Mathematatik I für Geowissenschaftler und Sales-Engineering

Aufgaben des 1. Tests vom Freitag 21.11.2008

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x^2 + 4x - 8 \leq |x+2|$$

Lösung:

1.Fall: $x \geq -2 \Rightarrow$ Zu Lösen ist $x^2 + 4x - 8 \leq x + 2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 8 &\leq x + 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &\geq -5 \ \wedge \ x \leq 2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unter Beachtung der Fallunterscheidungsbedingung die Lösung $L_1 = [-2, 2]$.

2. Fall: $x < -2 \Rightarrow$ Zu Lösen ist $x^2 + 4x - 8 \leq -x - 2$:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 8 &\leq -x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad x &\geq -6 \ \wedge \ x \leq 1, \end{aligned}$$

und aus der Fallunterscheidungsbedingung ergibt sich als Lösung $L_2 = [-6, -2)$.

Die Gesamtlösung ist somit $L = L_1 \cup L_2 = [-6, 2]$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Gültigkeit der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = \frac{n \cdot (3n - 1)}{2}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hinweis: $\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = 1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2)$.

Lösung:

Induktionsanfang ($n = 1$): $3 \cdot 1 - 2 = 1 = \frac{1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)}{2}$ stimmt offensichtlich.
Induktionsschritt ($n_0 \to n_0 + 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_0+1} (3k-2) &= \left(\sum_{k=1}^{n_0} (3k-2) \right) + (3(n_0+1)-2) \\ &= \ldots = \frac{(3n_0+2)(n_0+1)}{2}, \end{aligned}$$

womit der Induktionsschritt erfolgreich überprüft ist.

Aufgabe 3
Stellen Sie fest, ob die Folgen (a_n) bzw. (b_n) konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Dabei seien die Folgenglieder der Folgen (a_n) und (b_n) gegeben durch

$$a_n := \frac{2n^5 + 3n^3 - 7}{(-2) \cdot n^3 \cdot (n^2 + 1)} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{4^n - 5 \cdot 6^n}{2 \cdot 7^n}$$

Lösungen:
Der Grenzwert der Folge (a_n) ergibt sich durch Kürzen von n^5 zu -1, und der Grenzwert von (b_n) durch Kürzen von 7^n zu 0.