessenen Punkte verteilt werden, d.h. die Höhe aller Wechsellpunkte und aller neu zu bestimmenden Punkte ändert sich!

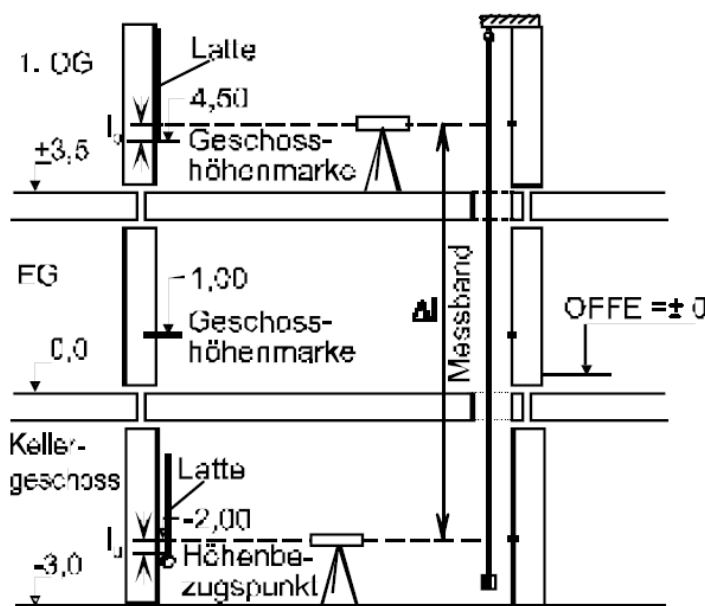
Im Beispiel beträgt der Widerspruch  $w = -4 \text{ mm}$ .

Die Standardabweichung  $\sigma_{1\text{km}}$  für 1km Nivellement berechnet sich wie folgt:

$$\sigma_{1\text{km}} = \frac{w}{\sqrt{s}} \quad (\sigma_{1\text{km}} \text{ in mm, } w \text{ in mm und } s = \text{Gesamtlänge des Nivellements in km})$$

Im Beispiel ergibt dies:  $\sigma_{1\text{km}} = \pm 6 \text{ mm}$ .

Ein Sonderfall des Nivellements ist die Höhenlehre. Innerhalb eines Bauwerkes ist ein bauwerksinternes Höhenbezugssystem einzuführen, dessen Nullfläche meist die *Oberfläche des fertigen Fußbodens im Erdgeschoss* (OFFE) ist. Die OFFE-Höhe wird an das amtliche Höhensystem über das Bauhöhennetz angeschlossen. Die Höhenmarkierungen (Höhenlehren - Schnurgerüste) beziehen sich stets auf das bauwerksinterne Höhenystem OFFE.



Als Höhenbezugspunkt wird im Kellergeschoss eine Höhenmarke (Bolzen, Farbmarkierung) angebracht und deren Höhe im amtlichen Höhensystem bestimmt. Für die Geschosshöhenmarke ergibt sich:

$$H_G = H_B + l_u + \Delta l - l_o \quad \text{mit:}$$

$H_G$  = Höhe der Geschosshöhenmarke

$H_B$  = Höhe des Höhenbezugspunktes

$l_u$  = Ablesung an der unteren Latte

$l_o$  = Ablesung an der oberen Latte

Höhenlehren beziehen sich auf die Nullhöhe des Bauwerks (OFFE). In den Bauausführungsplänen ist diese Höhe vielfach mit  $\pm 0,00 \text{ m}$  unter gleichzeitiger Angabe der absoluten Höhen (NN- oder NHN-Höhe) gekennzeichnet. Tiefer gelegene Punkte werden durch ein Minuszeichen und höher gelegene durch ein Pluszeichen angegeben.

Sollen Höhenlehren (Schnurbretter, Nägel, Strichmarkierungen, Rundstahlbolzen) genau eine vorgegebene Höhe des Bauwerks anzeigen, so sind diese Lehren auf die entsprechende Soll-Höhe einzurichten. Die Soll-Ablesung errechnet sich durch Umstellung der Nivellementsgleichung:

$$\text{Sollablesung} = H_{\text{Höhenfestpunkt}} + \text{Rückblick}_{\text{Höhenfestpunkt}} - \text{Sollhöhe}$$

## Messung und Berechnung von Längs- und Querprofilen:

### Längsprofile

Um die horizontale Lage einer Trasse festzulegen, erfolgt die Planung des Bauvorhabens in einem Lageplan. Darin hat man, abgesehen von den Höhenlinien, keinen Einblick in den Verlauf der Trasse in vertikaler Richtung. Mit einem Vertikalschnitt durch die Erdoberfläche, der mit dem horizontalen Verlauf der Trasse zusammenfällt, erhält man das Längsprofil.

*Graphische Darstellung des Längsprofils:* Da die Längsausdehnung wesentlich größer als die Höhenausdehnung ist, verwendet man zur Darstellung der Längen und Höhen verschiedene Maßstäbe und zwar für die Längen, i.A. den Maßstab des Lageplans:

1:500, 1:1000. Die Höhen werden meist im Verhältnis 1:10 größer dargestellt (Überhöhung), d.h. im Maßstab 1:50 bzw. 1:100. In besonders steilem oder flachem Gelände kann die Überhöhung ein anderes Verhältnis haben.

### Querprofile

Verkehrswege haben nicht nur eine linienförmige, sondern auch eine räumliche Ausdehnung. Neben dem Längsprofil benötigt man noch Informationen über den Verlauf des Geländes links- und rechts der Achse des Verkehrsweges (Informationen über die gesamte Fläche der Trasse). *Querprofile* werden in bestimmten fest vorgegebenen Abständen (Stationierung) rechtwinklig zur Achse des Verkehrsweges gemessen. Zusätzlich werden i.d.R. an besonderen Trassenpunkten (z.B. Querung eines Bachlaufs) Querprofile aufgemessen.

*Graphische Darstellung der Querprofile:* Da die Längenausdehnung verglichen mit der der Längsprofile stark begrenzt ist, kann ein großer Maßstab gewählt werden (1:100). Trotzdem wird auch für die Darstellung der Querprofile stets eine Überhöhung verwendet.

### Flächennivellement:

Die Höhenbestimmung von flächenhaft verteilten Punkten mit einem Nivellier erfolgt mittels *Flächennivellement*.

### Anwendungen

- Herstellung von Lageplänen mit Höhenlinien
- Grundlage für Massenberechnungen in mäßig geneigtem Gelände
- Verdichtung von bereits im Lageplan und im Gelände vorhandenen Punkten

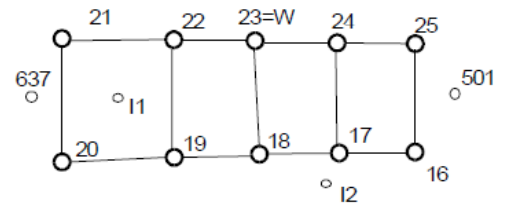
### Prinzip: Rostaufnahme

- Die Aufnahmepunkte werden rasterartig angelegt.
- Die Absteckung der Punkte erfolgt mit Hilfe von Parallelen und Senkrechten in regelmäßigen Abständen mit Messband, Prisma und Fluchtstäben oder nach Augenmaß
- Die Maschenweite ist so zu wählen, dass das Gelände höhenmäßig genau approximiert wird (markante Punkte beachten)
- Ggfs. müssen einzelne Punkte zusätzlich zu den Rostpunkten gemessen werden, um markante Höhenänderungen im Gelände zu erfassen.

### Messung

- Anschluss an einen Höhenfestpunkt
- Von einem Instrumentenstandpunkt Punkthöhen des Rostes als Zwischenblicke bestimmen
- Ggfs. eine Rasterpunkthöhe als Wechsellpunkt verwenden, um weitere Instrumentenstandpunkte zu ermöglichen
- Abschluss am zweiten Höhenfestpunkt oder Rücknivellement zum ersten Festpunkt

Pkt	Rückw	Zwi	Vorw	$\Delta h(+)$	$\Delta h(-)$	H	s(m)
1	2	3	4	5	6	7	8
637	1,026					57,631	637
20		1,323			0,297	57,334	20
21		1,574			0,251	57,083	21
22		1,693			0,119	56,964	22
19		1,800			0,107	56,857	19
23	2,675		1,891		0,091	56,764	23
18		2,436		0,239		57,003	18
17		2,262		0,174		57,177	17
16		2,811			0,549	56,628	16
24		1,835			0,976	57,604	24
25		1,878			0,043	57,561	25
501			1,926		0,048	57,511	501
	3,701		3,817	1,389	1,505		



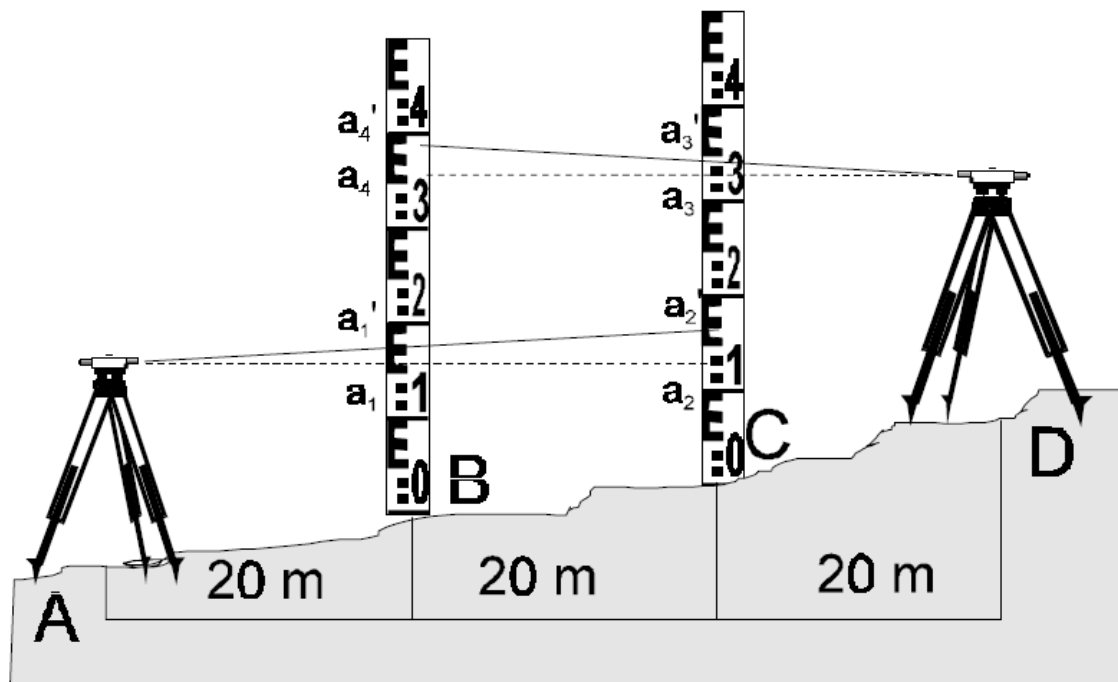
In das Feldbuch kann auch eingetragen werden, welcher Rasterpunkt von welchem Instrumentenstandpunkt gemessen wurde. Dies kann bei eventuellen Fehlern ein wichtiger Hinweis sein.

Auch hier gilt, dass die Differenz der Sollhöhe ( $501_{\text{Soll}}$ ) zur gemessenen Höhe des Punktes 501 ( $501_{\text{Ist}}$ ) den Widerspruch  $w = 501_{\text{Soll}} - 501_{\text{Ist}}$  ergibt. Wenn  $w > f_{\text{Max}}$  (Fehlergrenze) ist, muss die Messung wiederholt oder die Ursache des Fehlers gefunden werden. Wenn  $w < f_{\text{Max}}$  ist, muss  $w$  proportional zur Strecke auf alle gemessenen Punkte verteilt werden, d.h. die Höhe aller Wechsellpunkte und aller neu zu bestimmenden Punkte ändert sich!

### Überprüfung der Zielachse eines Nivelliers

Beim Nivellieren muss die Zielachse horizontal sein, wenn die Röhrenlibelle einspielt bzw. der Kompensator einwandfrei arbeitet. Dies sollte vor jeder Messung überprüft werden. Dazu wählt man eine gängige Nivellierprobe.

#### a) Nivellierprüfung nach Näbauer



Die Nivellierprüfung nach Näbauer erfordert einen Aufbau gemäß der Skizze, d.h. es werden zwei Nivellierlatten benötigt und das zu prüfende Nivellierinstrument wird im Abstand der Latten einmal vor und einmal hinter den Latten aufgestellt.

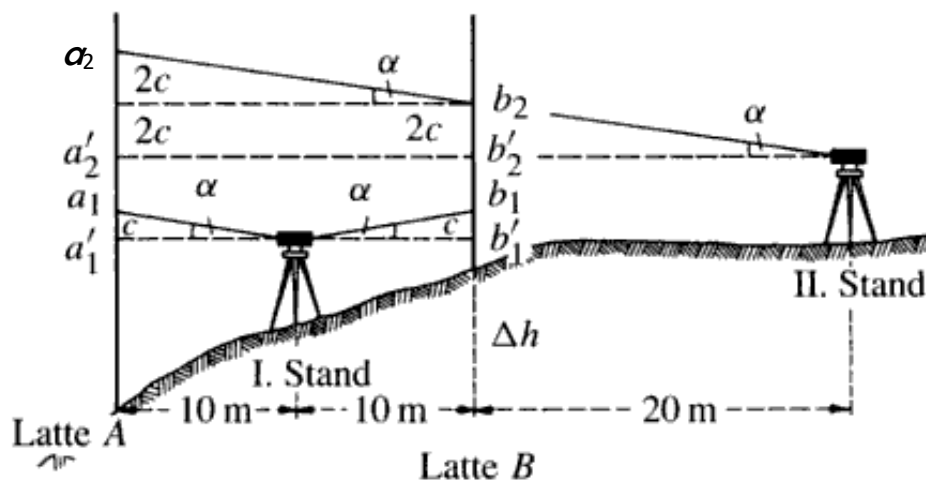
Die erste Aufstellung (in A) ergibt die zielachsfehlerbehafteten Ablesungen  $a_1'$  und  $a_2'$ . Die zweite Aufstellung (in D) ergibt die fehlerhaften Ablesungen  $a_3'$  und  $a_4'$ .

Die fehlerfreie Ablesung  $a_4$  ergibt sich aufgrund der Gleichheit des Höhenunterschiedes in B und C zu:

$$a_4 = a_1' - a_2' + a_3'$$

Das Nivellier kann nun so nachjustiert werden, dass die Ablesung von  $a_4'$  auf  $a_4$  verbessert wird. Danach sollte der ganze Vorgang noch einmal wiederholt werden.

### b) Nivellierprüfung nach Kukkamäki



### Nivellierjustieren nach Kukkamäki

Die Nivellierprüfung nach Kukkamäki erfordert einen Aufbau gemäß der Skizze, d.h. es werden zwei Nivellierlatten benötigt und das zu prüfende Nivellierinstrument wird einmal zwischen den Latten und einmal im Abstand der Latten hinter den Latten aufgestellt.

Die erste Aufstellung (in A) ergibt die zielachsfehlerbehafteten Ablesungen  $a_1$  und  $b_1$ . Die zweite Aufstellung (in D) ergibt die fehlerhaften Ablesungen  $b_2$  und  $a_2$ .

(Hinweis: im Gegensatz zum ersten Verfahren sind in der Skizze in diesem Verfahren die fehlerfreien Werte mit einem ' versehen.)

Aus der Skizze ergibt sich:

$$a_2' - a_1' = b_2' - b_1' \Rightarrow$$

$$(a_2 - 4c) - (a_1 - c) = (b_2 - 2c) - (b_1 - c) \Rightarrow$$

$$a_2 - a_1 - 3c = b_2 - b_1 - c \Rightarrow$$

$$2c = (a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)$$

Die fehlerfreie Ablesung  $a_2'$  ergibt sich zu:

$$a_2' = a_2 - 4c = a_2 - 2[(a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)]$$

Das Nivellier kann nun so nachjustiert werden, dass die Ablesung von  $a_2$  auf  $a_2'$  verbessert wird. Danach sollte der ganze Vorgang noch einmal wiederholt werden.



### c) Nivellierprüfung aus der Mitte und von einem Ende

Die Nivellierprüfung aus der Mitte und von einem Ende ähnelt der nach Kukkamäki. Der Aufbau unterscheidet sich darin, dass der zweite Instrumentenstandpunkt sich so nah wie möglich (abhängig von der kürzesten Fokussierdistanz) an der zweiten Nivellierlatte befindet. Die erste Aufstellung (in A) ergibt die zielachsfehlerbehafteten Ablesungen  $a_1$  und  $b_1$ . Die zweite Aufstellung (nahe C) ergibt die fehlerhafte Ablesungen  $a_2$  und die (aufgrund der kurzen Entfernung) nahezu fehlerfreie Ablesung  $b_2$ .

Hieraus ergibt sich:

$$a_2' - a_1' = b_2' - b_1' \Rightarrow$$

$$(a_2 - 2c) - (a_1 - c) = b_2 - (b_1 - c) \Rightarrow$$

$$a_2 - a_1 - c = b_2 - b_1 + c \Rightarrow$$

$$2c = (a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)$$

Die fehlerfreie Ablesung  $a_2'$  ergibt sich zu:

$$a_2' = a_2 - 2c = a_2 - [(a_2 - a_1) - (b_2 - b_1)] = a_1 + b_1 - b_2$$

Das Nivellier kann nun so nachjustiert werden, dass die Ablesung von  $a_2$  auf  $a_2'$  verbessert wird. Danach sollte der ganze Vorgang noch einmal wiederholt werden.

Die drei gezeigten Prüfverfahren sind sogenannte „Feldverfahren“, da sie überall „im Felde“ durchgeführt werden können. Von a) nach c) benötigen sie immer weniger Platz. Andererseits wird die Genauigkeit der Prüfung immer schlechter, da die Zielachse sich in Abhängigkeit der Fokussierung ändern kann und von a) nach c) die Fokussierung immer stärker geändert werden muss.

Die Justierung sollte möglichst so erfolgen, dass die Fokussierung der während des Nivellements entspricht.

Neben den Feldverfahren gibt es noch Laborverfahren zur Justierung bzw. Kalibrierung. Bei Digitalnivellieren ist es teilweise möglich, entfernungsabhängige Korrekturparameter abzuspeichern.

Sofern beim Nivellieren darauf geachtet wird, dass der Abstand zu den Nivellierlatten im Vor- und Rückblick gleichgroß ist, wirkt sich eine Dejustierung nicht auf das Ergebnis aus. Aus diesem Grund sollte unbedingt darauf geachtet werden, dass diese Bedingung eingehalten wird.

## TRIGONOMETRISCHE HÖHENBESTIMMUNG

Der Grundgedanke der trigonometrischen Höhenmessung besteht darin, dass mit dem im Standpunkt A nach einem Zielpunkt B gemessenen Zenitwinkel  $z$  und mit der Horizontalentfernung  $s_{HZ}$  oder der Schrägdistanz  $s_s$  der Höhenunterschied  $\Delta h$  zwischen A und B bestimmt wird:

$$\Delta h = s_{HZ} \cdot \cot z + (i - t)$$

bzw.

$$\Delta h = s_s \cdot \cos z + (i - t) \text{ und}$$

$$s_{HZ} = s_s \cdot \sin z$$

Die Höhe des Neupunktes errechnet sich dann zu

$$H_B = H_A + \Delta h + K$$

Mit  $K$  wird ein Korrekturglied bezeichnet, mit dessen Hilfe der Einfluss der Erdkrümmung und der Strahlbrechung (Refraktion) berücksichtigt wird (vgl. Skript „Tachymeter“):

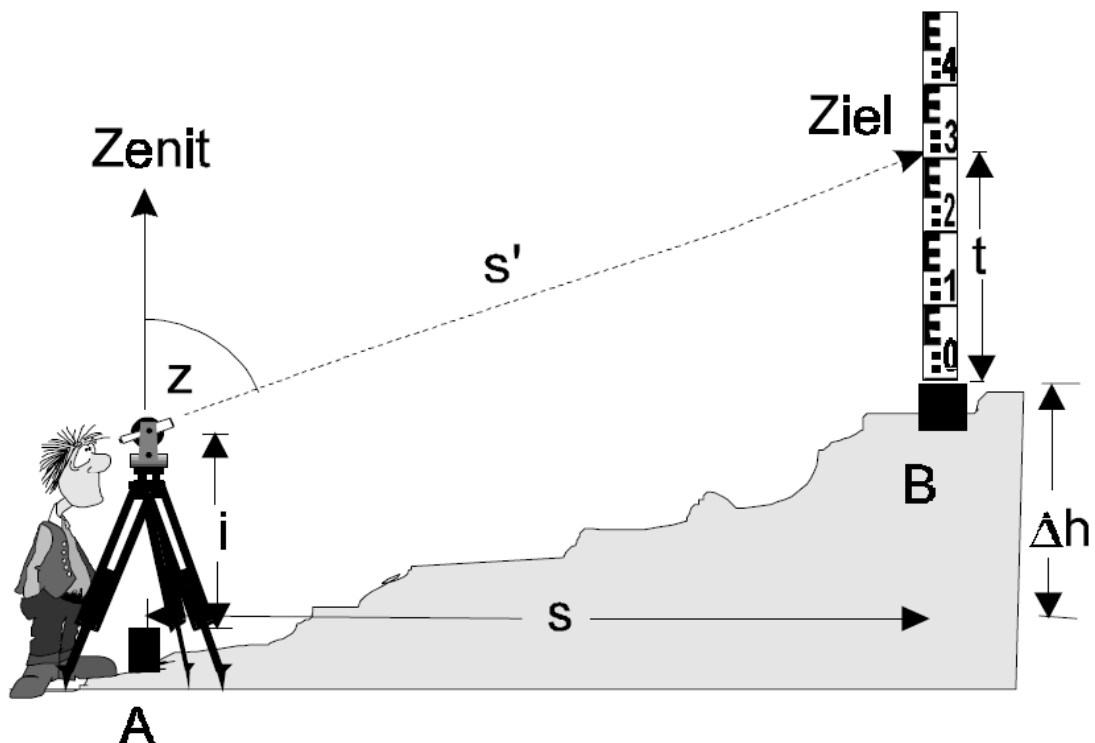
$$K = \frac{1 - k}{2R} s^2$$

Es bedeuten:

$k$  = Refraktionskoeffizient  $\approx 0,13$

$R$  = Erdradius  $\approx 6,38 \cdot 10^6$  m

$s$  = Horizontalentfernung in m



Die trigonometrische Höhenübertragung wird für große Entfernungen verwendet oder wenn nicht die höchste Genauigkeit der Höhenübertragung gefordert ist. Sie geht wesentlich schneller als das Nivellement.

Die Umkehrung der Höhenberechnung aus einer Messung besteht in der Berechnung der Zenitdistanz aus Koordinaten. Zwischen zwei Punkten A und B mit den Koordinaten A ( $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ ) und B ( $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $Z_B$ ) muss hierzu zunächst die Strecke  $S_{AB}$  berechnet werden mit:

$$S_{AB} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2}$$

Und hieraus die Zenitdistanz  $z_{AB}$  mit

$$z_{AB} = \text{atan}\left(\frac{S_{AB}}{Z_B - Z_A}\right) = \text{atan}\left(\frac{S_{AB}}{\Delta h}\right)$$

Für  $\Delta h < 0$  gilt

$$z_{AB} = 200\text{gon} + \text{atan}\left(\frac{S_{AB}}{Z_B - Z_A}\right) = 200\text{gon} + \text{atan}\left(\frac{S_{AB}}{\Delta h}\right) = \text{atan2}\left(\frac{S_{AB}}{\Delta h}\right)$$

Statt atan findet man auch die Schreibweisen arctan oder  $\tan^{-1}$ .

Zur weiteren Umrechnung von Schräg- und Horizontalstrecken und zur Berechnung von Höhenunterschieden aus Zenitdistanzmessungen sei auf das Skript „Tachymeter“ verwiesen.

## Höhenbestimmung eines unzugänglichen Punktes T

Wenn ein Punkt T nicht zugänglich ist, probiert man ihn reflektorlos zu messen. Ist dies auch nicht möglich, müssen von bestimmten Punkten aus Winkel zum Punkt T gemessen werden. Durch geschickte Messkonstellationen können dann von diesen Punkten aus Strecke und Höhenunterschied zum Punkt T berechnet werden.

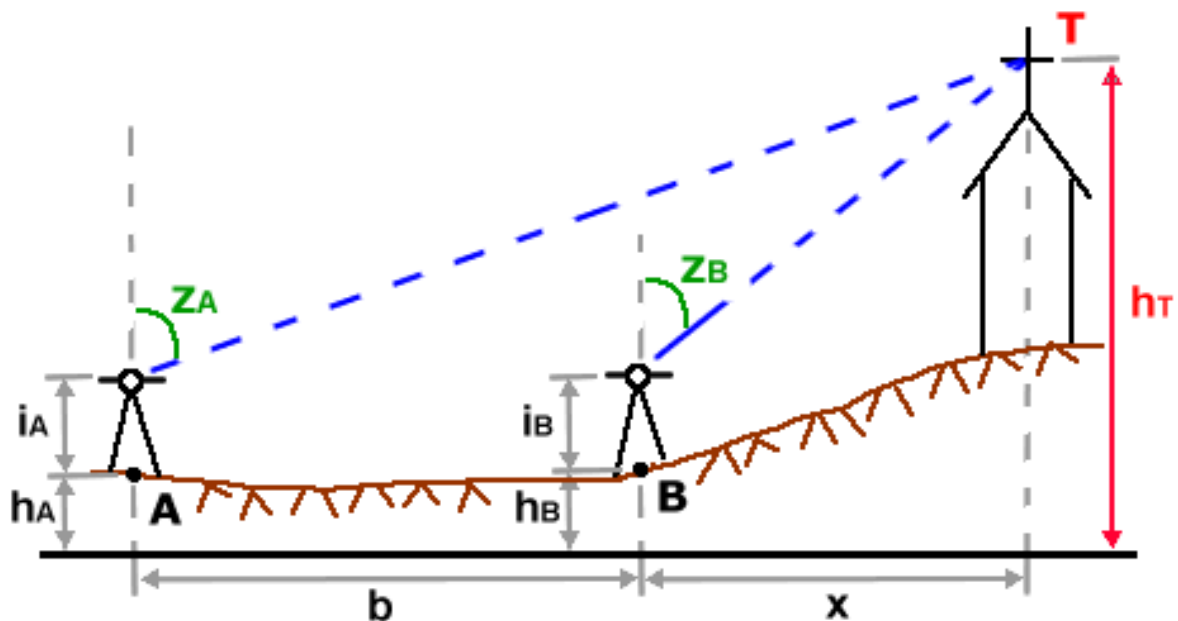
Die bekanntesten Messkonstellationen bezeichnet man als Messung mit einem Hilfsdreieck, welches horizontal oder vertikal liegen kann.

### Vertikales Hilfsdreieck

Das vorrangige Problem bei der Turmhöhenbestimmung besteht in der Ermittlung der Distanz zwischen Instrument und Zielpunkt. Neben der Lösung mit horizontalem Hilfsdreieck kann auch ein vertikales Hilfsdreieck benutzt werden.

Dazu werden die beiden Gerätestandpunkte so gewählt, dass sie mit dem Zielpunkt eine Linie bilden. Der Abstand  $x$  kann nicht direkt gemessen werden. Es lässt sich jedoch durch Gleichsetzen der beiden folgenden Gleichungen berechnen:

$$h_T = h_B + i_B + x \cdot \cot z_B \quad h_T = h_A + i_A + (b + x) \cdot \cot z_A$$



### Standpunkte auf einer Turmseite

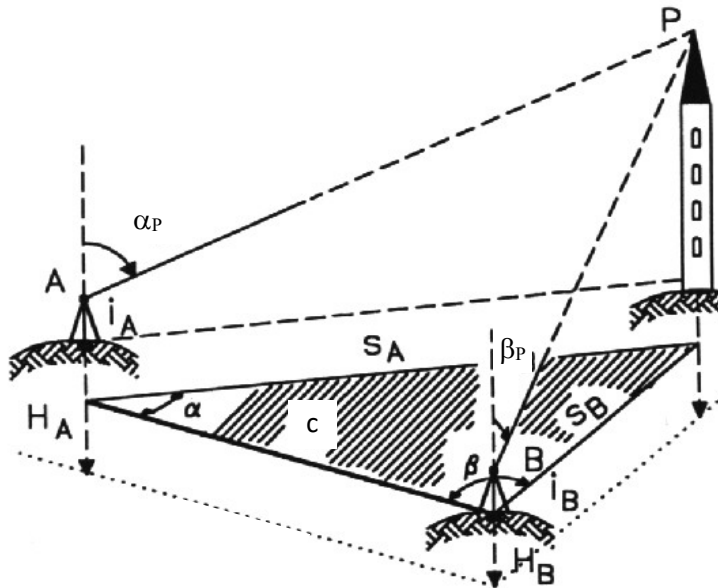
Für  $x$  ergibt sich danach:

$$x = \frac{(h_A + i_A) - (h_B + i_B) + b \cdot \cot z_A}{\cot z_B - \cot z_A}$$

Anschließend wird die Turmhöhe von A aus mit der Strecke  $b + x$  und dem Zenitwinkel  $z_A$  berechnet. Die Kontrolle erfolgt über die Berechnung von B aus. Die Ergebnisse werden nicht gemittelt, da die erste Berechnung etwas genauer als die zweite ist, falls A, B und T nicht exakt auf einer Linie liegen (dies liegt an der geeigneteren Zenitdistanz).

## Horizontales Hilfsdreieck

Bei der „Turmhöhenbestimmung mit horizontalem Hilfsdreieck“ muss das Tachymeter zweimal auf derselben Turmseite aufgebaut werden.



Die Messung läuft im Allgemeinen folgendermaßen ab:

- Bestimmung der Dreieckswinkel durch Richtungswinkelmessung auf A und B
- Bestimmung der Zenitdistanz von A zum oberen Gebäudepunkt P ( $\alpha_P$ )
- Messung der Horizontalstrecke  $c$  zwischen Standpunkt A und B oder Messung der Schrägstrecke  $c'$  und der Zenitdistanz  $\alpha_B$  zwischen Standpunkt A und B; dann hieraus Berechnung der Horizontalstrecke  $c$  zwischen Standpunkt A und B
- Berechnung der Horizontalstrecken  $S_A$  und  $S_B$  sowie der Höhe von P bezogen auf A

Kontrolle: Entsprechende Messungen und Berechnungen von B aus.

### Formeln zur Berechnung der Höhe:

$$H_P = H_A + \frac{s_A}{\tan \alpha_P} + i_A = H_A + s_A * \cot \alpha_P + i_A$$

### Formeln zur Berechnung der fehlenden Strecken (Sinussatz):

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad \sin \gamma = \sin (\alpha + \beta) \Rightarrow$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{c}{\sin (a + \beta)} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{s_A}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin a} = \frac{s_B}{\sin a}$$

$$\Rightarrow \frac{s_A}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin (a + \beta)} \Rightarrow s_A = \frac{c * \sin \beta}{\sin (a + \beta)} \quad \text{für } s_B: s_B = \frac{c * \sin a}{\sin (a + \beta)}$$

Die sichersten Ergebnisse erreicht man mit den folgenden geometrischen Bedingungen:

$\alpha_P \approx \beta_P > 70$  gon;  $s_A \approx s_B \approx$  doppelte Turmhöhe;  $\gamma \approx 120$  gon;  $\alpha \approx \beta \approx 40$  gon;

Soll die Höhe des Turmes bestimmt werden (also nicht der Höhenunterschied zu einem Punkt A), müsste mit demselben Verfahren ein zweiter Punkt des Turmes am Boden oder mit einem bekannten (oder einfach messbaren) Abstand zum Boden gemessen werden.