Eulerprodukte von zwei-variablen Zetafunktionen

Diplomarbeit im Fach Mathematik

Holger Reeker

Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Im Jahr 1999 formulierten Gerard van der Geer und Rene Schoof [GS] ein auf Arakelov-Divisoren basierendes Riemann-Roch-Theorem für Zahlkörper k, mit dessen Hilfe sie formal die vollständige Dedekindsche Zetafunktion $\hat{\zeta}_k(s)$ von k als Integral über die Arakelov-Klassengruppe $CH^1(X_k)$ ausdrücken konnten. Formal bedeutet dabei, dass das Integral nirgends konvergiert und es einer Regularisierung bedarf. Diese geschieht über die Einführung einer zweiten Variablen w, deren Bedeutung nicht zu unterschätzen ist, da über die Regularisierung hinaus interessante arithmetische Informationen in die nun zwei-variable Arakelov-Zetafunktion hineinkodiert werden. Dies belegt die Arbeit von Jeffrey Lagarias und Eric Rains [LR] aus dem Jahr 2002, in welcher der rationale Fall $k = \mathbb{Q}$ detailliert betrachtet und auf den allgemeinen Zahlkörperfall hingewiesen wird; dieser findet sich in einer bemerkenswert eleganten Formulierung in der Arbeit [De] von Christopher Deninger aus dem Jahr 2002 wieder.

Diese Diplomarbeit greift vor allem die Frage nach der Existenz von Eulerprodukten dieser Arakelov-Zetafunktion im Falle von imaginär-quadratischen Zahlkörpern mit Klassenzahl 1 auf. So ergeben sich für $k = \mathbb{Q}$ bzw. $k = \mathbb{Q}(i)$ genau für die Werte $w = 0, 1, 2, 4$ und 8 Eulerprodukte, welche einen Zusammenhang mit den endlichen Divisionsalgebren vermuten lassen. Dieser Zusammenhang besteht in der Tat; wir werden insbesondere zu den Quaternionen und Oktaven Zetafunktionen assoziieren, welche genau der Arakelov-Zetafunktion in $w = 4$ und $w = 8$ entsprechen. Weiter klären wir genauestens die Herkunft der obigen Eulerprodukte: sie rühren von expliziten Darstellungsanzahlen positiv definiter quadratischer Formen durch Teilersummen, welche im Lichte von Modulformen ihre natürliche Herleitung finden.

Angesichts derart tiefgreifender Erklärungen mag eine entsprechende Verallgemeinerung auf höhere Zahlkörper plausibel erscheinen. Doch hier ergeben sich weitere Überraschungen: Bei der Betrachtung der weiteren imaginär-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit Klassenzahl 1, d.h. d = -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67 und -163, verschwinden nach und nach die Eulerprodukte. Existieren für d = -2, -3 und -7 noch für $w = 1$ und $w = 2$ Eulerprodukte, so verbleiben für d = -11, -19, -43, -67 und -163 nur jeweils für $w = 1$ ein Eulerprodukt, welches von der Dedekindschen Zetafunktion kommt. Dabei bieten die drei nicht-trivialen Eulerprodukte eine analytische Beschreibung tiefliegender zahlentheoretischer Identitäten der Zahlkörper.

Neben der Behandlung von Eulerprodukten enthält diese Arbeit ein neues Resultat für die Taylorkoeffizienten von $\xi_{\mathbb{Q}}(w, s)$ um $\frac{w}{2}$, welches ein klassisches Resultat von Harold M. Edwards [Ed] verallgemeinert.

Ich bedanke mich herzlich bei Prof. Dr. Christopher Deninger für die Betreuung dieser Arbeit.

Münster, im Januar 2005 Holger Reeker

Kapitel 1

Einleitung

„Eine der erstaunlichsten Erscheinungen der Zahlentheorie besteht darin, dass viele der tiefliegenden arithmetischen Gesetzmäßigkeiten eines Zahlkörpers in einer einzigen analytischen Funktion verborgen liegen, seiner Zetafunktion. Sie ist sehr einfach gebildet, doch schwierig durch ihre Eigenart, sich der Preisgabe ihrer Geheimnisse zu widersetzen. Gewinnt man ihr aber eine der gehüteten Wahrheiten ab, so darf man stets auf die Offenbarung überraschender und bedeutsamer Zusammenhänge gefasst sein.“(Jürgen Neukirch, [Neu])

In diesem einleitenden Kapitel wenden wir uns der Riemannschen Zetafunktion zu und entwickeln exemplarisch wichtige Eigenschaften wie die Existenz eines Eulerprodukts, einer meromorphen Fortsetzung und einer Funktionalgleichung. Diese Eigenschaften werden wir auch später bei der zwei-variablen Arakelov-Zetafunktion untersuchen.

1.1 Die Riemannsche Zetafunktion

Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ kann durch eine Dirichlet-Reihe, ein Eulerprodukt und als Integral über die Jacobische Theta-Funktion definiert werden. Während wir bei der zwei-variablen Arakelov-Zetafunktion von der Integraldarstellung ausgehen, wollen wir an dieser Stelle die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ klassisch durch eine Dirichlet-Reihe definieren und ihre Darstellung durch ein Eulerprodukt herleiten.

Für $s = \sigma + it$ und $\sigma > 1$ definieren wir die Riemannsche Zetafunktion durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{1.1}$$

Die Bezeichnung $s = \sigma + it$ ist eine Tradition, welche auf Riemann zurückgeht. Ist $\sigma \geq \sigma_0 > 1$, so konvergiert die Reihe in (1.1) gleichmäßig und absolut, denn

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\sigma_0}} = 1 + \frac{1}{\sigma_0 - 1}. \end{aligned}$$

Da jeder Summand in (1.1) eine holomorphe Funktion in s darstellt, ist nach dem Satz von Weierstraß die Funktion $\zeta(s)$ holomorph für $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$.

Satz 1 (Eulerprodukt)**.** *Für $s = \sigma + it$ und $\sigma > 1$ gilt*

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1.2}$$

wobei sich das Produkt über alle Primzahlen p erstreckt.

Beweis. Für $X \geq 2$ definieren wir die Funktion $\zeta_X(s)$ durch

$$\zeta_X(s) = \prod_{p \leq X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}. \tag{1.3}$$

Jeder Faktor im Produkt von (1.3) ist dabei die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe:

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}}.$$

Jede dieser Reihen ist absolut konvergent und die rechte Seite von (1.3) ergibt sich zu

$$\prod_{p \leq X} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ms}} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_j=0}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{m_1} \cdots p_j^{m_j})^s} \tag{1.4}$$

mit allen Primzahlen $2 = p_1 < \cdots < p_j \leq X$ zwischen 2 und X. Dabei sind alle Terme in (1.4) verschieden und alle natürlichen Zahlen $n \leq X$ werden dargestellt (Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung). Daher hat die rechte Seite von (1.4) die Form

$$\sum_{n\leq X} \frac{1}{n^s} + \sum_{n>X}{}' \frac{1}{n^s}, \tag{1.5}$$

wobei $'$ in der zweiten Summe die Summation über alle natürlichen Zahlen bedeutet, deren sämtliche Primteiler $\leq X$ sind. Mit

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n>X}{}' \frac{1}{n^s} \right| &\leq \sum_{n>X}{}' \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{X^\sigma} + \int_X^\infty \frac{du}{u^\sigma} \\ &= \frac{1}{X^\sigma} + \frac{1}{\sigma - 1} X^{1-\sigma} \leq \frac{\sigma}{\sigma - 1} X^{1-\sigma} \end{aligned}$$

erhalten wir zusammen mit (1.3), (1.4) und (1.5)

$$\zeta_X(s) = \prod_{p\leq X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n\leq X} \frac{1}{n^s} + O\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1} X^{1-\sigma}\right). \tag{1.6}$$

Durch Grenzübergang $X \to \infty$ erhalten wir wegen $X^{1-\sigma} \to 0$ $(\sigma > 1)$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

was zu zeigen war. □

Das Eulerprodukt ist also eine analytische Formulierung des Fundamentalsatzes der Arithmetik über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

1.2 Die meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$ und ihre Funktionalgleichung

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sich die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ meromorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt und genau an der Stelle 1 einen Pol erster

Ordnung mit Residuum 1 hat. Weiter genügt $\zeta(s)$ der Funktionalgleichung $\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s)$ mit

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Eine Beweismethode hierfür liefert eine Darstellung der Zetafunktion in Termen der Theta-Reihen.

Definition 1. *Zu $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\tau \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\tau > 0$ definieren wir die Theta-Reihe $\theta(\tau;\alpha)$ durch*

$$\theta(\tau;\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi\tau(n+\alpha)^2).$$

Die Funktion $\theta(\tau;\alpha)$ ist holomorph in der rechten Halbebene $\operatorname{Re}\tau > 0$ und genügt der Identität

$$\theta(\tau;\alpha) = \theta(\tau;\alpha+1).$$

Weiter gilt folgende Transformationsformel

$$\begin{aligned} \theta\left(\frac{1}{\tau};\alpha\right) &= \sqrt{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2\tau + 2\pi i n\alpha) \\ &= \sqrt{\tau}\exp\left(\frac{-\pi\alpha^2}{\tau}\right)\theta\left(\tau;-\frac{i\alpha}{\tau}\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Hieraus folgt für $\theta(x) = \theta(x,0)$ und $x > 0$

$$\theta(x^{-1}) = \sqrt{x}\theta(x). \tag{1.8}$$

Mit diesen Hilfsmitteln zeigen wir

Satz 2 (Funktionalgleichung)**.** *Sei $w(x) = \frac{1}{2}(\theta(x)-1) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$, so gilt für* $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$\pi^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{s/2} + x^{-s/2+1/2})w(x)\frac{dx}{x}. \tag{1.9}$$

Beweis. Die Integraldarstellung der Gamma-Funktion liefert unter der Substitution $u = \pi n^2 x$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-u}u^{s/2}\frac{du}{u} = n^s\int_0^\infty e^{-pin^2x}\pi^{s/2}x^{s/2}\frac{dx}{x}.$$

Also ergibt Multiplikation mit den Faktoren $\pi^{-s/2}$ und n^{-s} und Summation über alle natürlichen Zahlen n für $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x}x^{s/2}\frac{dx}{x}.$$

Wir vertauschen Summation und Integration mit Hilfe des Satzes von Lebesgue und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 x}x^{s/2}\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}x^{s/2}\frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} x^{s/2}w(x)\frac{dx}{x}.$$

Mit (1.8) erhalten wir für $w(x) = \frac{1}{2}(\theta(x) - 1)$ die Funktionalgleichung

$$w(x^{-1}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}w(x).$$

Unter Benutzung dieser Funktionalgleichung und Substitution $x \to x^{-1}$ (im zweiten Integral unten) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^{s/2}w(x)\frac{dx}{x} &= \int_0^{1} x^{s/2}w(x)\frac{dx}{x} + \int_1^{\infty} x^{s/2}w(x)\frac{dx}{x}\\ &= \int_1^{\infty}(x^{-s/2}w(x^{-1}) + x^{s/2}w(x))\frac{dx}{x}\\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}(x^{s/2} + x^{-s/2+1/2})w(x)\frac{dx}{x},\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Da $w(x) = O(e^{-\pi x})$ für $x \to \infty$, konvergiert das Integral aus Satz (2) absolut und gleichmäßig in jeder Halbebene $\operatorname{Re} s > K$ für jedes $K \in \mathbb{R}$ und stellt dort nach dem Satz von Weierstrass eine ganze Funktion dar. Die Voraussetzung $\operatorname{Re} s > 1$ ist für die Identität (1.9) wichtig. Sie ist aber unerheblich für die Existenz des Integrals in (1.9) und gibt daher Anlass zu einer analytischen Fortsetzung $A(s)$ von $\zeta(s)$. Wir definieren

$$A(s) := \pi^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-1}\Big(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty}(x^{s/2} + x^{-s/2+1/2})w(x)\frac{dx}{x}\Big). \quad (1.10)$$

Da $\Gamma(s)$ in $s = 0$ einen Pol erster Ordnung hat und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ist, erhalten wir mit $A(s)$ eine meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$, welche genau in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung vom Residuum 1 hat. Mit

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

erhalten wir

$$\hat{\zeta}(s) = \hat{\zeta}(1-s).$$

Alternativ erhalten wir durch

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

eine ganze Funktion mit der Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{1.11}$$

Diese Identität heißt Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.

Kapitel 2

Zetafunktionen von Ganzheitsordnungen in Quaternionen und Oktaven

Über dem quadratischen Körper $\mathbb{Q}(i)$ sind wir auf ganz natürlichem Weg zum Ganzheitsring der Gaußschen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

gelangt. Dieser Prozess erschien deshalb so natürlich, weil hier der intuitive Begriff von Ganzheit als Kombination von ganzen Zahlen und imaginärer Einheit mit dem Konzept der maximalen Ordnung zusammenfiel.
Der Begriff der Ordnung entstammt dem Umfeld der Zahlkörper und meint einen Unterring, dessen Elemente einer Ganzheitsgleichung

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0 = 0 \quad \text{mit} \quad c_{n-1}, \ldots, c_0 \in \mathbb{Z}$$

genügen, und dessen Quotientenkörper der Zahlkörper ist. Eine maximale Ordnung ist eine Ordnung, die alle Körperelemente enthält, welche eine ganze Gleichung erfüllen.
Auch in den endlichen Divisionsalgebren der Quaternionen und Oktaven wollen wir dem Konzept eines Ganzheitsringes folgen. Allerdings fällt hier der intuitive Begriff nicht mit dem der maximalen Ordnung zusammen. Der Begriff der maximalen Ordnung $\mathcal{O}$ der Quaternionen bzw. Oktaven hat den Vorzug der Division mit kleinem Rest, d.h. zu $a, b \in \mathcal{O}$ gibt es Elemente $q, r \in \mathcal{O}$ mit $a = qb + r$ und $|r| < |b|$. Der Grund hierfür ist, dass durch

$$x \mapsto |x|^2$$

eine euklidische Norm auf $\mathcal{O}$ definiert wird. Diese Norm lässt sich jedoch auch im intuitiven Konzept vorteilhaft nutzen. Desweiteren interessiert uns im Folgenden weniger die konkrete Durchführung einer Division mit Rest als vielmehr die Darstellung einer natürlichen Zahl als Norm von ganzen Quaternionen und Oktaven, bzw. – wie sich später herausstellt – als Summe von Quadraten. Dieser Gedanke findet eine unmittelbare Erfüllung im intuitiven Konzept.
Ziel dieses Kapitels ist es, den Quaternionen und Oktaven über eine Dirichlet-Reihe eine Zetafunktion zuzuordnen.

2.1 Definition und elementare Eigenschaften der Quaternionen

Die Quaternionen über $\mathbb{R}$ erhalten wir, indem wir Symbole i, j, k einführen und alle Ausdrücke der Form

$$a + bi + cj + dk \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

betrachteten. Dabei geschieht die Addition komponentenweise und die Multiplikation unter Berücksichtigung von

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad \text{und}$$

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j.$$

Damit gilt für $q = a + bi + cj + dk$ und $q' = a' + b'i + c'j + d'k$

$$\begin{aligned} qq' &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ &+ (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Multiplikation der Quaternionen ist nicht kommutativ, wohl aber assoziativ. Weiter stehen die Quaternionen den komplexen Zahlen sehr nahe, da wir zum einen Quaternionen durcheinander dividieren können und zum anderen für Quaternionen einen Absolutbetrag einführen können, so dass der Absolutbetrag eines Produktes gleich dem Produkt der Absolutbeträge ist. Letzteres erreichen wir wie bei den komplexen Zahlen durch die Operation einer Konjugation: für ein Quaternion $q = a + bi + cj + dk$ definieren wir das zu q konjugierte Quaternion durch

$$\overline{q} := a - bi - cj - dk.$$

Schnell bemerken wir, dass die Summe zweier konjugierter Quaternionen eine reelle Zahl ist und sich für das Produkt zweier konjugierter Quaternionen

$$q\overline{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

ebenfalls eine reelle Zahl ergibt. In Analogie zu den komplexen Zahlen definieren wir durch

$$|q| := \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

den Absolutbetrag von q.

Lemma 1. *Für zwei Quaternionen q_1, q_2 ist der Absolutbetrag des Produktes gleich dem Produkt der Absolutbeträge:*

$$|q_1 q_2| = |q_1||q_2| \tag{2.2}$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum komplexen Fall; wir verwenden die Identität $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$ und die Assoziativität der Multiplikation:

$$|q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2}) = (q_1 q_2)(\overline{q_2}\ \overline{q_1}) = q_1(q_2\overline{q_2})\overline{q_1} = |q_1|^2|q_2|^2.$$

$\square$

2.2 Eine Identität für vier Quadrate

Die ausführliche Schreibweise der Gleichung (2.2) führt uns zu einer interessanten Identität. Seien

$$q_1 = a + bi + cj + dk \quad \text{und} \quad q_2 = a' + b'i + c'j + d'k$$

zwei Quaternionen, so ist $q_1 q_2$ der Ausdruck aus (2.1) und wir erhalten die Form

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ = &(aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 \\ &+(ac' + ca' + db' - bd')^2 + (ad' + da' + bc' - cb')^2 \end{aligned}$$

Diese Identität stellt ein Analogon zum komplexen Fall dar, in welchem wir aus $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2|z_2|^2$ die Identität

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2$$

gewinnen: das Produkt einer Summe von zwei Quadraten mit einer Summe von zwei Quadraten ist erneut eine Summe von zwei Quadraten. Entsprechendes gilt für die Quaternionen: das Produkt einer Summe von vier Quadraten mit einer Summe von vier Quadraten ist erneut eine Summe von vier Quadraten. Dass derartige Darstellungen außergewöhnlich sind, zeigt folgender Satz von Hurwitz.

Satz 3 (A. Hurwitz, 1898)**.** *Es gibt genau für* $n = 1, 2, 4, 8$ *ein* n*-Quadrate-Theorem.*

2.3 Das Cayley-Dickson Verfahren zur Konstruktion der Oktaven

Die Oktaven sind eine 8-dimensionale Algebra über $\mathbb{R}$ mit der Basis

$$1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7,$$

welche sich am elementarsten durch die Angabe folgender Multiplikationstafel konstruieren lässt. Dabei bedeuten die Einträge das Ergebnis der Multiplikation des Elementes der i-ten Zeile mit dem Element der j-ten Spalte.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Aus der Multiplikationstafel sind unmittelbar folgende elementare Eigenschaften abzulesen:

- $e_1, \ldots, e_7$ sind Quadratwurzeln von -1.

- e_i und e_j sind für $i \neq j$ antikommutativ, d.h. $e_i e_j = -e_j e_i$.
- Es gilt die Index-Zykel-Identität:

  $$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1},$$

  wobei wir die Indizes modulo 7 betrachten.
- Es gilt die Index-Verdopplungs-Identität

  $$e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k}.$$

Umgekehrt reichen uns diese Identitäten und ein einziges nichttriviales Produkt wie $e_1 e_2 = e_4$ für eine Rekonstruktion obiger Tabelle. Jedoch ist die alleinige Angabe einer Verknüpfungstabelle immer unbefriedigend und wenig erhellend. Tiefere Resultate lassen sich so nur schwer ableiten. Daher interessieren wir uns für einen konzeptionelleren Zugang zu den Oktaven.
Ein solcher Zugang findet sich im Cayley-Dickson-Verfahren. Das Cayley-Dickson-Verfahren liefert uns eine Konstruktion der normierten Divisionsalgebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ und erklärt, wie sich jede Algebra nahtlos in die nächste einfügt. Weiter liefert es eine unendliche Folge von Algebren, wobei jedesmal eine Dimensionsverdopplung stattfindet, und klärt das Verschwinden der Eigenschaften der Kommutativität, Assoziativität und Divisibilität auf.
Bereits Hamilton hat die komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen aufgefasst, wobei die Addition komponentenweise und die Multiplikation durch $(a, b)(c, d) = (ac - db, ad + cb)$ geschieht. Weiter lässt sich zu einer komplexen Zahl (a, b) ein Konjugiertes

$$(a, b)^* := (a, -b)$$

definieren. Mit komplexen Zahlen können wir die Quaternionen als Paare komplexer Zahlen definieren, wobei die Addition komponentenweise und die Multiplikation mit Hilfe von

$$(a, b)(c, d) = (ac - db^*, a^* d + cb)$$

und das Konjugierte zu (a, b) durch

$$(a, b)^* := (a^*, -b)$$

definiert ist. Wir stellen fest, dass sich die Definition der komplexen Zahlen in diese Definition einfügt. Dieses Verfahren heißt Cayley-Dickson-Verfahren und lässt sich beliebig fortführen: die Oktaven sind Paare von Quaternionen etc.
Hierbei können wir uns fragen, warum wir mit dieser Konstruktion keine unendliche Folge von Divisionsalgebren erhalten. Dies hat damit zu tun, dass mit jedem Iterationsschritt unsere Algebra schlechtere Eigenschaften besitzt. Zuerst verlieren wir die Eigenschaften der Selbstkonjugiertheit, dann die Kommutativität, die Assoziativität und schließlich die Divisionsalgebreneigenschaft. Dies sehen wir durch eine kleine formale Betrachtung. Wir definieren eine *-Algebra als eine $\mathbb{R}$-Algebra A zusammen mit einer Konjugation, d.h. einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $*: A \to A$ mit $a^{**} = a$ und $(ab)^* = b^*a^*$ für alle $a, b \in A$. Wir nennen eine *-Algebra

- reell, falls $a = a^*$ für alle $a \in A$ gilt,
- wohlgenormt, falls $a + a^* \in \mathbb{R}$ und $aa^* = a^*a > 0$ für alle von Null verschiedenen $a \in A$ gilt und
- alternierend, falls $(ab)^* = b^*a^*$ für alle $a, b \in A$ gilt.

Für eine wohlgenormte *-Algebra A definieren wir Real- und Imaginärteil durch

$$\mathrm{Re}\,(a) = \frac{1}{2}(a + a^*) \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,(a) = \frac{1}{2}(a - a^*)$$

sowie eine Norm auf A durch

$$\|a\|^2 = aa^*.$$

Damit gibt es in einer wohlgenormten *-Algebra A zu jedem Element $a \in A$ stets ein multiplikativ Inverses

$$a^{-1} = \frac{a^*}{\|a\|^2}.$$

Ist die *-Algebra A wohlgenormt und alternierend, so ist A eine normierte Divisionsalgebra, denn für je zwei Elemente $a, b \in A$ liegen die Elemente a, b, a^*, b^* in der durch $\mathrm{Im}\,(a)$ und $\mathrm{Im}\,(b)$ erzeugten assoziativen Algebra, so dass

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = ab(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = \|a\|^2\|b\|^2$$

gilt. Ausgehend von einer *-Algebra A erhalten wir über die Cayley-Dickson-Konstruktion eine *-Algebra A' mit Elementen $(a,b) \in A^2$, wobei Multiplikation durch $(a,b)(c,d) = (ac - db^*, a^*d + cb)$ und Konjugation durch $(a,b)^* = (a^*, -b)$ definiert sind.

Lemma 2. *Für eine *-Algebra A und ihre Verdopplung A' gilt*

1. *A' ist nie reell.*
2. *A ist reell (und damit kommutativ) $\Leftrightarrow$ A' ist kommutativ.*
3. *A ist kommutativ $\Leftrightarrow$ A' ist assoziativ.*
4. *A ist assoziativ und wohlgenormt $\Leftrightarrow$ A' ist alternierend und wohlgenormt.*
5. *A ist wohlgenormt $\Leftrightarrow$ A' ist wohlgenormt.*

Obige Aussagen folgen unmittelbar aus ihren Definitionen. Jedenfalls liefert uns Lemma 2 folgende Implikationen:
$\mathbb{R}$ ist eine reelle, kommutative, assoziative, wohlgenormte *-Algebra $\Rightarrow$
$\mathbb{C}$ ist eine kommutative, assoziative, wohlgenormte *-Algebra $\Rightarrow$
$\mathbb{H}$ ist eine assoziative, wohlgenormte *-Algebra $\Rightarrow$
$\mathbb{O}$ ist eine alternierende, wohlgenormte *-Algebra.
Daher sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ normierte Divisionsalgebren.

2.4 Eine Identität für acht Quadrate

Im vorigen Abschnitt haben wir insbesondere die Konjugation und die Norm von Oktaven eingeführt. Dies liefert uns eine Identität für acht Quadrate. Seien

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 \quad \text{und} \\ b &= b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6 + b_7e_7, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 \quad \text{und} \\ \|b\|^2 &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 + b_6^2 + b_7^2 \end{aligned}$$

und die Multiplikativität der Norm

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|$$

liefert uns

$$\begin{aligned}
(a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)&(b_0^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2+b_6^2+b_7^2) \\
&= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7)^2 \\
&\quad +(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_4 + a_3b_7 - a_4b_2 + a_5b_6 - a_6b_5 - a_7b_3)^2 \\
&\quad +(a_0b_2 - a_1b_4 + a_2b_0 + a_3b_5 + a_4b_1 - a_5b_3 + a_6b_7 - a_7b_6)^2 \\
&\quad +(a_0b_3 - a_1b_7 - a_2b_5 + a_3b_0 + a_4b_6 + a_5b_2 - a_6b_4 + a_7b_1)^2 \\
&\quad +(a_0b_4 + a_1b_2 - a_2b_1 - a_3b_6 + a_4b_0 + a_5b_7 + a_6b_3 - a_7b_5)^2 \\
&\quad +(a_0b_5 - a_1b_6 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_7 + a_5b_0 + a_6b_1 + a_7b_4)^2 \\
&\quad +(a_0b_6 + a_1b_5 - a_2b_7 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_1 + a_6b_0 + a_7b_2)^2 \\
&\quad +(a_0b_7 + a_1b_3 + a_2b_6 - a_3b_1 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_2 + a_7b_0)^2
\end{aligned}$$

Zu Darstellungen zweier natürlicher Zahlen n, m als Summe von acht Quadraten erhalten wir also eine Dartstellung des Produktes nm als Summe von acht Quadraten. Betrachtet man die Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen als Summe von acht Quadraten, so sind diese nach einer Normierung multiplikativ.

2.5 Definition einer Zetafunktionen für die Quaternionen und Oktaven

Wie bereits in den einleitenden Worten dieses Kapitels erwähnt, wollen wir uns auf den intuitiven Ganzheitsbegriff der sog. Lipschitz-Quaternionen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{H}} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

und der sog. Graves-Oktaven

$$\mathcal{O}_{\mathbb{O}} = \{a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_7e_7 | a_0, \ldots, a_7 \in \mathbb{Z}\}$$

zurückziehen. Für Elemente x betrachten wir ihre Norm $N(x) := \|x\|$ und definieren zu einer durch das Cayley-Dickson-Verfahren konstruierten Algebra A ihre Zetafunktion durch

$$\zeta_A(s) := \frac{1}{2\dim_{\mathbb{R}} A} \sum_{0 \neq x \in \mathcal{O}_A} N(x)^{-s}.$$

Explizit ergibt dies für die Quaternionen und Oktaven

$$\zeta_{\mathbb{H}}(s) := \frac{1}{8} \sum_{0 \neq x \in \mathcal{O}_{\mathbb{H}}} N(x)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8} A_4(n) n^{-s}$$

und

$$\zeta_{\mathbb{O}}(s) := \frac{1}{16} \sum_{0 \neq x \in \mathcal{O}_{\mathbb{O}}} N(x)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16} A_8(n) n^{-s}.$$

Dabei bedeutet

$$A_k(n) = \#\{x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k; x_1^2 + \ldots + x_k^2 = n\}.$$

Bemerkung. Für $A = \mathbb{R}$ ergibt sich die gewöhnliche Riemannsche Zetafunktion:

$$\zeta_{\mathbb{R}}(s) = \frac{1}{2} \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}} N(x)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

Kapitel 3

Darstellungen von natürlichen Zahlen als Summe von Quadraten

Für die Theorie der Eulerprodukte der zwei-variablen Zetafunktion spielt es eine große Rolle, wie oft man zu einer gegebenen natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl n als Summe von k Quadraten schreiben kann. Wir interessieren uns also für

$$A_k(n) := \#\{x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{Z}^k; x_1^2 + \ldots + x_k^2 = n\}.$$

Später werden wir dann Dirichlet-Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2k} A_k(n) n^{-s}$$

betrachten. In diesem Kapitel behandeln wir Identitäten für $A_4(n)$ und $A_8(n)$ von C.G.J. Jacobi aus den Jahren 1828/29, welche uns Eulerprodukte zu der zwei-variablen Arakelov-Zetafunktion liefern. Diese Identitäten finden ihre tiefere Erklärung im Kontext von Modulformen. Dies sind in der oberen Halbebene analytische Funktionen, welche unter elliptischen Modulsubstitutionen ein gewisses Transformationsverhalten haben, nämlich

$$f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z).$$

Beispiele für Modulformen sind die Eisensteinreihen

$$G_k(z) = \sum_{(0,0)\neq(c,d)\in\mathbb{Z}^2} (cz+d)^{-k}$$

vom Gewicht k. Ein Struktursatz besagt, dass die Eisensteinreihen G_4 und G_6 den Raum der Modulformen erzeugen. Genauer bilden die Monome

$$\{G_4^\alpha G_6^\beta; \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, 4\alpha + 6\beta = k\}$$

eine Basis des Raums der Modulformen $[\Gamma, k]$ vom Gewicht k, und die Dimension dieses Vektorraums ist

$$\dim_{\mathbb{C}}[\Gamma, k] = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{falls} \quad k = 2 \bmod 12 \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{falls} \quad k \neq 2 \bmod 12 \end{cases}$$

Insbesondere ist also der Raum der Modulformen der Gewichte 4 und 6 jeweils eindimensional.
Eine andere Konstruktionsmethode von Modulformen stellen die Theta-Reihen dar. Über den Struktursatz erhalten wir sodann nichttriviale Identitäten zwischen Eisensteinreihen und Theta-Reihen, welchen wir uns in diesem Abschnitt widmen wollen.

3.1 Die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen

In diesem Abschnitt verfolgen wir das Ziel, Eisensteinreihen in eine Fourierreihe zu entwickeln. Hierzu benötigen wir die Partialbruchentwicklung des Kotangens

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right].$$

Die mit negativem Vorzeichen versehene Ableitung ist

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Beide Reihen konvergieren in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ normal und stellen daher auf diesem Gebiet analytische Funktionen dar. Insbesondere sind sie aber in der oberen Halbebene analytisch und haben die Periode 1, womit sie sich in eine Fourierreihe entwickeln lassen. Für $q = e^{2\pi i z}$ und $\operatorname{Im} z > 0$ gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n q^n$$

und iteriertes Differenzieren führt zu der Identität

$$(-1)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n. \tag{3.1}$$

Nun betrachten wir für gerade $k \geq 4$ die absolut konvergente Eisensteinreihe

$$G_k(z) = \sum_{(0,0)\neq(c,d)} \frac{1}{(cz+d)^k}, \tag{3.2}$$

ordnen sie um

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + 2 \sum_{c=1}^{\infty} \Big[\sum_{d=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(cz+d)^k} \Big], \tag{3.3}$$

und erhalten mit (3.1)

$$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{cd}. \tag{3.4}$$

Die letzte Doppelreihe konvergiert für $k \geq 2$ normal, da ihre Umordnung zu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d|n} d^{k-1} \Big) q^n$$

wegen

$$\sum_{d|n} d^{k-1} \leq n n^{k-1} = n^k$$

absolut konvergiert. Mit denselben Umformungen können wir umgekehrt zeigen, dass die Reihen

$$G_k(z) := \sum_{c=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{d=-\infty \\ d\neq 0 \text{ falls } c=0}}^{\infty} (cz+d)^{-k} \Big] \tag{3.5}$$

konvergieren, womit wir insbesondere eine Eisensteinreihe G_2 vom Gewicht 2 definiert haben; die Klammerung ist allerdings notwendig. Mit der Bezeichnung

$$\sigma_k(n) := \sum_{\substack{d|n \\ 1\leq d\leq n}} d^k \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

erhalten wir zusammenfassend die Fourierentwicklung der Eisensteinreihen

$$\begin{aligned} G_k(z) &:= \sum_{c=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{d=-\infty \\ d\neq 0 \text{ falls } c=0}}^{\infty} (cz+d)^{-k} \Big] \\ &= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die von uns definierte Eisensteinreihe G_2 wird uns einerseits sehr nützlich sein, andererseits müssen wir sie meist separat behandeln, da sie nicht absolut konvergiert. So gibt es für $k > 2$ die Transformationsformel

$$G_k\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k G_k(z),$$

welche im Beweis einige Reihenumordnungen enthält und im Fall $k = 2$ falsch ist. Für $k = 2$ gibt es jedoch die Transformation

$$G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 G_2(z) - 2\pi i z,$$

vgl. [FB], die hierzu einen raffinierten Beweis ausführen, dessen Grundidee auf G. Eisenstein zurückgeht.

3.2 Eine funktionentheoretische Charakterisierung von θ^r

Bereits aus Kapitel 1 kennen wir die Theta-Reihe

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}.$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

- $\theta(z+2) = \theta(z)$ und $\theta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\theta(z)$
- $\lim_{y\to\infty} \theta(z) = 1$
- $\lim_{y\to\infty} \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}\theta(1-\frac{1}{z})e^{-\frac{\pi i z}{4}} = 2$

Mit diesen Eigenschaften können wir θ^r funktionentheoretisch charakterisieren. Eine ausführliche Darstellung mit mehreren Beweisen findet sich in [FB].

Satz 4. *Sei $r \in \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit den Eigenschaften*

- $f(z+2) = f(z)$ *und* $f(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}^r f(z)$
- $\lim_{y\to\infty} f(z)$ *existiert*
- $\lim_{y\to\infty} \sqrt{\frac{z}{i}}^{-r} f(1-\frac{1}{z})e^{-\frac{\pi i r z}{4}}$ *existiert*

Dann gilt $f(z) = c\theta(z)^r$ mit $c = \lim_{y\to\infty} f(z)$.

3.3 Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von acht Quadraten

Nun werden wir die Charakterisierung von θ^r nutzen, um zahlentheoretische Identitäten herzuleiten.

Satz 5. *Es gilt*

$$\theta^8(z) = \frac{3}{\pi^4}\left(16G_4(z) - G_4\left(\frac{z+1}{2}\right)\right). \tag{3.7}$$

Beweis. Mit Hilfe des Satzes (4) müssen wir für $f(z) := 16G_4(z) - G_4(\frac{z+1}{2})$ die Gültigkeit der Transformationsformeln

$$f(z+2) = f(z) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4 f(z)$$

sowie die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{y\to\infty} f(z) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to\infty} z^{-4} f\left(1-\frac{1}{z}\right) e^{-2\pi i z}$$

zeigen. Für $G_4(z)$ jedenfalls gelten die Transformationsformel und es existiert der Limes

$$\lim_{y\to\infty} G_4(z) = 2\zeta(4) = \lim_{y\to\infty} G_4\left(\frac{z+1}{2}\right).$$

Damit gilt

$$\lim_{y\to\infty} \frac{3}{\pi^4} f(z) = \frac{3}{\pi^4} 15 \cdot 2\zeta(4) = 1.$$

Für $g_4(z) := G_4(\frac{z+1}{2})$ ist die erste Transformationsformel erfüllt und ebenso die zweite, da

$$\begin{aligned}
g_4\left(-\frac{1}{z}\right) &= G_4\left(\frac{-\frac{1}{z}+1}{2}\right) = G_4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right) \\
&= \sum_{(0,0)\neq(c,d)} \left[c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2z}\right) + d\right]^{-4} = (2z)^4 \sum_{(0,0)\neq(c,d)} [(c+2d)z - c]^{-4} \\
&= z^4 2^4 \sum_{(0,0)\neq(c,d)} (cz + c + 2d)^{-4} = z^4 \sum_{(0,0)\neq(c,d)} \left(c\frac{z+1}{2} + d\right)^{-4} \\
&= z^4 g_4(z). \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir auch die Transformationsformel für die Linearkombination $f(z)$. Es fehlt uns nur noch die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{y\to\infty} z^{-4} f\left(1 - \frac{1}{z}\right) e^{-2\pi i z}.$$

Mit

$$G_4\left(1 - \frac{1}{z}\right) = G_4\left(-\frac{1}{z}\right) = z^4 G_4(z)$$

und

$$g_4\left(1 - \frac{1}{z}\right) = G_4\left(\frac{1 - \frac{1}{z} + 1}{2}\right) = G_4\left(1 - \frac{1}{2z}\right) = (2z)^4 G_4(z)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
z^{-4} f\left(1 - \frac{1}{z}\right) e^{-2\pi i z} &= e^{-2\pi i z} z^{-4} \left[16 G_4\left(1 - \frac{1}{z}\right) - G_4\left(\frac{2 - \frac{1}{z}}{2}\right)\right] \\
&= e^{-2\pi i z} z^{-4} \left[16 G_4\left(1 - \frac{1}{z}\right) - G_4\left(1 - \frac{1}{2z}\right)\right] \\
&= e^{-2\pi i z} [16 G_4(z) - 16 G_4(2z)] \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Wir entwickeln G_4 in eine Fourierreihe

$$G_4(z) = a_0 + a_1 e^{2\pi iz} + a_2 e^{4\pi iz} + \dots$$

und fassen sie als Potenzreihe in $q = e^{2\pi iz}$ auf

$$G_4(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots .$$

Dann gilt

$$e^{-2\pi iz}(16G_4(z) - 16G_4(2z)) = q^{-1}(a_0(16-16) + \text{höhere Potenzen von } q)$$

und der betrachtete Grenzwert existiert, da mit $y \to \infty$ auch $q \to 0$ gilt. □

Einsetzen der Fourierentwicklung der Eisensteinreihen (3.6) führt zu

Korollar 1.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_8(n) e^{\pi inz} = 1 + 16^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi inz} - 16 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sigma_3(n) e^{\pi inz}$$

Dies führt uns zu folgender Identität

Satz 6 (C.G.J. Jacobi, 1829). *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$A_8(n) = 16 \sum_{d|n} (-1)^{n-d} d^3.$$

Beweis. Für ungerades n sind auch alle Teiler ungerade, d.h. $(-1)^{n-d} = 1$. Weiter trägt die erste Summe nichts zu den ungerade indizierten Koeffizienten bei, also gilt das Behauptete. Für $2n$ erhalten wir den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
16^2\sigma_3(n) - 16\sigma_3(2n) &= 16\Big(\sum_{d|n} 16d^3 - \sum_{d|2n} d^3\Big) \\
&= 16\Big(2\sum_{d|n}(2d)^3 - \sum_{d|2n} d^3\Big) \\
&= 16\Big(2 \sum_{\substack{d|2n \\ \text{d gerade}}} d^3 - \sum_{d|2n} d^3\Big) \\
&= 16\Big(\sum_{d|2n} \big((-1)^d + 1\big) d^3 - \sum_{d|2n} d^3\Big) \\
&= 16 \sum_{d|2n} (-1)^d d^3 \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

□

3.4 Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von vier Quadraten

Mit der Eisensteinreihe

$$G_2(z) = \sum_{c=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{\substack{d=-\infty \\ d\neq 0 \text{ falls } c=0}}^{\infty} (cz+d)^{-2} \Big]$$

wollen wir eine Funktion f konstruieren, welche die charakteristischen Eigenschaften von θ^4 hat.

Satz 7. *Es gilt*

$$f(z) := \pi^{-2} \left(4G_2(2z) - G_2\left(\frac{z}{2}\right)\right) = \theta^4(z). \tag{3.11}$$

Beweis. Aus $G_2(z+1) = G_2(z)$ folgt $f(z+2) = f(z)$ und mit der Transformation $G_2\left(-\frac{1}{z}\right) = z^2 G_2(z) - 2\pi i z$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{z}\right) &= \pi^{-2} \left[4G_2\left(-\frac{1}{z/2}\right) - G_2\left(-\frac{1}{2z}\right)\right] \\ &= \pi^{-2}\left[4\left(\frac{z}{2}\right)^2 G_2\left(\frac{z}{2}\right) - 4\pi i z - (2z)^2 G_2(2z) + 4\pi i z\right] \\ &= -z^2\pi^{-2}\left[4G_2(2z) - G_2\left(\frac{z}{2}\right)\right] = -z^2 f(z). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nun bleibt die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{y\to\infty} f(z) \quad \text{und} \quad \lim_{y\to\infty} z^{-2} f(1-\frac{1}{z})e^{-\pi i z}$$

zu zeigen. Für den ersten Grenzwert gilt wegen $\lim_{y\to\infty} G_2(z) = 2\zeta(2)$

$$\lim_{y\to\infty} f(z) = \pi^{-2}(4\cdot 2\zeta(2) - 2\zeta(2)) = 1.$$

Für die Betrachtung von $f(1-\frac{1}{z})$ sind insbesondere $G_2(2-\frac{2}{z})$ und $G_2(\frac{1-1/z}{2})$ zu untersuchen. Einerseits ist

$$\begin{aligned} G_2\left(2-\frac{2}{z}\right) &= G_2\left(-\frac{2}{z}\right) = G_2\left(-\frac{1}{z/2}\right) \\ &= \left(\frac{z}{2}\right)^2 G_2(z) - \pi i z \end{aligned} \tag{3.13}$$

und anderseits gilt mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ bekanntlich $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) z = \frac{z-1}{2z-1} \in \mathbb{H}$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Wir erhalten mit Hilfe der Transformationsformeln

$$\begin{aligned} G_2\left(\frac{z-1}{2z-1}\right) &= \left(\frac{2z-1}{z-1}\right)^2 G_2\left(-\frac{2z-1}{z-1}\right) + 2\pi i \frac{2z-1}{z-1} \\ &= \left(\frac{2z-1}{z-1}\right)^2 G_2\left(-\frac{1}{z-1}\right) + 2\pi i \frac{2z-1}{z-1} \\ &= (2z-1)^2 G_2(z-1) - 2\pi i \frac{(2z-1)^2}{z-1} + 2\pi i \frac{2z-1}{z-1} \\ &= (2z-1)^2 G_2(z) - 2\pi i (4z-2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Substituieren wir z durch $\frac{z+1}{2}$, so folgt aus (3.14)

$$G_2\left(\frac{1-1/z}{2}\right) = G_2\left(\frac{\frac{z+1}{2}-1}{z}\right) = z^2 G_2\left(\frac{z+1}{2}\right) - 4\pi i z$$

und damit

$$\begin{aligned} z^{-2} f\left(1-\frac{1}{z}\right) &= z^{-2}\pi^{-2}\left[4\left(\left(\frac{z}{2}\right)^2 G_2\left(\frac{z}{2}\right) - \pi i z\right) - \left(z^2 G_2\left(\frac{z+1}{2}\right) - 4\pi i z\right)\right] \\ &= \pi^{-2}\left[G_2\left(\frac{z}{2}\right) - G_2\left(\frac{z+1}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Bei der Fourierentwicklung in $q = e^{\pi i z}$ verschwindet der 0-te Koeffizient

$$z^{-2} f\left(1-\frac{1}{z}\right) = a_1 q + a_2 q^2 + \dots$$

und nach Multiplikation mit $q^{-1} = e^{-\pi i z}$ erhalten wir

$$\lim_{y\to\infty} z^{-2} f\left(1-\frac{1}{z}\right) q^{-1} = a_1,$$

da $y \to \infty$ äquivalent zu $q \to 0$ ist. Damit ist mit der Charakterisierung von θ^4 das Behauptete bewiesen. $\square$

Satz 8 (C.G.J. Jacobi, 1828). *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$A_4(n) = 8 \sum_{4\nmid d|n} d. \tag{3.16}$$

Beweis. Einsetzen der q-Entwicklung mit $q = e^{\pi i z}$ ergibt

$$\pi^{-2}\big(4G_2(2z) - G_2(\frac{z}{2})\big) = 1 + 8\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n - 4\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^{4n}\Big).$$

Nun führt ein Koeffizientenvergleich unmittelbar zur Behauptung. □

3.5 Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von zwei Quadraten

In diesem Abschnitt geht es um die Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von zwei Quadraten. Wir behandeln diesen Fall deutlich kürzer als den Fall von vier und acht Quadraten, da er sich einerseits nicht aus der Theorie der Modulformen ergibt und andererseits in fast allen Büchern über elementare Zahlentheorie auftaucht. Neben $A_2(0) = 1$ und $A_2(1) = 4$ erkennen wir, dass $A_2(n) = 8$ ist, wenn n eine Primzahl der Form $n = 4m+1$ ist. Dies liegt daran, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Hauptidealring ist, in dem insbesondere die Primfaktorzerlegung eindeutig ist. Somit haben wir eine eindeutige Zerlegung des Hauptideals (n) mit Primnorm in ein Produkt von genau zwei von (1) verschiedenen Hauptidealen:

$$(n) = (A^2 + B^2) = (A + Bi)(A - Bi).$$

Zu jeder solchen Zerlegung erhalten wir acht Darstellungen von n als Summe von zwei Quadraten. Ist n von der Form $n = 4m + 3$, so gibt es keine Darstellung, d.h. $A_2(n) = 0$. Wir definieren nun einen Charakter $\chi(n)$ durch

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 4 \\ 0 & \text{falls } n \equiv 0 \bmod 2 \end{cases}$$

und stellen durch Einsetzen der wenigen Fälle seine strikte Multiplikativität

$$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m) \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{Z}$$

fest. Es gilt

$$\sum_{d|n}\chi(d) = d_1(n) - d_3(n),$$

wobei $d_1(n)$ bzw. $d_3(n)$ die Anzahl der Teiler von n der Form $4m + 1$ bzw. $4m + 3$ bedeutet. Hieraus ergibt sich

Lemma 3. *Für $n \geq 1$ gilt*

$$A_2(n) = 4 \sum_{d|n} \chi(d).$$

Kapitel 4

Eine zwei-variable Zetafunktion über $\mathbb{Q}$

Im Jahre 1999 formulierten van der Geer und Schoof mithilfe von Arakelov-Divisoren ein Analogon zum Riemann-Roch-Theorem und fanden eine Darstellung der vollständigen Zetafunktion

$$\hat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

als Integral über die Arakelovklassengruppe $CH^1(X_k)$ eines Zahlkörpers k. Weiter führten sie eine zwei-variable Zetafunktion ein, welche wir Arakelov-Zetafunktion bzw. zwei-variable Zetafunktion nennen. Der Sinn der Einführung einer neuen Variablen w liegt nicht nur in resultierenden konvergenten Integraldarstellungen, sondern auch in der Kodierung arithmetischer Information in w. Im Zahlkörperfall $k = \mathbb{Q}$ kann die Arakelovklassengruppe von $\mathbb{Q}$ als positiver reeller Zahlenstrahl aufgefasst werden und van der Geer und Schoofs Integral ergibt sich zu

$$\hat{\zeta}(s) \cong \int_0^\infty \theta(t^2)^s \theta(\frac{1}{t^2})^{1-s} \frac{dt}{t}, \tag{4.1}$$

mit der Jacobischen Thetafunktion

$$\theta(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}. \tag{4.2}$$

Dabei ist obige Darstellung nur formal, d.h. das Integral auf der rechten Seite konvergiert nicht. Erst eine Regularisierung gibt der Darstellung eine Bedeutung.

4.1 Eine Regularisierung von $Z_{\mathbb{Q}}(w,s)$

Eine derartige Regularisierung erhalten wir durch Einführen einer zweiten Variablen w und definieren die zu $\mathbb{Q}$ gehörige zwei-variable Zetafunktion durch

$$Z_{\mathbb{Q}}(w,s) := \int_0^\infty \theta(t^2)^s \theta(\frac{1}{t^2})^{w-s} \frac{dt}{t}. \tag{4.3}$$

Diese konvergiert im offenen Kegel

$$\mathcal{C} := \{(w,s) : \mathrm{Re}\,(w) < \mathrm{Re}\,(s) < 0\}. \tag{4.4}$$

und lässt sich meromorph nach $\mathbb{C}^2$ fortsetzen mit der Polstellenmenge

$$\{s = w\} \cup \{s = 0\}.$$

Eine Einschränkung auf die Gerade $w = 1$ liefert uns insbesondere die vollständige Riemannsche Zetafunktion

$$Z_{\mathbb{Q}}(1,s) = \hat{\zeta}(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

zurück.

Satz 9. *Die Funktion*

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) = \frac{s(s-w)}{2w} Z_{\mathbb{Q}}(w,s)$$

lässt sich analytisch zu einer ganzen Funktion auf $\mathbb{C}^2$ *fortsetzen und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) = \xi_{\mathbb{Q}}(w, w-s). \tag{4.5}$$

Beweis. Wir zerlegen das Integral (4.3) in $\int_0^1$ und $\int_1^\infty$ und machen eine Einzelbetrachtung. Mit der uns bekannten Thetatransformationsformel

$$\theta(t^2) = \frac{1}{t}\theta\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{für} \quad t > 0 \tag{4.6}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \theta(t^2)^s \theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^{w-s} \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^w t^{-s}\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \left(\theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^w - 1\right) t^{-s}\frac{dt}{t} + \int_0^1 t^{-s}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Das erste Integral der rechten Seite konvergiert dabei für alle $(w, s) \in \mathbb{C}^2$, da die Thetafunktion im Integranden exponentiell abfällt, und stellt damit eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^2$ dar. Das zweite Integral ergibt sich für $\operatorname{Re} s < 0$ zu $-\frac{1}{s}$. Eine ähnliche Betrachtung führen wir für $\int_1^\infty$ durch:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \theta(t^2)^s \theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^{w-s} \frac{dt}{t} &= \int_0^1 \theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^s \theta(t^2)^{w-s}\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^w t^{s-w}\frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \left(\theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^w - 1\right) t^{s-w}\frac{dt}{t} + \int_0^1 t^{s-w}\frac{dt}{t}.\end{aligned}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite stellt wieder eine ganze Funktion dar, das zweite ergibt sich für $\operatorname{Re}(w-s) > 0$ zu $\frac{1}{s-w}$. Also erhalten wir aufgrund eines gemeinsamen offenen Definitionsbereiches der Teilintegrale und $Z_{\mathbb{Q}}(w, s)$ für $s \notin \{w, 0\}$ die Identität

$$Z_{\mathbb{Q}}(w,s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-w} + \int_0^1 \left(\theta\left(\frac{1}{t^2}\right)^w - 1\right)(t^{-s} + t^{-(w-s)})\frac{dt}{t}. \tag{4.7}$$

Offensichtlich bleibt die rechte Seite bei Vertauschung von s und $w-s$ invariant, wobei wir die Funktionalgleichung

$$Z_{\mathbb{Q}}(w,s) = Z_{\mathbb{Q}}(w, w-s)$$

gezeigt haben. Weiter ist $s(w-s)Z_{\mathbb{Q}}(w,s)$ eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^2$. Setzen wir $w = 0$, so sehen wir, dass $Z_{\mathbb{Q}}(w,s)$ identisch verschwindet. Damit ist

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) = \frac{s(s-w)}{2w} Z_{\mathbb{Q}}(w,s)$$

eine ganze Funktion, welche derselben Funktionalgleichung genügt. □

Mit Hilfe der Heaviside-Funktion

$$H(s) = H(\mathrm{Re}\,(s)) = \begin{cases} 1 & \mathrm{Re}\,(s) > 0 \\ \frac{1}{2} & \mathrm{Re}\,(s) = 0 \\ 0 & \mathrm{Re}\,(s) < 0 \end{cases}.$$

erhalten wir eine Darstellung von $Z_{\mathbb{Q}}(w, s)$ auf $\mathbb{C}^2$.

Satz 10. *Für* $\mathrm{Re}\, s \notin \{\mathrm{Re}\, w, 0\}$ *gilt*

$$Z_{\mathbb{Q}}(w, s) = \int_0^\infty (\theta(t^2)^w - H(s) - H(w-s)t^{-w})t^s \frac{dt}{t},$$

wobei das Integral absolut konvergiert.

Beweis. Wir benutzen die Darstellung (4.7) und wenden beim zweiten Integral die Thetatransformationsformel (4.6) an:

$$\begin{aligned} Z_{\mathbb{Q}}(w, s) &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-w} + \int_0^1 (\theta(1/t^2)^w - 1)t^{-s}\frac{dt}{t} + \int_0^1 (\theta(1/t^2)^w - 1)t^{-w+s}\frac{dt}{t} \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-w} + \int_1^\infty (\theta(t^2)^w - 1)t^{s}\frac{dt}{t} + \int_0^1 (t^w\theta(t^2)^w - 1)t^{-w+s}\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Für $\mathrm{Re}\, s \neq 0$ beobachten wir

$$\int_1^\infty H(-s)t^s \frac{dt}{t} = -\frac{H(-s)}{s} \quad \text{und} \quad \int_0^1 H(s)t^s\frac{dt}{t} = \frac{H(s)}{s}$$

und schreiben

$$-\frac{1}{s} = -\frac{H(s)+H(-s)}{s} = \int_1^\infty H(-s)t^s\frac{dt}{t} - \int_0^1 H(s)t^s\frac{dt}{t}.$$

Entsprechend schreiben wir

$$\frac{1}{s-w} = \frac{H(s-w)+H(w-s)}{s-w} = \int_1^\infty H(w-s)t^{w-s}\frac{dt}{t} - \int_0^1 H(s-w)t^{s-w}\frac{dt}{t}$$

und erhalten die gewünschte Darstellung durch Addition der Einzelterme. □

Bemerkung. Satz 10 hat bei der Aussage über die Darstellung von $Z_{\mathbb{Q}}(w,s)$ zwei Geraden

$$\{\mathrm{Re}\, s = \mathrm{Re}\, w\} \cup \{\mathrm{Re}\, s = 0\}$$

ausgelassen. Nimmt man jedoch als Integralwert eine Renormalisierung bzw. den Cauchyschen Hauptwert

$$\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t} \to \lim_{B\to\infty} \frac{1}{\log B}\int_1^B \int_{1/A}^A f(t)\frac{dt}{t}\frac{dA}{A},$$

so bleibt der Satz richtig.

Korollar 2. *Für $w = 1$ entnehmen wir dem Satz (10) leicht die Darstellung*

$$Z_{\mathbb{Q}}(1,s) = \int_0^\infty (\theta(t^2)-1)t^s\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\theta(t)-1)t^{s/2}\frac{dt}{t} = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s).$$

Beweis. Aus der Integraldarstellung der Gammafunktion erhalten wir durch Substitution $t \to n^2\pi t$

$$\frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2}) = \int_0^\infty e^{-n^2\pi t}t^{s/2}\frac{dt}{t}.$$

Indem wir über alle natürlichen Zahlen n summieren, erhalten wir das gewünschte Resultat. □

4.2 Die Fourierentwicklung von θ^w

Die Jacobische Thetafunktion

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ in der Variablen $\tau = it$, wobei τ aus der oberen Halbebene kommt. Daher ist $\theta^w(t)$ eine Modulform vom Gewicht $\frac{w}{2}$. Im Folgenden wollen wir uns jedoch nicht damit beschäftigen, dass $\theta^w(t)$ Gewichte von Modulformen interpoliert, sondern konzentrieren uns vielmehr auf die Fourierentwicklung von $\theta^w(t)$ und arithmetische Eigenschaften ihrer Koeffizienten. Wir machen Aussagen über ihre Form, interpretieren sie für natürliche Werte w und geben für sie asymptotische Wachstumsformeln an. Für die Fourierentwicklung

$$\theta(it)^w = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(w) e^{-\pi imt} \tag{4.8}$$

erhalten wir durch Einsetzen der Reihendarstellung von $\theta(it)$

$$\begin{aligned} \theta(it)^w &= \big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 it}\big)^w \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{w}{j} 2^j \big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 it}\big)^j \end{aligned} \tag{4.9}$$

folgende Aussage über die Gestalt der Koeffizienten $c_m(w)$:

Satz 11. *Der Fourier-Koeffizient $c_m(w)$ ist ein Polynom in $\mathbb{Q}[w]$ vom Grad m. Zu jedem $m \geq 1$ hat das Polynom*

$$c_m^*(w) := (-1)^m m! c_m(-w), \quad m \geq 1\,, \tag{4.10}$$

nichtnegative ganzzahlige Koeffizienten, Leitkoeffizienten $2^m w^m$, und der konstante Term verschwindet.

Im Beweis geht wesentlich das folgende Jacobi-Tripel-Produkt ein:

Lemma 4 (Jacobi-Tripel-Produkt). *Für $|x| < 1$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z^2)(1 + x^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m}$$

Beweis. Mittels

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^{2n-1}z^2)(1 + x^{2n-1}z^{-2})$$

erhalten wir das Teleskopprodukt

$$F(z) = xz^2 F(xz).$$

Weiter sei

$$G(z) := F(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})$$

und gleichermaßen

$$G(z) = xz^2 G(xz).$$

Da mit F auch G gerade ist, hat die Laurent-Reihe für G die Form

$$G(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m}$$

und über obige Identität erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^{2m} &= xz^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m (xz)^{2m} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m x^{2m+1} z^{2m+2} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m-1} x^{2m-1} z^{2m}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich die Rekursion

$$a_m = a_{m-1} x^{2m-1}, \quad \text{also} \quad a_m = a_0 x^{m^2}.$$

Weiter erhalten wir $a_0 = 1$ aus

$$G(1) = F(1) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^{2n-1})^2 (1 - x^{2n}) = 1 + \dots$$

und aus der Gestalt von

$$G(z) = a_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m} = a_0 + \dots$$

Damit erhalten wir die gewünschte Identität

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1} z^2)(1 + x^{2n-1} z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m}.$$

$\square$

Beweis von Satz 11. Wir benutzen die Fourierentwicklung

$$\theta(t)^w = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{w}{j} 2^j \big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}\big)^j$$

und sehen, dass $c_m(w)$ die Gestalt eines Polynoms hat, da nur für $1 \leq j \leq m$ Terme der Form $e^{-\pi m t}$ auftreten. Weiter ist m der Grad von $c_m(w) \in \mathbb{Q}[w]$ und der Leitterm $\frac{2^m}{m!} w^m$. Durch Multiplikation mit $m!$ verschwinden alle Nenner, da als Nenner nur die im Binomialkoeffizienten vorkommenden Fakultäten auftreten. Also gilt bereits

$$c_m^*(w) = (-1)^m m! c_m(w) \in \mathbb{Z}[w],$$

und es bleibt die Nichtnegativität zu zeigen. Einerseits gilt für $q = e^{\pi i z}$

$$\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-q)^{n^2}\big)^{-w} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(-w)(-q)^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^*(w)}{m!} q^m,$$

andererseits erhalten wir über das Jacobi-Tripel-Produkt

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-q)^{n^2} &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 + (-q)^{2k-1})^2 (1 - q^{2k}) \\ &= (1-q) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1})(1 - q^{2k})(1 - q^{2k+1}) \end{aligned}$$

und damit für $w = u > 0$

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-q)^{n^2}\Big)^{-u} = (1-q)^{-u} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1})^{-u} (1 - q^{2k})^{-u} (1 - q^{2k+1})^{-u}.$$

Die Entwicklung von $(1-z)^{-w}$ in eine Potenzreihe in z, deren Koeffizienten Polynome in w sind, ergibt die Doppelreihe

$$(1-z)^{-w} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \binom{w+l-1}{l} z^l = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=0}^{l} c_{lm} w^m\Big) z^l,$$

wobei die Koeffizienten $c_{lm} \geq 0$ sind, wie wir anhand der Form der Binomialkoeffizienten sehen. Da die Entwicklung von

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1})^{-u} (1 - q^{2k})^{-u} (1 - q^{2k+1})^{-u}$$

in eine Potenzreihe ebenfalls nichtnegative Koeffizienten liefert, bleibt die Eigenschaft bei Reihenmultiplikation erhalten, und die Behauptung folgt. □

Die ersten Koeffizienten sehen wie folgt aus. Wir benötigen ihre explizite Gestalt später zur Behandlung von Eulerprodukten.

m	$c_m(w)$	$\tilde{c}_m(w) = c_m(w)/2w$
1	$2w$	1
2	$2w(w-1)$	$w-1$
3	$\binom{w}{3}2^3$	$\frac{2}{3}(w-1)(w-2)$
4	$\binom{w}{4}2^4 + 2w$	$\frac{1}{3}(w-1)(w-2)(w-3)+1$
5	$\binom{w}{5}2^5 + 2\binom{w}{2}2^2$	$\frac{2}{15}(w-1)(w-2)(w-3)(w-4)+2(w-1)$
6	$\binom{w}{6}2^6 + 3\binom{w}{3}2^3$	$2(w-1)(w-2)[\frac{1}{45}(w-3)(w-4)(w-5)+1]$

Nun wollen wir die Koeffizienten $c_m(w)$ interpretieren. Für natürliche Werte w können wir den Koeffizienten $c_m(w)$ als Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl m als Summe von w Quadratzahlen interpretieren. Wollen wir eine natürliche Zahl m als Summe von w Quadraten schreiben und sind j der w Quadrate von Null verschieden, so haben wir $\binom{w}{j}$ Möglichkeiten, j der w Positionen auszuwählen, und 2^j Möglichkeiten, die Wurzel der j Quadrate mit positivem oder negativem Vorzeichen zu versehen. Der m-te Koeffizient von

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 it}\Big)^j$$

liefert unter Berücksichtigung der Reihenfolge die Anzahl der Darstellungen von m als Summe von genau j nicht-trivialen Quadraten. Folglich ist (aufgrund der Eindeutigkeit der Fourierentwicklung) $c_m(w)$ gerade die Anzahl der Darstellungen von m als Summe von w (teilweise trivialen) Quadraten. Alternativ erhalten wir diese Interpretation für natürliche Zahlen w direkt:

$$\theta(t)^w = \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\Big)^w = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{a_1^2+a_2^2+\dots a_w^2=n} 1\Big)q^n.$$

Beispiel. 1. $c_5(2) = 8$, da $5 = (\pm1)^2 + (\pm2)^2$ und $5 = (\pm2)^2 + (\pm1)^2$.

2. $c_4(4) = 24$, da $4 = (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + (\pm1)^2 + (\pm1)^2$ und

$$\begin{aligned} 4 &= (\pm2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm2)^2 + 0^2 + 0^2 \\ &= 0^2 + 0^2 + (\pm2)^2 + 0^2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + (\pm2)^2 \end{aligned}$$

In Kapitel 3 haben wir uns ausführlich mit der Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von 2, 4 und 8 Quadraten beschäftigt und hierfür explizite Darstellungsanzahlen hergeleitet.

Korollar 3. *Es gilt*

$$\begin{aligned} c_n(2) &= 4\sum_{d|n}\chi(d) \quad \textit{mit} \quad \chi(d) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad k = 1 \ \textit{mod}\ 4 \\ -1 & \textit{falls} \quad k = -1 \ \textit{mod}\ 4 \\ 0 & \textit{falls} \quad k = 0 \ \textit{mod}\ 2 \end{cases} \\ c_n(4) &= 8\sum_{4\nmid d|n} d \\ c_n(8) &= 16\sum_{d|n}(-1)^{n-d}d^3 \end{aligned}$$

Abschließend wollen wir asymptotische Wachstumsformeln für die Koeffizienten $c_m(w)$ angeben. Im Jahr 1958 hat H. Petersson [Pet1] Abschätzungen für Fourierkoeffizienten von automorphen Formen gegeben, welche 1961 J. Lehner [Le] bei kleinen Gewichten verbessert hat. Für unsere Koeffizienten $c_m(u)$ bedeutet dies

$$c_m(u) = \begin{cases} O(m^{u/2-1}) & & u > 4 \\ O(m^{u/2-1}\log m) & \text{für} & u = 4 \\ O(m^{u/4}) & & 4 > u > 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

J. Lagarias und E. Rains geben in ihrer Arbeit [LR] aus dem Jahr 2002 eine zwar schwächere, dafür aber explizite Abschätzung an.

Satz 12. *Für reelles $w = u \geq 0$ gilt*

$$|c_m(u)| \leq \begin{cases} 24m^{u/2} & \textit{für} \quad m \geq 2 \\ 6um^{u/2+1} & \textit{für} \quad m \geq 1. \end{cases} \tag{4.12}$$

4.3 Die Definition der Dirichlet-Reihe $\tilde{D}_w(s)$

Nun betrachten wir die zur Fourierentwicklung von θ^u assoziierte Dirichlet-Reihe

$$D_u(s) := \sum_{m=1}^{\infty} c_m(u)m^{-s} \tag{4.13}$$

und können mit Hilfe der expliziten Abschätzung der Fourierkoeffizienten $c_m(u)$ zu jedem $u > 0$ eine Halbebene angeben, in der die Dirichlet-Reihe $D_u(s)$ absolut konvergiert.

Korollar 4. *Die Dirichlet-Reihe* $D_u(s) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(u) m^{-s}$ *konvergiert absolut für*

$$\sigma > \begin{cases} \frac{u}{2} & \textit{für} \quad u \geq 4 \\ 1 + \frac{u}{4} & \textit{für} \quad 0 < u < 4. \end{cases} \tag{4.14}$$

Dieser Dirichlet-Reihe $D_u(s)$ stellen wir die Dirichlet-Reihe

$$\tilde{D}_u(s) := \frac{1}{2u} D_u(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{c}_m(u) m^{-s} \tag{4.15}$$

zur Seite und bemerken sogleich, dass $\tilde{D}_1(s/2) = \zeta(s)$ gilt. Dies liegt daran, dass für $w = 1$ nur der Term $j = 1$ einen nichtverschwindenden Beitrag liefert, da für $j > 1$ der Binomialkoeffizient $\binom{w}{j}$ verschwindet. Somit folgt $c_m(1) = 2w$ bzw. $\tilde{c}_m(1) = 1$ für eine Quadratzahl m und $c_m(1) = \tilde{c}_m(1) = 0$ im Fall, dass m keine Quadratzahl ist, also

$$\tilde{D}_1(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{\mathbb{N}^2}(m) m^{-s}.$$

Durch Einsetzen von $s/2$ ergibt sich die Riemannsche Zetafunktion

$$\tilde{D}_1(\frac{s}{2}) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{\mathbb{N}^2}(m) m^{-\frac{s}{2}} = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} = \zeta(s).$$

Bemerkung. Im klassischen Fall $u = 1$ der Riemannschen Zetafunktion erhält man lediglich die schwächere Aussage der Konvergenz für $\sigma > 1,25$.

4.4 Über die Fortsetzung von $D_u(s)$

In diesem Abschnitt betrachten wir für $u > 0$ die meromorphe Fortsetzung von

$$D_u(s) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(u) m^{-s}$$

und sehen, dass $\tilde{D}_u(s) := \frac{1}{2u} D_u(s)$ die zu $Z_{\mathbb{Q}}(u,s)$ assoziierte Dirichlet-Reihe ist. Dies ermöglicht uns im nächsten Abschnitt, die Frage nach der Existenz von Eulerprodukten zu klären.
Mit der Integraldarstellung der Gammafunktion

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$$

erhalten wir unter Substitution $x \mapsto x\pi m$

$$c_m(u)\Gamma(s)\pi^{-s}m^{-s} = \int_0^\infty c_m(u)e^{-\pi m x} x^s \frac{dx}{x}.$$

Summation über alle natürlichen Zahlen m führt dann zu

$$\Gamma(s)\pi^{-s}\sum_{m=1}^\infty c_m(u)m^{-s} = \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty c_m(u)e^{-\pi m x} x^s \frac{dx}{x},$$

also

$$\Gamma(s)\pi^{-s}D_u(s) = \int_0^\infty \Big(\theta(x)^u - 1\Big) x^s \frac{dx}{x}$$

bzw.

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\tilde{D}_u(\frac{s}{2}) = \frac{1}{2u}\int_0^\infty \Big(\theta(x)^u - 1\Big) x^{s/2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{u} Z_{\mathbb{Q}}(u,s).$$

Multiplikation mit $s(s-u)/2$ liefert uns die bekannte meromorphe Funktion $\xi_{\mathbb{Q}}(u,s)$

$$\frac{1}{2}s(s-u)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2}\tilde{D}_u(\frac{s}{2}) = \frac{s(s-u)}{2u} Z_{\mathbb{Q}}(u,s) = \xi_{\mathbb{Q}}(u,s).$$

Ausgehend von der Dirichlet-Reihe $\tilde{D}_u(\frac{s}{2})$ sind wir zu einer ganzen Funktion $\xi_{\mathbb{Q}}$ gelangt. Wir können aber auch den umgekehrten Weg gehen und zur ganzen Funktion $\xi_{\mathbb{Q}}(w,s)$ eine meromorphe Funktion $\tilde{D}_w(\frac{s}{2})$ durch

$$\tilde{D}_w(\frac{s}{2}) := \Big(\frac{1}{2}s(s-w)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\Big)^{-1} \xi_{\mathbb{Q}}(w,s) \tag{4.16}$$

definieren. Für $w = u > 0$ wissen wir, dass $\tilde{D}_u(\frac{s}{2})$ eine in einer Halbebene konvergente Dirichlet-Entwicklung besitzt. Für komplexe w haben wir lediglich eine formale Reihenentwicklung

$$\tilde{D}_w(s) = \sum_{m=1}^\infty \tilde{c}_m(w)m^{-s},$$

der wir mittels der Regularisierung (4.16) einen Wert zuordnen können.

4.5 Über die Existenz von Eulerprodukten

Eine ganz natürliche Frage bei der Betrachtung von Zetafunktionen ist die nach der Existenz von Eulerprodukten. Ihr wollen wir uns in diesem Abschnitt widmen. Wir gehen von der Funktion $\tilde{D}_w(s)$ aus und betrachten ihre assoziierte Dirichlet-Reihe

$$\tilde{D}_w(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{c}_m(w) m^{-s}.$$

Lemma 5. *Die zu $\tilde{D}_w(s)$ assoziierte Dirichlet-Reihe $\tilde{D}_w(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{c}_m(w) m^{-s}$ hat genau für die Werte $w = 0, 1, 2, 4$ und 8 ein Eulerprodukt.*

Beweis. Notwendige Bedingung für die Existenz eines Eulerproduktes für $\tilde{D}_w(s)$ ist das Erfüllen der Identität

$$\tilde{c}_2(w)\tilde{c}_3(w) = \tilde{c}_6(w),$$

also müssen alle in Frage kommenden Werte $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$(w-1)\frac{2}{3}(w-1)(w-2) = 2(w-1)(w-2)[\frac{1}{45}(w-3)(w-4)(w-5)+1]$$

genügen. Diese faktorisiert sich leicht zu

$$w(w-1)(w-2)(w-4)(w-8) = 0,$$

also können nur zu den Werten $w = 0, 1, 2, 4$ und 8 Eulerprodukte von $\tilde{D}_w(s)$ existieren. Nun sind die obigen Fälle $w = 0, 1, 2, 4$ und 8 genauer zu betrachten und die Existenz eines Eulerprodukts nachzuweisen.

- **w=0:** Lagarias und Rains betrachten in ihrer Arbeit [LR] insbesondere den Fall $w = 0$ und leiten die Darstellung

  $$\xi_{\mathbb{Q}}(0, s) = -\frac{s^2}{8}(1 - 2^{1+\frac{s}{2}})(1 - 2^{1-\frac{s}{2}})\hat{\zeta}(\frac{s}{2})\hat{\zeta}(-\frac{s}{2})$$

  mit

  $$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

  her. Für unsere Funktion

  $$\tilde{D}_0(\frac{s}{2}) = \left(\frac{s^2}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\right)^{-1}\xi_{\mathbb{Q}}(0, s)$$

erhalten wir mit der Verdopplungsformel der Gammafunktion und der Funktionalgleichung der Zetafunktion folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_0(s) &= -\frac{1}{4}\Big(\pi^{-s}\Gamma(s)\Big)^{-1}(1-2^{1+s})(1-2^{1-s})\hat{\zeta}(s)\hat{\zeta}(1+s) \\
&= -\frac{1}{4}\pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}(1-2^{1+s})(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(1+s) \\
&= -\frac{1}{4}(2^{1-s})(1-2^{1+s})(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(1+s) \\
&= (1-2^{-1-s})(1-2^{1-s})\zeta(s)\zeta(1+s) \\
&= \frac{(1-2^{-1-s})(1-2^{1-s})}{(1-2^{-s})(1-2^{-1-s})}\prod_{p>2}(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-1-s})^{-1} \\
&= \frac{1-2^{1-s}}{1-2^{-s}}\prod_{p>2}(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{-1-s})^{-1} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

- **w=1:** Wie bereits bemerkt gilt

$$\tilde{D}_1(s) = \zeta(2s) = \prod_p (1-p^{-2s})^{-1}. \qquad (4.18)$$

- **w=2:** Nachfolgend benutzen wir die hergeleiteten Identitäten über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten. Es gilt

$$\tilde{D}_2(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{c}_m(2)m^{-s} = \zeta(s)L(s)$$

mit

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$$

und

$$\chi(n) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \\ -1 & n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4) \\ 0 & n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) \end{cases}$$

Dabei ist χ ein vom Hauptcharakter verschiedener Charakter modulo

4, dessen L-Reihe ein Eulerprodukt besitzt. Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{D}_2(s) &= \zeta(s)L(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1} \\ &= (1-2^{-s})^{-1} \prod_{p\equiv 1(4)} (1-p^{-s})^{-2} \prod_{p\equiv 3(4)} (1-p^{-s})^{-1}(1+p^{-s})^{-1} \\ &= (1-2^{-s})^{-1} \prod_{p\equiv 1(4)} (1-p^{-s})^{-2} \prod_{p\equiv 3(4)} (1-p^{-2s})^{-1} \qquad (4.19)\end{aligned}$$

- **w=4:**

$$\begin{aligned}\tilde{D}_4(s) &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{c}_m(4) m^{-s} = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{4\nmid d|m} d \Big) m^{-s} \\ &= \sum_{m\neq 0(4)} \sigma_1(m) m^{-s} + \sum_{m=0(4)} (\sigma_1(m) - \sum_{4d|m} 4d) m^{-s} \\ &= \sum_{m\neq 0(4)} \sigma_1(m) m^{-s} + \sum_{m=4m'=0(4)} (\sigma_1(m) - 4\sigma_1(m')) m^{-s} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) m^{-s} - 4\sigma_1(m)(4m)^{-s} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m)(1 - 4\cdot 4^{-s}) m^{-s} = (1-4\cdot 2^{-2s}) \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_1(m) m^{-s} \\ &= (1-4\cdot 2^{-2s}) \zeta(s)\zeta(s-1) \qquad (4.20) \\ &= (1-4\cdot 2^{-2s}) \prod_p (1-p^{-s})^{-1}(1-p\cdot p^{-s})^{-1} \qquad (4.21)\end{aligned}$$

- **w=8:**

$$
\begin{aligned}
\tilde{D}_8(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n(8) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d|n} (-1)^{n-d} d^3 \Big) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sigma_3(n) - 2 \sum_{d|n, n-d \equiv 1(2)} d^3 \Big) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sigma_3(n) - 2 \sum_{d|n=2n', \text{d ungerade}} d^3 \Big) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sigma_3(n) - 2 (\sum_{d|n', n=2n'} d^3 - \sum_{d|n', n=2n', d=2d'} (2d')^3) \Big) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sigma_3(n) - 2 \cdot 2^{-s} \sigma_3(n) + 16 \sum_{4d'|n} d'^3 \Big) n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_3(n) - 2 \cdot 2^{-s} \sigma_3(n) + 16 \cdot 2^{-2s} \sigma_3(n)) n^{-s} \\
&= (1 - 2 \cdot 2^{-s} + 16 \cdot 2^{-2s}) \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) n^{-s} \\
&= (1 - 2 \cdot 2^{-s} + 16 \cdot 2^{-2s}) \zeta(s) \zeta(s-3) && (4.22) \\
&= (1 - 2 \cdot 2^{-s} + 16 \cdot 2^{-2s}) \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} (1 - p^3 p^{-s})^{-1} && (4.23)
\end{aligned}
$$

□

Die soeben durch ein Eulerprodukt ausgezeichneten Zetafunktionen entsprechen von $w = 0$ abgesehen genau den Zetafunktionen der ganzen Zahlen, der ganzen Gaußschen Zahlen, den ganzzahligen Quaternionen und den ganzzahligen Oktaven. So genommen werden die endlichen Divisionsalgebren erneut durch die Existenz eines Eulerproduktes gekennzeichnet.

4.6 Ein neues Resultat für die Taylorkoeffizienten von $\xi_{\mathbb{Q}}(w,s)$ um $\frac{w}{2}$

Aus Kapitel 1 wissen wir, dass wir die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ meromorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzen können und mit

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$$

eine ganze Funktion erhalten. Entwickeln wir diese in eine Taylorreihe

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s-\frac{1}{2})^n$$

um $1/2$, so verschwinden nach einem Satz aus [Ed] die ungeraden Koeffizienten und die geraden Koeffizienten sind positiv. In diesem Abschnitt werden wir dieses klassische Theorem auf die Funktion $\xi_{\mathbb{Q}}(w,s)$ verallgemeinern.

Satz 13. *Die ganze Funktion $\xi_{\mathbb{Q}}(w,s)$ besitzt eine Potenzreihenentwicklung*

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(s-\frac{w}{2})^{2n}$$

um $\frac{w}{2}$ mit verschwindenden ungeraden Koeffizienten und für $w \geq 1$ positiven Koeffizienten

$$a_{2n} = 4\int_1^{\infty} \frac{d[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)]}{dx} x^{-w/4} \frac{(\frac{1}{2}\log x)^{2n}}{(2n)!} dx,$$

wobei $\theta^w(x) = 2\psi_w(x) + 1$.

Die Positivitätsaussage bereiten wir dabei durch ein Lemma vor.

Lemma 6. *Die Funktion $h(x) := x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)$ ist für $w \geq 1$ auf dem Intervall $[1,\infty)$ streng monoton wachsend. Damit ist ihre Ableitung $h'(x)$ fast überall positiv.*

Beweis. Für $0 < x < y$ gilt

$$\sqrt{x}\theta(x) = \theta(x^{-1}) < \theta(y^{-1}) = \sqrt{y}\theta(y)$$

und damit für $w > 1$

$$wx^{\frac{w-1}{2}}\theta(x)^{w-1} < wy^{\frac{w-1}{2}}\theta(y)^{w-1} \tag{4.24}$$

Nun genügt es, die strenge Monotonie für $w = 1$ zu zeigen, d.h.

$$\frac{1}{2}x^{1+\frac{1}{2}}\theta'(x) = x^{1+\frac{1}{2}}\psi_1'(x) < y^{1+\frac{1}{2}}\psi_1'(y) = \frac{1}{2}y^{1+\frac{1}{2}}\theta'(y),$$

dann folgt durch Multiplikation mit (4.24)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^{1+\frac{w}{2}}w\theta'(x)\theta^{w-1}(x) &< \frac{1}{2}y^{1+\frac{w}{2}}w\theta'(y)\theta^{w-1}(y) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^{1+\frac{w}{2}}\theta^w(x)' &< \frac{1}{2}y^{1+\frac{w}{2}}\theta^w(y)' \\
\Leftrightarrow x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x) &< y^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(y). \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Die strenge Monotonie für $w = 1$ zeigen wir durch Differenzieren

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^{3/2}\psi_1'(x)] &= \frac{d}{dx}\Big(-\sum_{n=1}^{\infty} x^{3/2}n^2\pi e^{-\pi n^2 x}\Big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\big(n^4\pi^2 x - \frac{3}{2}n^2\pi\big)x^{1/2}e^{-\pi n^2 x}, \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

da für $x \in [1,\infty)$ alle Koeffizienten $(n^4\pi^2 x - \frac{3}{2}n^2\pi)$ positiv sind. $\square$

Beweis von Satz 13. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) &= \frac{w}{2} - \frac{s(w-s)}{2}\int_1^{\infty}\psi_w(x)\big[x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{w-s}{2}}\big]\frac{dx}{x} \\
&= \frac{w}{2} - \frac{s(w-s)}{2}\int_1^{\infty}\frac{d}{dx}\Big(\psi_w(x)\big[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{x^{\frac{w-s}{2}}}{\frac{w-s}{2}}\big]\Big)dx \\
&\quad + \frac{s(w-s)}{2}\int_1^{\infty}\psi_w'(x)\big[\frac{x^{\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}} + \frac{x^{\frac{w-s}{2}}}{\frac{w-s}{2}}\big]dx \\
&= \frac{w}{2} + \frac{s(w-s)}{2}\psi_w(1)\big[\frac{2}{s} + \frac{2}{w-s}\big] \\
&\quad + \int_1^{\infty}\psi_w'(x)\big[(w-s)x^{\frac{s}{2}} + sx^{\frac{w-s}{2}}\big]dx \\
&= \frac{w}{2} + w\psi_w(1) + \int_1^{\infty}x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)\big[(w-s)x^{\frac{s-w}{2}-1} + sx^{-\frac{s}{2}-1}\big]dx.
\end{aligned}$$

Wiederholte partielle Integration liefert

$$
\begin{aligned}
& \frac{w}{2} + w\psi_w(1) + \int_1^\infty \frac{d}{dx}\Big[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)\big(-2x^{\frac{s-w}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}}\big)\Big]dx \\
& - \int_1^\infty \frac{d}{dx}\big[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)\big]\big(-2x^{\frac{s-w}{2}} - 2x^{-\frac{s}{2}}\big)dx \\
= \; & \frac{w}{2} + w\psi_w(1) + 4\psi_w'(1) + \int_1^\infty \frac{d}{dx}\big[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)\big]\big(+2x^{\frac{s-w}{2}} + 2x^{-\frac{s}{2}}\big)dx
\end{aligned}
$$

Diesen Ausdruck können wir jedoch wesentlich vereinfachen, denn durch Differenzieren von

$$\theta^w(x) = 2\psi_w(x) + 1 = x^{-\frac{w}{2}}\Big(2\psi_w(\frac{1}{x}) + 1\Big)$$

auf beiden Seiten und Einsetzen von $x = 1$ erhalten wir

$$\frac{w}{2} + w\psi_w(1) + 4\psi_w'(1) = 0.$$

Weiter formen wir den Integranden um:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big(x^{\frac{s-w}{2}} + x^{-\frac{s}{2}}\big) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{w}{4}}\big(x^{\frac{s}{2}-\frac{w}{4}} + x^{-(\frac{s}{2}-\frac{w}{4})}\big) \\
&= x^{-\frac{w}{4}}\cosh\big(\log x^{\frac{s}{2}-\frac{w}{4}}\big) \\
&= x^{-\frac{w}{4}}\cosh\big(\frac{1}{2}(s-\frac{w}{2})\log x\big).
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) = 4\int_1^\infty \frac{d[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)]}{dx}x^{-\frac{w}{4}}\cosh\big(\frac{1}{2}(s-\frac{w}{2})\log x\big)dx \tag{4.27}$$

bzw. in der Notation Riemanns

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,\frac{w}{2}+it) = 4\int_1^\infty \frac{d[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)]}{dx}x^{-\frac{w}{4}}\cos\big(\frac{t}{2}\log x\big)dx. \tag{4.28}$$

Entwickeln wir nun

$$\cosh\big(\frac{1}{2}(s-\frac{w}{2})\log x\big)$$

in die Potenzreihe

$$\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{y^{2n}}{(2n)!},$$

so erhalten wir die Entwicklung

$$\xi_{\mathbb{Q}}(w,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(s - \frac{w}{2})^{2n}$$

mit

$$a_{2n} = 4\int_1^{\infty} \frac{d[x^{1+\frac{w}{2}}\psi_w'(x)]}{dx} x^{-\frac{w}{4}} \frac{(\frac{1}{2}\log x)^{2n}}{(2n)!} dx.$$

Da wir einerseits mit Lemma 6 die Positivität des Differentials erhalten und anderseits die Positivität der übrigen Terme klar ist, folgt das Behauptete. □

Kapitel 5

Die Arakelov-Zetafunktion für Zahlkörper

In diesem Kapitel untersuchen wir die zwei-variable Arakelov-Zetafunktion für Zahlkörper und richten uns bei der Darstellung der Grundlagen in den ersten Abschnitten nach [De].

5.1 Einige Notationen der Arakelov-Theorie

Beginnen wollen wir wie in [De] und [GS] mit einigen Notationen der eindimensionalen Arakelov-Theorie. Für einen Zahlkörper $k/\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}_k$ den Ganzheitsring. Mit $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_k$ und mit v unendliche Stellen von k. Wir betrachten die „arithmetische Kurve“

$$X_k = \operatorname{spec} \mathfrak{o}_k \cup \{v|\infty\} .$$

Die Elemente der Gruppe

$$Z^1(X_k) = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z} \cdot \mathfrak{p} \;\oplus\; \bigoplus_{v|\infty} \mathbb{R} \cdot v$$

heißen Arakelov-Divisoren. Durch die Abbildung

$$\operatorname{div} \,: k^* \longrightarrow Z^1(X_k)$$

mittels

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(f)\mathfrak{p} - \sum_{v} e_v \log |f|_v v .$$

erhalten wir die Untergruppe der Hauptdivisoren. Dabei bedeutet für eine Einbettung v

$$|f|_v = |v(f)|$$

und

$$e_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \text{ reell} \\ 2 & \text{falls } v \text{ komplex.} \end{cases}$$

Der Kokern

$$CH^1(X_k) := Z^1(X_k)/\mathrm{div}\,(k^*)$$

wird Arakelov-Chow-Gruppe (bzw. Arakelov-Klassengruppe oder Arakelov-Picard-Gruppe) von X_k genannt. Mit den naheliegenden Topologien sind die $k^*, Z^1(X_k)$ und $CH^1(X_k)$ lokal-kompakte topologische Gruppen. Das Zählmaß auf $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}\cdot\mathfrak{p}$ und das Lebesgue-Maß auf $\bigoplus_{v|\infty} \mathbb{R}\cdot v$ induzieren Haar-Maße dD auf $Z^1(X_k)$ und $d\mathcal{D}$ auf $CH^1(X_k)$.
Zu einem Arakelov-Divisor

$$D = \sum_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p} + \sum_v x_v \cdot v \ \in Z^1(X_k)$$

sei

$$I(D) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{-\nu_{\mathfrak{p}}}$$

das zu D bzgl. der endlichen Komponenten assoziierte gebrochene Ideal in $\mathfrak{o}_k$. Die unendlichen Komponenten von D bestimmen eine Norm $\| \ \|_D$ auf dem Minkowski-Raum $k \otimes \mathbb{R} = \bigoplus_v k_v$ durch

$$\|(z_v)\|_D^2 = \sum_v |z_v|^2 \|1\|_v^2$$

mit

$$\|1\|_v^2 = \begin{cases} e^{-2x_v} & \text{falls } v \text{ reell} \\ 2e^{-x_v} & \text{falls } v \text{ komplex.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir für $f \in k \hookrightarrow k \otimes \mathbb{R}$

$$||f||_D^2 = \sum_{v \,\mathrm{reell}} |f|_v^2 e^{-2x_v} + 2 \sum_{v \,\mathrm{komplex}} |f|_v^2 e^{-x_v} \ . \tag{5.1}$$

Die Einbettung $I(D) \hookrightarrow k \otimes \mathbb{R}$ und die Norm $\| \ \|_D$ machen $I(D)$ zu einem Gitter im Minkowski-Raum.

Lemma 7. *Zwei Gitter $I(D)$ und $I(D')$ sind genau dann $\mathfrak{o}_k$-isometrisch, wenn $[D] = [D']$ in $CH^1(X_k)$.*

Definition 2. *Der Arakelov-Divisor κ, welcher in den unendlichen Komponenten Nullen hat und für dessen endliche Stellen $I(\kappa) = \mathfrak{d}^{-1}$ gilt mit der Differente $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{k/\mathbb{Q}}$ des Zahlkörpers $k/\mathbb{Q}$, heißt kanonischer Divisor.*

Nun definieren wir zu einer Divisorklasse $\mathcal{D} = [D] \in CH^1(X_k)$ die Theta-Reihen

$$k^0(\mathcal{D}) := \sum_{f \in I(D)} e^{-\pi ||f||_D^2} \tag{5.2}$$

und

$$k^1(\mathcal{D}) := k^0([\kappa] - \mathcal{D}). \tag{5.3}$$

Lemma 8. *Es gilt*

$$k^0(\mathcal{D}) k^1(\mathcal{D})^{-1} = \mathcal{N}(\mathcal{D}) d_k^{-1/2} \; . \tag{5.4}$$

mit dem Absolutbetrag $d_k = |d_{k/\mathbb{Q}}|$ der Diskriminante von $k/\mathbb{Q}$ und der Arakelov-Norm

$$\mathcal{N} : CH^1(X_k) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

induziert durch

$$\mathcal{N} : Z^1(X_k) \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \; , \; \mathcal{N}(D) = \prod_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}} \prod_v e^{x_v} \; .$$

Beweis. Obige Aussage ist Heckes Funktionalgleichung der Theta-Funktion, vgl. [La]. Die zu D und $\kappa - D$ assoziierten Gitter sind $\mathbb{Z}$-dual. Mittels der Poissonschen Summenformel erhalten wir

$$\sum_{f \in I} e^{-\pi ||f||_D^2} = \frac{\mathcal{N}(D)}{d_k^{1/2}} \sum_{f \in \mathfrak{d} I^{-1}} e^{-\pi ||f||_{\kappa - D}^2} \tag{5.5}$$

und damit

$$k^0(\mathcal{D}) k^1(\mathcal{D})^{-1} = \mathcal{N}(\mathcal{D}) d_k^{-1/2} \; . \tag{5.6}$$

$\square$

Wir bezeichnen mit

$$Z^1(X_k)^0 := \ker(\mathcal{N} : Z^1(X_k) \longrightarrow \mathbb{R}_+^*)$$

den Kern der Norm auf den Arakelov-Divisoren und bilden

$$CH^1(X_k)^0 := Z^1(X_k)^0/\mathrm{div}\,(k^*)\ .$$

Lemma 9. *$CH^1(X_k)^0$ ist eine kompakte topologische Gruppe.*

Die Kompaktheit von $CH^1(X_k)^0$ ist äquivalent zu Dirichlets Einheitensatz und der Endlichkeit der Klassenzahl, vgl. [GS], S. 389. Weiter ordnet sich $CH^1(X_k)^0$ in die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow CH^1(X_k)^0 \longrightarrow CH^1(X_k) \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow 1\ . \tag{5.7}$$

ein. Wir betrachten auf $CH^1(X_k)^0$ das eindeutig bestimmte Haar-Maß $d^0\mathcal{D}$ mit

$$\mathrm{vol}\,(CH^1(X_k)^0) = hR_k, \tag{5.8}$$

wobei $h = |CH^1(\mathrm{spec}\,\mathfrak{o}_k)|$ die Klassenzahl von k und R_k den Regulator bezeichnet. Dann lesen wir aus obiger exakter Sequenz

$$d\mathcal{D} = d^0\mathcal{D}\frac{dt}{t} \tag{5.9}$$

ab. Weiter können wir jedem $t \in \mathbb{R}_+^*$ den Arakelov-Divisor

$$D_t = n^{-1}\sum_{v\,\mathrm{reell}} \log t \cdot v + n^{-1}\sum_{v\,\mathrm{komplex}} 2\log t \cdot v\ , \quad n = [k:\mathbb{Q}]$$

zuordnen und erhalten mit der Bezeichnung $\mathcal{D}_t = [D_t]$ mit $\mathcal{N}(\mathcal{D}_t) = t$ eine Spaltung der exakten Sequenz (5.7) durch den Homomorphismus $t \mapsto \mathcal{D}_t$.

Abschließend zitieren wir zwei Abschätzungen für $k^0(D)$ aus [De] und [GS], welche wir bei der Behandlung der Zetafunktion im nächsten Abschnitt verwenden.

Lemma 10. *Zu jedem Zahlkörper k und $R \geq 0$ gibt es Konstanten $c_1, c_2, \alpha > 0$, so dass gleichmäßig in $\mathcal{D} \in CH^1(X_k)^0$ und $|w| \leq R$ folgende Abschätzungen gelten*
a) $|k^0(\mathcal{D}+\mathcal{D}_t)^w - 1| \leq c_1|w|\exp(-\pi n t^{-2/n})$ *für alle* $0 < t \leq \sqrt{d_k}$.
b) $|k^0(\mathcal{D}+\mathcal{D}_t)^w - t^w d_k^{-w/2}| \leq c_2|w|\exp(-\alpha t^{2/n})$ *für alle* $t \geq \sqrt{d_k}$.

5.2 Definition der zwei-variablen Arakelov-Zetafunktion

Nun definieren wir die zwei-variable Zetafunktion in der Form, wie sie in den Arbeiten [LR] von Lagarias-Rains und [De] von Deninger auftaucht: Als Integral über die Arakelov-Klassengruppe

$$\zeta_{X_k}(s,w) = \int_{CH^1(X_k)} k^0(\mathcal{D})^{w-s} k^1(\mathcal{D})^s \, d\mathcal{D} \tag{5.10}$$

$$\overset{(5.4)}{=} d_k^{s/2} \int_{CH^1(X_k)} k^0(\mathcal{D})^w \mathcal{N}(\mathcal{D})^{-s} \, d\mathcal{D} \; . \tag{5.11}$$

Sie stellt im Gebiet $\operatorname{Re} w < \operatorname{Re} s < 0$ eine holomorphe Funktion dar, lässt sich meromorph fortsetzen und genügt einer Funktionalgleichung.

Satz 14 ([De]). *Die Funktion $\zeta_{X_k}(s,w)$ lässt sich meromorph nach $\mathbb{C}^2$ fortsetzen und genügt der Funktionalgleichung*

$$\zeta_{X_k}(s,w) = \zeta_{X_k}(w-s,w) \; .$$

Weiter ist die Funktion

$$w^{-1} s(w-s) \zeta_{X_k}(s,w)$$

holomorph auf $\mathbb{C}^2$. Genauer definiert das Integral

$$J(s,w) = \int_0^{\sqrt{d_k}} \int_{CH^1(X_k)^0} w^{-1}(k^0(\mathcal{D}+\mathcal{D}_t)^w - 1) d^0\mathcal{D} \; t^{-s} \frac{dt}{t}$$

eine ganze Funktion auf $\mathbb{C}^2$ und wir erhalten die Identität

$$\zeta_{X_k}(s,w) = w \left(d_k^{s/2} J(s,w) + d_k^{(w-s)/2} J(w-s,w) \right) - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{w-s} \right) hR_k \; ,$$

wobei für die Klassenzahl h und den Regulator R_k von k

$$\operatorname{vol} CH^1(X_k)^0 = hR_k$$

gelte. Speziell für $w = 1$ erhalten wir

$$\zeta_{X_k}(s,1) = |\mu(k)| d_k^{s/2} 2^{-r_1/2} \hat{\zeta}_k(s) \; . \tag{5.12}$$

Dabei bezeichne $\hat{\zeta}_k(s)$ die vollständige Dedekindsche Zetafunktion von k

$$\hat{\zeta}_k(s) = \zeta_k(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2}$$

mit

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = 2^{-1/2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2) \quad \text{und} \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s) \; .$$

Damit gilt $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)\Gamma_{\mathbb{R}}(s+1) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$, wobei r_1 und r_2 die Anzahl reeller bzw. komplexer Stellen von k bezeichnet. $\mu(k)$ ist die Gruppe der Einheitswurzeln von k.

Lemma 11. *Auf dem Gebiet* $\operatorname{Re} s > \max\{\operatorname{Re} w, 0\}$ *gibt es die folgende Integraldarstellung, wobei das Integral selbst nach Division durch* w *eine holomorphe Funktion definiert:*

$$\zeta_{X_k}(s,w) = d_k^{s/2} \int_{CH^1(X_k)} (k^0(\mathcal{D})^w - 1)\mathcal{N}\mathcal{D}^{-s} d\mathcal{D} \; . \tag{5.13}$$

5.3 Eulerprodukte bei imaginär-quadratischen Zahlkörpern mit Klassenzahl 1

Nachdem wir im rationalen Fall $k = \mathbb{Q}$ die Frage nach der Existenz von Eulerprodukten ausgiebig beantwortet haben, diese explizit formuliert und ihre Herkunft geklärt haben, wollen wir diese Frage auch im allgemeinen Zahlkörperfall stellen. Wünschenswert wäre eine zu $\zeta_{X_k}(s,w)$ assoziierte konvergente Dirichlet-Reihe $\tilde{D}_w(s)$ mit Koeffizienten in w. Dann könnte man die Koeffizienten auf Multiplikativität untersuchen und gegebenenfalls ein Eulerprodukt formulieren. Im rationalen Fall konnten wir durch die notwendige Multiplikativität der Koeffizienten, welche Polynome in w sind, eine algebraische Bedingung formulieren, die höchstens die Werte $w = 0, 1, 2, 4$ oder 8 erfüllen können. Tatsächlich gibt es für diese Werte Eulerprodukte. Nun können wir eine derartige Aussage auch für Zahlkörper $k/\mathbb{Q}$ vermuten. Da eine explizite Auswertung von ζ_{X_k} als Integral über die Arakelovklassengruppe $CH^1(X_k)$ eine unüberwindbare Hürde darstellt, konzentrieren wir uns hier auf den einfachsten Fall von imaginär-quadratischen Zahlkörpern mit Klassenzahl 1. Hier gilt $CH^1(X_k) = \mathbb{R}$. Weiter gibt es nur endlich viele imaginär-quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, nämlich für

$$d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67 \text{ und } -163.$$

Allerdings werden wir bei der Betrachtung dieser Zahlkörper eine äußerst interessante Beobachtung machen: existieren für $d = -1$ im Wesentlichen noch für $w = 0, 1, 2, 4, 8$ Eulerprodukte, so verschwinden mit fortschreitendem d diese sukzessive bis nur noch zu $w = 1$ ein Eulerprodukt existiert. In diesem Fall liegt bekanntlich die Dedekindsche Zetafunktion vor. Diese exemplarische Untersuchung macht somit klar, dass Eulerprodukte eine exponierte Stellung besitzen und mit ihrem Auftreten stets ein arithmetisches Objekt besonders gekennzeichnet wird.

5.3.1 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$

Im Fall $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ist $d_k = 4$ und unter Substitution mit $y = 2e^{-x}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\zeta_{X_k}(s,w) &= d_k^{s/2} \int_{CH^1(X_k)} (k^0(\mathcal{D})^w - 1)\mathcal{N}\mathcal{D}^{-s} d\mathcal{D} \\
&= d_k^{s/2} \int_{CH^1(X_k)} \Big[\Big(\sum_{f\in I(D)} e^{-\pi\|f\|_D^2}\Big)^w - 1\Big]\mathcal{N}\mathcal{D}^{-s} d\mathcal{D} \quad \text{mit } D = \mathfrak{o}_k \\
&= d_k^{s/2} \int_{CH^1(X_k)} \Big[\Big(\sum_{\alpha\in\mathfrak{o}_k} e^{-2\pi|\alpha|^2 e^{-x\sigma}}\Big)^w - 1\Big]\mathcal{N}\mathcal{D}^{-s} d\mathcal{D} \qquad (5.14) \\
&= d_k^{s/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\Big(\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi(m^2+n^2)e^{-x}}\Big)^w - 1\Big] e^{-xs} dx \\
&= 2^s \int_{-\infty}^{\infty} \big(\theta(2e^{-x})^{2w} - 1\big) e^{-xs} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \big(\theta(2e^{-x})^{2w} - 1\big)(2e^{-x})^s dx \\
&= 2\int_0^{\infty} \big(\theta(y)^{2w} - 1\big) y^s \frac{dy}{y} \\
&= 2\zeta_{X_{\mathbb{Q}}}(2s, 2w) \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

Die Zetafunktion des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ unterscheidet sich also nur durch eine Skalierung von der Zetafunktion zum Körper $\mathbb{Q}$. Entsprechend übertragen sich die Eulerprodukte.

5.3.2 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

Im Folgenden ist es nicht mehr möglich, die Zetafunktion auf die Zetafunktion des rationalen Falls zurückzuführen. Vielmehr sind explizite Rechnungen nötig, die aber alle nach demselben Prinzip ablaufen: wir entwickeln

$$k^0(\mathcal{D}) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{o}_k} e^{-2\pi|\alpha|^2 y}$$

in eine Fourierreihe

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi k y}$$

mit

$$a_k = \begin{cases} \#\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 - dn^2 = k\} & \text{für } d \equiv 2, 3(4) \\ \#\{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 : m^2 + mn + \frac{1-d}{4} n^2 = k\} & \text{für } d \equiv 1(4) \end{cases}$$

und erheben diese zur Potenz w

$$\begin{aligned} \big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi k y}\big)^w &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{w}{j} \big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-2\pi k y}\big)^j && (5.16) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(w) e^{-2\pi k y} && (5.17) \end{aligned}$$

mit Polynomen $a_k(w)$ in der Variablen w. Dieser Fourierreihe ordnen wir die assoziierte Dirichlet-Reihe

$$D_w(s) := \sum_{m=1}^{\infty} a_m(w) m^{-s}$$

zu. Da $a_1(w) = 2w$ (für $d \neq -3$), betrachten wir stattdessen die normierte Dirichlet-Reihe

$$\tilde{D}_w(s) := \frac{1}{2w} D_w(s) = \frac{1}{2w} \sum_{m=1}^{\infty} a_m(w) m^{-s}.$$

Im Fall $d = -3$ ist $a_1(w) = 6w$ und es wird entsprechend normiert. Damit ist die Zetafunktion die Mellin-Transformierte der assoziierten Dirichlet-Reihe. Wir erhalten die Zetafunktion aus der Dirichlet-Reihe, indem wir ausgehend von der Integraldarstellung der Gamma-Funktion $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^s \frac{dx}{x}$ mit $y = 2\pi m x$ substituieren

$$a_m(w)\Gamma(s)\pi^{-s}(2m)^{-s} = \int_0^\infty a_m(w) e^{-2\pi m x} y^s \frac{dy}{y}$$

und anschließend über alle $m \in \mathbb{N}$ summieren

$$2^{-s}\Gamma(s)\pi^{-s} D_w(s) = \int_0^\infty \sum_{\alpha \in \mathfrak{o}_k} e^{-2\pi|\alpha|^2 y} y^s \frac{dy}{y}.$$

Also gilt

$$\zeta_{X_k}(s, w) = 2^{-s} d_k^{s/2} \Gamma(s) \pi^{-s} 2w \tilde{D}_w(s). \tag{5.18}$$

Die Frage nach der Existenz von Eulerprodukten bei der Zetafunktion ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Existenz von Eulerprodukten der normierten Dirichlet-Reihe $\tilde{D}_w(s)$, was gleichbedeutend ist mit der Multiplikativität der Koeffizienten $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{2w} a_k(w)$. Daher berechnen wir im Folgenden die Koeffizienten a_k und ermitteln aus notwendigen Identitäten zwischen den Polynomen $a_k(w)$ wie z.B.

$$\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w), \quad \tilde{a}_2(w)\tilde{a}_5(w) = \tilde{a}_{10}(w), \quad \tilde{a}_2(w)\tilde{a}_9(w) = \tilde{a}_{18}(w)$$

Werte w, welche für ein Eulerprodukt in Frage kommen. Folgende Koeffizienten geben einen ersten Überblick. Zu einem Index k ist dabei der Koeffizient $\tilde{a}_k = \tilde{a}_k(1)$ sowie $\tilde{a}_k(2)$ zu sehen. Letztere werden noch bei den Eulerprodukten interessant.

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	0	14	25	1	31	37	0	38
2	1	2	14	0	16	26	0	28	38	2	40
3	2	4	15	0	24	27	4	40	39	0	56
4	1	6	16	1	6	28	0	48	40	0	36
5	0	6	17	2	18	29	0	30	41	2	42
6	2	8	18	3	26	30	0	48	42	0	64
7	0	8	19	2	20	31	0	32	43	2	44
8	1	6	20	0	36	32	1	6	44	2	72
9	3	13	21	0	32	33	4	48	45	0	78
10	0	12	22	2	24	34	2	36	46	0	48
11	2	12	23	0	24	35	0	48	47	0	48
12	2	24	24	2	24	36	3	78	48	2	24

Hiermit können wir die Polynome $a_k(w)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
a_1(w) &= 2w\\
a_2(w) &= 2w+4\tbinom{w}{2}\\
a_3(w) &= 4w+8\tbinom{w}{2}+8\tbinom{w}{3}\\
a_4(w) &= 2w+20\tbinom{w}{2}+24\tbinom{w}{3}+16\tbinom{w}{4}\\
a_5(w) &= 24\tbinom{w}{2}+72\tbinom{w}{3}+64\tbinom{w}{4}+32\tbinom{w}{5}\\
a_6(w) &= 4w+24\tbinom{w}{2}+128\tbinom{w}{3}+224\tbinom{w}{4}+160\tbinom{w}{5}+64\tbinom{w}{6}\\
a_{10}(w) &= 48\tbinom{w}{2}+384\tbinom{w}{3}+2208\tbinom{w}{4}+7712\tbinom{w}{5}+14400\tbinom{w}{6}\\
&\quad +16128\tbinom{w}{7}+11264\tbinom{w}{8}+4608\tbinom{w}{9}+1024\tbinom{w}{10}\\
a_{12}(w) &= 4w+88\tbinom{w}{2}+560\tbinom{w}{3}+3744\tbinom{w}{4}+14720\tbinom{w}{5}+61184\tbinom{w}{6}\\
&\quad +118272\tbinom{w}{7}+146944\tbinom{w}{8}+121344\tbinom{w}{9}+66560\tbinom{w}{10}\\
&\quad +22528\tbinom{w}{11}+4096\tbinom{w}{12}
\end{aligned}$$

Durch Normierung $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{2w}a_k(w)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1(w) &= 1\\
\tilde{a}_2(w) &= w\\
\tilde{a}_3(w) &= \tfrac{2}{3}(w^2+2)\\
\tilde{a}_4(w) &= \tfrac{1}{3}(w^3+8w-6)\\
\tilde{a}_5(w) &= \tfrac{2}{15}(w-1)(w^3+w^2+21w-9)\\
\tilde{a}_6(w) &= \tfrac{2}{45}w(w^4+40w^2-90w+94)\\
\tilde{a}_{10}(w) &= \tfrac{2}{14175}w(w-1)(w^7+w^6+241w^5-1019w^4+9649w^3\\
&\quad -40751w^2+94509w-52281)\\
\tilde{a}_{12}(w) &= \tfrac{2}{467775}(w^{11}+440w^9-2970w^8+44088w^7-332640w^6\\
&\quad +1686740w^5-10124730w^4+58741936w^3-177897060w^2\\
&\quad +243112770w-114760800)
\end{aligned}$$

Die Bedingung $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w)$ ist äquivalent zu

$$w(w-1)(w-2)(w^2+3w+32) = 0 \tag{5.19}$$

und $\tilde{a}_3(w)\tilde{a}_4(w) = \tilde{a}_{12}(w)$ entspricht

$$\begin{aligned}
0 &= (w-1)(w-2)(w^9+3w^8+447w^7-1635w^5\\
&\quad -214503w^4+914678w^3-6951690w^2+35537760w\\
&\quad -57068550)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Dabei sind die angehängten Restpolynome zueinander teilerfremd. Also kann es höchstens für $w = 1$ oder $w = 2$ Eulerprodukte geben. Während im Fall

$w = 1$ die Dedekindsche Zetafunktion zum Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ vorliegt, erhalten wir für $w = 2$

$$\tilde{D}_w(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(2) n^{-s} = (1 - 2^{-s} + 2 \cdot 2^{-2s} - 8 \cdot 2^{-3s}) \zeta(s) \zeta(s-1) \quad (5.21)$$

Diese Identität erhalten wir aus einer expliziten Formel für die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \#\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}] : \mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-2})}(\alpha) + \mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-2})}(\beta) = k\} \\ &= \#\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 : a^2 + 2b^2 + c^2 + 2d^2 = k\} \\ &= 4 \sum_{d>0, d|n, \frac{n}{d} \equiv 1(2)} d \quad + 8 \sum_{d>0, 4d|n} (-1)^{d-1} d & (5.22) \\ &= \begin{cases} 4\sigma_1(n) & \text{wenn } n \equiv 1(2) \\ 4 \sum_{d>0, d|n, d=0(2), d \not\equiv 0(8)} d & \text{wenn } n \equiv 0(2) \end{cases} & (5.23) \end{aligned}$$

aus dem Buch [Pet2] von Hans Petersson (Seite 154, Satz 15.2). Die Kongruenzbedingungen für die 2-Potenzen ergeben den obigen Vorfaktor

$$1 - 2^{-s} + 2 \cdot 2^{-2s} - 8 \cdot 2^{-3s}.$$

Die Summe zweier identischer Binärformen ergibt eine spezielle quaternäre Form, eine sogenannte Diagonalform. Sie wird uns gleichermaßen in den zwei folgenden Fällen der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ beschäftigen. In diesen drei Fällen erhalten wir aus der Theorie der quadratischen Formen explizite Formeln für die Darstellungsanzahlen, welche auf Teilersummen basieren. Solche expliziten Formeln stellen jedoch eine absolute Ausnahme dar. Dies hat zur Konsequenz, dass Eulerprodukte bei der Arakelov-Zetafunktion auch eine absolute Ausnahme darstellen.

5.3.3 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

Aus der im letzten Abschnitt allgemein beschriebenen Fourierentwicklung erhalten wir Koeffizienten a_k und notieren ihre assoziierten normierten Koeffizienten $\tilde{a}_k = \tilde{a}_k(1) = \frac{1}{6} a_k$. Ferner geben wir $\tilde{a}_k(2)$ an, da ihre Multiplikativität gleichbedeutend zur Existenz eines Eulerprodukts für $w = 2$ ist.

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	2	14	25	1	31	37	2	38
2	0	3	14	0	24	26	0	42	38	0	60
3	1	1	15	0	6	27	1	1	39	2	14
4	1	7	16	1	31	28	2	56	40	0	90
5	0	6	17	0	18	29	0	30	41	0	42
6	0	3	18	0	3	30	0	18	42	0	24
7	2	8	19	2	20	31	2	32	43	2	44
8	0	15	20	0	42	32	0	63	44	0	84
9	1	1	21	2	8	33	0	12	45	0	6
10	0	18	22	0	36	34	0	54	46	0	72
11	0	12	23	0	24	35	0	48	47	0	48
12	1	7	24	0	15	36	1	7	48	1	31

Hiermit können wir die Polynome $a_k(w)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
a_1(w) &= 6w \\
a_2(w) &= 36\binom{w}{2} \\
a_3(w) &= 6w + 216\binom{w}{3} \\
a_4(w) &= 6w + 72\binom{w}{2} + 1296\binom{w}{4} \\
a_5(w) &= 72\binom{w}{2} + 648\binom{w}{3} + 7776\binom{w}{5} \\
a_6(w) &= 36\binom{w}{2} + 648\binom{w}{3} + 5184\binom{w}{4} + 46656\binom{w}{6} \\
a_{10}(w) &= 216\binom{w}{2} + 648\binom{w}{3} + 23328\binom{w}{4} + 155520\binom{w}{5} + 699840\binom{w}{6} \\
&\quad +1959552\binom{w}{7} + 13436928\binom{w}{8} + 60466176\binom{w}{10}
\end{aligned}$$

Durch Normierung $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{6w}a_k(w)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1(w) &= 1 \\
\tilde{a}_2(w) &= 3(w-1) \\
\tilde{a}_3(w) &= 36w^2 - 108w + 73 \\
\tilde{a}_5(w) &= \tfrac{6}{5}(w-1)(9w^3 - 81w^2 + 249w - 241) \\
\tilde{a}_6(w) &= \tfrac{3}{5}(w-1)(w^4 - 14w^3 + 131w^2 - 424w + 425) \\
\tilde{a}_{10}(w) &= \tfrac{18}{175}(w-1)(27w^8 - 1188w^7 + 22842w^6 - 246798w^5 + 1623798w^4 \\
&\quad -6617652w^3 + 16228368w^2 - 21792842w + 12213635)
\end{aligned}$$

Über die notwendige Multiplikativität der Koeffizienten erhalten wir aus $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w)$

$$(w-1)(w-2)(w^3 - 12w^2 - 73w - 30) = 0 \tag{5.24}$$

und aus $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_5(w) = \tilde{a}_{10}(w)$

$$\begin{aligned} 0 &= (w-1)(w-2)(w-4)(9w^6 - 342w^5 + 5490w^4 \\ &\quad -46590w^3 + 217701w^2 - 525908w + 508550) \end{aligned} \tag{5.25}$$

höchstens für $w = 1$ oder $w = 2$ Eulerprodukte, da die angehängten Polynome teilerfremd sind. Im Fall $w = 1$ liegt das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion zum Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ vor. Im Fall $w = 2$ interpretieren wir $(a_k(2))_{k\geq 1}$ als Darstellungsanzahlen der Diagonalform $a^2+ab+b^2+c^2+cd+d^2$, also

$$\begin{aligned} a_k(2) &= \#\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\Big]^2 : \mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(\alpha) + \mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}(\beta) = k\} \\ &= \#\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 : a^2 + ab + b^2 + c^2 + cd + d^2 = k\} \\ &= 12 \sum_{3\nmid d|n} d \end{aligned} \tag{5.26}$$

Die Identität 5.26 stammt aus der Theorie der quadratischen Formen und wird im Buch [Pet2] von Hans Petersson bewiesen (Satz 8.3 auf Seite 80). Damit erhalten wir

$$\tilde{D}_w(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(2) n^{-s} = (1 - 3 \cdot 3^{-s})\zeta(s)\zeta(s-1). \tag{5.27}$$

5.3.4 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$

Erneut liefert uns die Fourierentwicklung mit der Normierung $\tilde{a}_k = \tilde{a}_k(1) = \frac{1}{2}a_k$ die Koeffizienten

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	0	14	25	1	31	37	2	38
2	2	3	14	2	3	26	0	42	38	0	60
3	0	4	15	0	24	27	0	40	39	0	56
4	3	7	16	5	31	28	3	7	40	0	90
5	0	6	17	0	18	29	2	30	41	0	42
6	0	12	18	2	39	30	0	72	42	0	12
7	1	1	19	0	20	31	0	32	43	2	44
8	4	15	20	0	42	32	6	63	44	6	84
9	1	13	21	0	4	33	0	48	45	0	78
10	0	18	22	4	36	34	0	54	46	4	72
11	2	12	23	2	24	35	0	6	47	0	48
12	0	28	24	0	60	36	3	91	48	0	124

sowie die Polynome $a_k(w)$

$$\begin{aligned}
a_1(w) &= 2w \\
a_2(w) &= 4w + 4\tbinom{w}{2} \\
a_3(w) &= 16\tbinom{w}{2} + 8\tbinom{w}{3} \\
a_4(w) &= 6w + 16\tbinom{w}{2} + 48\tbinom{w}{3} + 16\tbinom{w}{4} \\
a_5(w) &= 24\tbinom{w}{2} + 96\tbinom{w}{3} + 128\tbinom{w}{4} + 32\tbinom{w}{5} \\
a_6(w) &= 48\tbinom{w}{2} + 136\tbinom{w}{3} + 384\tbinom{w}{4} + 320\tbinom{w}{5} + 64\tbinom{w}{6} \\
a_{10}(w) &= 72\tbinom{w}{2} + 624\tbinom{w}{3} + 2464\tbinom{w}{4} + 12544\tbinom{w}{5} + 26880\tbinom{w}{6} \\
&\quad +38528\tbinom{w}{7} + 28672\tbinom{w}{8} + 9216\tbinom{w}{9} + 1024\tbinom{w}{10}
\end{aligned}$$

Durch Normierung $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{2w}a_k(w)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1(w) &= 1 \\
\tilde{a}_2(w) &= w + 1 \\
\tilde{a}_3(w) &= \tfrac{2}{3}(w-1)(w-4) \\
\tilde{a}_5(w) &= \tfrac{2}{15}(w-1)(w^3 + 11w^2 - 14w + 21) \\
\tilde{a}_6(w) &= \tfrac{2}{45}(w-1)(w^4 + 16w^3 - 19w^2 - 19w + 240) \\
\tilde{a}_{10}(w) &= \tfrac{2}{14175}(w-1)(w^8 + 46w^7 + 196w^6 - 3584w^5 + 26299w^4 \\
&\quad -35126w^3 - 315351w^2 + 1428129w - 1511055)
\end{aligned}$$

Über die notwendige Multiplikativität der Koeffizienten erhalten wir aus $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w)$

$$(w-1)(w-2)(w^3+18w^2+2w-90) = 0 \tag{5.28}$$

und aus $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_5(w) = \tilde{a}_{10}(w)$

$$\begin{aligned} 0 &= (w-1)(w-2)(w^7+48w^6+292w^5-3000w^4 \\ &\quad +19354w^3-7758w^2-328032w+765450) \end{aligned} \tag{5.29}$$

höchstens für $w = 1$ oder $w = 2$ Eulerprodukte, da die angehängten Polynome teilerfremd sind. Im Fall $w = 1$ liegt das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion zum Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ vor. Im Fall $w = 2$ interpretieren wir $(a_k(2))_{k\geq 1}$ als Darstellungsanzahlen der Diagonalform $a^2+ab+2b^2+c^2+cd+2d^2$, also

$$\begin{aligned} a_k(2) &= \#\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\Big]^2 : \mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})}(\alpha) + \mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})}(\beta) = k\} \\ &= \#\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 : a^2+ab+2b^2+c^2+cd+2d^2 = k\} \\ &= 4\sum_{7\nmid d|n} d \end{aligned} \tag{5.30}$$

Die Identität 5.30 stammt aus der Theorie der quadratischen Formen und wird im Buch [Pet2] von Hans Petersson bewiesen (Satz 8.3 auf Seite 80). Damit erhalten wir

$$\tilde{D}_w(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(2)n^{-s} = (1-7\cdot 7^{-s})\zeta(s)\zeta(s-1). \tag{5.31}$$

5.3.5 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$

Aus der Fourierentwicklung erhalten wir Koeffizienten a_k und notieren ihre assoziierten normierten Koeffizienten $\tilde{a}_k = \tilde{a}_k(1) = \frac{1}{2}a_k$. Ferner geben wir $\tilde{a}_k(2)$ an. Wir können aus der folgenden Tabelle erkennen, dass die Koeffizienten $\tilde{a}_k(2)$ nicht multiplikativ sind und für $w = 2$ somit kein Eulerprodukt vorliegen kann.

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	0	10	25	3	17	37	2	24
2	0	1	14	0	16	26	0	22	38	0	36
3	2	2	15	4	14	27	4	26	39	0	32
4	1	5	16	1	17	28	0	32	40	0	54
5	2	4	17	0	10	29	0	18	41	0	22
6	0	8	18	0	25	30	0	44	42	0	56
7	0	4	19	0	12	31	2	22	43	0	24
8	0	9	20	2	26	32	0	41	44	1	5
9	3	7	21	0	20	33	2	2	45	6	46
10	0	10	22	0	1	34	0	34	46	0	44
11	1	1	23	2	14	35	0	28	47	2	32
12	2	16	24	0	36	36	3	53	48	2	76

Hiermit können wir die Polynome $a_k(w)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
a_1(w) &= 2w \\
a_2(w) &= 4\binom{w}{2} \\
a_3(w) &= 4w + 8\binom{w}{3} \\
a_4(w) &= 2w + 16\binom{w}{2} + 16\binom{w}{4} \\
a_5(w) &= 4w + 8\binom{w}{2} + 48\binom{w}{3} + 32\binom{w}{5} \\
a_6(w) &= 32\binom{w}{2} + 24\binom{w}{3} + 128\binom{w}{4} + 64\binom{w}{6} \\
a_{10}(w) &= 40\binom{w}{2} + 192\binom{w}{3} + 1376\binom{w}{4} + 1280\binom{w}{5} + 4608\binom{w}{6} \\
&\quad +896\binom{w}{7} + 4096\binom{w}{8} + 1024\binom{w}{10}
\end{aligned}$$

Durch Normierung $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{2w}a_k(w)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1(w) &= 1 \\
\tilde{a}_2(w) &= w - 1 \\
\tilde{a}_3(w) &= \tfrac{2}{3}(w^2 - 3w + 5) \\
\tilde{a}_5(w) &= \tfrac{2}{15}(w^4 - 10w^3 + 65w^2 - 125w + 84) \\
\tilde{a}_6(w) &= \tfrac{2}{45}(w-1)(w^4 - 14w^3 + 131w^2 - 409w + 570) \\
\tilde{a}_{10}(w) &= \tfrac{2}{14175}(w-1)(w^8 - 44w^7 + 1186w^6 - 17714w^5 + 170929w^4 \\
&\quad -996146w^3 + 3454299w^2 - 6308451w + 4601205)
\end{aligned}$$

Dabei ist die notwendige Multiplikativität $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w)$ äquivalent zu

$$(w-1)(w^4 - 14w^3 + 116w^2 - 364w + 495) = 0. \tag{5.32}$$

Weiter ist $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_5(w) = \tilde{a}_{10}(w)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= (w-1)(w^8 - 44w^7 + 1186w^6 - 17714w^5 + 169984w^4 \\ &\quad -986696w^3 + 3392874w^2 - 6190326w + 4521825). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Da die Restpolynome in (5.32) und (5.33) teilerfremd sind, erhalten wir lediglich für $w = 1$ das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion.

5.3.6 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$

Nach bekanntem Muster erhalten wir unsere Fourierkoeffizienten, welche man leicht und effizient über die Betrachtung der binären quadratischen Formen der Zahlkörper mittels eines Computerprogramms berechnen kann. Hat man erst einmal die Koeffizienten a_k, so ergeben sich unmittelbar die Polynome $a_k(w)$. Bei der dann folgenden mechanischen Normierung leisten Computeralgebrasysteme wie Mathematica gute Dienste.

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	0	2	25	3	13	37	0	14
2	0	1	14	0	8	26	0	14	38	0	1
3	0	0	15	0	4	27	0	16	39	0	24
4	1	1	16	1	13	28	2	20	40	0	30
5	2	4	17	2	4	29	0	14	41	0	10
6	0	4	18	0	13	30	0	24	42	0	32
7	2	2	19	1	1	31	0	8	43	2	14
8	0	5	20	2	10	32	0	21	44	2	24
9	1	5	21	0	12	33	0	12	45	2	28
10	0	6	22	0	12	34	0	18	46	0	24
11	2	6	23	2	8	35	4	14	47	2	14
12	0	12	24	0	20	36	1	29	48	0	36

Hiermit können wir die Polynome $a_k(w)$ berechnen:

$$\begin{aligned} a_1(w) &= 2w \\ a_2(w) &= 4\tbinom{w}{2} \\ a_3(w) &= 8\tbinom{w}{3} \\ a_4(w) &= 2w + 16\tbinom{w}{4} \\ a_5(w) &= 4w + 8\tbinom{w}{2} + 32\tbinom{w}{5} \\ a_6(w) &= 16\tbinom{w}{2} + 24\tbinom{w}{3} + 64\tbinom{w}{6} \\ a_{10}(w) &= 24\tbinom{w}{2} + 96\tbinom{w}{3} + 224\tbinom{w}{4} + 768\tbinom{w}{6} + 896\tbinom{w}{7} + 1024\tbinom{w}{10} \end{aligned}$$

Durch Normierung $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{2w} a_k(w)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1(w) &= 1 \\
\tilde{a}_2(w) &= w - 1 \\
\tilde{a}_3(w) &= \tfrac{2}{3}(w-1)(w-2) \\
\tilde{a}_5(w) &= \tfrac{2}{15}(w^4 - 10w^3 + 35w^2 - 35w + 24) \\
\tilde{a}_6(w) &= \tfrac{2}{45}(w-1)(w^4 - 14w^3 + 71w^2 - 109w + 120) \\
\tilde{a}_{10}(w) &= \tfrac{2}{14175}(w-1)(w^8 - 44w^7 + 826w^6 - 7994w^5 + 45829w^4 \\
&\quad -169946w^3 + 445059w^2 - 696771w + 490455)
\end{aligned}$$

Dabei ist die notwendige Multiplikativität $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w)$ äquivalent zu

$$(w-1)(w^4 - 14w^3 + 56w^2 - 64w + 90) = 0. \tag{5.34}$$

Weiter ist $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_5(w) = \tilde{a}_{10}(w)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}
0 &= (w-1)(w^8 - 44w^7 + 826w^6 - 7994w^5 + 45829w^4 \\
&\quad -169946w^3 + 445059w^2 - 696771w + 490455).
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Da die Restpolynome in (5.34) und (5.35) teilerfremd sind, erhalten wir lediglich für $w = 1$ das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion.

5.3.7 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-43})$

Aus den Koeffizienten

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	2	4	25	1	3	37	0	2
2	0	1	14	0	4	26	0	10	38	0	4
3	0	0	15	0	4	27	0	8	39	0	4
4	1	1	16	1	1	28	0	8	40	0	14
5	0	2	17	2	8	29	0	6	41	2	4
6	0	0	18	0	5	30	0	8	42	0	16
7	0	0	19	0	0	31	2	2	43	1	1
8	0	1	20	0	6	32	0	9	44	2	12
9	1	1	21	0	4	33	0	4	45	0	10
10	0	2	22	0	8	34	0	14	46	0	4
11	2	2	23	2	2	35	0	4	47	2	12
12	0	4	24	0	12	36	1	13	48	0	20

berechnen wir die Polynome $a_k(w)$

$$\begin{aligned}
a_1(w) &= 2w\\
a_2(w) &= 4\binom{w}{2}\\
a_3(w) &= 8\binom{w}{3}\\
a_4(w) &= 2w + 16\binom{w}{4}\\
a_5(w) &= 8\binom{w}{2} + 32\binom{w}{5}\\
a_6(w) &= 24\binom{w}{3} + 64\binom{w}{6}\\
a_{10}(w) &= 8\binom{w}{2} + 96\binom{w}{4} + 896\binom{w}{7} + 1024\binom{w}{10}\\
a_{12}(w) &= 16\binom{w}{2} + 8\binom{w}{3} + 64\binom{w}{4} + 960\binom{w}{6} + 4608\binom{w}{9} + 4096\binom{w}{12}
\end{aligned}$$

und normieren mit $\tilde{a}_k(w) := \frac{1}{2w} a_k(w)$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1(w) &= 1\\
\tilde{a}_2(w) &= w - 1\\
\tilde{a}_3(w) &= \tfrac{2}{3}(w-1)(w-2)\\
\tilde{a}_5(w) &= \tfrac{2}{15}(w^4 - 10w^3 + 35w^2 - 35w + 24)\\
\tilde{a}_6(w) &= \tfrac{2}{45}(w-1)(w^4 - 14w^3 + 71w^2 - 109w + 120)\\
\tilde{a}_{10}(w) &= \tfrac{2}{14175}(w-1)(w^8 - 44w^7 + 826w^6 - 7994w^5 + 45829w^4\\
&\quad -169946w^3 + 445059w^2 - 696771w + 490455)\\
\tilde{a}_{12}(w) &= \tfrac{2}{467775}(w-1)(w^{10} - 65w^9 + 1860w^8 - 29325w^7 + 274638w^6\\
&\quad -1552110w^5 + 5207390w^4 - 9790450w^3 + 9116361w^2\\
&\quad -3185775w + 1247400)
\end{aligned}$$

Dabei ist die notwendige Multiplikativität $\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w)$ äquivalent zu

$$w(w-1)(w-2)(w-4)(w-8) = 0. \tag{5.36}$$

Weiter ist $\tilde{a}_3(w)\tilde{a}_4(w) = \tilde{a}_{12}(w)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned}
0 &= (w-1)(w^{10} - 65w^9 + 1860w^8 - 29325w^7 + 274638w^6\\
&\quad -1552110w^5 + 5155415w^4 - 9374650w^3\\
&\quad +7920936w^2 - 1886400w + 935550). \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

Da das Restpolynom in (5.37) irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist, erhalten wir lediglich für $w = 1$ das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion.

5.3.8 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-67})$

Aus den Koeffizienten

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	0	2	25	1	3	37	2	4
2	0	1	14	0	0	26	0	6	38	0	12
3	0	0	15	0	0	27	0	4	39	0	4
4	1	1	16	1	1	28	0	4	40	0	10
5	0	2	17	2	4	29	2	4	41	0	6
6	0	0	18	0	5	30	0	4	42	0	12
7	0	0	19	2	2	31	0	0	43	0	0
8	0	1	20	0	6	32	0	5	44	0	4
9	1	1	21	0	4	33	0	8	45	0	6
10	0	2	22	0	0	34	0	6	46	0	16
11	0	0	23	2	6	35	0	4	47	2	2
12	0	0	24	0	4	36	1	9	48	0	16

berechnen wir die Polynome $a_k(w)$:

$$\begin{aligned}
a_1(w) &= 2w \\
a_2(w) &= 4\binom{w}{2} \\
a_3(w) &= 8\binom{w}{3} \\
a_4(w) &= 2w + 16\binom{w}{4} \\
a_5(w) &= 8\binom{w}{2} + 32\binom{w}{5} \\
a_6(w) &= 24\binom{w}{3} + 64\binom{w}{6} \\
a_{10}(w) &= 8\binom{w}{2} + 96\binom{w}{4} + 896\binom{w}{7} + 1024\binom{w}{10} \\
a_{18}(w) &= 20\binom{w}{2} + 24\binom{w}{3} + 192\binom{w}{4} + 960\binom{w}{6} + 5376\binom{w}{7} + 43008\binom{w}{9} \\
&\quad +10240\binom{w}{10} + 270336\binom{w}{12} + 491520\binom{w}{15} + 262144\binom{w}{18}
\end{aligned}$$

Da die Polynome $a_2(w), a_3(w)$ und $a_6(w)$ mit denen des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-43})$ übereinstimmen, erhalten wir aus der notwendigen Identität

$$\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w),$$

dass nur für $w = 0, 1, 2, 4$ oder 8 Eulerprodukte existieren können. Anhand obiger Tabelle können wir wegen $\tilde{a}_2(2)\tilde{a}_9(2) \neq \tilde{a}_{18}(2)$ die Existenz eines Eulerprodukts für $w = 2$ ausschließen. Weiter ist die notwendige Identität

$$\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_9(w) = \tilde{a}_{18}(w)$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & (w-1)(w^{16}-152w^{15}+10660w^{14}-448340w^{13}+12484342w^{12} \\ & -241220564w^{11}+3310062470w^{10}-32559682870w^{9} \\ & +229406744138w^{8}-1145927455816w^{7}+3972507325280w^{6} \\ & -9216554817340w^{5}+13490313696144w^{4}-11280594613968w^{3} \\ & +4487390331840w^{2}-591254899200w+195384939750). \qquad (5.38) \end{aligned}$$

Am von Null verschiedenen konstanten Term des Restpolynoms können wir erkennen, dass es für $w = 0$ kein Eulerprodukt geben kann. Desweiteren kann es für $w = 4$ und $w = 8$ kein Eulerprodukt geben, da diese Werte sonst den konstanten Term teilen müssten. Alternativ können wir diese Aussagen auch mit der Irreduzibilität des Restpolynoms über $\mathbb{Q}$ begründen. Es gibt also genau für $w = 1$ ein Eulerprodukt. Dies ist das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion zum Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-67})$.

5.3.9 Der Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-163})$

Aus den Koeffizienten

k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$	k	$\tilde{a}_k(1)$	$\tilde{a}_k(2)$
1	1	1	13	0	2	25	1	3	37	0	2
2	0	1	14	0	0	26	0	2	38	0	0
3	0	0	15	0	0	27	0	0	39	0	0
4	1	1	16	1	1	28	0	0	40	0	2
5	0	2	17	0	2	29	0	2	41	2	4
6	0	0	18	0	1	30	0	0	42	0	4
7	0	0	19	0	0	31	0	0	43	2	2
8	0	1	20	0	2	32	0	1	44	0	4
9	1	1	21	0	0	33	0	0	45	0	6
10	0	2	22	0	0	34	0	2	46	0	0
11	0	0	23	0	0	35	0	0	47	2	6
12	0	0	24	0	0	36	1	1	48	0	4

berechnen wir die Polynome $a_k(w)$:

$$\begin{aligned}
a_2(w) &= 4\binom{w}{2}\\
a_3(w) &= 8\binom{w}{3}\\
a_6(w) &= 24\binom{w}{3} + 64\binom{w}{6}\\
a_7(w) &= 64\binom{w}{4} + 128\binom{w}{7}\\
a_{42}(w) &= 16\binom{w}{2} + 48\binom{w}{3} + 576\binom{w}{4} + 960\binom{w}{5} + 7680\binom{w}{6} + 68096\binom{w}{7}\\
&\quad +222208\binom{w}{8} + 1376256\binom{w}{9} + 5430\cdot 2^{10}\binom{w}{10} + 7425\cdot 2^{11}\binom{w}{11}\\
&\quad +14256\cdot 2^{12}\binom{w}{12} + 18876\cdot 2^{13}\binom{w}{13} + 45045\cdot 2^{14}\binom{w}{14}\\
&\quad +25690\cdot 2^{15}\binom{w}{15} + 83440\cdot 2^{16}\binom{w}{16} + 61880\cdot 2^{17}\binom{w}{17}\\
&\quad +56832\cdot 2^{18}\binom{w}{18} + 163134\cdot 2^{19}\binom{w}{19} + 29070\cdot 2^{20}\binom{w}{20}\\
&\quad +120270\cdot 2^{21}\binom{w}{21} + 131670\cdot 2^{22}\binom{w}{22} + 5313\cdot 2^{23}\binom{w}{23}\\
&\quad +135148\cdot 2^{24}\binom{w}{24} + 50600\cdot 2^{25}\binom{w}{25} + 325\cdot 2^{26}\binom{w}{26}\\
&\quad +80757\cdot 2^{27}\binom{w}{27} + 9828\cdot 2^{28}\binom{w}{28} + 27405\cdot 2^{30}\binom{w}{30}\\
&\quad +930\cdot 2^{31}\binom{w}{31} + 5456\cdot 2^{33}\binom{w}{33} + 34\cdot 2^{34}\binom{w}{34}\\
&\quad +630\cdot 2^{36}\binom{w}{36} + 39\cdot 2^{39}\binom{w}{39} + 2^{42}\binom{w}{42}
\end{aligned}$$

Da die Polynome $a_2(w), a_3(w)$ und $a_6(w)$ mit denen des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-43})$ übereinstimmen, erhalten wir aus der notwendigen Identität

$$\tilde{a}_2(w)\tilde{a}_3(w) = \tilde{a}_6(w),$$

dass nur für $w = 0, 1, 2, 4$ oder 8 Eulerprodukte existieren können. Anhand obiger Tabelle können wir wegen $\tilde{a}_6(2)\tilde{a}_7(2) \neq \tilde{a}_{42}(2)$ die Existenz eines Eulerprodukts für $w = 2$ ausschließen. Ebenso leicht können wir durch einsetzen von $w = 4$ und $w = 8$ diese Fälle ausschließen und den Fall $w = 0$ mittels einer de l'Hospital-Betrachtung erledigen. Wir folgen jedoch dem gewohnten Weg und erhalten ein irreduzibles Restpolynom vom Grad 40, da die notwendige Relation $\tilde{a}_6(w)\tilde{a}_7(w) = \tilde{a}_{42}(w)$ äquivalent ist zu

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& (w-1)(w^{40} - 860w^{39} + 357890w^{38} - 95678050w^{37} + 18416488077w^{36} \\
&-2713219032810w^{35} + 317687247726095w^{34} - 30316343258313775w^{33} \\
&+2399953192043707183w^{32} - 159650910992947056800w^{31} \\
&+9010299706060717512240w^{30} - 434536991528259601846800w^{29} \\
&+18004293702793240755643104w^{28} - 643461734809252435637522280w^{27} \\
&+19893571346536448378323326600w^{26} - 533069861076929463611868141000w^{25} \\
&+12394328435696511108166372587720w^{24} \\
&-250150933293558275360734829146800w^{23} \\
&+4381327341067795764487204494583400w^{22} \\
&-66533958917741327601031952010950500w^{21} \\
&+874691780006948926417461477184278544w^{20} \\
&-9933616290472177868749513813266288740w^{19} \\
&+97181108950982400033904270691981503560w^{18} \\
&-816120031177718460974377185167234508450w^{17} \\
&+5858180775561131341153036106022890134618w^{16} \\
&-35757491893768646345934933912930656258840w^{15} \\
&+184453775422098637238206141702792337692280w^{14} \\
&-798229712857361926211601127208463400038100w^{13} \\
&+2872556855802056803053343281179252335837212w^{12} \\
&-8505963684745805432024209264092577968483900w^{11} \\
&+20461729539479773443425732755739627232728310w^{10} \\
&-39367397690570561444601550023197190366799200w^{9} \\
&+59414512357422386944792390792164452550842916w^{8} \\
&-68645427649520862364292698315243255495940220w^{7} \\
&+58841765021913626781911914107392014908241500w^{6} \\
&-35910098752849432645573194250541211014739750w^{5} \\
&+14750960800162187202587390158552420425090000w^{4} \\
&-3757735967167803858457820869207827171675000w^{3} \\
&+516130997792963923807981288473060832500000w^{2} \\
&-27506441705933764220210878034660940000000w \\
&+255569124010959039613797832543152539062 5). \qquad (5.39)
\end{aligned}
$$

Am konstanten Term des Restpolynoms können wir sofort erkennen, dass für $w = 0, 2, 4$ und 8 keine Eulerprodukte existieren können, da er nicht verschwindet und nicht durch $2, 4$ oder 8 teilbar ist. Also gibt es nur für $w = 1$ das Eulerprodukt der Dedekindschen Zetafunktion.

Literaturverzeichnis

[De] C. Deninger, Two-variable zeta functions and regularized products, Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik, Heft 236, Münster 2002.

[Ed] H.M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Dover Publications 1974.

[FB] E. Freitag und R. Busam, Funktionentheorie 1 (dritte Auflage), Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2000.

[GS] G. van der Geer and R. Schoof, Effectivity of Arakelov Divisors and the theta divisor of a number field, Selecta Math., New Series **6** (2000), 377–398. eprint: `arXiv math.AG/9802121`.

[HW] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (5th edition), Oxford Science Publications 1979.

[KS] I.L. Kantor und A.S. Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen, VEB Verlag Leipzig 1978.

[KV] A.A. Karatsuba and S.M. Voronin, The Riemann Zeta Function, Verlag Walter de Gruyter 1992.

[La] S. Lang, Algebraic Number Theory. Second Edition, Springer-Verlag New York 1994.

[LR] J.C. Lagarias and E. Rains, On a Two-Variable Zeta Function for Number Fields, 2002. eprint: `arXiv math.NT/0104176`.

[Le] J. Lehner, Magnitude of the Fourier coefficients of automorphic forms of negative dimension, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 603–606.

[Neu] J. Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1992.

[Pel] R. Pellikaan, On special divisors and the two variable zeta function of algebraic curves over finite fields, in: *Arithmetic, Geometry and Coding Theory,* (R. Pellikaan, M. Perret and S. G. Vladut, Eds.), Walter de Gruyter: Berlin 1996, pp. 175–184.

[Pet1] H. Petersson, Über Betragmittelwerte und die Fourier-Koeffizienten der ganzen automorphen Formen, Arch. Math. (Basel), **9** (1958), 176–182.

[Pet2] H. Petersson Modulfunktionen und quadratische Formen, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Band 100, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1982.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, im Januar 2005 Holger Reeker