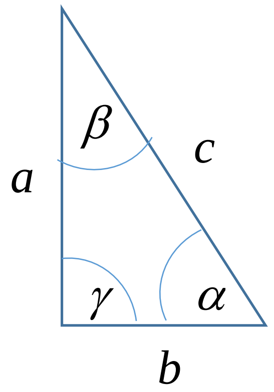
Klausur „Mechanik für Geowissenschaftler“ WiSe 2014 **7. Februar 2014**

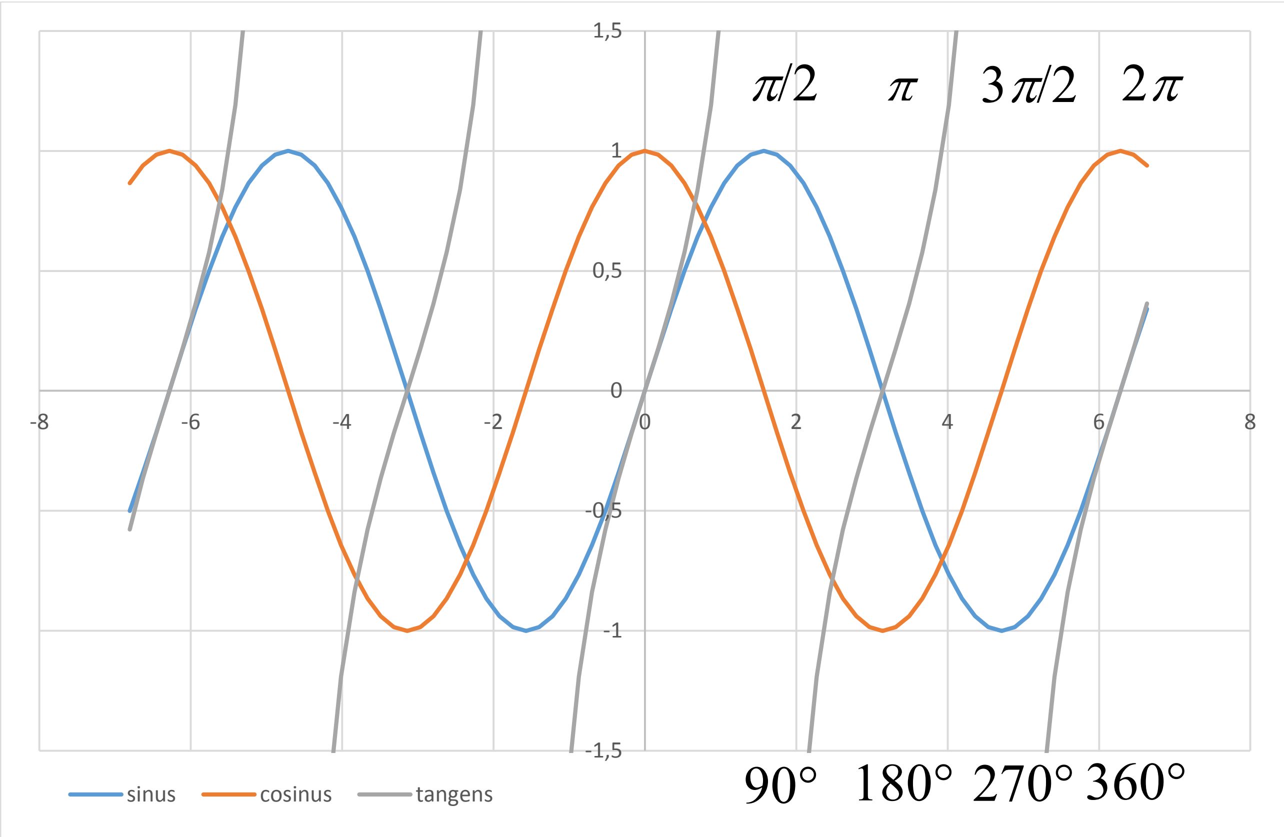
Matrikelnummer

1) Gegeben sei das abgebildete rechtwinklige Dreieck.



a) Benennen Sie Katheten und Hypotenuse. **b)** Was ist die Ankathete zu γ ? **c)** Geben Sie $\sin\alpha$, $\cos\beta$ und $\tan\gamma$ durch Katheten und/oder Hypotenuse an. **d)** Skizzieren Sie den Verlauf der sinus-, cosinus- und tangens-Funktionen.

a) Offensichtlich ist γ der rechte Winkel. Damit ist c die Hypotenuse und a und b die Katheten. b) Beim rechten Winkel spricht man nicht unbedingt von Ankatheten, aber wenn Sie so wollen, könnte man auch beide Katheten als seine Ankatheten bezeichnen. c) $\sin\alpha = a/c$, $\cos\beta = a/c$; $\tan\gamma$ ist undefiniert. d) das sind keine undefinierbaren Schlängellinien … die Grafik braucht Achsen samt Werteskalen



2) Betrachten Sie kartesische Koordinaten: **a)** Welchen Winkel nimmt der Vektor (2,-1,0) zu den Koordinatenachsen ein? **b)** Wie lauten die Normaleneinheitsvektoren für die x-y-, x-z- und y-z-Ebenen?

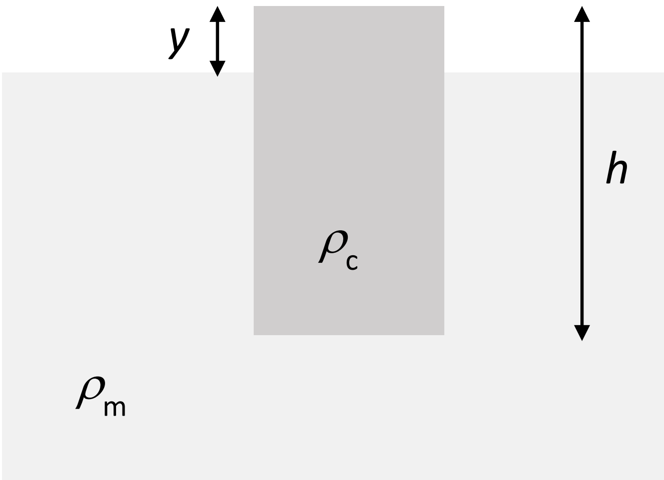
a) Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\left(\sphericalangle\vec{a},\vec{b}\right)$ *;* $\vec{e}_x = (1,0,0)$*,* $\vec{e}_y = (0,1,0)$ *und* $\vec{e}_z = (0,0,1)$ *und damit z.B.*

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2 = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.8944 \text{ oder } \alpha = 26.57°$$

b) für die x-y-Ebene: $\vec{e}_z = (0,0,1)$*, für die x-z-Ebene* $\vec{e}_y = (0,1,0)$ *und für die y-z-Ebene* $\vec{e}_x = (1,0,0)$

3) Das Airy-Modell für isostatisches Gleichgewicht von Kontinenten betrachtet Blöcke einheitlicher Dichte ρ_c mit unterschiedlichen vertikalen Ausdehnungen, die im Erdmantel mit der Dichte ρ_m „schwimmen". **a)** Wie muss sich die Dichte der Kontinente zur Dichte des Erdmantels verhalten, damit die Kontinente schwimmen? **b)** Wie groß ist der Auftrieb eines Blocks der Höhe h ? **c)** Wie hängt die topographische Höhe y (die Länge, die herausguckt) von der Blockhöhe h ab? **d)** Welche topographische Höhe erhält man für einen Block der Höhe $h = 35$ km für Dichten $\rho_\mathrm{c} = 2700$ kg/m³ und $\rho_\mathrm{m} = 3300$ kg/m³?



a) die Kontinente müssen eine geringere Dichte haben: $\rho_\mathrm{c} < \rho_\mathrm{m}$ *. b) Auftrieb = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit* $F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{m} gV = \rho_\mathrm{m} gA_\mathrm{c}(h-y)$*, wenn man die Querschnittfläche des Blocks mit* A_c *bezeichnet. c) die nach unten gerichtete Gewichtskraft des Blocks wirkt der nach oben gerichteten Auftriebskraft entgegen; die beiden Kräfte müssen sich ausgleichen, da Gleichgewicht herrscht:*

$$\begin{aligned}F_\mathrm{res} &= F_\mathrm{A} - G_\mathrm{c} = \rho_\mathrm{m} gV - \rho_c gV_\mathrm{c}\\ &= \rho_\mathrm{m} gA_\mathrm{c}(h-y) - \rho_c gA_\mathrm{c} h = 0\\ &\Rightarrow y = \frac{\rho_\mathrm{m}-\rho_c}{\rho_\mathrm{m}} h\end{aligned}$$

d) $y = \dfrac{3300-2700}{3300} 35 \text{ km} \simeq 6.4 \text{ km}$

4) An einem Handkarren der Masse $m = 25$ kg ziehen drei Personen: $F_1 =$ (2.5, 3, 0) kN, $F_2 =$ (-0.5, -1, 0) kN und $F_3 =$ (-2, 4, 0,15) kN (Angaben in einem kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) mit der z-Achse nach oben gerichtet). **a)** Wird sich der Handkarren in der horizontalen Ebene bewegen? (Rechnen und Zeichnen Sie) **b)** Was passiert in vertikaler Richtung?

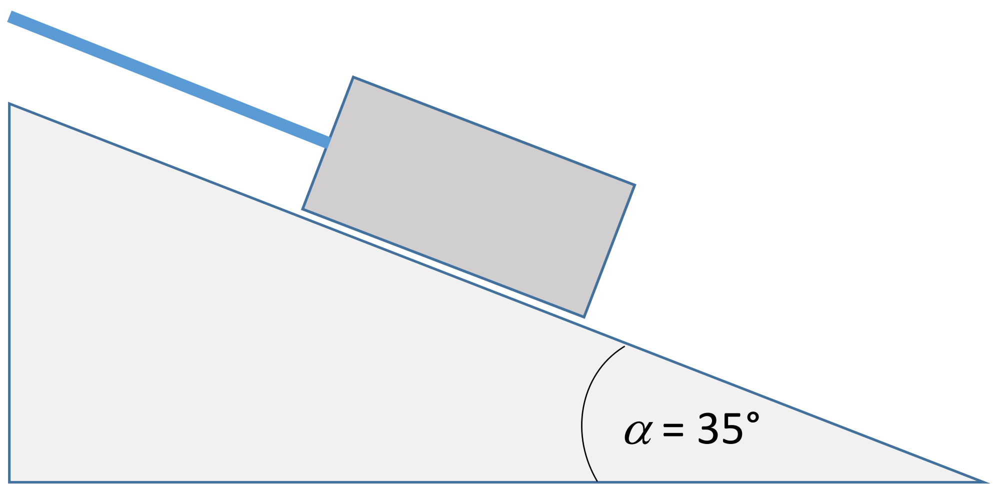
a) in der horizontalen Ebene: $\tilde{F}_{\mathrm{res}} = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 + \tilde{F}_3 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{kN} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{kN} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \mathrm{kN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \mathrm{kN}$ *, d.h. es gibt eine resultierende Kraft in y-Richtung (Zeichnung spare ich mir hier ...), auf Grund derer sich der Handkarren in y-Richtung bewegen wird; in vertikaler Richtung*

b) $F_{\mathrm{res},z} = 0 + 0 + 0.15 \text{ kN} - mg = 0.15 \text{ kN} - 250 \text{ N} = -0.1 \text{ kN}$ *, d.h., die Resultierende ist nach unten gerichtet und der Handkarren bleibt einfach auf dem Boden (der als Wiederlager fungiert und die Gewichtskraft aufnimmt*

5) Wie groß ist die Normalspannung unter einem „Pfennigabsatz“ mit einem Durchmesser von 1 cm, wenn die Person, die den Schuh trägt, ihr gesamtes Gewicht von 60 kg auf **a)** einen einzigen Absatz und **b)** auf beide Absätze verlagert?

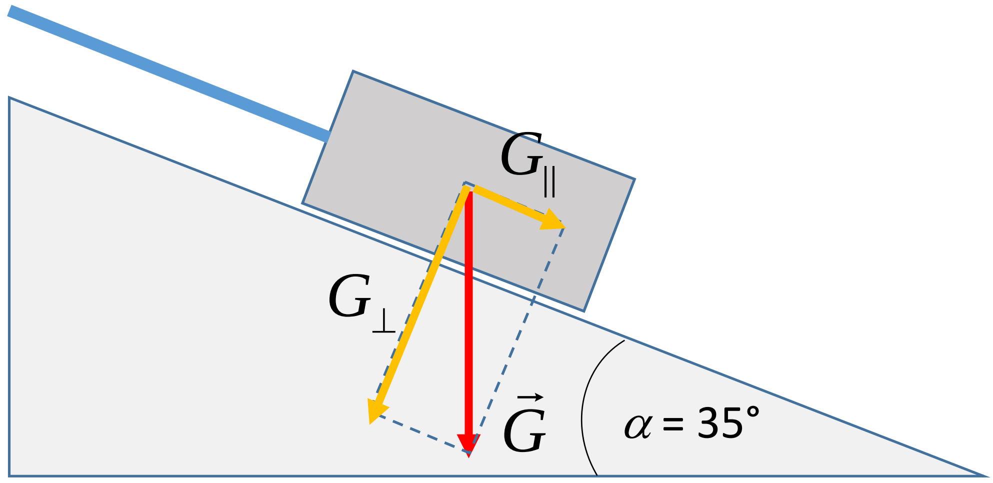
a) $\sigma_{\mathrm{n}} = \frac{G}{A} = \frac{mg}{\frac{\pi}{4} d^2} \simeq 7.6 \text{ MPa}$ *, b) halb so groß*

6) Betrachten Sie einen quaderförmigen Pyramidenbaustein Masse $m = 3000$ kg auf einer schiefen Ebene. Der Reibungskoeffizient der Berührfläche betrage $\mu = 0.6$. **a)** Der Quader habe eine Dichte $\rho = 2500$ kg/m³ und eine Grundfläche $A = 1$ m². Wie hoch ist er? **b)** Zerlegen Sie die Gewichtskraft des Quaders in eine Komponente parallel und eine normal zur schiefen Ebene und geben die Größe dieser Komponenten an. **c)** Ist das Seil für die Sicherung des Quaders vor Abrutschen nötig? Wird das Seil ausgelenkt und wenn ja um wieviel? (Vergleichen Sie die Hangabtriebskraft mit der Reibungskraft; betrachten Sie das Seil als eine Feder mit der Federkonstanten $D = 5$ kN/m.) **d)** Das Seil habe eine Anfangslänge von 25 m und einen Durchmesser von 10 cm. Um wieviel ändert sich der Durchmesser, wenn das Seil eine Poisson-Zahl von 0.3 aufweist.



a) $m = \rho V = \rho A h \Leftrightarrow h = \frac{m}{\rho A} = \frac{3000 \text{ kg}}{2500 \text{ kg/m}^3 \ 1 \text{ m}^2} = 1.2 \text{ m}$

b) $G_{\perp} = G \cos\alpha;\ G_{\parallel} = G \sin\alpha$ *, der Winkel* α *lässt sich auf das Zerlegungsdreieck übertragen (Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, sind gleich groß)*



c) hier muss man betrachten, ob die Hangabtriebskraft $G_{\|}$ *die Reibungskraft* $F_{\mathrm{R}} = \mu G_{\perp}$ *überschreitet;*

$G_{\|} = mg\sin\alpha \simeq 3000\ \mathrm{kg}\ 10\ \mathrm{m/s^2}\ \sin(35°) = 17.2\ \mathrm{kN}$,

$F_{\mathrm{R}} = \mu G_{\perp} = \mu mg\cos\alpha \simeq 0.6\ 3000\ \mathrm{kg}\ 10\ \mathrm{m/s^2}\ \cos(35°) = 14.7\ \mathrm{kN}$

da das hier der Fall ist, wirkt auf das Seil eine Kraft von $F_{\mathrm{S}} = G_{\|} - F_{\mathrm{R}} \simeq 2.5\ \mathrm{kN}$ *und die Auslenkung errechnet sich zu* $F_S = F_{\mathrm{F}} = Dx \Leftrightarrow x = \frac{F_S}{D} \simeq \frac{2.5\ \mathrm{kN}}{5\ \mathrm{kN/m}} = 0.5\ \mathrm{m}$

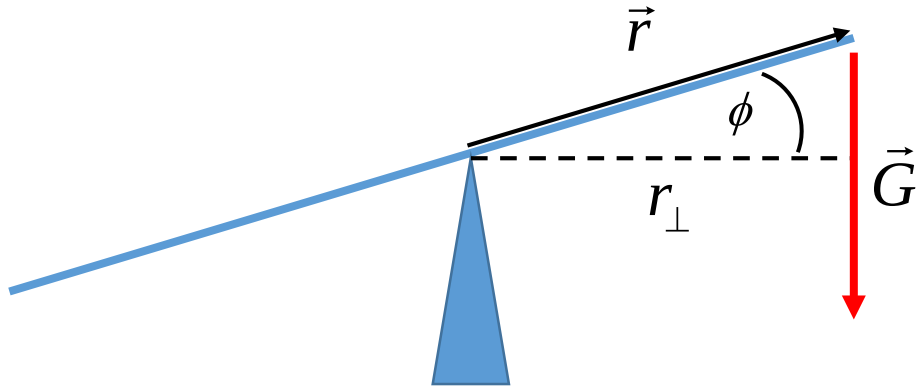
d) die relative Längenänderung beträgt $\varepsilon_{\mathrm{axial}} = x / l_0 = 0.5\ \mathrm{m} / 25\ \mathrm{m} = 0.02$, *aus* $v = -\varepsilon_{\mathrm{quer}} / \varepsilon_{\mathrm{axial}}$ *erhält man dann* $\varepsilon_{\mathrm{quer}} = -v\varepsilon_{\mathrm{axial}} = -0.3\ 0.02 = -0.006$ *für die relative Durchmesserreduzierung und absolut*

$\Delta d = \varepsilon_{\mathrm{quer}} d_0 = -0.06\ \mathrm{cm} = -0.6\ \mathrm{mm}$

7) Zwei Personen der Massen m_1 und m_2 sitzen im Abstand r_1 und r_2 vom Drehpunkt einer Wippe. **a)** Geben Sie die Drehmomente für die horizontal ausgerichtete Wippe an. **b)** Geben Sie allgemeiner die Drehmomente als Funktion des Wippenwinkels zur Horizontalen an.

a) $M_1 = m_1 g r_1$ *und* $M_2 = m_2 g r_2$, *wenn man das vektoriell korrekt machen möchte, würde man z.B. die Wippe in die x-Achse legen und die Gewichtskraft entgegen der z-Achse; die Drehmomente* $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{G}_i$ *liegen dann entlang der y-Achse;*

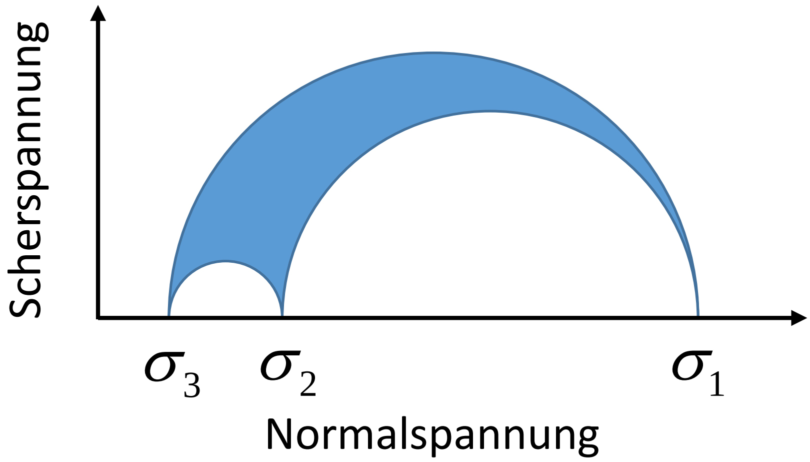
b) für das Kreuz- oder Vektorprodukt gilt: $M_i = r_i G_i \sin\left(\sphericalangle \vec{r}_i, \vec{G}_i\right)$ *(für* $\sphericalangle \vec{r}_i, \vec{G}_i = \frac{\pi}{2} (\hat{=} 90°)$ *ist der Sinus 1 und damit erhält man die unter a) gegebenen Drehmomentbeträge; hier* $\sphericalangle \vec{r}_i, \vec{G}_i = \frac{\pi}{2} + \varphi$, *wenn man den Winkel mit der Horizontalen als* φ *bezeichnet, so dass* $M_i = r_i G_i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) = r_i G_i \cos(\phi)$, *was man sich auch geometrisch mit verkürztem Hebelarm* $r_{\perp}$ *veranschaulichen kann)*



8) **a)** Was sagen die beiden Impulserhaltungssätze aus und **b)** welche Rolle spielen darin die Größen Kraft und Drehmoment?

a) Erhaltung des linearen Impulses: ein Körper verharrt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn keine resultierende Kraft auf ihn wirkt: die zeitliche Änderung des linearen Impulses gleicht der resultierenden Kraft $\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{\text{res}}$*; Erhaltung des Drehimpulses: ein Körper verharrt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Drehgeschwindigkeit, wenn kein resultierendes Drehmoment auf ihn wirkt: die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleicht dem resultierenden Drehmoment* $\dot{\vec{l}} = \vec{M}_{\text{res}}$*; b) siehe Antwort a)*

9) **a)** Skizzieren Sie die Mohr'schen Kreise für einen drei-dimensionalen Spannungszustand. **b)** Wo liegen die realisierten Spannungszustände? **c)** Wo treten im Mohr'schen Kreis die geringsten Scherspannungen und Normalspannungen auf? **d)** Wie nennt man die Richtungen der Normalen der Flächen, in denen keine Scherspannungen herrschen?



a)
b) in der blau gefärbten Fläche
c) Scherspannungen sind „null" für die Hauptnormalspannungen (liegen auf der x-Achse); die kleinste Hauptnormalspannung ist die kleinste auftretende Normalspannung
d) Hauptspannungsrichtungen

10) **a)** Wie sieht die Matrizendarstellung des Spannungstensors $\underline{\underline{\sigma}}$ für gleichförmigen Druck p (isostatische Spannungsverhältnisse) aus? **b)** Nutzen Sie die Darstellung des Spannungstensors aus a), um den Zusammenhang zwischen Kompressionsmodul K und dem Paar, Elastizitätsmodul E und Poisson-Zahl ν, zu ermitteln? $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{\underline{\mathrm{E}}}$, $\theta = \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right)$, $p = K\theta$ (die Größe θ gibt die relative Volumenänderung an).

a) $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p = \underline{\underline{\mathrm{E}}}p$, *b)*

$$\theta = \mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}\right) = \mathrm{Sp}\left(\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\underline{\underline{\mathrm{E}}}\right) = \frac{1+\nu}{E}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) - \frac{\nu}{E}\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right)\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\mathrm{E}}}\right)$$

$$= \frac{1+\nu}{E}p\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\mathrm{E}}}\right) - \frac{\nu}{E}p\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\mathrm{E}}}\right)\mathrm{Sp}\left(\underline{\underline{\mathrm{E}}}\right) = \frac{1+\nu}{E}p3 - \frac{\nu}{E}p3^2 = 3\left(\frac{1+\nu}{E} - \frac{3\nu}{E}\right)p$$

$$= 3\frac{1-2\nu}{E}p$$

(die Spur der Einheitsmatrix ist 1+1+1=3) und damit $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$

Werkzeugkasten:

$F_{\mathrm{R}} = \mu F_{\mathrm{n}}$

$F_{\mathrm{F}} = Dx$

$\nu = -\varepsilon_{\mathrm{quer}} / \varepsilon_{\mathrm{axial}}$