

1 PARAMETRISIERTE SPEKTREN

Gerd Laures

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 288
D-69120 Heidelberg

Einleitung

Die moderne stabile Homotopietheorie findet ihre natürliche Formulierung in der Kategorie der *Spektren*. Die vorliegende Arbeit gibt eine allgemeine und einfache Version dieser Kategorie an, die mit allen wünschenswerten, zu erwartenden Eigenschaften ausgestattet ist.

Die erste *stabile* Kategorie definierten E.H. Spanier und J.H.C. Whitehead [SW] 1955 zur geeigneten Beschreibung ihres berühmten Dualitätssatzes für endliche Polyeder. Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf eine größere Klasse von Räumen führte Spaniers Schüler Lima [Li] drei Jahre später auf den Begriff eines Spektrums. Ein solches Objekt besteht aus einer Folge von punktierten Räumen $X = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ zusammen mit Strukturabbildungen

$$\xi_n : S^1 \wedge X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

für jedes $n \in \mathbf{N}$. Ein entscheidender Vorteil dieser Definition bestand in der Existenz von (stabilen) Eilenberg-MacLane-Objekten, die J.F. Adams in [Ad1] eine natürlichere Fassung seiner Spektralsequenz ermöglichten. Auch andere Co- bzw. Homologietheorien als die singuläre wie die K -Theorie oder der Bordismus ließen sich durch Spektren repräsentieren. Die multiplikativen Strukturen beschrieb G.W. Whitehead [Wh1] durch Abbildungen

$$f_{p,q} : X_p \wedge Y_q \longrightarrow Z_{p+q}$$

zwischen Spektren X, Y und Z . Die Morphismenmengen in seiner Kategorie waren allerdings für viele Zwecke zu klein: Grundlegende Konstruktionen wie der Abbildungskegel mit den üblichen Eigenschaften konnten hier nicht existieren (vgl. [Pu1]).

Die erste allgemein anerkannte Version für CW-Spektren wurde erst 1969 von J.M. Boardman [Bo] vorgestellt. Ein \wedge -Produktbifunktor wirkt auf Boardmans Kategorie und macht die zugehörige Homotopiekategorie symmetrisch monoidal mit dem Einhängungsspektrum der 0-Sphäre (S^0, id_{S^0}) als Einsobjekt. Leider entstanden in diesem Zusammenhang auch Hindernisse, die eine Verallgemeinerung geometrischer Konstruktionen wie die Bildung von Schleifenspektren und Gruppenoperationen auf Spektren oder die Definition von parametrisierten Spektren nicht zuließen. Aus diesem Grund wurde bereits 1973 in [Pu2] ein koordinatenfreier Zugang zum Produkt vorgeschlagen.

Bezeichnet $\{e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbf{R}^\infty := \operatorname{colim} \{\mathbf{R}^0 \subset \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 \subset \dots\}$ und fassen wir die 1-Sphäre als Ein-Punkt-Kompaktifizierung $S^{\mathbf{R}e_n}$ von $\mathbf{R}e_n$ auf, so läßt sich jedes Spektrum auch in der Form

$$(X_{\mathbf{R}^n}, \xi_n : S^{\mathbf{R}e_n} \wedge X_{\mathbf{R}^n} \longrightarrow X_{\mathbf{R}^{n+1}})$$

schreiben, d.h. die gewöhnliche Notation eines Spektrums benutzt in diesem Sinn implizit eine fest gewählte Basis des \mathbf{R}^∞ . Ersetzt man die Indexmenge \mathbf{N} durch die Menge aller

endlichdimensionalen Teilräume a eines euklidischen Vektorraums U abzählbarer Dimension, so wird durch

$$((U, X) \wedge (U', X'))_{a \times a'} := X_a \wedge X'_{a'} \quad \text{für } a \times a' \subset U \times U'$$

in kanonischer Weise ein Produkt von Spektren $(U, X), (U', X')$ gegeben. Dieser Ansatz übertrug sich in [CP] nun auch auf den parametrisierten Fall, der seine Motivation ebenfalls aus einer Verallgemeinerung der Spanier-Whitehead-Dualität schöpft (vgl. [Cl1], [Cl2] und [DP]).

Die Entwicklungen der letzten Jahre auf dem Gebiet der stabilen Homotopietheorie haben die Notwendigkeit eines \wedge -Produkts von Spektren deutlich gemacht, welches bereits vor dem Übergang zur Homotopiekategorie assoziativ ist und ein Einsobjekt besitzt. In [El] werden deshalb die über verschiedenen parametrisierten Vektorräumen indizierten Spektren zu einer großen, symmetrisch monoidalen Kategorie \mathcal{S} zusammengefaßt. Leider sind die hier verwendeten Indextmengen zu groß, so daß $\{\mathbf{R}^n \times B \xrightarrow{pr} B; n \in \mathbf{N}\}$ nicht immer cofinal in dem parametrisierten Vektorraum $\mathbf{R}^\infty \times B \xrightarrow{pr} B$ ist. Außerdem werden hier keine inneren Produkte für \mathbf{N} -indizierte Spektren konstruiert, die keine CW-Spektren sind.

Dem Weg von A.D. Elmendorf folgend wird in dieser Arbeit zunächst eine große, symmetrisch monoidale Kategorie \mathcal{S} für Spektren über den unparametrisierten Indextmengen entwickelt, die sich zudem abgeschlossen gegenüber allen kleinen Colimites und Limites verhält. Von der Projektion

$$p : \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \longrightarrow \mathcal{E}(U, V),$$

die jedem Morphismus in \mathcal{S} die zugrundeliegende Isometrie zwischen den euklidischen Vektorräumen U und V zuordnet, kann die Deckhomotopieeigenschaft für kompakte Räume nachgewiesen werden, wenn (U, X) ein cofibrantes Spektrum ist. Also erbt die volle Unterkategorie $\mathcal{S}_{c\mathbf{N}}$ von $p^{-1}(id_{\mathbf{R}^\infty})$, deren Objekte \mathbf{N} -indizierte cofibrante Spektren sind, ein assoziatives und symmetrisches \wedge -Produkt mit Einsobjekt von \mathcal{S} auf dem Homotopieniveau. Auf diese Weise entsteht ein Bindeglied zwischen den stabilen Kategorien aus [CP] und [El]. Mit Hilfe von homotopiecovollständigen Klassen werden dann CW-Spektren in $\mathcal{S}_{c\mathbf{N}}h$ eingeordnet und die Äquivalenz zu Boardmans Kategorie hergestellt. Die Einfachheit des \wedge -Produkts ermöglicht schließlich den Nachweis für dessen Verträglichkeit mit schwachen Homotopieäquivalenzen.

1.1 \mathcal{A} -indizierte Präspektren und Spektren

1.1.1 Wir bezeichnen mit \mathcal{E} die Kategorie der Isometrien. Objekte in \mathcal{E} seien euklidische Vektorräume U höchstens abzählbarer Dimension versehen mit der schwachen Topologie ihrer endlich dimensionalen Untervektorräume $a \subset U$, die die kanonische Topologie tragen

$$U = \operatorname{colim}_{a \subset U} a .$$

Als Morphismen lassen wir nur Isometrien zu, damit Bilder orthogonaler Unterräume orthogonal bleiben.

Eine *Indexmenge* \mathcal{A} über $U \in |\mathcal{E}|$ sei eine Teilmenge von \mathcal{U} , der Menge aller endlich dimensionalen Untervektorräume in U . Aus technischen Gründen verlangen wir, daß jede solche Indexmenge additiv ist, d.h. mit a und b sei auch $a + b$ in \mathcal{A} enthalten.

1.1.2 Beispiel. $\{\mathbf{R}^n, n \geq 0\}$ ist eine Indexmenge für $\mathbf{R}^\infty := \text{colim}\{\mathbf{R}^n, n \geq 0\}$. Hierfür werden wir auch einfach \mathbf{N} schreiben und die dazugehörigen Objekte mit natürlichen Zahlen indizieren.

Für jedes $a \subset b \in \mathcal{U}$ bezeichne $b - a \in \mathcal{U}$ das orthogonale Komplement von a in b . Außerdem schreiben wir S^a für die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von a und Ω_B^a für den Abbildungsraum $F_B^B(S_B^a, _)$ in der Kategorie \mathcal{O}_B^B der fasernweise punktierten, parametrisierten Räume mit offenen Projektionen (vgl. Anhang A).

1.1.3 Definition. Ein \mathcal{A} -indiziertes parametrisiertes Präspektrum X über B besteht aus einer Familie von parametrisierten Räumen $\{X_a \in \mathcal{O}_B^B; a \in \mathcal{A}\}$ zusammen mit einer Familie von *Strukturabbildungen* in \mathcal{O}_B^B

$$\xi_{b,a} : S_B^{b-a} \wedge_B X_a \longrightarrow X_b$$

für alle $a \subset b \in \mathcal{A}$, die untereinander in folgender Weise verträglich sind: Mit $a \subset b \subset c \in \mathcal{A}$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} S_B^{c-b} \wedge_B S_B^{b-a} \wedge_B X_a & \xrightarrow{id \wedge_B \xi_{b,a}} & S_B^{c-b} \wedge_B X_b \\ \cong \downarrow h \wedge_B id & & \downarrow \xi_{c,b} \\ S_B^{c-b} \wedge_B X_a & \xrightarrow{\xi_{c,a}} & X_c \end{array}$$

wobei $h : S_B^{c-b} \wedge_B S_B^{b-a} = (S^{c-b} \wedge S^{b-a})_B \longrightarrow S_B^{c-a}$ der kanonische Isomorphismus ist, welcher fasernweise durch $(c-b) \oplus (b-a) \cong (c-a)$ induziert wird. Außerdem sei $\xi_{a,a} : S_B^0 \wedge_B X_a \rightarrow X_a$ der naheliegende Isomorphismus.

Ein Morphismus zwischen \mathcal{A} -indizierten parametrisierten Präspektren $f : X \longrightarrow Y$ ist eine Familie von parametrisierten Abbildungen $\{f_a \in \mathcal{O}_B^B(X_a, Y_a); a \in \mathcal{A}\}$, so daß mit $a \subset b$

$$\begin{array}{ccc} S_B^{b-a} \wedge_B X_a & \xrightarrow{\xi_{b,a}} & X_b \\ \downarrow id_{S_B^{b-a}} \wedge_B f_a & & \downarrow f_b \\ S_B^{b-a} \wedge_B Y_a & \xrightarrow{\eta_{b,a}} & Y_b \end{array}$$

kommutativ ist. Die resultierende Kategorie wird mit $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ bezeichnet.

Ein \mathcal{A} -indiziertes parametrisiertes Spektrum ist ein Präspektrum $X \in |\mathcal{P}_{\mathcal{A}}|$, dessen Ad-

jungierte zu den Strukturabbildungen $\xi^{b,a} : X_a \longrightarrow \Omega_B^{b-a} X_b$ Isomorphismen in \mathcal{O}_B^B sind. \mathcal{S}_A sei die volle Unterkategorie von \mathcal{P}_A , deren Objekte Spektren bilden.

1.1.4 Bemerkung. Die Verträglichkeit der Strukturabbildungen kann auch für alle $X \in |\mathcal{P}_A|$ und $a \subset b \subset c \in \mathcal{A}$ durch die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} X_a & \xrightarrow{\xi^{b,a}} & \Omega_B^{b-a} X_b \\ \downarrow \xi^{c,a} & & \downarrow \Omega_B^{b-a} \xi^{c,b} \\ \Omega_B^{c-a} X_c & \xrightarrow{h^* \cong} & \Omega_B^{b-a} \Omega_B^{c-b} X_c \end{array}$$

ausgedrückt werden. □

Die folgenden Ergebnisse eröffnen uns eine hohe Flexibilität in der Wahl der Indexmenge.

1.1.5 Feststellung. *Es sei $\rho : \mathcal{P}_B \longrightarrow \mathcal{P}_A$ der kanonische Restriktionsfunktor für Indexmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Dann gilt:*

- (i) ρ hat ein Linksadjungiertes $\sigma : \mathcal{P}_A \longrightarrow \mathcal{P}_B$.
- (ii) Ist \mathcal{A} cofinal in \mathcal{B} , d.h. gibt es zu jedem $b \in \mathcal{B}$ ein $a \in \mathcal{A}$ mit $b \subset a$, so ist die Einschränkung von ρ auf Spektren $\tilde{\rho} : \mathcal{S}_B \longrightarrow \mathcal{S}_A$ eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis: (i) Für jedes $b \in \mathcal{B}$ sei $\tilde{b} := \sum_{a \in \mathcal{A}} a$. Wir setzen

$$(\sigma X)_b := \begin{cases} S_B^{b-\tilde{b}} \wedge_B X_{\tilde{b}}; & \tilde{b} \in \mathcal{A} \\ X_{\tilde{b}} := B; & \tilde{b} \notin \mathcal{A} \end{cases} \quad \text{mit Strukturabbildungen}$$

$$S_B^{b'-b} \wedge_B S_B^{b-\tilde{b}} \wedge_B X_{\tilde{b}} \cong S_B^{b'-\tilde{b}'} \wedge_B S_B^{\tilde{b}'-\tilde{b}} \wedge_B X_{\tilde{b}} \xrightarrow{id \wedge_B \xi_{\tilde{b}',\tilde{b}}} S_B^{b'-\tilde{b}'} \wedge_B X_{\tilde{b}'}$$

für alle $X \in |\mathcal{P}_A|$ und $b \subset b' \in \mathcal{B}$. Die Definition von σ auf Morphismen ist offensichtlich. Weil für jedes $f \in \mathcal{P}_B(\sigma X, Y)$ und $b \in \mathcal{B}$ das untere Diagramm kommutativ ist, sind

$$\begin{array}{ccc} S_B^{b-\tilde{b}} \wedge_B S_B^0 \wedge_B X_{\tilde{b}} = S_B^{b-\tilde{b}} \wedge_B (\sigma X)_{\tilde{b}} & \xrightarrow{id_{S_B^{b-\tilde{b}}} \wedge_B f_{\tilde{b}}} & S_B^{b-\tilde{b}} \wedge_B Y_{\tilde{b}} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \eta_{b,\tilde{b}} \\ S_B^{b-\tilde{b}} \wedge_B X_{\tilde{b}} = (\sigma X)_b & \xrightarrow{f_b} & Y_b \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\sigma X, Y) &\longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(X, \rho Y), & f &\longmapsto (X_a \xrightarrow{\cong} S_B^0 \wedge_B X_a \xrightarrow{f_a} Y_a, a \in \mathcal{A}) \\ \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(X, \rho Y) &\longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\sigma X, Y), & g &\longmapsto (S_B^{b-\bar{b}} \wedge_B X_{\bar{b}} \xrightarrow{id \wedge_B g_{\bar{b}}} S_B^{b-\bar{b}} \wedge_B Y_{\bar{b}} \xrightarrow{\eta_{b,\bar{b}}} Y_b, b \in \mathcal{B}) \end{aligned}$$

invers zueinander.

(ii) Wir erweitern $X \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ durch

$$\widetilde{X}_b := \operatorname{colim}_{\substack{a \supset b \\ a \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{a-b} X_a$$

zu einem \mathcal{B} -indizierten Spektrum. Das System, über das hier der Colimes gebildet wird, ist wegen der Cofinalität von \mathcal{A} in \mathcal{B} nicht leer und die dazugehörigen Abbildungen für $b \subset a \subset a'$ sind gegeben durch $\Omega_B^{a-b} X_a \xrightarrow{\cong} \Omega_B^{a-b} \Omega_B^{a'-a} X_{a'} \cong \Omega_B^{a'-b} X_{a'}$. Nach Bemerkung 1.4 sind diese untereinander verträglich. Die Strukturabbildungen werden von den Isomorphismen $\Omega_B^{a-b} X_a \cong \Omega_B^{b'-b} \Omega_B^{a-b'} X_a \xrightarrow{\cong} \Omega_B^{b'-b} \operatorname{colim} \Omega_B^{a-b'} X_a$ für jedes $b \subset b' \subset a$ induziert. War X bereits auf \mathcal{B} definiert, so erhalten wir via

$$\widetilde{\rho X}_b \xrightarrow{\cong} \Omega_B^{a-b} \widetilde{\rho X}_a \cong \Omega_B^{a-b} X_a \xleftarrow{\cong} X_b$$

einen Isomorphismus in $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$. □

1.1.6 Satz. *Der Inklusionsfunktor $\iota : \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ hat ein Linksadjungiertes $\epsilon : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.*

Der *Beweis* wird in mehreren Schritten erfolgen.

Es bezeichne $\mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, deren Objekte Einbettungspräspektren sind, d.h. die Strukturabbildungen $\xi^{b,a}$ sind für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gewöhnliche Einbettungen von Räumen.

1.1.7 Hilfssatz. *In $\mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ existieren alle kleinen Limites und der Inklusionsfunktor $\iota' : \mathcal{P}e_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ erhält diese.*

Beweis: Die kleinen Limites in $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ werden termweise für jedes $a \in \mathcal{A}$ gebildet:

$$\left(\lim_{j \in J} X^j\right)_a := \lim_{j \in J} X_a^j \xrightarrow{\lim_{j \in J} \xi^{b,a}} \lim_{j \in J} \Omega_B^{b-a} X_b^j \cong \Omega_B^{b-a} \lim_{j \in J} X_b^j \cong \Omega_B^{b-a} \left(\lim_{j \in J} X^j\right)_b \quad (\text{vgl. A.8(i)}).$$

Wegen der Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} (\prod_{j \in J} X_a^j) \times B & \xrightarrow{(\prod_{j \in J} \xi^{b,a}) \times id_B} & (\prod_{j \in J} \Omega_B^{b-a} X_b^j) \times B \\ \cup & & \cup \\ \lim_{j \in J} X_a^j & \xrightarrow{\lim_{j \in J} \xi^{b,a}} & \lim_{j \in J} \Omega_B^{b-a} X_b^j \end{array}$$

existieren auch in $\mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$ alle kleinen Limites und die Inklusion $\iota' : \mathcal{P}e_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ erhält diese. □

Die folgende Konstruktion geht auf L. G. Lewis zurück.

1.1.8 Hilfssatz. $\iota' : \mathcal{P}e_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ hat ein Linksadjungiertes $\lambda : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$.

Beweis: Für $X \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ setzen wir

$$\lambda X := \lim_{\mathcal{J}} F \in \mathcal{P}e_{\mathcal{A}}.$$

Die Objekte der Kategorie \mathcal{J} seien Repräsentanten für Isomorphieklassen in $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ von termweise surjektiven Abbildungen von X in ein Einbettungspräspektrum E und die Morphismen Abbildungen unter X , d.h. jedes

$$f : (\alpha : X \rightarrow E_{\alpha}) \longrightarrow (\beta : X \rightarrow E_{\beta})$$

ist eine Abbildung $\varphi : E_{\alpha} \longrightarrow E_{\beta} \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ mit $\varphi \alpha = \beta$. $F : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$ ist der Projektionsfunktors, welcher jedem $\alpha : X \rightarrow E_{\alpha}$ sein Zielpräspektrum E_{α} zuordnet.

Wir müssen zeigen, daß die Objekte von \mathcal{J} eine Menge bilden: \mathcal{A} ist eine Menge und für jedes $a \in \mathcal{A}$ gibt es nur eine Menge von Isomorphieklassen der Quotientenmengen von X_a . Schließlich bilden alle möglichen Topologien für diese Quotientenmenge auch wieder nur eine Menge. Also existiert $\lim_{\mathcal{J}} F$ in $\mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$ nach 1.7.

Die Adjunktion $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(X, \iota' X') \cong \mathcal{P}e_{\mathcal{A}}(\lambda X, X')$ folgt jetzt wie in [LMS] S.475ff. \square

1.1.9 Hilfssatz. Der Inklusionsfunktors $\iota'' : \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{P}e_{\mathcal{A}}$ hat ein Linksadjungiertes ω .

Beweis: Zu $a \in \mathcal{A}$ und $X \in |\mathcal{P}e_{\mathcal{A}}|$ sei

$$(\omega X)_a := \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a} X_b \in \mathcal{O}_B^{\mathcal{B}},$$

wobei die Verbindungsabbildungen von den Strukturabbildungen $\xi^{b,a}$ induziert werden. Weil alle $\xi^{b,a}$ Einbettungen sind und der Funktors Ω_B^{b-a} diese erhält, handelt es sich hier um den gewöhnlichen Colimes von Räumen (vgl. A.2). Für $a \subset a' \in \mathcal{A}$ sind die Strukturabbildungen gegeben durch

$$\operatorname{colim}_{\substack{b \supset a \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a} X_b \cong \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{a'-a} \Omega_B^{b-a'} X_b \xrightarrow{\kappa} \Omega_B^{a'-a} \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b.$$

κ hat hierbei die Form $\{\Omega_B^{a'-a} \kappa_b, a' \subset b \in \mathcal{A}\}$ mit den universellen Abbildungen

$$\kappa_b : \Omega_B^{b-a'} X_b \longrightarrow \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b.$$

Wir möchten zeigen, daß κ ein Isomorphismus ist: Ein Element in $\Omega_B^{a'-a} \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b$ hat die Form $f : S^{a'-a} \longrightarrow \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b$ (vgl. A.3). Weil $S^{a'-a}$ kompakt ist, ist $f(S^{a'-a})$ bereits in einem $\Omega_B^{b-a'} X_b$ enthalten. Also ist κ surjektiv. κ ist injektiv, denn die universellen Abbildungen κ_b sind es.

Sei schließlich $s : K \longrightarrow \Omega_B^{a'-a} \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b$ eine stetige Abbildung mit kompakter Quelle K . Indem wir s mit der Inklusion

$$\Omega_B^{a'-a} \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b \subset \Omega_B^{a'-a} \operatorname{colim}_{\substack{b \supset a' \\ b \in \mathcal{A}}} \Omega_B^{b-a'} X_b$$

zusammensetzen und zur adjungierten Abbildung übergehen, sehen wir, daß $s(K)$ bereits in einem $\Omega_B^{a'-a} \Omega_B^{b-a'} X_b$ enthalten sein muß. Also ist auch das mengentheoretische Inverse zu κ stetig und κ ein Isomorphismus.

Die universellen Abbildungen $(X_a \rightarrow (\omega X)_a, a \in \mathcal{A})$ entsprechen jetzt der Eins der Adjunktion (ω, λ'') . \square

Zum *Beweis* des Satzes 1.6 setzen wir $\epsilon := \omega \lambda : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Die Aussage folgt aus 1.8 und 1.9. \square

1.1.10 Folgerung. *In $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ existieren alle kleinen Limites und Colimites.*

Beweis: Für $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ wurde die Existenz von kleinen Limites bereits in 1.7 gezeigt. Weil Ω_B mit \lim vertauscht, erbt $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ die Limites von $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Colimites in $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ werden termweise gebildet (vgl. A.8). Die Strukturabbildungen resultieren aus der Beziehung

$$(\operatorname{colim}_{j \in J} X_j) \wedge_B S_B^n \cong \operatorname{colim}_{j \in J} (X_j \wedge S_B^n).$$

Weil ι die Inklusion einer vollen Unterkategorie ist, wird der Colimes in $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ durch $\epsilon \operatorname{colim} \iota X_j$ gegeben:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\epsilon \operatorname{colim}_{j \in J} \iota X_j, Y) \cong \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\operatorname{colim}_{j \in J} \iota X_j, \iota Y) \cong \lim_{j \in J} \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\iota X_j, \iota Y) \cong \lim_{j \in J} \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(X_j, Y)$$

\square

Wir stellen die Beziehungen zwischen den einzelnen Funktoren dieses Abschnitts zusammen:

1.1.11 Hilfssatz. *Sei \mathcal{A} eine cofinale Indexmenge in \mathcal{B} . Dann gilt:*

$$\begin{array}{ccc} & (i) \epsilon \rho \cong \tilde{\rho} \epsilon & (ii) \tilde{\rho} \epsilon \sigma \cong \epsilon \\ & \xrightarrow{\rho} & \\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}} & \xrightleftharpoons[\sigma]{\rho} & \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \\ \downarrow \epsilon & & \downarrow \epsilon \\ \mathcal{S}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow[\cong]{\tilde{\rho}} & \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \end{array}$$

Beweis: (i) Es genügt für $X \in \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ und $Y \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ den mittleren Pfeil in

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\tilde{\rho} \epsilon X, Y) &\stackrel{1.5(ii)}{\cong} \mathcal{S}_{\mathcal{B}}(\epsilon X, \tilde{\rho}^{-1} Y) \\ &\stackrel{1.6}{\cong} \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(X, \iota \tilde{\rho}^{-1} Y) \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\rho X, \rho \iota \tilde{\rho}^{-1} Y) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(\rho X, \iota Y) \cong \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\epsilon \rho X, Y) \end{aligned}$$

als Bijektion zu verifizieren: Setzen wir $\bar{Y} := \tilde{\rho}^{-1} Y \in \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$, dann ist die Erweiterung von $f : \rho X \rightarrow \rho \iota \bar{Y}$ zu einer Abbildung in $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(X, \iota \bar{Y})$ für $b \subset a$ vorgeschrieben durch

$$\begin{array}{ccc}
X_b & \xrightarrow{\xi^{a,b}} & \Omega_B^{a-b} X_a \\
\downarrow f_b & & \downarrow \Omega_B^{a-b} f_a \\
\bar{Y}_b & \xrightarrow[\cong]{\eta^{a,b}} & \Omega_B^{a-b} \bar{Y}_a
\end{array}$$

(ii) folgt aus (i) unter Beachtung von $\rho \sigma \cong id_{\mathcal{P}_A}$. \square

1.1.12 Definition. Für Indexmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{U}'$ und $(\mathcal{A} \times \mathcal{A}') := \{a \times a' \mid a \in \mathcal{A}, a' \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ definieren wir den Bifunktor

$$\wedge : \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_{A'} \longrightarrow \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')}$$

auf Objekten $(X, X') \in |\mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_{A'}|$ durch $(X \wedge X')_{a \times a'} := X_a \wedge_B X'_{a'}$ mit Strukturabbildungen

$$S_B^{(b \times b') - (a \times a')} \wedge_B X_a \wedge_B X'_{a'} \cong S_B^{b-a} \wedge_B X_a \wedge_B S_B^{b'-a'} \wedge_B X'_{a'} \xrightarrow{\xi^{b,a} \wedge_B \xi^{b',a'}} X_b \wedge_B X_{b'}$$

und durch $(f \wedge f')_{a \times a'} := f_a \wedge_B f'_{a'}$ auf Morphismen.

1.1.13 Feststellung. Das \wedge -Produkt von Präspektralen ist assoziativ und kommutativ bis auf kohärente Äquivalenzen.

Beweis: Es genügt die entsprechenden Aussagen für das \wedge_B -Produkt von parametrisierten Räumen nachzuweisen: Jedes \wedge_B -Produkt von X_1, X_2, \dots, X_n ist kanonisch isomorph zu

$$X_1 \times_B X_2 \times_B \dots \times_B X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid p_{X_1} x_1 = p_{X_2} x_2 = \dots = p_{X_n} x_n\},$$

in dem $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, s_{X_i} b, x_{i+1}, \dots, x_n)$ mit $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{i-1}, s_{X_i} b, x'_{i+1}, \dots, x'_n)$ für alle $b \in B$, $1 \leq i \leq n$ identifiziert wird. \square

Das \wedge -Produkt für \mathcal{A} -indizierte Spektren ist nun gegeben durch

$$\wedge : \mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_{A'} \xrightarrow{\iota \times \iota'} \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_{A'} \xrightarrow{\wedge} \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{S}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')}$$

Zum Beweis der Assoziativität dieser Verknüpfung benötigen wir weitere Hilfsmittel:

Wir definieren zu $X \in \mathcal{P}_{A'}$, $Y \in \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')}$ und $a \in \mathcal{A}$ ein \mathcal{A}' -indiziertes Präspektrum $Y(a)$ durch

$$(Y(a))_{a'} := Y_{a \times a'} \xrightarrow{\xi^{a \times b', a \times a'}} \Omega_B^{b'-a'} Y_{a \times b'} = \Omega_B^{b'-a'} (Y(a))_{b'}$$

und ein \mathcal{A} -indiziertes Präspektrum $F(X, Y)$ durch

$$(F(X, Y))_a := O(\mathcal{P}_{A'}(X, Y(a))) \in |\mathcal{O}_B^B| \quad (\text{vgl. A.7}).$$

$\mathcal{P}_{A'}(X, Y(a))$ ist hier Teilraum von $\prod_{a' \in \mathcal{A}'} {}_B F_B^B(X_{a'}, Y_{a \times a'})$ und die Strukturabbildungen werden von

$$\prod_{a' \in \mathcal{A}'} {}_B F_B^B(X_{a'}, Y_{a \times a'}) \xrightarrow{\prod \eta_*^{b \times a', a \times a'}} \prod_{a' \in \mathcal{A}'} {}_B F_B^B(X_{a'}, \Omega_B^{b-a} Y_{b \times a}) \cong \Omega_B^{b-a} \prod_{a \in \mathcal{A}} {}_B F_B^B(X_{a'}, Y_{b \times a'})$$

induziert.

1.1.14 Feststellung. *Ist Y ein Spektrum, so auch $F(X, Y)$ und es gilt*

$$\mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')} (X \wedge X', Y) \cong \mathcal{P}_{\mathcal{A}} (X, F(X', Y)).$$

□

1.1.15 Feststellung. *Das \wedge -Produkt von Spektren ist assoziativ und kommutativ bis auf kohärente Äquivalenzen.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} ((X \wedge X') \wedge X'', Y) &= \mathcal{S}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (\epsilon(\iota\epsilon(\iota X \wedge \iota X') \wedge \iota X''), Y) \\ \cong \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (\iota\epsilon(\iota X \wedge \iota X'), F(\iota X'', \iota Y)) &\cong \mathcal{S}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (\epsilon(\iota X \wedge \iota X'), F(\iota X'', Y)) \\ \cong \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (\iota X \wedge \iota X', F(\iota X'', \iota Y)) &\cong \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (\iota X \wedge \iota X' \wedge \iota X'', \iota Y) \end{aligned}$$

Genauso zeigt man

$$\mathcal{S}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (X \wedge (X' \wedge X''), Y) \cong \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}' \times \mathcal{A}'')} (\iota X \wedge \iota X' \wedge \iota X'', \iota Y),$$

so daß wir insgesamt die natürliche Isomorphie

$$(X \wedge X') \wedge X'' \xrightarrow{\cong} \epsilon(\iota X \wedge \iota X' \wedge \iota X'') \xleftarrow{\cong} X \wedge (X' \wedge X'')$$

erhalten. Die Kohärenzbedingungen für die Assoziativität und Kommutativität

$$X \wedge X' = \epsilon(\iota X \wedge \iota X') \cong \epsilon(\iota X' \wedge \iota X) = X' \wedge X$$

ergeben sich also aus 1.13. □

1.1.16 Bemerkung. Es genügt, das \wedge -Produkt von Spektren auf cofinalen Indexmengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}'$ zu kennen und zu definieren, denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \times \mathcal{S}_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow{\iota \times \iota} & \mathcal{P}_{\mathcal{B}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{P}_{(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{S}_{(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')} \\ \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \cong \downarrow \\ \tilde{\rho} \times \tilde{\rho} & & \rho \times \rho & & \rho & & \tilde{\rho} \\ \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{S}_{\mathcal{A}'} & \xrightarrow{\iota \times \iota} & \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{A}'} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{P}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{S}_{(\mathcal{A} \times \mathcal{A}')} \end{array}$$

kommutiert nach 1.11 (i). □

1.2 Die große symmetrisch monoidale Kategorie

In diesem Abschnitt werden die Kategorien \mathcal{S}_U für jedes $U \in \mathcal{E}$ zu einer großen Kategorie \mathcal{S} zusammengefaßt und das \wedge -Produkt von Spektren als innere Verknüpfung definiert.

1.2.1 Um Spektren über verschiedenen Vektorräumen miteinander vergleichen zu können, konstruieren wir Funktoren

$$\tilde{\varphi}_* : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\varphi\mathcal{A}} \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}^* : \mathcal{P}_{\varphi\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}},$$

wobei $\varphi : U \longrightarrow V$ eine Isometrie, $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ eine Indexmenge und $\varphi\mathcal{A} := \{\varphi a; a \in \mathcal{A}\}$ ist:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}_* X)_{\varphi a} &:= X_a \xrightarrow{\xi^{b,a}} \Omega_B^{b-a} X_b \xleftarrow{\cong} \Omega_B^{\varphi b - \varphi a} (\tilde{\varphi}_* X)_{\varphi b}, \quad (\tilde{\varphi}_* f)_{\varphi a} := f_a \\ (\tilde{\varphi}^* Y)_a &:= Y_{\varphi a} \xrightarrow{\xi^{\varphi b, \varphi a}} \Omega_B^{\varphi b - \varphi a} Y_{\varphi b} \xrightarrow{\cong} \Omega_B^{b-a} (\tilde{\varphi}^* Y)_b, \quad (\tilde{\varphi}^* g)_a := g_{\varphi a} \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt die defintorische Identität $\mathcal{P}_{\varphi\mathcal{A}}(\tilde{\varphi}_* X, Y) = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(X, \tilde{\varphi}^* Y)$. Zu jeder Indexmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, die $\varphi\mathcal{A}$ enthält, setzen wir

$$\hat{\varphi}_* := \sigma \tilde{\varphi}_* : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{B}} \quad \text{und} \quad \hat{\varphi}^* := \tilde{\varphi}^* \rho : \mathcal{P}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{A}}.$$

$\hat{\varphi}^*$ erhält Spektren, so daß durch $\iota \varphi^* = \hat{\varphi}^* \iota$ ein Funktor $\varphi^* : \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ definiert wird. Außerdem sei $\varphi_* := \epsilon \hat{\varphi}_* \iota : \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

Aus den Adjunktionen (σ, ρ) (1.5) und (ϵ, ι) (1.6) ergibt sich

1.2.2 Feststellung. $(\hat{\varphi}_*, \hat{\varphi}^*)$ und (φ_*, φ^*) sind Adjunktionen und es gilt $\epsilon \hat{\varphi}_* = \varphi_* \epsilon$. Ist $\mathcal{B} = \varphi\mathcal{A}$, dann ist auch $\epsilon \hat{\varphi}^* = \varphi^* \epsilon$ und $\iota \varphi_* = \hat{\varphi}_* \iota$. \square

1.2.3 Definition. \mathcal{S} bezeichne die große Kategorie der Spektren, deren Objekte Paare (U, X) mit $U \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{S}_U$ und deren Morphismen

$$(\varphi, f) : (U, X) \longrightarrow (V, Y) \quad \text{Elemente aus} \quad \mathcal{S}_U(X, \varphi^* Y) \cong \mathcal{S}_V(\varphi_* X, Y) \quad \text{sind.}$$

Um das \wedge -Produkt in \mathcal{S} zu definieren benötigen wir das folgende Resultat:

1.2.4 Hilfssatz. Es seien $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{U}'$ Indexmengen und $\varphi \in \mathcal{E}(U, V)$, $\psi \in \mathcal{E}(U', V')$ Isometrien mit $\varphi\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ und $\psi\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{V}'$. Dann gilt für alle $X \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, $Y \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$ die natürliche Isomorphie in $\mathcal{S}_{(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')}$

$$\varphi_* X \wedge \psi_* Y \cong (\varphi \times \psi)_*(X \wedge Y)$$

Beweis: Für $\tilde{X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ und $\tilde{Y} \in \mathcal{P}_{\mathcal{B}'}$ haben wir aus Adjunktionsgründen die natürliche Isomorphie in $\mathcal{S}_{(\mathcal{B} \times \mathcal{B}')}$

$$\epsilon(\iota \tilde{X} \wedge \iota \tilde{Y}) \xrightarrow{\cong} \epsilon(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}).$$

Zusammen mit der defintorischen Gleichheit

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_* \iota X \wedge \hat{\psi}_* \iota Y &= \sigma \tilde{\varphi}_* \iota X \wedge \sigma \tilde{\psi}_* \iota Y = \sigma(\tilde{\varphi}_* \iota X \wedge \tilde{\psi}_* \iota Y) \\ &= \sigma \varphi \times \psi_*(\iota X \wedge \iota Y) = \varphi \times \psi_*(\iota X \wedge \iota Y) \end{aligned}$$

und 2.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \epsilon(\iota\varphi_*X \wedge \iota\psi_*Y) &= \epsilon(\iota\epsilon\hat{\varphi}_*\iota X \wedge \iota\epsilon\hat{\psi}_*\iota Y) \stackrel{\kappa}{\cong} \epsilon(\hat{\varphi}_*\iota X \wedge \hat{\psi}_*\iota Y) \\ &= \epsilon\widehat{\varphi \times \psi}_*(\iota X \wedge \iota Y) \cong (\varphi \times \psi)_*\epsilon(\iota X \wedge \iota Y) \end{aligned}$$

□

1.2.5 Definition. Der \wedge - Produkt-Bifunktor in \mathcal{S} ist auf Objekten (U, X) und (U', X') gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_U \times \mathcal{S}_{U'} & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{S}_{(U \times U')} \stackrel{\tilde{\rho}^{-1}}{\cong} \mathcal{S}_{U \times U'} \\ (X, X') & \mapsto & X \wedge X' \end{array}$$

und auf Morphismen $(\varphi, f) : (U, X) \longrightarrow (V, Y)$, $(\psi, f') : (U', X') \longrightarrow (V', Y')$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_V(\varphi_*X, Y) \times \mathcal{S}_{V'}(\psi_*X', Y') &\xrightarrow{\wedge} \mathcal{S}_{(V \times V')}(\varphi_*X \wedge \psi_*X', Y \wedge Y') \\ &\stackrel{(2.4)}{\cong} \mathcal{S}_{V \times V'}((\varphi \times \psi)_*(X \wedge X'), Y \wedge Y') \\ (\varphi, f) \wedge (\psi, f') &:= (\varphi \times \psi, f \tilde{\wedge} f') \end{aligned}$$

1.2.6 Satz. (\mathcal{S}, \wedge) ist eine symmetrisch monoidale Kategorie mit $(0, S_B^0)$ als Einsobjekt.

Beweis: Die Assoziativität und Kommutativität des \wedge -Produkts in \mathcal{S} bis auf kohärente Äquivalenzen folgen aus 1.15. Die übrigen Aussagen sind offensichtlich. □

Bezeichnet \mathcal{S}^∞ die volle Unterkategorie von \mathcal{S} , deren Objekte (U, X) über unendlich-dimensionalen $U \in |\mathcal{E}|$ liegen, dann ist auch $(\mathcal{S}^\infty, \wedge)$ assoziativ und kommutativ bis auf kohärente Äquivalenzen. Unser Ziel ist aber ein assoziatives und kommutatives \wedge -Produkt in \mathcal{S}_U mit einem Einselement. Ganz kann man dies zwar nicht erreichen (s. [Ha]), aber man kommt nahe heran.

1.2.7 Feststellung. Die Inklusion der vollen Unterkategorie \mathcal{S}_U^∞ von \mathcal{S}^∞ mit Objekten der Form (U, X) ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jedes Objekt in \mathcal{S}^∞ isomorph zu einem Objekt aus \mathcal{S}_U^∞ ist (vgl. hierzu z.B. [La] S.98). Ist (V, Y) ein Objekt in \mathcal{S}^∞ und $\varphi : U \longrightarrow V$ ein Isomorphismus in \mathcal{E} , dann definieren $Y \xrightarrow{id} \varphi^{-1*}\varphi^*Y$ und $\varphi^*Y \xrightarrow{id} \varphi^*Y$ Isomorphismen $(V, Y) \cong (U, \varphi^*Y)$ in \mathcal{S}^∞ . □

1.2.8 Folgerung. In \mathcal{S}_U^∞ gibt es einen \wedge -Bifunktor, der assoziativ und kommutativ ist bis auf kohärente Äquivalenzen.

Beweis: Setzt man $\wedge : \mathcal{S}_U^\infty \times \mathcal{S}_U^\infty \xrightarrow{\iota \times \iota} \mathcal{S}^\infty \times \mathcal{S}^\infty \xrightarrow{\wedge} \mathcal{S}^\infty \xrightarrow{r} \mathcal{S}_U^\infty$, wobei r ein Retraktionsfunktor ist, dann liegt die Komposition

$$r(r(X \wedge X') \wedge X'') \xrightarrow{(\iota \wedge id)\iota} X \wedge X' \wedge X'' \xleftarrow{(id \wedge \iota)\iota} r(X \wedge r(X' \wedge X''))$$

in \mathcal{S}_U^∞ . □

Das \wedge -Produkt in \mathcal{S}_U^∞ ist erst nach der Wahl eines Retraktionsfunktors r eindeutig bestimmt. Wir möchten im folgenden immer annehmen, daß r die Form $r(V, Y) = (U, \varphi^*Y)$ mit einem festen Isomorphismus $\varphi \in \mathcal{E}(U, V)$ hat. Mit dieser Konvention erbt nun auch \mathcal{S}_U ein \wedge -Produkt von \mathcal{S}^∞ .

1.2.9 Definition. Eine *Homotopie* von Spektren ist ein Weg in $\mathcal{S}((U, X), (V, Y))$. Um die Morphismenmengen in \mathcal{S} mit einer Topologie zu versehen, genügt es, die stetigen Abbildungen in diese Menge mit kompakter Quelle K festzulegen:

Wir verlangen zunächst von einer solchen Abbildung

$$s : K \longrightarrow \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{E}(U, V)} \mathcal{S}_U(X, \varphi^*Y) \subset \bigcup_{\varphi \in \mathcal{E}(U, V)} \prod_{a \in \mathcal{U}} \mathcal{O}_B^B(X_a, Y_{\varphi a}),$$

daß die Zusammensetzung

$$K \xrightarrow{s} \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \xrightarrow{p} \mathcal{E}(U, V) \subset V^U : \quad k \mapsto \varphi^k$$

stetig ist. Zu $a \in \mathcal{U}$ wählen wir ein $b \in \mathcal{V}$ mit $\varphi^k a \subset b$ für alle $k \in K$. (Ein solches $b \in \mathcal{B}$ existiert, weil das Bild einer in a gewählten Basis ein Kompaktum in U ist.) Die Adjungierten von $k \times X_a \xrightarrow{s(k)a} Y_{\varphi^k a} \cong \Omega_B^{b-\varphi^k a} Y_b$ werden zusammengefaßt zu einer Abbildung

$$\hat{s}_{b,a} : \bigcup_{k \in K} k \times (S_B^{b-\varphi^k a} \wedge_B X_a) / (k, s_{X_a} b, \infty) \sim (k', s_{X_a} b, \infty) \longrightarrow Y_b,$$

die den Schnitt von $S_B^{b-\varphi^k a} \wedge_B X_a$ konstant bzgl. K abbildet. Die Quelle entspricht $T_B^{b,a} \wedge_B X_a$, wobei $T^{b,a}$ der *Thomraum* des orthogonalen Komplements von $\varphi(K \times a) \subset K \times b$ ist. Insgesamt sei also s genau dann stetig, wenn $\hat{s}_{b,a} : T_B^{b,a} \wedge_B X_a \longrightarrow Y_b$ für alle $a \in \mathcal{U}$ und $b \supset \varphi^K$ stetig sind.

1.2.10 Hilfssatz. Für $a \subset a' \in \mathcal{U}$, $b \subset b' \in \mathcal{V}$ gilt $S^{b'-b} \wedge T^{b,a} \cong T^{b',a'} \wedge S^{a'-a}$ \square

Der Stetigkeitsbegriff hängt nicht von der Wahl von b ab, denn sei $\varphi^k a \subset b'$ für alle $k \in K$ und $c := b + b'$ dann ist die fragliche Abbildung \hat{s} auch bezüglich c stetig

$$\begin{array}{ccc} S_B^{c-b} \wedge_B T_B^{b,a} \wedge_B X_a & \xrightarrow{\cong} & T_B^{c,a} \wedge_B X_a \\ \downarrow id_{S_B^{c-b}} \wedge \hat{s}_{b,a} & & \downarrow \hat{s}_{c,a} \\ S_B^{c-b} \wedge_B Y_b & \xrightarrow{\eta_{c,b}} & Y_c \end{array}$$

und nun auch bezüglich b'

$$T_B^{b',a} \wedge_B X_a \xrightarrow{\hat{s}_{b',a}} Y_{b'} \cong \Omega_B^{c-b'} Y_c,$$

weil die Adjungierten nach 2.10 stetig sind.

Die Morphismenmengen zu \mathcal{S}^∞ , \mathcal{S}_U^∞ und \mathcal{S}_U erhalten die Teilraumtopologie von \mathcal{S} . Eine Homotopie in \mathcal{S}_U ist also ein Morphismus in $\mathcal{S}_U(I_B^+ \wedge X, Y)$. Dies zeigt, daß unsere Definition mit der in [CP] übereinstimmt.

Um eine Homotopie in \mathcal{S} besser zu verstehen, werden jetzt die Funktoren aus 2.1 verallgemeinert.

1.2.11 Definition. Abbildungen $\underline{\lambda} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ und $\bar{\lambda} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ nennen wir *zulässig* für $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$, falls

- (i) mit $a \subset a' \in \mathcal{U}$, $b \subset b' \in \mathcal{V}$ auch $\underline{\lambda}a \subset \underline{\lambda}a'$ bzw. $\bar{\lambda}b \subset \bar{\lambda}b'$
- (ii) $\varphi^k a \subset \underline{\lambda}a$ bzw. $\varphi^k \bar{\lambda}b \subset b$ für alle $k \in \mathbb{K}$
- (iii) $\bar{\lambda}\mathcal{V}$ eine cofinale Indexmenge in \mathcal{U} ist.

Es ist klar, daß für φ immer zulässige $\underline{\lambda}$ und $\bar{\lambda}$ existieren. Zu $\varphi, \underline{\lambda}, \bar{\lambda}$ definieren wir Funktoren $(\widehat{\varphi, \bar{\lambda}})_* : \mathcal{P}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ und $(\widehat{\varphi, \underline{\lambda}})^* : \mathcal{P}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ durch

$$((\widehat{\varphi, \bar{\lambda}})_* X)_b := T_B^{b, \bar{\lambda}b} \wedge_B X_{\bar{\lambda}b}$$

$$((\widehat{\varphi, \underline{\lambda}})^* Y)_a := F_B^B(T_B^{\underline{\lambda}a, a}, Y_{\underline{\lambda}a})$$

mit jeweils naheliegenden Strukturabbildungen (vgl. 2.10).

$(\widehat{\varphi, \bar{\lambda}})^*$ erhält Spektren, so daß wir wie oben setzen

$$\begin{aligned} \iota(\varphi, \underline{\lambda})^* &:= (\widehat{\varphi, \underline{\lambda}})^* \iota : \mathcal{S}_{\mathcal{V}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{U}} \\ \text{und } (\varphi, \bar{\lambda})_* &:= \epsilon(\widehat{\varphi, \bar{\lambda}})_* \iota : \mathcal{S}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

1.2.12 Satz. (i) Für alle $X \in |\mathcal{S}_{\mathcal{U}}|$ und $Y \in |\mathcal{S}_{\mathcal{V}}|$ gelten die natürlichen Äquivalenzen:

$$\mathcal{T}_{\varphi}(\mathbb{K}, \mathcal{S}((U, X), (V, Y))) \cong \mathcal{S}_{\mathcal{V}}((\varphi, \bar{\lambda})_* X, Y) \cong \mathcal{S}_{\mathcal{U}}(X, (\varphi, \underline{\lambda})^* Y).$$

Hierbei ist

$$\mathcal{T}_{\varphi}(\mathbb{K}, \mathcal{S}((U, X), (V, Y))) := \{s : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \mid ps = \varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{E}(U, V)\}.$$

(ii) Sind auch $\underline{\mu}$ und $\bar{\mu}$ zulässig für φ , so gibt es natürliche Äquivalenzen

$$\begin{aligned} (\varphi, \bar{\lambda})_* &\cong (\varphi, \bar{\mu})_* \\ (\varphi, \underline{\lambda})^* &\cong (\varphi, \underline{\mu})^* \end{aligned}$$

Beweis: (i) Zu $s : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) = \cup_{\varphi} \mathcal{S}_{\mathcal{U}}(X, \varphi^* Y)$ existieren nach Definition parametrisierte Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{s}_{b, \bar{\lambda}b} &: T_B^{b, \bar{\lambda}b} \wedge_B X_{\bar{\lambda}b} \rightarrow Y_b \quad \text{und} \\ \hat{s}_{\underline{\lambda}a, a} &: X_a \rightarrow F_B^B(T_B^{\underline{\lambda}a, a}, Y_{\underline{\lambda}a}) \quad \text{adjungiert zu} \quad \hat{s}_{\underline{\lambda}a, a} : T_B^{\underline{\lambda}a, a} \wedge_B X_a \rightarrow Y_{\underline{\lambda}a}. \end{aligned}$$

Diese beschreiben Morphismen in $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}((\widehat{\varphi, \bar{\lambda}})_* \iota X, \iota Y) \cong \mathcal{S}_{\mathcal{V}}((\varphi, \bar{\lambda})_* X, Y)$ beziehungsweise in $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}(X, (\varphi, \underline{\lambda})^* Y)$ und umgekehrt.

(ii) folgt aus (i), denn $\mathcal{T}_{\varphi}(\mathbb{K}, \mathcal{S}((U, X), (V, Y)))$ ist unabhängig von $\bar{\lambda}$ bzw. $\underline{\lambda}$. \square

Im Fall $K = pt$ erhalten wir die Adjunktion (φ_*, φ^*) aus 2.2 zurück: Es ist $\varphi_* X = (\varphi, \bar{\lambda})_*$ mit $\bar{\lambda} = \varphi^{-1}$ und aus Adjunktionsgründen dann auch $\varphi^* \cong (\varphi, \underline{\lambda})^*$. Außerdem verallgemeinert sich die Äquivalenz 2.2 zu $(\varphi, \bar{\lambda})_* \epsilon \cong \epsilon (\widehat{\varphi, \bar{\lambda}})_*$ und entsprechend Hilfssatz 2.4. Zur Vereinfachung der Notation werden deshalb im folgenden die Indexfunktionen $\underline{\lambda}$ und $\bar{\lambda}$ weggelassen.

1.2.13 Satz.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \times \mathcal{S}((U', X'), (V', Y')) &\xrightarrow{\wedge} \mathcal{S}((U \times U', X \wedge X'), (V \times V', Y \wedge Y')) \\ (f, g) &\mapsto f \wedge g \quad \text{und} \\ \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \times \mathcal{S}((V, Y), (W, Z)) &\xrightarrow{v} \mathcal{S}((U, X), (W, Z)) \\ (f, g) &\mapsto g f \end{aligned}$$

sind stetige Funktionen.

Beweis: Punktweise für jedes $k \in K$ prüft man nach, daß bei der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varphi(K, \mathcal{S}((U, X), (V, Y))) \times \mathcal{T}_\psi(K, \mathcal{S}((U', X'), (V', Y'))) &\cong \mathcal{S}_V(\varphi_* X, Y) \times \mathcal{S}_{V'}(\psi_* X', Y') \\ &\xrightarrow{\wedge} \mathcal{S}_{V \times V'}(\varphi_* X \wedge \psi_* X', Y \wedge Y') \\ &\stackrel{2.4}{\cong} \mathcal{S}_{V \times V'}((\varphi \times \psi)_*(X \wedge X'), Y \wedge Y') \\ &\cong \mathcal{T}_{\varphi \times \psi}(K, \mathcal{S}((U \times U', X \wedge X'), (V \times V', Y \wedge Y'))) \end{aligned}$$

ein (s_1, s_2) in $(k \mapsto s_1(k) \wedge s_2(k))$ übergeht. Also ist \wedge stetig. Ein ähnliches Argument zeigt die Stetigkeit der Verknüpfung v . \square

1.2.14 Folgerung. Die Verknüpfungen und \wedge -Produkte in \mathcal{S} , \mathcal{S}^∞ , \mathcal{S}_U^∞ und \mathcal{S}_U sind verträglich mit Homotopien. Insbesondere sind die \wedge -Produkte in den zugehörigen Homotopiekategorien $\mathcal{S}h$, $\mathcal{S}^\infty h$ und $\mathcal{S}_U^\infty h$ assoziativ und kommutativ bis auf kohärente Äquivalenzen. \square

Um ein assoziatives \wedge -Produkt in $\mathcal{S}_U h$ zu definieren, werden jetzt *cofibrante Spektren* untersucht.

1.3 Cofibrante Spektren

1.3.1 Definition. (i) Ein Präspektrum $\tilde{X} \in |\mathcal{P}_A|$ heißt *cofasernd*, falls \tilde{X}_a wohlgeschnitten und die Strukturabbildungen $\tilde{\xi}_{b,a}$ für alle $a \subset b \in \mathcal{A}$ abgeschlossene Cofaserungen über B sind (vgl. Anhang B).

(ii) $X \in |\mathcal{S}_U|$ nennen wir *cofasernd erzeugt* oder *cofibrant*, wenn es eine Indexmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ und ein cofaserndes $\tilde{X} \in |\mathcal{P}_A|$ gibt, so daß $X \cong \epsilon \sigma \tilde{X}$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}c$ die volle Unterkategorie von \mathcal{S} , deren Objekte cofibrante Spektren sind.

Ist die Voraussetzung in (ii) für eine Indexmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ erfüllt, dann auch für ganz \mathcal{U} : Die Strukturabbildungen $\tilde{\xi}_{b,a}$ von $\sigma \tilde{X}$ sind abgeschlossene Cofaserungen über B (vgl. B.6). Außerdem sei bemerkt, daß jedes cofasernde $\tilde{X} \in |\mathcal{P}_A|$ ein Einbettungspräspektrum

ist, weil die Eins η der Adjunktion $(S_B^n \wedge_B _, \Omega_B^n)$ eine Einbettung ist. Deshalb gilt die natürliche Äquivalenz $\epsilon \tilde{X} \cong \omega \tilde{X}$ für alle cofasernden Präspektren \tilde{X} .

- 1.3.2 Feststellung.** (i) Mit X und X' ist auch $X \wedge X'$ cofibrant.
(ii) Ist X cofibrant und $\varphi : K \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$, dann ist auch $\varphi_* X$ cofibrant.
(iii) Für jeden Isomorphismus $\varphi \in \mathcal{E}(U, V)$ ist mit X auch $\varphi^* X$ cofibrant.

Beweis: (i) folgt direkt aus B.6 und der natürlichen Isomorphie $\epsilon(\epsilon \tilde{X} \wedge \epsilon \tilde{X}') \xrightarrow{\cong} \epsilon(\tilde{X} \wedge \tilde{X}')$. Die Aussagen (ii) und (iii) erledigt 2.2. \square

Gegeben sei eine abgeschlossene Einbettung $i : A \rightarrow K$. Weil jedes für $\varphi : K \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$ zulässige $\bar{\lambda}$ auch für φi zulässig ist, induziert i abgeschlossene Einbettungen

$$i^{b, \bar{\lambda}b} : T^{b, \bar{\lambda}b}(\varphi i) \xrightarrow{\subset} T^{b, \bar{\lambda}b}(\varphi)$$

für alle $b \in \mathcal{V}$ und dadurch eine natürliche Transformation

$$\begin{aligned} \hat{i}_\# : \widehat{\varphi i}_* &\rightarrow \widehat{\varphi}_* : \mathcal{P}_U \rightarrow \mathcal{P}_V \\ (\hat{i}_\# X)_b &:= i^{b, \bar{\lambda}b} \wedge_B id_{X_{\bar{\lambda}b}} : T_B^{b, \bar{\lambda}b}(\varphi i) \wedge_B X_{\bar{\lambda}b} \rightarrow T_B^{b, \bar{\lambda}b}(\varphi) \wedge_B X_{\bar{\lambda}b} \\ \text{bzw. } i_\# &:= \epsilon \hat{i}_\# : \varphi i_* \rightarrow \varphi_* : \mathcal{S}_U \rightarrow \mathcal{S}_V. \end{aligned}$$

1.3.3 Hilfssatz. Sei $\phi : I \times K \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$ und $i : 0 \times K \subset I \times K$. Dann gibt es einen Homöomorphismus θ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I^+ \wedge T^{b, \bar{\lambda}b}(\phi i) & \xrightarrow{\cong} & T^{b, \bar{\lambda}b}(\phi) \\ \{0\}^+ \wedge id_{T^{b, \bar{\lambda}b}} & \swarrow & \nearrow i^{b, \bar{\lambda}b} \\ & T^{b, \bar{\lambda}b}(\phi i) & \end{array}$$

kommutativ macht.

Beweis: Die Homotopieäquivalenz $j : I \times K \rightarrow I \times K \quad (t, k) \mapsto (0, k)$ induziert einen Isomorphismus $\hat{\theta}$ zwischen lokal trivialen Vektorbündeln, so daß

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{(t,k) \in I \times K} (t, k) \times (b - \phi^{(0,k)} \bar{\lambda}b) & \xrightarrow{\cong} & \bigcup_{(t,k) \in I \times K} (t, k) \times (b - \phi^{(t,k)} \bar{\lambda}b) \\ \text{Inkl.} \swarrow & & \nearrow \text{Inkl.} \\ \bigcup_{k \in K} (0, k) \times (b - \phi^{(0,k)} \bar{\lambda}b) & & \end{array}$$

kommutiert. Die Behauptung folgt nach Übergang zu den Thomräumen. \square

1.3.4 Hilfssatz. Sei $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ ein Morphismus in $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ zwischen cofasernden Präspektren, so daß $\tilde{f}_a : \tilde{X}_a \rightarrow \tilde{Y}_a$ für alle $a \in \mathcal{U}$ eine Homotopieäquivalenz über und unter B ist. Dann ist $\epsilon \tilde{f}$ ein Isomorphismus in $\mathcal{S}_{\mathcal{U}h}$.

Beweis: Für jedes endlichdimensionale U gilt $U \in \mathcal{U}$ und die Funktoren

$$F : \mathcal{S}_{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathcal{S}_{c_0} \quad \text{und} \quad G : \mathcal{S}_{c_0} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{U}} \\ (f_a, a \in \mathcal{U}) \longmapsto f_U \qquad f \longmapsto (\Omega_B^{U-a} f, a \in \mathcal{U})$$

sind bis auf natürliche Äquivalenzen invers zueinander. In diesem Fall ist die Behauptung also klar, denn $f_U = (\epsilon \tilde{f})_U = \tilde{f}_U$ ist eine Homotopieäquivalenz über und unter B . Wir setzen nun $\dim U = \infty$ voraus. Leicht finden wir eine cofinale Indexmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$, die den Ordnungstyp der natürlichen Zahlen hat. Jetzt erfolgt der Beweis analog zu Lemma 6.5 in [Pu2]. Auch der dort verwendete Satz (10.5) aus [DKP] überträgt sich auf den parametrisierten Fall. \square

1.3.5 Feststellung. Seien $i : 0 \times K \subset I \times K$, $\phi : I \times K \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$ und $X \in |\mathcal{S}_{\mathcal{U}}|$. Dann ist $i_{\#}(X) : \phi_{i_*} X \rightarrow \phi_* X$ ein Isomorphismus in $\mathcal{S}_{\mathcal{U}h}$.

Beweis: Mit $i^{b, \bar{\lambda}^b} : T^{b, \bar{\lambda}^b}(\phi_i) \rightarrow T^{b, \bar{\lambda}^b}(\phi)$ sind auch $(\hat{i}_{\#} X)_b$ für alle $b \in \mathcal{V}$ Homotopieäquivalenzen über und unter B (vgl. 3.3). Die Aussage folgt aus 3.4. \square

1.3.6 Hilfssatz. Für jedes unendlichdimensionale V ist $\mathcal{E}(U, V)$ zusammenziehbar.

Beweis: Siehe z. B. [May] S.10 Lemma 1.3. \square

1.3.7 Folgerung. Zu $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(U, V)$ mit $\dim V = \infty$ gibt es eine natürliche Äquivalenz

$$\alpha : \varphi_* \rightarrow \psi_* : \mathcal{S}_{\mathcal{U}h} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{V}h}.$$

Beweis: Wir wählen einen Weg $\phi : I \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$ von φ nach ψ (s. 3.6) und setzen $j^0, j^1 : pt \rightarrow I$, $j^0(pt) := 0$, $j^1(pt) := 1$. α sei die Komposition

$$\varphi_* = (\phi j^0)_* \xrightarrow{j_{0\#}} \phi_* \xleftarrow{j_{1\#}} (\phi j^1)_* = \psi_*,$$

wobei 3.5 benutzt wurde. \square

1.3.8 Satz. Die Projektion $p : \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \rightarrow \mathcal{E}(U, V)$ hat die Deckhomotopieeigenschaft für alle kompakten Räume.

Beweis: Gegeben sei ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} 0 \times K & \xrightarrow{f} & \mathcal{S}((U, X), (V, Y)) \\ i \cap & & \downarrow p \\ I \times K & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{E}(U, V) \end{array}$$

Wir wählen eine cofinale Folge $b_1 \subset b_2 \subset \dots \in \mathcal{V}$ und ein für ϕ zulässiges $\bar{\lambda}$. $\tilde{X} \in |\mathcal{P}_U|$ erzeuge X cofasend und

$$\tilde{f} \in \mathcal{P}_V(\widehat{\phi}_* \tilde{X}, \iota Y) \cong \mathcal{S}_V(\phi_* X, Y) \cong \mathcal{T}_{\phi_i}(0 \times K, \mathcal{S}c((U, X), (V, Y)))$$

sei die eindeutig bestimmte Abbildung mit $\epsilon \tilde{f}$ adjungiert zu f (vgl. 2.12). Wir definieren \tilde{h}_1 als Komposition

$$T_B^{b_1, \bar{\lambda} b_1}(\phi) \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_1} \xrightarrow{\theta^{-1} \wedge_B id} I_B^+ \wedge_B T_B^{b_1, \bar{\lambda} b_1}(\phi) \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_1} \xrightarrow{0 \wedge_B \tilde{f}} S_B^0 \wedge Y_{b_1} \cong Y_{b_1}.$$

Um einen Morphismus $(\tilde{h}_i) \in \mathcal{P}_V(\widehat{\phi}_* X, \iota Y)$ zu erhalten, muß man die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} & S_B^{b_{i+1}-b_i} \wedge_B T_B^{b_i, \bar{\lambda} b_i}(\phi) \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_i} & \\ \cong \swarrow & & \searrow id \wedge_B \tilde{h}_i \\ T_B^{b_{i+1}, \bar{\lambda} b_{i+1}}(\phi) \wedge_B S_B^{\bar{\lambda} b_{i+1} - \bar{\lambda} b_i} \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_i} & & S_B^{b_{i+1}-b_i} \wedge_B Y_{b_i} \\ \downarrow id \wedge_B \tilde{\xi}_{\bar{\lambda} b_{i+1}, \bar{\lambda} b_i} & & \downarrow \eta_{b_{i+1}, b_i} \\ T_B^{b_{i+1}, \bar{\lambda} b_{i+1}}(\phi) \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_{i+1}} & \xrightarrow{\tilde{h}_{i+1}} & Y_{b_{i+1}} \end{array}$$

beachten. Unter Benutzung des Homöomorphismus θ aus 3.3 und der Cofaserungseigenschaft über B von $T_B^{b_{i+1}, \bar{\lambda} b_{i+1}}(\phi) \wedge_B S_B^{\bar{\lambda} b_{i+1} + \bar{\lambda} b_i} \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_i} \xrightarrow{id \wedge \tilde{\xi}_{\bar{\lambda} b_{i+1}, \bar{\lambda} b_i}} T_B^{b_{i+1}, \bar{\lambda} b_{i+1}}(\phi) \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_{i+1}}$ kann \tilde{h}_{i+1} rekursiv definiert werden, so daß $\tilde{h}_{i+1}|_{T_B^{\bar{\lambda} b_{i+1}, \bar{\lambda} b_{i+1}}(\phi) \wedge_B \tilde{X}_{\bar{\lambda} b_{i+1}}} = \tilde{f}_{i+1}$ gilt. Das Adjungierte zu $\epsilon \tilde{h}$ ist die gesuchte Hochhebung von ϕ . \square

1.3.9 Folgerung. Für jedes unendlichdimensionale U hat der Inklusionsfunktork $\mathcal{S}c_U h \hookrightarrow \mathcal{S}c^\infty h$ ein Inverses bis auf Äquivalenzen.

Beweis: Wegen 2.7 genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{S}c_U h \hookrightarrow \mathcal{S}c_U^\infty h$ ein Inverses hat (vgl. 3.6, 3.8):

$$\mathcal{S}c_U h(X, Y) = \pi_0 \mathcal{S}c_U(X, Y) \cong \pi_0 \mathcal{S}c_U^\infty((U, X), (U, Y)) = \mathcal{S}c_U^\infty h((U, X), (U, Y))$$

\square

In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{S}c_U h \times \mathcal{S}_0 h & \\ id \times 0_* \swarrow & & \searrow \wedge \\ \mathcal{S}c_U h \times \mathcal{S}c_U h & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{S}c_U h \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}c^\infty h \times \mathcal{S}c^\infty h & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{S}c^\infty h \end{array}$$

kommutiert das untere Quadrat nach Definition. Um die Kommutativität des oberen Dreiecks bis auf Äquivalenzen zu zeigen, genügt es nach 3.9 das äußere Fünfeck zu betrachten. Wir wählen einen Isomorphismus $\varphi \in \mathcal{E}(U, U \times U)$ und erhalten gemäß 2.4 und 3.7 in $\mathcal{S}^\infty h$ eine natürliche Isomorphie

$$(U \times U, id_* X \wedge 0_* A) \cong (U \times U, (id \times 0)_*(X \wedge A)) \cong (U \times U, \varphi_*(X \wedge A)) \cong (U, X \wedge A)$$

für alle $X \in |\mathcal{S}_{\mathcal{U}}|$ und $A \in |\mathcal{S}_0|$. Zusammen mit 3.9 ergibt sich schließlich das gewünschte Resultat:

1.3.10 Folgerung. $\mathcal{S}_{\mathcal{U}}h$ ist eine symmetrisch monoidale Kategorie mit $S := 0_* S_B^0$ als Einsobjekt. \square

Zu $n \in \mathbf{Z}$ sei $\Sigma^n : \mathcal{S}_{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{N}}$ der *Translationsfunktork*

$$(\Sigma^n X)_m := \begin{cases} X_{m+n} & ; m+n \geq 0 \\ \Omega_B^{-(m+n)} X_0 & ; m+n \leq 0 \end{cases}$$

Offensichtlich gelten die kanonischen Äquivalenzen $\Sigma^n \Sigma^m \cong \Sigma^{m+n}$ für alle $n+m \in \mathbf{Z}$ und $\Sigma^0 = id_{\mathcal{S}_{\mathbf{N}}}$. Damit können wir den Aushängungssatz für cofibrante Spektren formulieren:

1.3.11 Satz. Jedes cofibrante Spektrum $X \in |\mathcal{S}_{\mathbf{N}}|$ ist natürlich isomorph in $\mathcal{S}_{\mathbf{N}}h$ zu $\Sigma^{-1}((0, S_B^1) \wedge X)$.

Beweis: Es sei $\tilde{\rho} : \mathcal{S}_{\mathbf{R}^\infty} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{N}}$ der Restriktionsfunktork und $s : \mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^\infty$ die Isometrie $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$. Dann gilt:

$$\Sigma^{-1}((0, S_B^1) \wedge X) = s_* X \cong \tilde{\rho} s_* \tilde{\rho}^{-1} X \cong \tilde{\rho} id_* \tilde{\rho}^{-1} X = X$$

Bei dem zweiten Äquivalenzzeichen wurde 3.7 benutzt. \square

1.3.12 Folgerung. Die Morphismenmengen in $\mathcal{S}_{\mathbf{N}}h$ bilden abelsche Gruppen und die Komposition von Morphismen ist bilinear.

Beweis: Mit dem Aushängungssatz erhalten wir eine natürliche Äquivalenz zwischen $\mathcal{S}_{\mathbf{N}}h(X, Y)$ und $\mathcal{S}_{\mathbf{N}}h(S_B^2 \wedge X, S_B^2 \wedge Y)$. Die Comultiplikation der Sphäre $\mu : S^2 \longrightarrow S^2 \vee S^2$ induziert eine Comultiplikation für Spektren

$$S_B^2 \wedge X \xrightarrow{\mu \wedge id} (S_B^2 \vee S_B^2) \wedge X \cong (S_B^2 \wedge X) \vee (S_B^2 \wedge X).$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus der Tatsache, daß S^2 ein cokommutatives Cogruppenobjekt ist. \square

1.4 Homotopiecovollständige Klassen

Wir versuchen jetzt, CW-Spektren in die Kategorie $\mathcal{S}t := \mathcal{S}c_{\mathbf{N}}h$ einzuordnen.

1.4.1 Definition. Sind $f^1 \in \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X^0, X^1)$ und $f^2 \in \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X^0, X^2)$, so heißt

$$Z_{f^1, f^2} := \operatorname{colim}_{\mathcal{S}_{\mathbf{N}}} (X^1 \vee X^2 \xleftarrow{f^1 \vee f^2} X^0 \vee X^0 \xrightarrow{(i_0, i_1)} I_B^+ \wedge X^0) \in |\mathcal{S}_{\mathbf{N}}|$$

der *Zylinder von f^1 und f^2* . Hierbei bezeichnet i_k für $k = 0, 1$ die Komposition

$$X^0 \cong \{k\}_B^+ \wedge X^0 \longrightarrow I_B^+ \wedge X^0.$$

Leider kann der Zylinder nicht für beliebige Morphismen in $\mathcal{S}c_{\mathbf{N}}$ gebildet werden. Im folgenden nennen wir $f \in \mathcal{S}c_{\mathbf{N}}$ *cofibrant*, wenn es einen Morphismus \tilde{f} zwischen cofasernden Präspektren gibt, so daß $\epsilon \tilde{f} = f$ gilt.

1.4.2 Feststellung. Mit $f^1 : X^0 \longrightarrow X^1$ und $f^2 : X^0 \longrightarrow X^2$ ist auch Z_{f^1, f^2} *cofibrant*.

Beweis: Wir setzen

$$Z_{\tilde{f}^1, \tilde{f}^2} := \operatorname{colim}_{\mathcal{P}_{\mathbf{N}}} (\tilde{X}^1 \vee \tilde{X}^2 \xleftarrow{\tilde{f}^1 \vee \tilde{f}^2} \tilde{X}^0 \vee \tilde{X}^0 \xrightarrow{(i_0, i_1)} I_B^+ \wedge \tilde{X}_0),$$

wobei \tilde{f}^1 und \tilde{f}^2 die Morphismen f^1 bzw. f^2 cofasernd erzeugen. $Z_{\tilde{f}^1, \tilde{f}^2}$ ist wegen B.2, B.5 und B.6 cofibrant und es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(Z_{f^1, f^2}, Y) \\ & \cong \lim_{\mathcal{E}ns} (\mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X^1 \vee X^2, Y) \xrightarrow{f^1 \vee f^2} \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X^0 \vee X^0, Y) \xleftarrow{(i_0, i_1)^*} \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(I_B^+ \wedge X^0, Y)) \\ & \cong \lim_{\mathcal{E}ns} (\mathcal{P}_{\mathbf{N}}(\tilde{X}^1 \vee \tilde{X}^2, \iota Y) \xrightarrow{\tilde{f}^1 \vee \tilde{f}^2} \mathcal{P}_{\mathbf{N}}(\tilde{X}^0 \vee \tilde{X}^0, \iota Y) \xleftarrow{(i_0, i_1)^*} \mathcal{P}_{\mathbf{N}}(I_B^+ \wedge \tilde{X}_0, \iota Y)) \\ & \cong \mathcal{P}_{\mathbf{N}}(Z_{\tilde{f}^1, \tilde{f}^2}, \iota Y) \cong \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(\epsilon Z_{\tilde{f}^1, \tilde{f}^2}, Y). \end{aligned}$$

□

Zu jedem Morphismus $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X, Y)$ betrachten wir die *Cofaser-* oder *Puppesequenz*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C_f,$$

wobei $C_f := Z_{f, 0}$, $0 : X \longrightarrow B$ der *Kegel von f* und i der universelle Pfeil ist.

Bezeichnet $q_f : C_f \longrightarrow S_B^1 \wedge X$ die durch $\operatorname{colim}(0 \vee id_B, id_{I_B^+ \wedge X})$ gegebene Abbildung

$$\operatorname{colim}(Y \vee B \xleftarrow{f \vee 0} X \vee X \xrightarrow{(i_0, i_1)} I_B^+ \wedge X) \longrightarrow \operatorname{colim}(B \vee B \xleftarrow{0 \vee 0} X \vee X),$$

dann sind für jedes cofibrante $f \in \mathcal{S}c_{\mathbf{N}}(X, Y)$ und $T \in |\mathcal{S}c_{\mathbf{N}}|$ die Folgen

$$\dots \xrightarrow{q_f^*} \mathcal{S}t^n(T, X) \xrightarrow{f_*} \mathcal{S}t^n(T, Y) \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}t^n(T, C_f) \xrightarrow{q_f^*} \mathcal{S}t^{n-1}(T, X) \xrightarrow{f_*} \dots \quad (1)$$

$$\dots \xleftarrow{q_f^*} \mathcal{S}t^n(X, T) \xleftarrow{f^*} \mathcal{S}t^n(Y, T) \xleftarrow{i^*} \mathcal{S}t^n(C_f, T) \xleftarrow{q_f^*} \mathcal{S}t^{n+1}(X, T) \xleftarrow{f^*} \dots \quad (2)$$

exakt, wobei

$$\mathcal{S}t^n(X, Y) := \mathcal{S}c_{\mathbf{N}}h(\Sigma^n X, Y).$$

Zum Beweis übertrage man die Homotopien aus [Pu1] S.254 auf den parametrisierten Fall.

1.4.3 Definition. Eine Teilklasse $\mathcal{C} \subset |\mathcal{S}t|$ heißt *h-covollständig*, falls

- (i) mit jedem cofibranten $f : X \rightarrow Y$ auch C_f in \mathcal{C} liegt und
- (ii) \mathcal{C} abgeschlossen gegenüber kleinen Coprodukten und Homotopieäquivalenzen ist.

1.4.4 Hilfssatz. Gegeben seien Morphismen $f' : S_B^1 \wedge X \rightarrow X'$ und $f'' : S_B^1 \wedge X \rightarrow X''$ aus $\mathcal{S}_{\mathbf{N}}$. Dann ist

$$Z_{f', f''} \cong C_f \quad \text{mit } f = j_1 f' - j_2 f'' : S_B^1 \wedge X \rightarrow X' \vee X''$$

(j_1, j_2 sind hier die jeweiligen Inklusionen in das Coprodukt).

Beweis: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X' \vee X'' \vee B & \xleftarrow{f \vee 0} & (S^1 \vee S^1)_B \wedge X & \xrightarrow{(i_0, i_1)_B \wedge id} & (I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \\ \downarrow id & & \downarrow (d, 0)_B \wedge id & & \downarrow h_B \wedge id \\ X' \vee X'' & \xleftarrow{f' \vee f''} & (S^1 \vee S^1)_B \wedge X & \xrightarrow{(i_0, i_1)_B \wedge id} & (I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \end{array}$$

beschreibt eine Abbildung $\Phi : C_f \rightarrow Z_{f', f''}$, wobei $d := (j_1, j_2(-id_{S^1})) : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ und h eine Homotopie von $(i_0, i_1)d$ in den Grundpunkt von $I^+ \wedge S^1$ ist. (i_0, i_1) und h induzieren eine Abbildung

$$A := \text{colim}(S^1 \vee S^1 \xleftarrow{(d, 0)} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{(i_0, i_1)} I^+ \wedge S^1) \xrightarrow{\phi} I^+ \wedge S^1,$$

bei der es sich um eine Homotopieäquivalenz unter $S^1 \vee S^1$ handelt. ψ bezeichne ein h-Inverses unter $S^1 \vee S^1$.

Wir definieren nun $\Psi : Z_{f', f''} \rightarrow C_f$ als die universelle Abbildung auf $X' \vee X''$ und $(I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \xrightarrow{\psi_B \wedge id} A_B \wedge X \xrightarrow{\hat{f}} C_f$. \hat{f} ist hier gegeben durch $(S^1 \vee S^1)_B \wedge X \xrightarrow{f' \vee f''} X' \vee X'' \xrightarrow{univ.} C_f$ und der universellen Abbildung $(I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \rightarrow C_f$.

Um $\Psi \Phi \simeq id_{C_f}$ zu beweisen, beachte man, daß

$$(I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \xrightarrow{h_B \wedge id} (I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \xrightarrow{\psi_B \wedge id} A_B \wedge X \xrightarrow{\hat{f}} C_f$$

homotop relativ $(S^1 \vee S^1)_B \wedge X$ zu dem universellen Pfeil $(I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \rightarrow C_f$ ist. Die Homotopie $\Phi \Psi \simeq id_{Z_{f', f''}}$ folgt aus der Gleichung $\Phi \hat{f} = u(\phi_B \wedge id_X)$ mit universellem $u : (I^+ \wedge S^1)_B \wedge X \rightarrow Z_{f', f''}$. \square

1.4.5 Feststellung. Es sei

$$X^0 \xrightarrow{f^0} X^1 \xrightarrow{f^1} X^2 \xrightarrow{f^2} \dots$$

eine Folge cofibranter Morphismen, so daß

- (i) $\tilde{f}_n^k : \tilde{X}_n^k \longrightarrow \tilde{X}_n^{k+1}$ für alle $k, n \in \mathbf{N}$ abgeschlossene Cofaserungen über B sind und
(ii) $\text{colim}(\tilde{X}^0 \xrightarrow{\tilde{f}^0} \tilde{X}^1 \xrightarrow{\tilde{f}^1} \tilde{X}^2 \xrightarrow{\tilde{f}^2} \dots) \in |\mathcal{P}_{\mathbf{N}}|$ cofasernd ist.

Dann existieren cofibrante $f, f' \in \mathcal{S}_{\mathbf{C}_{\mathbf{N}}}$ und eine Homotopieäquivalenz

$$Z_{f, f'} \xrightarrow{\Phi} \text{colim}(X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow X^2 \rightarrow \dots).$$

Beweis: Wir definieren

$$f : \bigvee_{n \in \mathbf{N}} X^n \longrightarrow \bigvee_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n \text{ gerade}}} X^n \quad x \mapsto \begin{cases} j^n x; & x \in X^n \text{ n gerade} \\ j^{n+1} f^n x; & x \in X^n \text{ n ungerade} \end{cases}$$

und

$$f' : \bigvee_{n \in \mathbf{N}} X^n \longrightarrow \bigvee_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n \text{ ungerade}}} X^n \quad x \mapsto \begin{cases} j^n x; & x \in X^n \text{ n ungerade} \\ j^{n+1} f^n x; & x \in X^n \text{ n gerade} \end{cases}$$

(j^n sind die Inklusionen in das jeweilige Coprodukt.) Weil die naheliegende Abbildung Φ vom Zylinder in den Colimes cofibrant ist, genügt es nach 3.4 zu zeigen, daß Φ von Homotopieäquivalenzen über und unter B erzeugt wird:

Es sei $\tilde{\tau}(k)$ der Zylinder in $P_{\mathbf{N}}$ von

$$\tilde{f}(k) : \bigvee_{n=1,2,\dots,k-1} \tilde{X}^n \longrightarrow \bigvee_{\substack{n=1,2,\dots,k \\ n \text{ gerade}}} \tilde{X}^n \quad \text{und} \quad \tilde{f}'(k) : \bigvee_{n=1,2,\dots,k-1} \tilde{X}^n \longrightarrow \bigvee_{\substack{n=1,2,\dots,k \\ n \text{ ungerade}}} \tilde{X}^n,$$

wobei $k \in \mathbf{N}$ und $\tilde{f}(k)$ bzw. $\tilde{f}'(k)$ wie oben durch die Erzeugenden der f^n definiert sind ($\tilde{\tau}$ heißt auch *Teleskop der \tilde{f}^n*). Die kanonischen Abbildungen $\tilde{\tau}(k)_n \longrightarrow \tilde{\tau}(k+1)_n$ sind nach B.5 abgeschlossene Cofaserungen über B und es gilt $\tilde{Z}_{\tilde{f}, \tilde{f}'} \cong \text{colim} \tilde{\tau}(k)$. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\tau}(0)_n & \longrightarrow & \tilde{\tau}(1)_n & \longrightarrow & \tilde{\tau}(2)_n & \longrightarrow & \tilde{\tau}(3)_n \longrightarrow \dots \\ \downarrow \varphi^0 & & \downarrow \varphi^1 & & \downarrow \varphi^2 & & \downarrow \varphi^3 \\ \tilde{X}_n^0 & \longrightarrow & \tilde{X}_n^1 & \longrightarrow & \tilde{X}_n^2 & \longrightarrow & \tilde{X}_n^3 \longrightarrow \dots \end{array}$$

sind die Spalten $\varphi^k : \tilde{\tau}(k)_n \longrightarrow \tilde{X}_n^k$ gegeben durch

$$\begin{aligned} ((\tilde{f}_n^k \tilde{f}_n^{k-1} \dots \tilde{f}_n^i)_{i \leq k, \text{gerade}}, (\tilde{f}_n^k \tilde{f}_n^{k-1} \dots \tilde{f}_n^i)_{i \leq k, \text{ungerade}}) &: \bigvee_{\substack{i \leq k \\ i \text{ gerade}}} \tilde{X}_n^i \vee \bigvee_{\substack{i \leq k \\ i \text{ ungerade}}} \tilde{X}_n^i \longrightarrow \tilde{X}_n^k \\ (1 \wedge \tilde{f}_n^k \tilde{f}_n^{k-1} \dots \tilde{f}_n^i)_{i \leq k} &: \bigvee_{i \leq k} I_B^+ \wedge \tilde{X}_n^i \longrightarrow \tilde{X}_n^k \end{aligned}$$

Homotopieäquivalenzen in \mathcal{O}_B^B . Also ist auch die induzierte Abbildung auf den Colimites eine Homotopieäquivalenz über B (vgl. Lemma 5 in [tD] S.162f). \square

3.11, 4.4 und 4.5 ergeben insgesamt

1.4.6 Folgerung. *Jede h-covollständige Klasse ist auch abgeschlossen gegenüber Zylindern cofibranter Morphismen und Colimites wie in 4.5.* \square

1.4.7 Satz. *Besteht B nur aus einem Punkt, so ist die volle Unterkategorie \mathcal{Swh} von \mathcal{St} , deren Objekte die kleinste h-covollständige Klasse mit $S \in |\mathcal{Swh}|$ bilden, äquivalent zu Boardmans Kategorie \mathcal{Boh} (vgl. [Bo], [Ad2] oder [Sw]). Außerdem stimmen die \wedge -Produkte bis auf natürliche Äquivalenzen überein.*

Beweis: Die Objekte in \mathcal{Bo} sind cofasernde Präspektren $X \in |\mathcal{P}_\mathbb{N}|$, deren Komponenten X_n Zellenkomplexe und Strukturabbildungen

$$\xi_n : S^1 \wedge X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

Inklusionen von Unterkomplexen sind. Die Morphismenmengen $\mathcal{Bo}(X, Y)$ werden von Präspektrenmorphismen $f_D : D \longrightarrow Y$ gebildet, die auf dichten Unterkomplexpräspektren definiert und komponentenweise zellulär sind. Hierbei heißt $D \subset X$ *dicht*, falls es zu jeder Zelle $K \subset X_n$ ein m gibt, so daß $S^m \wedge K \subset D_{n+m}$ gilt. Ein $f_{D'} : D' \longrightarrow Y$ ist äquivalent zu f_D , wenn es ein $f_{D''}''$ mit einem dichten $D'' \subset X$ gibt, welches $D'' \subset D \cap D'$ und $f|_{D''} = f_{D''}'' = f'|_{D''}$ erfüllt.

Nach 4.6 gehört ϵX für jedes $X \in |\mathcal{Bo}|$ zu $|\mathcal{Swh}|$. Ferner verifiziert man unschwer, daß D genau dann in X dicht liegt, wenn $D \epsilon X$ erzeugt. Also ist die Zuordnung

$$\mathcal{Boh}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{Swh}(\epsilon X, \epsilon Y) \quad f = (f_D, D \subset X \text{ dicht}) \mapsto \epsilon f_D$$

wohldefiniert. Ist andererseits $f \in \mathcal{P}_\mathbb{N}(X, \epsilon Y) \cong \mathcal{Sw}(\epsilon X, \epsilon Y)$, so bezeichne D_n den größten Unterkomplex von X_n , der ganz in $f_n^{-1}Y_n$ enthalten ist. Zusammen mit den Strukturabbildungen von X erhält man ein dichtes Unterspektrum D : Das Bild $f_n K$ einer Zelle $K \subset X_n$ liegt in einem gewissen $\Omega^m Y_{n+m}$, d.h.

$$f_{n+m}(S^m \wedge K) = S^m \wedge f_n K \subset Y_{n+m} \quad \text{und somit} \quad S^m \wedge K \subset D_{n+m}.$$

Außerdem finden wir mit Hilfe des (relativen) zellulären Approximationsatz in der Homotopieklasse von $f : D \longrightarrow Y$ einen zellulären Repräsentanten. Insgesamt ist also \mathcal{Boh} als volle Unterkategorie in \mathcal{Swh} enthalten. Vervollständigt man die Objektklasse von \mathcal{Bo} mit allen Homotopieäquivalenten in \mathcal{St} , so erhalten wir eine h-covollständige Klasse, die S enthält. Also ist die Äquivalenz der Kategorien \mathcal{Boh} und \mathcal{Swh} hergestellt.

Das \wedge -Produkt in $\mathcal{B}oh$ ist in unserer Terminologie bis auf natürliche Homotopieäquivalenzen durch $\hat{\varphi}^*(X \wedge Y)$ gegeben, wobei

$$\varphi : \mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty \quad e_n \mapsto \begin{cases} (e_{\frac{n}{2}}, 0); & n \text{ gerade} \\ (0, e_{\frac{n+1}{2}}); & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{E}(\mathbf{R}^\infty, \mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty)$ ist ([Sw] S. 259 ff). Die Behauptung ergibt sich aus

$$\epsilon \hat{\varphi}^*(X \wedge Y) \stackrel{2.2}{\cong} \varphi^* \epsilon(X \wedge Y) \stackrel{\kappa}{\cong} \varphi^* \epsilon(\epsilon X \wedge \epsilon Y) \stackrel{Def.}{\cong} r \epsilon(\epsilon X \wedge \epsilon Y)$$

□

Für ein beliebiges B ist es nicht klar, was man unter einem parametrisierten CW-Spektrum bzw. CW-Raum verstehen soll. Die kleinste h-covollständige Klasse, die S enthält, besteht aus zu wenig Objekten.

1.4.8 Beispiel. Die *Kleinsche Flasche* entsteht aus I^2 durch Identifikation der Ränder $(0, t) \sim (1, t)$, $(s, 0) \sim (1 - s, 0)$ für alle $s, t \in I$. Vermöge

$$\begin{aligned} s_{Kl} : S^1 &\longrightarrow Kl & t &\mapsto [0, t] & \text{und} \\ p_{Kl} : Kl &\longrightarrow S^1 & [s, t] &\mapsto [t] & s, t \in I \end{aligned}$$

wird sie zu einem Objekt in $\mathcal{O}_{S^1}^{S^1}$.

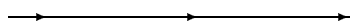
Wir behaupten, daß $S_{S^1}^0$ schwach homotopieäquivalent in $\mathcal{O}_{S^1}^{S^1}$ zu Kl ist, d.h. es gibt ein $f \in \mathcal{O}_{S^1}^{S^1}(S_{S^1}^0, Kl)$, welches eine Bijektion auf den Homotopiegruppen

$$f_* : \pi_k^{S^1}(S_{S^1}^0) \longrightarrow \pi_k^{S^1}(Kl) \quad \text{mit} \quad \pi_k^{S^1}(X) := \mathcal{O}_{S^1}^{S^1} h(S_{S^1}^k, X)$$

für alle $k \in \mathbf{N}$ induziert.

(i) $\pi_k^{S^1}(Kl) = 0$ für $k \geq 2$

Sei ein $f \in \mathcal{O}_{S^1}^{S^1}(S^n \times S^1, Kl)$ vorgegeben. Die Kleinsche Flasche wird von einem unendlich großen *Möbiusband* $M\ddot{o} := \mathbf{R} \times I / (s, 0) \sim (-s, 1)$, $s \in \mathbf{R}$ überlagert.



65.0025.00170.0025.002 19.0025.00318.0025.004 17.0025.00516.0025.006 15.0025.00714.0025.00825.005

$\pi : M\ddot{o} \longrightarrow Kl$ ist durch $\pi[s, t] := [s \bmod 1, t]$ gegeben.

Der Schnitt $s_{S_{S^1}^n} : S^1 \longrightarrow S_{S^1}^n$ erzeugt $\pi_1(S^n \times S^1)$ und ist ins Möbiusband hochhebbar. Deshalb faktorisiert nach dem Hauptsatz für Überlagerungen f durch $S^n \times S^1 \xrightarrow{\tilde{f}} M\ddot{o} \xrightarrow{\pi} Kl$. Wir können sogar $\tilde{f}_{s_{S_{S^1}^n}}[t] = [0, t]$ für alle $t \in I$

annehmen, weil f Schnitte in Schnitte überführt.

Die Abbildung $\phi : I \times M\ddot{o} \longrightarrow M\ddot{o} \quad (r, [s, t]) \mapsto [rs, t]$ ist wohldefiniert und die Komposition $I \times S^n \times S^1 \xrightarrow{id_I \times \hat{f}} I \times M\ddot{o} \xrightarrow{\phi} M\ddot{o} \xrightarrow{\pi} Kl$ liefert eine Homotopie in $\mathcal{O}_{S^1}^{S^1}$ von $s_{Kl} p_{S^1}$ nach f .

(ii) $\pi_1^{S^1}(Kl) = 0$

Sei nun $f \in \mathcal{O}_{S^1}^{S^1}(S_{S^1}^1, Kl)$ und $\varphi : I \longrightarrow S^1$ die Identifizierungsabbildung. $f(\varphi \times id_{S^1})$ läßt sich wie oben zu einer Abbildung $\hat{f} : I \times S^1 \longrightarrow M\ddot{o}$ hochheben, so daß $\pi \hat{f} = f(\varphi \times id_{S^1})$ und $\hat{f}(0, [t]) = [0, t]$ für alle $t \in I$ gilt. Insbesondere muß es ein $n \in \mathbf{Z}$ geben mit $\hat{f}(1, [t]) = [n, t]$ für alle $t \in I$. Aus $\hat{f}(1, [0]) = \hat{f}(1, [1])$ folgt $n = 0$ und somit $\hat{f}(0, [t]) = \hat{f}(1, [t])$ für alle $t \in I$. Wir erhalten also sogar eine Hochhebung \hat{f} von f in das Möbiusband. Dieselbe Homotopie wie unter (i) liefert die Behauptung.

(iii) $\pi_0^{S^1}(Kl) = \mathbf{Z}/2$

Jede Abbildung $f \in \mathcal{O}_{S^1}^{S^1}(S_{S^1}^0, Kl)$ ist auf dem ersten Summanden von $S_{S^1}^0 = S^1 \sqcup S^1$ durch den Schnitt vorgegeben. Wir heben $f' : I \xrightarrow{\varphi} S^1 \xrightarrow{i_2} S^1 \sqcup S^1 \xrightarrow{f} Kl$ zu einer Abbildung $\hat{f} : I \longrightarrow M\ddot{o}$ mit $\hat{f}(0) = [a, 0]$ $0 \leq a < 1$ und $\hat{f}(t) = [g(t), t]$ $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ hoch. Insbesondere gilt also $g(0) = a$ und $g(1) = n - a$ für ein $n \in \mathbf{Z}$. $\hat{h} : I^2 \longrightarrow M\ddot{o} \quad (s, t) \mapsto [sg(t) + (1-s)\frac{n}{2}, t]$ beschreibt eine Homotopie über S^1 von $\alpha_n[t] := [\frac{n}{2}, t]$ nach \hat{f} . Wegen $\hat{h}(s, 0) + \hat{h}(s, 1) = sg(0) + (1-s)\frac{n}{2} + sg(1) + (1-s)\frac{n}{2} = n$ induziert \hat{h} eine Homotopie über S^1 $h : I \times S^1 \longrightarrow Kl$ von fi_2 nach $\pi\alpha_n$.

Beachtet man, daß $\pi\alpha_0$ nicht homotop zu $\pi\alpha_1$ und

$$\pi\alpha_n = \begin{cases} \pi\alpha_0 = s_{Kl}; & n \text{ gerade} \\ \pi\alpha_1; & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist, so erhält man insgesamt eine schwache Homotopieäquivalenz

$$S_{S^1}^0 = S^1 \sqcup S^1 \xrightarrow{\pi\alpha_0 \sqcup \pi\alpha_1} Kl.$$

□

Man macht sich leicht klar, daß die Ergebnisse (i) und (ii) auch für jeden anderen Schnitt $s : S^1 \longrightarrow Kl$ gelten würden. Mit einem Analogon des Whiteheadtheorems für die Kategorie $\mathcal{O}_{S^1}^{S^1}$ folgt, daß bereits einfache Sphärenbündel über der Kreislinie wie die Kleinsche Flasche im obigen Sinn keine CW-Räume über S^1 sein können. Für die weiteren Betrachtungen wird deshalb $B = pt$ gesetzt.

1.5 Schwache Homotopieäquivalenzen

1.5.1 Definition. (i) Ein Morphismus $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X, Y)$ heißt *n-zusammenhängend*, falls

$$f_* : \pi_k(X) \longrightarrow \pi_k(Y)$$

surjektiv für alle $k \leq n$ und injektiv für alle $k < n$ ist. $\pi_k(X)$ bezeichnet hierbei die Homotopiegruppen $\mathcal{S}_{\mathbf{N}}h(\Sigma^k S, X)$.

(ii) Ein Spektrum $X \in |\mathcal{S}_{\mathbf{N}}|$ nennen wir n -zusammenhängend, wenn $pt \rightarrow X$ n -zusammenhängend ist.

(iii) Ein ∞ -zusammenhängender Morphismus wird auch als *schwache Homotopieäquivalenz* bezeichnet.

1.5.2 Feststellung. Für alle $X \in |\mathcal{S}_{\mathbf{N}}|$ und $n+k \geq 0$ ist $\pi_n(X)$ natürlich isomorph zu $\pi_{n+k}(X_k)$.

Beweis: Zu $T \in |\mathcal{T}^{pt}| = |\mathcal{S}_0|$ und $X \in |\mathcal{S}_{\mathbf{N}}|$ haben wir natürliche Äquivalenzen

$$\mathcal{S}_{\mathbf{N}}(\Sigma^n 0_* T, X) \cong \mathcal{S}_0(T, 0^* \Sigma^{-n} X) = \begin{cases} \mathcal{S}_0(T, \Omega^n X_0); & n \geq 0 \\ \mathcal{S}_0(T, X_{-n}); & n \leq 0 \end{cases}$$

Wegen $0_*(I^+ \wedge S^0) \cong I^+ \wedge 0_* S^0$ bzw. $0_*(\{0, 1\}^+ \wedge S^0) \cong \{0, 1\}^+ \wedge 0_* S^0$ folgt die Behauptung für $n \leq 0$ aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(I^+ \wedge \Sigma^n S, X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{S}_0(I^+ \wedge S^0, X_{-n}) \\ \downarrow (i \wedge id_{\Sigma^n S})^* & & \downarrow (i \wedge id_{S^0})^* \\ \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(\{0, 1\}^+ \wedge \Sigma^n S, X) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(\{0, 1\}^+ \wedge S^0, X_{-n}) \end{array}$$

und analog für $n > 0$. □

1.5.3 Folgerung. $f \in \mathcal{S}_{\mathbf{N}}(X, Y)$ ist genau dann n -zusammenhängend, wenn f_k $n+k$ -zusammenhängend ist für alle $n+k \geq 0$. □

1.5.4 Feststellung. Ist $\{X^\alpha; \alpha \in I\}$ eine Familie cofibranter Spektren, dann induzieren die Inklusionen $i^\alpha : X^\alpha \rightarrow \bigvee_{\alpha \in I} X^\alpha$ für alle $n \in \mathbf{Z}$ einen Isomorphismus

$$(i_*^\alpha) : \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_n(X^\alpha) \xrightarrow{\cong} \pi_n(\bigvee_{\alpha \in I} X^\alpha).$$

Beweis: Die lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(X^1) \xrightarrow{i_*^1} \pi_n(X^1 \vee X^2) \xrightarrow{i_*^2} \pi_n(C_{i^1}) \xrightarrow{q_{i^1}^*} \pi_{n-1}(X^1) \rightarrow \dots$$

zerfällt, weil i_* ein Rechtsinverses $j_* : \pi_n(C_{i^1}) \xrightarrow{((0, id_{X^2}, 0))^*} \pi_n(X^2) \xrightarrow{i_*^2} \pi_n(X^1 \vee X^2)$ hat. Also ist $\pi_n(X^1) \oplus \pi_n(X^2) \xrightarrow{(i_*^1, i_*^2)} \pi_n(X^1 \vee X^2)$ ein Isomorphismus und per Induktion dürfen wir annehmen, daß die Behauptung bereits für jede endliche Indexmenge $J \subset I$ gilt. Unter Beachtung von 5.2 ergibt sich

$$\pi_n((\bigvee_{\alpha \in I} X^\alpha)_k) \cong \pi_n(\operatorname{colim}_{\alpha \in I} (\bigvee_{\alpha \in I} \tilde{X}_k^\alpha \rightarrow \Omega \bigvee_{\alpha \in I} \tilde{X}_{k+1}^\alpha \rightarrow \Omega^2 \bigvee_{\alpha \in I} \tilde{X}_{k+2}^\alpha \rightarrow \dots))$$

$$\begin{aligned}
&\cong \operatorname{colim}(\pi_n(\operatorname{colim}_{\substack{J \subset I \\ |J| < \infty}} \bigvee_{\alpha \in J} \tilde{X}_k^\alpha) \rightarrow \pi_{n+1}(\operatorname{colim}_{\substack{J \subset I \\ |J| < \infty}} \bigvee_{\alpha \in J} \tilde{X}_{k+1}^\alpha) \rightarrow \dots) \\
&\cong \operatorname{colim}_{\substack{J \subset I \\ |J| < \infty}} \operatorname{colim}(\pi_n(\bigvee_{\alpha \in J} \tilde{X}_k^\alpha) \rightarrow \pi_{n+1}(\bigvee_{\alpha \in J} \tilde{X}_{k+1}^\alpha) \rightarrow \dots) \\
&\cong \operatorname{colim}_{\substack{J \subset I \\ |J| < \infty}} \pi_n((\bigvee_{\alpha \in J} X^\alpha)_k) \cong \operatorname{colim}_{\substack{J \subset I \\ |J| < \infty}} \bigoplus_{\alpha \in J} \pi_n(X_k^\alpha) \\
&\cong \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_n(X_k^\alpha)
\end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis garantiert die Verträglichkeit zusammenhängender Morphismen mit kleinen Coprodukten. Der letzte Teil dieser Arbeit untersucht die Gültigkeit eines entsprechenden Resultats für das \wedge -Produkt von Spektren.

1.5.5 Feststellung. *Mit $f : X \rightarrow X'$ ist auch $f \wedge id_Y : X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz, wenn X, X' und Y wohlpunktierte Räume sind.*

Beweis: Benutze [Gr] S.140 Lemma 16.24. □

1.5.6 Satz. *Mit $f \in \mathcal{St}(X, X')$ und $g \in \mathcal{St}(Y, Y')$ ist auch $f \wedge g \in \mathcal{St}(X \wedge Y, X' \wedge Y')$ eine schwache Homotopieäquivalenz.*

Beweis: (i) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $Y = Y'$ und $g = id_Y$ annehmen. Diejenigen Spektren $Y \in |\mathcal{St}|$, für die $f \wedge id_Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz darstellt, bilden eine h-covollständige Klasse \mathcal{C} . Denn ist $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ ein cofibranter Morphismus zwischen Objekten aus \mathcal{C} , so zeigt das Fünferlemma angewandt auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_n(X \wedge Y^1) & \xrightarrow{id \wedge g_*} & \pi_n(X \wedge Y^2) & \xrightarrow{id \wedge i_*} & \pi_n(X \wedge C_g) & \xrightarrow{id \wedge q_g^*} & \pi_{n-1}(X \wedge Y^1) & \xrightarrow{id \wedge g_*} & \pi_{n-1}(X \wedge Y^2) \\
\cong \downarrow f \wedge id_* & & \cong \downarrow f \wedge id_* & & \downarrow f \wedge id_* & & \cong \downarrow f \wedge id_* & & \cong \downarrow f \wedge id_* \\
\pi_n(X' \wedge Y^1) & \xrightarrow{id \wedge g_*} & \pi_n(X' \wedge Y^2) & \xrightarrow{id \wedge i_*} & \pi_n(X' \wedge C_g) & \xrightarrow{id \wedge q_g^*} & \pi_{n-1}(X' \wedge Y^1) & \xrightarrow{id \wedge g_*} & \pi_{n-1}(X' \wedge Y^2)
\end{array}$$

daß auch C_g zu \mathcal{C} gehört. Außerdem garantiert 5.4 die Abgeschlossenheit von \mathcal{C} gegenüber kleinen Coprodukten:

$$\begin{aligned}
\pi_n(X \wedge \bigvee_{\alpha \in I} Y^\alpha) &\cong \pi_n(\bigvee_{\alpha \in I} X \wedge Y^\alpha) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_n(X \wedge Y^\alpha) \\
&\xrightarrow{\oplus f \wedge id_{Y^\alpha}} \bigoplus_{\alpha \in I} \pi_n(X' \wedge Y^\alpha) \cong \pi_n(X' \wedge \bigvee_{\alpha \in I} Y^\alpha)
\end{aligned}$$

Der Aushängungssatz 3.11 ermöglicht eine Zerlegung von $(f \wedge id_S)_*$ in Isomorphismen

$$\pi_n(X \wedge S) \cong \pi_{n-1}(X) \xrightarrow{f_*} \pi_{n-1}(X') \cong \pi_n(X' \wedge S).$$

Damit gilt die Behauptung bereits für jedes CW-Spektrum $Y \in |\mathcal{Sw}|$. Zu einem beliebigen $Y \in |\mathcal{St}|$, welches von Y cofasernd erzeugt werde, finden wir unter Verwendung des

(relativen) CW-Approximationssatzes einen Präspektrenmorphismus $\tilde{g} : \tilde{Y}' \longrightarrow \tilde{Y}$, so daß $Y' := \epsilon \tilde{Y}' \in |\mathcal{S}w|$ und \tilde{g}_n schwache Homotopieäquivalenzen sind. Wenn wir zeigen können, daß die vertikalen Pfeile in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \wedge Y' & \xrightarrow[f \wedge id]{w} & X' \wedge Y' \\ \downarrow id \wedge g & \simeq & \downarrow id \wedge g \\ X \wedge Y & \xrightarrow{f \wedge id} & X' \wedge Y \end{array}$$

Bijektionen auf den Homotopiegruppen erzeugen, sind wir fertig. Hierzu wählen wir $\varphi : \mathbf{R}^\infty \longrightarrow \mathbf{R}^\infty \times \mathbf{R}^\infty$ wie in 4.7 und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi_n((X \wedge Y')_k) &\cong \pi_n((\varphi^* \epsilon(X \wedge Y'))_k) \stackrel{\varphi^* \kappa}{\cong} \pi_n((\varphi^* \epsilon(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}'))_k) \stackrel{2.2}{\cong} \pi_n((\epsilon \hat{\varphi}^*(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}'))_k) \\ &\stackrel{1.9}{\cong} \pi_n(\text{colim}(\tilde{X}_{[\frac{k}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+1}{2}]} \rightarrow \Omega(\tilde{X}_{[\frac{k+1}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+2}{2}]})) \rightarrow \Omega^2(\tilde{X}_{[\frac{k+2}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+3}{2}]})) \rightarrow \dots) \\ &\cong \text{colim}(\pi_n(\tilde{X}_{[\frac{k}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+1}{2}]})) \rightarrow \pi_{n+1}(\tilde{X}_{[\frac{k+1}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+2}{2}]})) \rightarrow \pi_{n+2}(\tilde{X}_{[\frac{k+2}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+3}{2}]})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Also ist

$$(id_X \wedge g)_{k*} = \text{colim}_{l \rightarrow \infty} (id_{\tilde{X}_{[\frac{k+l}{2}]} \wedge \tilde{g}_{[\frac{k+l+1}{2}]}}) : \pi_n((X \wedge Y')_k) \longrightarrow \pi_n((X \wedge Y)_k)$$

nach 5.5 für alle $n, k \in \mathbf{N}$ ein Isomorphismus und die Behauptung folgt nun aus 5.3. \square

Wir notieren eine Folgerung, die sich unter Verwendung von 4.6 ergibt.

1.5.7 Folgerung. Jeder Homologiefunktor

$$H : \mathcal{D} \stackrel{\text{voll}}{\subset} \mathcal{S}t \longrightarrow \text{Abelsche Gruppen}$$

der Form $H_*(X) = \mathcal{S}t^*(A, X \wedge E)$ mit $A \in |\mathcal{S}w|$ und $E \in |\mathcal{S}t|$ ist mit schwachen Homotopieäquivalenzen verträglich. \square

1.5.8 Hilfssatz. Jedes n -zusammenhängende, cofibrante Spektrum X ist schwach homotopieäquivalent zu einem $Y = \epsilon \tilde{Y} \in |\mathcal{S}w|$, so daß die $(n+k)$ -Gerüste von \tilde{Y}_k für alle $n+k \geq 0$ nur aus einem Punkt bestehen.

Beweis: Der Morphismus

$$f^0 : Y^0 := \bigvee_{m \geq n} \bigvee_{[\alpha] \in \pi_m(X)} \Sigma^m S^\alpha \xrightarrow{(\alpha)} X$$

mit $S^\alpha := S$ induziert Surjektionen auf den Homotopiegruppen $\pi_k(Y^0) \xrightarrow{f_*^0} \pi_k(X)$ für alle $k \in \mathbf{Z}$. Um Injektionen zu erhalten, konstruieren wir rekursiv $f^i : Y^i \longrightarrow X$, so daß

- (i) \tilde{Y}^{i+1} entsteht aus \tilde{Y}^i durch Anheftung (stabiler) Zellen der Dimension $\geq n$
- (ii) $f^{i+1} g^i \simeq f^i$ für $g^i : Y^i \hookrightarrow Y^{i+1}$
- (iii) $\text{kern}(\pi_k(Y^i) \xrightarrow{f_*^i} \pi_k(X)) \subset \text{kern}(\pi_k(Y^i) \xrightarrow{g_*^i} \pi_k(Y^{i+1}))$ für alle $k \in \mathbf{Z}$

Y^{i+1} sei der Kegel von

$$\bigvee_{m \geq n} \bigvee_{[\alpha] \in K_m} \Sigma^m S^\alpha \xrightarrow{(\alpha)} Y^i,$$

wobei $K_m := \text{kern}(\pi_m(Y^i) \xrightarrow{f_*^i} \pi_m(X))$ und $S^\alpha := S$ gelte. Weil $\mathcal{St}(_, X)$ Cofasersequenzen in exakte Sequenzen überführt, gibt es ein $f^{i+1} : Y^{i+1} \rightarrow X$, welches (ii) und (iii) erfüllt.

Die Eigenschaft (i) sichert uns die Existenz von $Y := \text{colim } Y^i$ als Objekt in \mathcal{Sw} . Nach 4.4 und 4.5 läßt sich Y bis auf eine Homotopieäquivalenz als Kegel von

$$\bigvee_{i \in \mathbf{N}} Y^i \xrightarrow{\bigvee^{(-1)^i (id_{Y^i} - g^i)}} \bigvee_{i \in \mathbf{N}} Y^i$$

darstellen. Die exakte Sequenz

$$\mathcal{St}(Y, X) \xrightarrow{i_*} \prod_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{St}(Y^i, X) \xrightarrow{\prod^{(-1)^i (id_{Y^i} - g^i)^*}} \prod_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{St}(Y^i, X)$$

liefert zusammen mit (ii) ein $f : Y \rightarrow X$, so daß $f|_{Y^i} \simeq f^i$ gilt.

Jeder Morphismus $\alpha : \Sigma^k S \rightarrow X$ läßt sich bis auf Homotopie bereits nach Y^0 hochheben, also ist $f_* : \pi_k(Y) \rightarrow \pi_k(X)$ für alle $k \in \mathbf{Z}$ surjektiv. Zum Beweis der Injektivität beachte man die Isomorphie

$$\begin{aligned} \pi_k(Y) &\cong \pi_{k+j}((\epsilon \text{colim}_{i \rightarrow \infty} \tilde{Y}^i)_j) \\ &\cong \text{colim}(\pi_{k+j}(\text{colim}_{i \rightarrow \infty} \tilde{Y}_j^i) \rightarrow \pi_{k+j+1}(\text{colim}_{i \rightarrow \infty} \tilde{Y}_{j+1}^i) \rightarrow \dots) \\ &\cong \text{co lim}_{(i,l) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}} \pi_{k+j+l}(\tilde{Y}_{j+l}^i) \cong \text{colim}_{i \rightarrow \infty} \pi_{k+j}(Y_j^i) \\ &\cong \text{colim}_{i \rightarrow \infty} \pi_k(Y^i) \end{aligned}$$

Jedes Element aus $\text{kern}(\pi_k(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_k(X))$ liegt also bereits im Kern von $f_*^i : \pi_k(Y^i) \rightarrow \pi_k(X)$ für ein $i \in \mathbf{N}$ und wird wegen (iii) unter g_*^i annulliert. \square

1.5.9 Satz. *Das Produkt $X \wedge Y$ eines n -zusammenhängenden Spektrums $X \in |\mathcal{St}|$ mit einem m -zusammenhängenden $Y \in |\mathcal{St}|$ ist $n+m+1$ -zusammenhängend.*

Beweis: Sind A und B CW-Komplexe mit Zellen nur in den Dimensionen $> a$ bzw. $> b$, dann hat das $(a+b+1)$ -Gerüst von $A \times B$ die Form

$$(A \times B)^{(a+b+1)} = \bigcup_{p+q=a+b+1} A^{(p)} \times B^{(q)} = \bigcup_{a+1 \leq p \leq a+b+1} A^{(p)} \times * \cup \bigcup_{b+1 \leq q \leq a+b+1} * \times B^{(q)} \subset A \vee B.$$

Also ist $(A \wedge B)^{(a+b+1)} = *$ und $A \wedge B$ $(a+b+1)$ -zusammenhängend. Approximieren wir demnach X und Y durch CW-Spektren X' und Y' wie in 5.8, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \pi_j(X \wedge Y) &\stackrel{5.6}{\cong} \pi_j(X' \wedge Y') \stackrel{5.2}{\cong} \pi_{j+k}((X \wedge Y)_k) \\ &\cong \text{colim}(\pi_{j+k}(\tilde{X}'_{[\frac{k}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+1}{2}]}) \rightarrow \pi_{j+k+1}(\tilde{X}'_{[\frac{k+1}{2}]} \wedge \tilde{Y}'_{[\frac{k+2}{2}]}) \rightarrow \dots) \end{aligned}$$

der $(n + m + 1)$ -Zusammenhang von $X \wedge Y$. \square

Anhang A. Exponentialgesetze für parametrisierte Räume

A.1.1 Ein fasernweise punktierter, *parametrisierter Raum* oder auch *Ex-Raum* über einem Raum B ist ein Tripel $X = (X, s, p)$, wobei X ein Raum* ist und s ein Schnitt zur Projektion p ist, d.h.

$$B \xrightarrow{s} X \xrightarrow{p} B$$

Abbildungen sind mit $ps = id_B$. \mathcal{T}_B^B bezeichne die Kategorie, deren Objekte parametrisierte Räume und Morphismen $f : X \rightarrow Y$ Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ sind, die $f s_X = s_Y$ und $p_Y f = p_X$ erfüllen.

In \mathcal{T}_B^B gibt es Produkte und Coprodukte: Das *fasernweise Produkt* $X \times_B Y$ ist definiert als kartesische Ergänzung (Limes) von

$$X \xrightarrow{p_X} B \xleftarrow{p_Y} Y$$

und das *fasernweise punktierte Coprodukt* $X \vee_B Y$ als cokartesische Ergänzung (Colimes) von

$$X \xleftarrow{s_X} B \xrightarrow{s_Y} Y$$

mit den naheliegenden Schnitten und Projektionen.

Das Objekt $B := (B, id_B, id_B)$ ist initial und terminal in \mathcal{T}_B^B . Folglich gibt es eine kanonische Abbildung von $X \vee_B Y$ nach $X \times_B Y$. Das *fasernweise Smashprodukt* $X \wedge_B Y$ ist die cokartesische Ergänzung von

$$B \longleftarrow X \vee_B Y \longrightarrow X \times_B Y.$$

A.1.2 Feststellung: In \mathcal{T}_B^B existieren alle kleinen Limites und Colimites.

Beweis: Sei J eine kleine Kategorie und $F : J \rightarrow \mathcal{T}_B^B$ ein Funktor, von dem der Limes gebildet werden soll. Wir erweitern J um ein zusätzliches Objekt ω und verlangen, daß die Morphismenmengen $J(j, \omega)$ und $J(\omega, \omega)$ je aus genau einem und $J(\omega, j)$ aus keinem Element für jedes $j \in J$ bestehen. Diese Daten bilden eine Kategorie \tilde{J} . F wird zu einem Funktor $\tilde{F} : \tilde{J} \rightarrow \mathcal{T}_B^B$ fortgesetzt, indem wir $\tilde{F}(\omega) := B$ und $\tilde{F}(u) := p_{Fj}$ für $u : j \rightarrow \omega$ setzen. Der gewöhnliche Limes in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume von \tilde{F} mit naheliegender Projektion und Schnitt ist dann ein Limesobjekt in \mathcal{T}_B^B .

Ähnlich kann man mit Colimites verfahren, indem man den Funktor F mit den Schnitten $(s_{Fj}, j \in |J|)$ erweitert. Colimites in der Kategorie der schwach Hausdorff-Räume sind hierbei maximale schwach Hausdorff-Quotienten der entsprechenden Colimites in der Kategorie der kompakt erzeugten Räume (vgl. [Vo] und [Le1]). \square

Ist B nichtleer, was wir im folgenden immer voraussetzen möchten, gibt es einen treuen Funktor von der Kategorie der punktierten Räume \mathcal{T}^{pt} nach \mathcal{T}_B^B . Er ordnet einem

*Unter einem *Raum* verstehe man einen kompakt erzeugten, topologischen Raum, der die schwach-Hausdorffsche Eigenschaft erfüllt, im Sinne von McCord [Co].

punktierten Raum (X, x_0) das Objekt

$$X_B := (X \times B, (x_0, id_B), pr_B)$$

und punktierten Abbildungen f den Morphismus $f_B := (f \times id_B)$ zu.

Für jeden Ex-Raum Y sei $F_B^B(X_B, Y)$ das Objekt $(F_B^B(X_B, Y), \bar{s}_Y, p_Y ev_{x_0})$ in \mathcal{T}_B^B , wobei

$$F_B^B(X_B, Y) := \{g : X \longrightarrow Y \mid g(x_0) = s_Y p_Y g(x) \text{ für alle } x \in X\} \text{ Teilraum des Abbildungsraums } Y$$

X , $\bar{s}_Y(b) \in F_B^B(X_B, Y)$ für alle $b \in B$ die konstante Abbildung zum Wert $s_Y(b)$ und ev die Evaluationsabbildung ist.

Dann ist $F_B^B(X_B, _) : \mathcal{T}_B^B \longrightarrow \mathcal{T}_B^B$ rechtsadjungiert zu $X_B \wedge_B _ : \mathcal{T}_B^B \longrightarrow \mathcal{T}_B^B$.

Aber leider ist weder \mathcal{T}_B^B noch \mathcal{T}_B , die Kategorie der Räume über B (ohne Schnitt), kartesisch abgeschlossen, d.h. es gibt Objekte ohne Exponenten. Booth und Brown führten deshalb in [BB] das Konzept der partiellen Abbildungen ein, das hier kurz vorgestellt wird.

A.1.3 Definition: \mathcal{K} sei die Kategorie aller kompakt erzeugten Räume (nicht notwendigerweise schwach Hausdorff) und Y ein Objekt in \mathcal{K} . Wir definieren $\tilde{Y} \in |\mathcal{K}|$ als Menge $Y \cup \{\omega\}$ versehen mit folgender Topologie: Die abgeschlossenen Mengen von \tilde{Y} seien \tilde{Y} und jede abgeschlossene Teilmenge von Y .

Die Zuordnung $Y \longrightarrow \tilde{Y}$ ist funktoriell und induziert eine bezüglich Y natürliche Äquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(X, \tilde{Y}) & \cong & \bigsqcup_{\substack{A \subset X \\ A \text{ abgeschlossen}}} \mathcal{K}(A, Y) \\ f & \longrightarrow & f|_{f^{-1}(Y)} \\ \tilde{g} \pi_A & \longleftarrow & g \end{array},$$

wobei

$$\pi_A : X \longrightarrow \tilde{A} \quad \pi_A(x) = \begin{cases} x & ; x \in A \\ \omega & ; x \notin A \end{cases}.$$

Zu kompakt erzeugten Räumen $Y, Z \in \mathcal{K}_B$ über B definieren wir jetzt $F_B(Y, Z) \in \mathcal{K}_B$ als kartesische Ergänzung von $B \xrightarrow{\theta} \tilde{B}^Y \xleftarrow{\tilde{p}^{Z*}} \tilde{Z}^Y$ mit naheliegender Projektion. Hierbei ist θ adjungiert zu der partiellen Abbildung

$$\text{Graph}(p_Y) = \{(y, p_Y y) \in Y \times B\} \subset Y \times B \xrightarrow{pr} B.$$

Die Konstruktion ist funktoriell in Y, Z und man überlegt sich leicht, daß die Faser $(F_B(Y, Z))_b$ der Abbildungsraum Z_b^Y ist.

A.1.4 Feststellung: $F_B(Y, _)$ ist rechtsadjungiert zu $_ \times_B Y$.

Beweis: Ist $f : X \times_B Y \longrightarrow Z$ vorgegeben, dann definieren die Adjungierte zur Erweiterung $\tilde{f} \pi_{X \times_B Y} : X \times Y \longrightarrow \tilde{Z}$ und $p_x : X \longrightarrow B$ genau eine Abbildung $g : X \longrightarrow F_B(Y, Z)$ über B . Ist andererseits $g : X \longrightarrow F_B(Y, Z)$, dann entspricht die Komposition von g mit $F_B(Y, Z) \longrightarrow \tilde{Z}^Y$ einer Abbildung $f : X \times Y \longrightarrow \tilde{Z}$, die $f^{-1}(Z) = X \times_B Y$ erfüllt. \square

\tilde{X} ist leider nicht schwach Hausdorff, selbst wenn $X (\neq \emptyset)$ es ist. Aus diesem Grund schlug L. G. Lewis vor, offene Abbildungen zu betrachten. Das folgende Ergebnis findet sich in [Le2].

A.1.5 Feststellung. Für $Y \in \mathcal{T}_B$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) p_Y ist offen.
- (ii) $_ \times_B Y : \mathcal{T}_B \rightarrow \mathcal{T}_B$ erhält Colimites in \mathcal{T}_B .
- (iii) Für jeden Raum $Z \in \mathcal{T}_B$ ist $F_B(Y, Z)$ schwach Hausdorff.

\mathcal{O}_B^B bezeichne die volle Unterkategorie von \mathcal{T}_B^B , deren Objekte offene Projektionen haben. \mathcal{O}_B^B hat alle kleinen Colimites, denn Colimites in \mathcal{T}_B^B von Objekten aus \mathcal{O}_B^B besitzen offene Projektionen. Limites und Exponenten können durch ein Rechtsadjungiertes gewonnen werden.

A.1.6 Feststellung. Der Inklusionsfunktork $\iota : \mathcal{O}_B^B \hookrightarrow \mathcal{T}_B^B$ hat ein Rechtsadjungiertes $\mathcal{T}_B^B \rightarrow \mathcal{O}_B^B$.

Beweis: Zu $X \in \mathcal{T}_B^B$ definieren wir $OX \subset X$ als Vereinigung aller $A \subset X$, so daß $p_X|_A : A \rightarrow B$ offen ist. Damit ist auch $Op_X := p_X|_{OX} : OX \rightarrow B$ offen und der Schnitt von X liegt bereits in OX . Weil die Einschränkung von p_X auf das Bild eines Morphismus $f \in \mathcal{T}_B^B(\iota Y, X)$ mit $Y \in \mathcal{O}_B^B$ ebenfalls offen ist, ist O funktoriell und jedes solche f faktorisiert eindeutig durch OX . Dies impliziert die natürliche Äquivalenz $\mathcal{T}_B^B(\iota Y, X) \cong \mathcal{O}_B^B(Y, OX)$. \square

A.1.7 Folgerung: (i) \mathcal{O}_B^B hat alle kleinen Limites.
(ii) \mathcal{O}_B^B ist cartesisch abgeschlossen.

Beweis: (i) Sei $(X_j, j \in J)$ ein Diagramm in \mathcal{O}_B^B . Wir setzen $\lim_{j \in J} X_j := O(\lim_{j \in J} \iota X_j)$ und beachten $\mathcal{O}_B^B(Y, O \lim_j \iota X_j) \cong \mathcal{T}_B^B(\iota Y, \lim_j \iota X_j) \cong \lim_j \mathcal{T}_B^B(\iota Y, \iota X_j) = \lim_j \mathcal{O}_B^B(Y, X_j)$.

(ii) Zu $Y \in |\mathcal{O}_B^B|$ und $Z \in |\mathcal{T}_B^B|$ definieren wir $\tilde{F}_B^B(Y, Z) \in \mathcal{T}_B^B$ als kartesische Ergänzung

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{F}_B^B(Y, Z) & \xrightarrow{\quad} & F_B(Y, Z) \\
 \downarrow & & \uparrow \quad \downarrow \\
 & & (p_Y)^* \quad (s_Y)^* \\
 B = F_B(B, B) & \xrightarrow{(s_Z)^*} & F_B(B, Z)
 \end{array}$$

mit dem Schnitt, der durch $(p_Y)^*$ induziert wird. Nun gilt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_B^B(X \wedge_B Y, Z) &\cong \{f \in \mathcal{T}_B(X \times_B Y, Z) \mid f(x, s_Y b) = s_Z(b) = f(s_X b, y) \text{ für alle} \\
 &\quad (x, y) \in X \times_B Y \text{ und } b = p_X x = p_Y y\} \\
 &\cong \mathcal{T}_B^B(X, F_B^B(Y, Z))
 \end{aligned}$$

Sind auch X, Z Objekte in \mathcal{O}_B^B , so gilt

$$\mathcal{O}_B^B(X \wedge_B Y, Z) \cong \mathcal{T}_B^B(\iota X, \tilde{F}_B^B(Y, \iota Z)) \cong \mathcal{O}_B^B(X, O\tilde{F}_B^B(Y, \iota Z)).$$

Also ist $F_B^B(Y, _) := OF_B^B(Y, \iota _)$ rechtsadjungiert zu $_ \wedge_B Y$ in \mathcal{O}_B^B . \square

Anhang B. Cofaserungen über einem Basisraum

Die punktierte Version der Cofaserungstheorie ist in verschiedener Hinsicht nicht zufriedenstellend: Beispielsweise gelten hier keine Produktsätze und Vereinigungstheoreme (vgl. [Ja] S.140 ff.). Wir werden deshalb die Cofaserungstheorie in \mathcal{T}_B entwickeln und Ex-Räume als Objekte in \mathcal{T}_B auffassen.

B.1.1 Definition: (i) Eine Abbildung $i : A \longrightarrow X$ in \mathcal{T}_B nennen wir eine *Cofaserung über B* , wenn i die folgende *fasernweise Homotopieerweiterungseigenschaft* für alle $Y \in |\mathcal{T}_B|$ hat: Zu jeder Homotopie $h : A \times I = A \times_B I_B \longrightarrow Y$ über B und jeder Abbildung $f \in \mathcal{T}_B(X, Y)$ mit $h(a, 0) = fi(a)$ für alle $a \in A$ gibt es eine Erweiterung $H : X \times I \longrightarrow Y$ über B , so daß $H(i \times id_I) = h$ und $H(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

(ii) Ein Objekt $X \in |\mathcal{T}_B^B|$ heißt *wohlgeschnitten*, wenn $s_X : B \longrightarrow X$ eine Cofaserung über B ist.

Die Cofaserungseigenschaft über B für $i : A \longrightarrow X$ impliziert, daß i eine gewöhnliche Cofaserung, also insbesondere eine Einbettung ist. Umgekehrt gilt:

B.1.2 Feststellung: *Ist $i : A \longrightarrow X$ eine gewöhnliche abgeschlossene Cofaserung in \mathcal{T}^{pt} , dann hat $i_B : A_B \longrightarrow X_B$ die Cofaserungseigenschaft über B .*

Beweis: i_B ist genau dann eine Cofaserung über B , wenn $0 \times X_B \cup I \times A_B \subset I \times X_B$ ein Linksinverses in \mathcal{T}_B hat (vgl. [Ja] S.134 (20.3)). Weil i eine gewöhnliche Cofaserung ist, gibt es eine Retraktion $r : I \times X \longrightarrow 0 \times X \cup I \times A$. Also ist $r_B = r \times id_B$ ein Linksinverses. \square

B.1.3 Satz: (Produktsatz für Cofaserungen über B).

Sind (X, X') und (Y, Y') abgeschlossene Cofaserungspaare über B . Dann ist auch

$$(X' \times_B Y \cup X \times_B Y') \subset (X \times_B Y)$$

eine abgeschlossene Cofaserung über B .

Beweis: siehe [Ja] S. 139 (20.17). \square

B.1.4 Satz: (Dold-Lillig-Vereinigungstheorem)

In \mathcal{T}_B sei das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 = X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{i_2} & X_2 \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow j_2 \\
 X_1 & \xrightarrow{j_1} & X
 \end{array}$$

gegeben, wobei i_1, j_1 und j_2 abgeschlossene Cofaserungen über B sind. Unter diesen Voraussetzungen ist auch $X_1 \cup X_2 \subset X$ eine fasernweise Cofaserung.

Beweis: Der Beweis von J. F. Kraus [Kr] überträgt sich wörtlich auf den parametrisierten Fall. \square

B.1.5 Folgerung:

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & \xleftarrow{f} & X & \xrightarrow{i} & Y \\
 \downarrow j_Z & & \downarrow j_X & & \downarrow j_Y \\
 Z' & \xleftarrow{f'} & X' & \xrightarrow{i'} & Y'
 \end{array}$$

sei ein kommutatives Diagramm in \mathcal{T}_B , in dem i, i', j_Y und j_Z abgeschlossene Cofaserungen über B sind und $X' \cap Y = X$ gelte. Dann ist die induzierte Abbildung auf dem Colimes der Zeilen eine abgeschlossene Cofaserung über B .

Beweis: Eine gegebene Homotopie auf dem Colimes der ersten Zeile liefert zunächst eine Homotopie auf Z , die über B auf Z' erweitert wird. Damit ist eine Abbildung auf $X' \times I$ konstruiert, die mit der gegebenen auf $Y \times I$ im Durchschnitt $X \times I$ übereinstimmt. Nach dem Dold-Lillig-Vereinigungstheorem B.4 kann man die auf $X' \cup Y$ gegebene Homotopie schließlich auf ganz Y' erweitern. \square

B.1.6 Folgerung: (i) Mit X und Y ist auch $X \wedge_B Y$ wohlgeschnitten.

(ii) Ist $i : X \rightarrow X'$ eine abgeschlossene Cofaserung über B , so auch

$$X \wedge_B Y \xrightarrow{i \wedge_B id_Y} X' \wedge_B Y.$$

Beweis: (i) Nach B.4 ist $j : X \vee_B Y \subset X \times_B Y$ eine Cofaserung über B . Also folgt die Cofaserungseigenschaft des Schnitts von $X \wedge_B Y$ aus B.5 mit $j_X = s_{X \vee_B Y}$, $j_Y = s_{X \times_B Y} = j s_{X \vee_B Y}$ und $j_Z = id_B$.

In (ii) verwende man B.5 mit $j_X = i \vee_B id_Y$, $j_Y = i \times_B id_Y$, $j_Z = id_B$ und beachte B.3. \square

Literaturverzeichnis

- [Ad1] J.F. Adams: *On the structure and applications of the Steenrod algebra*. Comment. Math. Helv. Soc. 102 (1958) 180-214.
- [Ad2] J.F. Adams: *Stable homotopy and generalised homology*. Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press 1974.
- [BB] P.I. Booth und R. Brown: *Spaces of partial maps, fibred mapping spaces, and the compact-open topology*. Gen. Top. and Appl. 8 (1978) 181-195.
- [Bo] J. M. Boardman: *Stable homotopy theory*. The Johns Hopkins University, mimeo. 1969 chapter II.
- [Cl1] M. Clapp: *Dualität in der Kategorie der Spektren von Ex-Räumen*. Dissertation, Heidelberg 1979.
- [Cl2] M. Clapp: *Duality and transfer for parametrized spectra*. Arch. Math. 37 (1981) 462-472.
- [Co] M.C. McCord: *Classifying spaces and infinite symmetric products*. Trans. Amer. Math. Soc. 146 273-298.
- [CP] M. Clapp, D. Puppe: *The homotopy category of parameterized spectra*. Manuscripta Math. 45 (1984) 219-247
- [DKP] T. tom Dieck, K.H. Kamps, D. Puppe: *Homotopietheorie*. Lecture Notes in Math. 157, New York - Heidelberg - Berlin, Springer-Verlag 1970.
- [DP] A. Dold, D. Puppe: *Duality, trace and transfer*. Amer. Math. Soc. (1985).
- [El] A.D. Elmendorf: *The Grassmannian geometry of spectra*. J. Pure and Appl. Algebra 54 (1988) 37-94.
- [Gr] B. Gray: *Homotopy theory*. Academic Press, New York San Fr. London 1975.
- [Ha] H. M. Hastings: *Stabilizing tensor products*. Proceedings of the Math. soc. 49 (1975).
- [Ja] J.M. James: *Fibrewise topology*. Cambridge Univ. Press 1989.
- [Kr] J.F. Kraus: *Abgeschlossene Cofaserungen*. Preprint, Heidelberg 1972.
- [La] S. Mac Lane: *Kategorien*. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.
- [Le1] L.G. Lewis Jr.: *Compactly generated spaces*. Appendix A in Ph.D.thesis, University of Chicago 1978.
- [Le2] L.G. Lewis Jr.: *Open maps, colimits and a convenient category of fibre spaces*. Topology and Appl. 19 (1985) 75-89.

- [Li] E.L. Lima: *Duality and Postnikov invariants*. Dissertation, University of Chicago 1958.
- [LMS] L.G Lewis Jr., J.P. May, M. Steinberger: *Equivariant stable homotopy theory*. Lecture Notes in Math. 577, Springer Verlag 1977.
- [May] J.P. May: *E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra*. Lect. Notes Math. 577, Springer 1977.
- [Pu1] D. Puppe: *Stabile Homotopietheorie*. Math. Annalen 169 (1967) 243-274.
- [Pu2] D. Puppe: *On the stable Homotopy Kategorie* Top. and Appl. Budva (1972), Savez Drustava Math. Fiz. i Astronom., Belgrade 200-212.
- [Pu3] D. Puppe: *Smash products in stable homotopy and the ring structure of Thom spectra*. Mimeographed Heidelberg 1975
- [Sw] R.M. Switzer: *Algebraic topology - homotopy and homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 212, Springer 1975.
- [SW] E.H. Spanier, J.H.C. Whitehead: *Duality in homotopy theory*. Mathematika 2 (1955) 56-80.
- [Vo] R.M. Vogt: *Convenient categories of topological spaces for homotopy theory*. Arch. Math. 22 (1971) 545-555.
- [tD] T. tom Diek: *Partitions of unity in homotopy theory*. Composita Mathematica Vol. 23 (1971) 159-167.
- [Wh1] G.W. Whitehead: *Generalized homology theories*. Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283.
- [Wh2] G.W. Whitehead: *Elements of Homotopy Theory*. Graduate texts in Math. 61, Springer Verlag New York 1978.