Klausur zur Mathematik für Geowissenschaftler 2
Sommersemester 2011, 13.07.2011

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$ mehrerer Veränderlicher auf lokale Extremstellen bzw. Sattelstellen. Geben Sie zu den Extrem- und Sattelstellen auch jeweils den Funktionswert von f(x,y) an!
Hinweis: Die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f(x,y) sind
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2-(y-1)^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2(x-1)\mathrm{e}^{-(y-1)^2-(y-1)^2}$
Sie dürfen diese Ableitungen direkt benutzen ohne sie nachzurechnen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei die Menge $M:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 4\leq x^2+y^2\leq 9, x\leq 0, y\geq |x|\}$. Berechnen Sie das Integral $\int 16(x^2+y^2)\mathrm{e}^{(x^2+y^2)^2}d(x,y)$. Skizzieren Sie dazu zunächst die Menge M.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'=\frac{3\mathrm{y}}{x}+x^4$ (für $x\neq 0$), sowie die spezielle Lösung zur Anfangsbedingung $y(-1)=1$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Sei A die 2x2-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A. Wie muss a gewählt werden, damit A mindestens einen negativen Eigenwert hat?

Aufgabe 5 (2+1+1,5+1,5 Punkte)
a) Sei $f(x)=\cos(2\mathrm{x})$. Bestimmen sie das Taylorpolynom $T_{2,\pi}$ von f in π.

b) Seien $z_1=1+i$ und $z_2=1-2\mathrm{i}$ komplexe Zahlen. Berechnen Sie das Produkt $z_1\cdot z_2$.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung π $y''-y'=0$.

d) Sei $v(x,y,z)=(x+y+z, x\cdot y\cdot z, 1)$ ein Vektorfeld. Bestimmen sie die Divergenz von v.

Aufgabe 6 (1+2+1+2 Punkte)
a) Geben Sie den Median und das 75%-Quantil einer Messreihe an, die aus den Messungen 3, 5, 2, 0 und -1 besteht.

b) Berechnen Sie den Pearsonschen Korrelationskoeffizienten zwischen den Beobachtungsgrößen X und Y aus den folgenden Messungen X(3.0, 1.0, 2.0) Y(1.0, 2.0, 3.0)

c) Geben Sie mit Hilfe der untenstehenden Quantilstabelle die Wahrscheinlichkeit an, mit der eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X den Wert -1.96 überschreitet, d.h. P(X > -1.96).

d) Nehmen Sie an, als Ergebnis einer Studie soll ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ einer Stichprobe von normalverteilten, unabhängigen Messungen $N(\mu, o^2)$ mit i=1, …, n bestimmt werden. Als Mittelwert der n=8 Messungen ergab sich $\bar{x}=-15.0$ und als empirische Varianz $s^2=64.0$. Geben Sie ein zweiseitiges 90%-Konfidenzintervall für μ an.