

Mathematik I für Geowissenschaftler und Sales-Engineering
Aufgaben des 3. Tests vom Freitag 23.1.2009

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei das Polynom $P(x)$ gegeben durch

$$P(x) = x^3 + x^2 + ax - 12.$$

Bestimmen Sie die Konstante a so, daß das Polynom $P(x)$ bei -2 eine Nullstelle hat. Teilen Sie dazu zunächst $P(x)$ mit Hilfe einer Polynomdivision durch $(x + 2)$ und bestimmen Sie dann aus dem Ergebnis einen geeigneten Wert für die Konstante a .

Geben Sie dann noch alle Nullstellen und deren Grad (d.h. Vielfachheit) von $P(x)$ für den Fall an, daß a so gewählt wird, daß -2 Nullstelle von $P(x)$ ist.

Lösung:

Aus der Polynomdivision ergibt sich $P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - x + a + 2) + \underbrace{-2a - 16}_{R(x)}$.

Der Rest $R(x)$ ist also genau dann Null, wenn $a = -8$ ist. Setzt man diesen Wert für a in $P(x)$ ein, so erhält man

$$[P(x) =] \quad x^3 + x^2 - 8x - 12 = (x + 2) \cdot \underbrace{(x^2 - x - 6)}_{Q(x)}.$$

$Q(x)$ hat als Nullstellen 3 und -2 . Somit hat $P(x)$ im Fall von $a = -8$ die Nullstellen 3 (mit Grad bzw. Vielfachheit 1) und -2 (mit Grad bzw. Vielfachheit 2).

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = e^{-x} \cdot (-x^3 + 4x + 4).$$

Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)$ und das Verhalten von $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ und erstellen Sie eine Skizze von f .

Hinweis: Für die Berechnung der Funktionswerte an den Minima/Maxima von f können Sie die folgenden Näherungen benutzen: $e \approx 2.7$ und $e^4 \approx 50$ (d.h. $\frac{1}{e^4} \approx 0.02$).

Die Ableitungen von $f(x)$ sind

$$f'(x) = e^{-x} \cdot (x^3 - 3x^2 - 4x)$$

und

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (-x^3 + 6x^2 - 2x - 4).$$

Die Extremwerte ergeben sich durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung und des Vorzeichens der zweiten Ableitung zu:

- Minimum bei $x_1 = -1$ (mit $f''(-1) = 5e$ und Funktionswert $f(-1) = e$),
- Maximum bei $x_2 = 0$ (mit $f''(0) = -4$ und Funktionswert $f(0) = 4$) und
- Minimum bei $x_3 = 4$ (mit $f''(4) = 20/e^4$ und Funktionswert $f(4) = -44/e^4$).

Außerdem gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.