Mathematik I für Geowissenschaftler und Sales-Engineering

Aufgaben des 2. Tests vom Freitag 19.12.2008

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Untersuchen Sie, ob die Folge mit den Folgengliedern

$$a_n := \sqrt{n^2 - 5n + 10} - \sqrt{n^2 + 5n + 10}$$

konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
Hinweis: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2-5n+10}{n^2}} = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+5n+10}{n^2}} = 1$

Lösung:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 - 5n + 10} - \sqrt{n^2 + 5n + 10} \\ &= \frac{(n^2 - 5n + 10) - (n^2 + 5n + 10)}{\sqrt{n^2 - 5n + 10} + \sqrt{n^2 + 5n + 10}} \\ &= \frac{-10}{\sqrt{\frac{n^2-5n+10}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2+5n+10}{n^2}}} \end{aligned}$$

Zusammen mit den Hinweisen ergibt sich, daß die Folge a_n konvergent ist mit Grenzwert -5.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\searrow 0} \left(x^5 \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^3} + \frac{25}{x^{10}}} \right) \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow 0} \left(x^5 \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^3} + \frac{25}{x^{10}}} \right)$$

Lösung:

$$\lim_{x\searrow 0} \left(x^5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{25}{x^{10}}} \right) = \lim_{x\searrow 0} \sqrt{x^10 + 7x^7 + 25} = 5$$

$$\lim_{x\nearrow 0} \left(x^5 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{25}{x^{10}}} \right) = \lim_{x\nearrow 0} \left((-\sqrt{x^{10}}) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^3} + \frac{36}{x^{10}}} \right) = -5$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Ableitungen der Funktionen

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x} - x^2\right)^3 \ \text{(für } x > 0) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-2)^2} \ \text{(für } x \neq 2)$$

und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich.

Lösungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x^{-2/3} - 2x\right) \cdot \left(x^{1/3} - x^2\right)^2 = -6\,x^5 + 13\,x^{\frac{10}{3}} - 8\,x^{\frac{5}{3}} + 1 \\ g'(x) &= \frac{2 \cdot x \cdot \left(x^2 - 6x + 6\right)}{(x-2)^3} = \frac{2x^3 - 12x^2 + 12x}{(x-2)^3} \end{aligned}$$