Studienseminar für Lehrämter an Schulen Dortmund
Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung
für das Lehramt Gymnasium/Gesamtschule gemäß §33 OVP

Förderung der Kompetenzen *Argumentieren* und *Problemlösen* durch eine mathematische Arbeitsgemeinschaft für Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8 eines Gymnasiums

vorgelegt von

Dr. Holger Reeker

Dortmund, im Dezember 2010

Erstgutachter: Dr. Michael Lippa als Leiter des Fachseminars für Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

„Einladung zur Teilnahme an der Mathematik-AG! Für alle, die Spaß am Knobeln und Entwickeln mathematischer Ideen haben!“ So lautete mein Angebot zu Beginn des Schuljahres 2009/10 an Schülerinnen und Schüler der Klasse 8 des Reinoldus- und Schiller-Gymnasiums in Dortmund.

Ob sich interessierte Schülerinnen und Schüler gefunden haben? Und vielleicht dabei geblieben sind? Oh ja! Zehn Schülerinnen und Schüler haben regelmäßig an den etwa dreißig Veranstaltungen im Schuljahr 2009/10 teilgenommen. Als Termin haben sie freitags in der siebten Stunde vorgeschlagen, „damit alle können“. Als ich einmal einen Termin absagen musste, fragte mich eine Schülerin: „Können wir uns nicht trotzdem treffen?“ Das haben sie zu meinem Verwundern und das ihrer Mathematiklehrer auch getan!

In der vorliegenden Arbeit möchte ich über das Förderkonzept der Mathematik-AG berichten. Da ich das inhaltliche Konzept vor allem für die Mittelstufe geeignet hielt und in Gesprächen der Fachkonferenz Mathematik deutlich wurde, dass für die Jahrgangsstufe 8 einerseits ein geringes AG-Angebot bereitstand und andererseits die schulische Belastung noch geringer war als in der Jahrgangsstufe 9, beschlossen die Fachkonferenz, die Mathe-AG für die Jahrgangsstufe 8 anzubieten. Insbesondere sollten interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler individuell gefördert werden. Besonders konzentrieren möchte ich mich dabei auf die prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und Problemlösen.

Zu diesem Zweck wird im zweitel Kapitel der theoretische Rahmen des Förderkonzepts dargestellt. Hierzu wird auf die Herkunft und Bedeutung der prozessbezogenen Kompetenzen Argumentieren und Problemlösen für den Mathematikunterricht eingegangen und es werden Bezüge zum Kompetenzmodell [KLP07] hergestellt. Daran anschließend wird ein Überblick über die größten und wichtigsten mathematischen Schülerwettbewerbe in Deutschland gegeben. Dies ist insofern von Bedeutung, als dass viele Aufgabenformate aus Wettbewerben für die Mathe-AG genutzt werden und andererseits die Schülerinnen und Schüler zur Teilnahme an Wettbewerben motiviert und angeleitet werden sollen. Direkt im Anschluss wird über verschiedene Formate mathematischer Arbeitsgemeinschaften reflektiert, hierbei spielen wiederum mathematische Wettbewerbe eine große Rolle. Die letzten zwei Abschnitte im zweiten Kapitel widmen sich den sozialen Rollen. Zum einen geht es um die kommunikativen Rollen von Schülerinnen und Schülern bei Ko-Konstruktionen in kooperativen Lernformen, hier lassen sich im Zusammenspiel von Konstruktivismus und sozialer Konstitutionstheorie verschiedene Kommunikationsrollen unterscheiden. Andererseits geht es um die Rolle des Lehrers und abschließend auch um einen Bezug zu den zentralen Lehrerfunktionen.

Die inhaltliche und methodische Planung der Mathematik-AG wird im dritten Kapitel thematisiert. Hier soll vor allem deutlich werden, dass es inhaltlich um durchaus anspruchsvolle, algebraische und geometrische Strukturen in der Mathematik wie z.B. *modularer Arithmetik*, der *Eulercharakteristik einfach zusammenhängender Polyeder* und der *Symmetriegruppe des Rubik-Würfels* geht. Der gewählte methodische Zugang soll jedoch nicht axiomatisch, sondern experimentell und spielerisch sein, z.B. durch ein Stecksystem zum Basteln von Polyedern bzw. Lösungsstrategien am Rubik-Würfel. Von der folgenden Durchführung wird dann im vierten Kapitel berichtet. Neben dem organisatorischen Rahmen geht es auch um die Einbeziehung von Schülerideen und Abweichungen vom theoretischen Konzept unter dem Aspekt der Schülerorientierung.

Das fünfte Kapitel widmet sich der Evaluation des Förderkonzepts. Im ersten Abschnitt geht es um die Beschreibung und Auswertung eines differenzierten Schülerfragebogens mit geschlossenen und offenen Antwortformaten. Insbesondere soll an dieser Stelle auch die Bedeutung für die zu fördernden Kompetenzen Argumentieren und Problemlösen herausgestellt werden. Im zweiten Abschnitt konzentriere ich mich auf eine Schülerin und einen Schüler, bei denen ich die Fachlehrerinnen gebeten hatte, die AG-Teilnehmer unter dem Aspekt zu beobachten, wie sich ihr Verhalten im Fachunterricht im Laufe des Schuljahres möglicherweise verändert. Erfreulicherweise erhielt ich diesbezüglich ausführliche Rückmeldungen. Da alle AG-Schüler auch am Lernstand 8 [LS2010] teilnahmen, ist es im Rahmen des dritten Abschnitts möglich, eine Korrelation von AG-Teilnahme und dem Erreichen der höchsten Stufe 5+ herzustellen sowie einen Vergleich zum Abschneiden der achten Klassen in den Jahren 2007, 2008 und 2009 mit einzubeziehen. Über eigene Beobachtungen möchte ich im letzten Abschnitt dieses Kapitels berichten.

Das sechste Kapitel dient einem Fazit und einem Ausblick. An dieser Stelle möchte ich lediglich eine Bemerkung bereits vorwegnehmen: Die Mathematik-AG findet im Schuljahr 2010/11 ebenfalls statt. Auch mir hat die Arbeit viel Freude bereitet.

Dortmund, im Dezember 2010
Holger Reeker

Kapitel 2

Konzepte mathematischer Förderung

„Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“ Dies ist keine Formulierung einer modernen Kompetenzerwartung, sondern ein Zitat und die Grabinschrift des 1943 verstorbenen Mathematikers David Hilbert. Es geht hierbei um die Notwendigkeit des Findens und Lösens mathematischer Probleme. Dass Mathematik traditionell durch die Formulierung von Problemen transportiert wird, sieht man nicht nur an klassischen Problemen der Antike (Quadratur des Kreises, Dreiteilung des Winkels, Verdopplung des Würfels, geometrische Berührprobleme des Apollonius), sondern auch an den berühmten 23 Problemen der modernen Mathematik, wie sie David Hilbert am 8. August 1900 in seinem berühmt gewordenen Vortrag auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongress in Paris vorgetragen hat - einige von ihnen reichen als Millennium-Probleme ins 21. Jahrhundert hinein. Diese Problemorientierung ist sozusagen ein Charakteristikum von Mathematik und findet sich auf allen Ebenen wieder. Im Jahr 1944 erschien George Polyás Buch *How to solve it*, 1949 die deutsche Übersetzung *Schule des Denkens - vom Lösen mathematischer Probleme* [Polyá95]. Schon hier werden die verschiedenen Phasen im Lösungsprozess analysiert und in einen dialogischen Prozess eingebunden. Das bedeutet, dass das Lösen eines Problems durch geeignetes Kommunizieren/Argumentieren mit anderen (oder durch einen imaginären Fragensteller) initiiert wird. In den folgenden Abschnitten gebe ich einen Überblick über die mathematik-didaktischen Konzepte der Kompetenzen Argumentieren und Problemlösen und stelle einen Bezug zum NRW-Kompetenzmodell [KLP07] her. Danach folgt ein kurzer Überblick über verschiedene Formate mathematischer Arbeitsgemeinschaften und über das Konzept von Ko-Konstruktionen in kooperativen Lernformen. Abschließend wird ein Bezug zu dabei auftretenden relevanten Lehrerfunktionen hergestellt.

2.1 Argumentieren als mathematische Grunderfahrung

„Am Anfang steht das *Warum?*“, so beginnt ein Artikel zum Beweisen und Argumentieren von Lisa Hefendehl-Hebeker und Stephan Hußmann in [HeHu03]. „Warum darf man überhaupt durch eine Dezimalzahl teilen?“, „Warum treffen sich die Mittelsenkrechten im Dreieck in einem Punkt?“ oder „Warum ist es egal, in welcher Reihenfolge ich die Terme

multipliziere?“ Solche Warum-Fragen finden sich nicht nur in jeder Klassenstufe, sondern auch in allgemeinerer Form auf jeder Entwicklungsstufe wieder. Insbesondere gibt es in der frühkindlichen Sprachentwicklung eine Phase, „in der das *Warum?* extensiv erprobt wird. Es ist die Zeit, in der Kinder entdecken, dass die Dinge nicht nur einen Namen haben, sondern auf vielfältige Weise zueinander in Beziehung stehen.“([HeHu03], S. 94). Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die *Warum*-Frage am Anfang des Erkenntnisinteresses steht und zugleich der Beginn der Suche nach Gewissheit ist. Diese Suche vollzieht sich durch Prozesse des Infragestellens, Überprüfens und Begründens auf dem Weg der Argumentation (vgl. [HeHu03], S. 94).
Im Alltagsverständnis ist die Argumentation und das Argumentieren eng dem sprachlichen Bereich zugeordnet - an Mathematik denkt man erst einmal nicht. Hinzu kommt die traditionelle Unterscheidung von mathematischer und sprachlicher Begabung. So kann leicht der Eindruck gewonnen werden, Mathematik und Sprache seien Gegensätze, die sich nicht beeinflussen. Gehen wir jedoch auf den lateinischen Wortursprung *argumentum* zurück, was Beweisgrund bzw. Beweismittel bedeutet, so sehen wir, dass rein etymologisch ein Argument eine Aussage ist, die zur Begründung oder Widerlegung einer Behauptung gebraucht wird. Insbesondere lässt sich das Argumentieren und Begründen nicht auf einzelne Bereiche einschränken, sondern spielt in vielen Bereichen eine bedeutende Rolle. Die Förderung des Argumentierens ist ein wichtiges Bildungsziel. Der Mathematikunterricht kann hierzu einen wertvollen Beitrag leisten. Im nordrhein-westfälischen Kompetenzmodell [KLP07] werden die Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren zusammengefasst, insbesondere werden unter Argumentieren diejenigen Kompetenzen subsummiert, die über elementare Kommunikationskompetenzen hinausragen, wie „die Erarbeitung von Begündungen für Vermutungen.“ Schülerinnen und Schüler, die diese Kompetenz besitzen „vernetzen Begriffe [...], nutzen verschiedene Arten des Begründens und Überprüfens (Plausibilität, Beispiele, Argumentationsketten), vergleichen Lösungswege und Darstellungen und überprüfen und bewerten Problembearbeitungen.“ Über [KLP07] hinaus beschreiben Dominik Leiß und Werner Blum in [Blum06] die zentralen mathematischen Kompetenzen, ordnen sie in Anforderungsbereiche ein, geben Beispielaufgaben und erläutern dazu verschiedene Ansätze. Im Hinblick auf das Projekt einer Mathematik-AG ist im Anforderungsbereich II der Kompetenz *Argumentieren* zu entnehmen, dass „überschaubare mehrschrittige Argumentationen nachvollzogen, erläutert und entwickelt“ werden sollen. Im Anforderungsbereich III wird ausgeführt, dass „komplexe Argumentationen genutzt, erläutert und entwickelt“ werden sollen und „verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewertet werden“ (vgl. [Blum06], S. 36). Insbesondere betonen Leiß und Blum, dass die Qualität, d.h. die Überzeugungs- bzw. Aussagekraft einer mathematischen Argumentation nicht vom Grad ihrer Formalisierung abhängt, sondern vielmehr schlüssige mathematische Begründungen auf verschiedenen Darstellungsebenen möglich seien. Diese Charakterisierung der Kompetenz Argumentieren betont eine offene und kreative Herangehensweise.

2.2 Problemlösen als mathematische Grunderfahrung

Historisch gesehen wird Mathematik seit Jahrtausenden über Probleme transportiert. Damit sind „Problemfinden“ und „Problemlösen“ generische mathematische Tätigkeiten. Heinrich Winter formuliert in seinem Artikel [Winter83] als dritte Grunderfahrung im Mathematikunterricht: „Der Mathematikunterricht ist dadurch allgemeinbildend, dass er drei Grunderfahrungen ermöglicht: [...] (G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“ Dies unterstreicht erneut die Bedeutung des Problemlösens nicht nur innerhalb der Mathematik, sondern auch darüber hinaus für eine allgemeine Bildung. Doch was genau ist *Problemlösen*? Friedrich Zech nimmt in [Zech78] eine lerntheoretische Perspektive ein und zitiert dazu Klix [Klix71], dass „ein Problemlösungsprozess dadurch gekennzeichnet ist, dass ein bestimmter Anfangszustand in einen bestimmten Zielzustand zu überführen ist, wobei eine Barriere eine unmittelbare Überführung der Anfangssituation in die angestrebte Zielsituation verhindert.“ Diese Definition ist so allgemein gehalten, dass sich nahezu jegliches Lernen darunter subsummieren lässt. Ein Überwinden einer Barriere führt nach Piaget (vgl. [Leuders03]) immer zu kognitiven Konstruktionsprozessen, wobei die wahrgenommene Situation entweder in die bekannte Denkstruktur eingepasst wird (Assimilation), oder, wenn dies nicht zum Erfolg führt, eine neue Struktur aufgebaut wird (Akkomodation). Dieses Herstellen einer Balance wird nach Piaget Äquilibration genannt. Im Folgenden werden jedoch zusätzliche Charakteristika des Problemlösens herauskristallisiert, um eine engere und greifbarere Beschreibung für den Mathematikunterricht im speziellen zu erhalten. Zech führt in ([Zech78], S. 279) genauer aus, dass bei sofortiger Beseitigung der Barriere aufgrund bekannter Situationsmerkmale für den Betreffenden „kein Problem mehr“ vorliege und grenzt damit Problemlösen vom „mechanischen Problemlösen“ ab, welches er als das Lösen von Routineproblemen bezeichnet. Erst wenn die gegebene Information durch Analyse, Synthese, Hypothesenbildung und Umordnung umgeformt werden muss, um die Barriere zu überwinden, solle man von sinnvollem Problemlösen sprechen. Auch Timo Leuders nimmt in ([Leuders03], S. 119ff.) diese Position ein und rückt das Problemlösen in den Kontext von Textaufgaben, Beweisen und Rätsellösen, bevor er mutig, aber nicht unreflektiert formuliert: „Problemfinden & Problemlösen = Mathematik betreiben!“([Leuders03], S. 121). Hierzu verweist er auf die lange Historie des Problemlösens und bezieht das entdeckenlassende Lernen als Prozess der Problemfindungsphase sowie das problemorientierte Lernen als Anschlussphase zur Entwicklung mathematischer Begriffe mit ein. Als Problemlösen im engeren Sinne formuliert er: „Schülerinnen und Schüler setzen ihre erworbenen mathematischen Kompetenzen in neuer Weise oder neuer Kombination ein, um ein selbst gesetztes oder vorgegebenes Ziel zu erreichen. Hierbei werden vorhandene Kompetenzen oder bekannte Begriffe zugleich gefestigt und flexibilisiert.“ Diese Sichtweise auf das Problemlösen mit Vor- und Nachphase ist nahezu identisch mit dem nordrhein-westfälischen Kompetenzmodell des Schulministeriums [KLP07]: „Zum Problemlösen gehört, Problemsituationen zu erfassen, zu erkunden, zu lösen und die Lösungswege und Ergebnisse zu reflektieren. Dabei ist ein Lösungsweg nicht unmittelbar erkennbar bzw. es kann nicht unmittelbar auf erlernte Verfahren zurückgegriffen werden.“ Diese Kompetenzdefinition zum Problemlösen soll in dieser Arbeit benutzt werden.

2.3 Mathematische Schülerwettbewerbe

In Deutschland haben sich mathematische Schülerwettbewerbe mittlerweile fest etabliert. Im Jahr 1961 wurde in der ehemaligen DDR die Mathematik-Olympiade gegründet, 1970 folgte die Bundesrepublik Deutschland und gründete den Bundeswettbewerb Mathematik. Seit der Wiedervereinigung finden diese Wettbewerbe bundesweit symbiotisch statt. Zusätzlich nehmen seit 1995 deutsche Schülerinnen und Schüler am Känguru-Wettbewerb teil. Sucht man einen sportlichen Vergleich zu diesen mathematischen Wettkämpfen, so kommt einem der Vergleich zur Kurzstrecke, Mittelstrecke und Langstrecke der Laufdisziplinen in den Sinn. Der Känguru-Wettbewerb ist mit der Kurzstrecke vergleichbar, hier müssen die Schülerinnen und Schüler 30 Aufgaben im Multiple-Choice-Format in 75 Minuten Bearbeitungszeit lösen. Die jahrgangsstufenabhängigen, abwechslungsreichen Knobeleien veranlassen jährlich rund 800000 Schülerinnen und Schüler zur Teilnahme. Die Ankreuzbögen werden dann zentral an der Humboldt-Universität in Berlin ausgewertet, und für die Teilnahmegebühr von zwei Euro erhalten alle Teilnehmer kleine Preise.
Die Mathematik-Olympiade richtet sich an die eher leistungsstarken, mathematisch interessierten und begabten Schülerinnen und Schüler. Sie ist sportlich vergleichbar zur Mittelstrecke und ist in vier Runden organisiert (Schulrunde, Stadt-/Kreisrunde, Landesrunde, Bundesrunde), die jeweils drei oder vier Aufgaben, nach Jahrgangsstufen getrennt, beinhalten. Die Schulrunde dient dabei als Einstiegsrunde und ist als Hausaufgabenrunde gedacht, die übrigen Runden sind Klausurrunden, in denen die Teilnehmer in etwa vier Stunden diese drei Aufgaben bearbeiten. Etwa 100000 Schülerinnen und Schüler nehmen jährlich an der Schulrunde teil, etwa 30000 an der Kreisrunde, etwa 3000 an den Länderrunden und etwa 200 Teilnehmer erreichen die Bundesrunde. Diese ist als viertägiger Wettbewerb mit zwei Klausuren und Rahmenprogramm organisiert.
Die größte Anstrengung verlangt der Bundeswettbewerb Mathematik den Schülerinnen und Schülern ab, wovon auch der Vergleich zur Langstrecke rührt. Er ist in zwei 3-monatige Hausaufgabenrunden und einem finalen Kolloquium organisiert. Im Gegensatz zum Känguru-Wettbewerb und zur Mathematik-Olympiade bearbeiten alle Teilnehmer dieselben Aufgaben. Etwa 1000 Schülerinnen und Schüler stellen sich bundesweit den Aufgaben der ersten Runden, etwa 500 nehmen an der zweiten Runde teil. In das finale Kolloquium gelangen dann die besten 50 Schülerinnen und Schüler, die in der zweiten Runde einen ersten Preis erzielen konnten. Die Bundessieger werden hier automatisch in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen. Als i-Tüpfelchen für erfolgreiche Teilnehmer der Mathematik-Olympiade und des Bundeswettbewerbs Mathematik lockt die internationale Mathematik-Olympiade (IMO), die seit 1959 jährlich ausgetragen wird. An ihr darf ein sechsköpfiges deutsches Team teilnehmen. Neben diesen „großen“ rein mathematischen Wettbewerben gibt es weitere, offene und freie, anwendungsorientierte und lokale mathematische Wettbewerbe. An dieser Stelle seien dazu die Teamwettbewerbe *Baltic Way*, *Matboj*, *A-lympiade*, *B-Tag* und die Mathematik-Sektion von *Jugend forscht* genannt. Diese Wettbewerbe sind allesamt Teamwettbewerbe. Der *Baltic Way* und der *Matboj*-Wettbewerb haben ihren Ursprung in Nordeuropa und konzentrieren sich auf innermathematische Aufgaben. Die *A-lympiade* und der *B-Tag* stammen ursprünglich aus den Niederlanden und orientieren sich am Fach *Wiskunde*. Sie sind also tendenziell naturwissenschaftlich anwendungsorientiert. Beim Wettbewerb *Jugend forscht* ist prinzipiell

anzumerken, dass neben der inhaltlichen Leistung auch die Präsentationsleistung bei den verschiedenen Wettbewerbsrunden eine zentrale Rolle spielt.

2.4 Formate mathematischer Arbeitsgemeinschaften

Was soll in einer Mathematik-Arbeitsgemeinschaft inhaltlich vermittelt werden? Hierzu gibt es verschiedene Positionen, die letztlich auch von den Schülererwartungen und Vorlieben des AG-Leiters abhängen. Zum einen gibt es den mathematischen *Vorgriff bzw. Ausblick*, bei dem in der AG Unterrichtsthemen vertieft behandelt bzw. über den obligatorischen Lehrplaninhalt hinausgehende Themen angesprochen werden. Ein typisches Beispiel für dieses Format ist eine Oberstufen-Mathematik-AG, in der Themen wie komplexe Zahlen, numerische Verfahren, Folgen und Reihen etc. angesprochen werden können. Der Teilnehmerkreis könnte sich hier aus Schülerinnen und Schülern zusammensetzen, die ein mathematisch-naturwissenschaftliches Studium aufnehmen möchten und sich den Übergang zur Hochschule erleichtern wollen. Ein ganz anderes Konzept ist das einer *Knobel-AG*, in der mathematische Spiele sowie Rätsel- und IQ-Aufgaben angesprochen werden können. Solch ein Format spricht häufig Schülerinnen und Schüler der Unterstufe an, die sich spielerisch mit Denksportaufgaben beschäftigen wollen. Sehr verwandt ist das Format der *Olympiade-AG*, die sich zusätzlich Aufgaben der Mathematik-Olympiade oder anderer mathematischer Wettbewerbe bedient. Die Teilnehmer beschäftigen sich in relativ freier Atmosphäre mit zunehmend schwierigeren Aufgaben und werden zur Teilnahme an Wettbewerben angeleitet. Da ein großer Aufgabenvorrat unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades vorliegt, eignet sich dieses Format für alle gymnasialen Jahrgangsstufen. Eine *Olympiade-AG* kann auch jahrgangsstufen-übergreifend durchgeführt werden, da erfahrungsgemäß die AG-Teilnehmer auch gern zum Einstieg die Aufgaben jüngerer Jahrgangsstufen bearbeiten und ein Austausch über verschiedene Jahrgangsstufen hinweg den Austausch mathematisch interessierter Schülerinnen und Schüler der jeweiligen Schule fördert. Hier ist jedoch anzumerken, dass Schülerinnen und Schüler sich manchmal sehr schwer tun, wenn sie erst in der Oberstufe in eine solche AG einsteigen, da sie häufig zu stark kalkülorientiert an die Wettbewerbsaufgaben herangehen. Ein weiteres Format ist das einer *Projekt-AG*, in der ergänzender Stoff erarbeitet bzw. vorgetragen wird. Verwandt ist dieses Format mit Kombi-Wahldifferenzierungskursen in der Sekundarstufe I: Hier können Projekte zu Fraktalen, zur Zahlentheorie, zur Finanzmathematik, zu mathematischen Spielen, zur Geometrie von Polyedern usw. durchgeführt werden. Je nach Teilnehmerkreis können diese Projekte auch in mathematischen Wettbewerben münden.

2.5 Ko-Konstruktionen in kooperativen Lernformen

Offener Unterricht und kooperative Lernformen zielen vor allem darauf, die Schüleraktivität zu erhöhen und die Lehreraktivität zurückzunehmen (vgl. [Bovet08], S.115 ff.). Während bei offenem Unterricht eine Aktivierung seitens der Lehrperson und Kooperationen unter den Schülern dazu dienen sollen, möglichst aktiv und selbstgesteuert zu lernen, wird bei kooperativen Lernformen vor allem die soziale Interaktion und der Mehrwert betont, der durch den Austausch von eingearbeiteten Schülern entsteht (*think-pair-share*).

Beiden Theorien ist jedoch gemeinsam, dass ihre Methoden besonders dann Früchte tragen, wenn sowohl das Kind als auch die soziale Umwelt aktiv sind.

	soziale Umwelt passiv (soziale Konstitution -)	soziale Umwelt aktiv (soziale Konstitution +)
Kind passiv (Konstruktivismus -)	Reifungstheorie (Selbstentfaltung)	Vermittlungsansatz
Kind aktiv (Konstruktivismus +)	Selbstbildungs-ansatz	Ko-Konstruktion

Im Fall (++) verbinden sich zwei Lerntheorien: Auf der Seite des aktiven Kindes steht die konstruktivistische Grundidee ([Bovet08], Kap. 7) und verbindet sich mit der sozialen Konstitutionstheorie der aktiven Seite des sozialen Umfelds ([Sutter09], S. 71ff.). Bei dieser Verknüpfung spricht man von Ko-Konstruktion ([Bovet08], Kap. 8 bzw. [Fthe09]). In kooperativen Lernformen sind häufig ko-konstruktive Arbeitsphasen anzutreffen. Ein typisches Beispiel hierfür ist das klassische Gruppenpuzzle wie auch das cross-over Gruppenpuzzle, denn beim Übergang von der symmetrischen Erarbeitungsphase zur asymmetrischen Austauschphase kommen aktive Phasen des Individuums und der sozialen Umwelt zusammen, es kommt zur Ko-Konstruktion. Bei kooperativen Lernformen sind diese Prozesse vor allem in den Austauschphasen anzufinden, falls kein Teilnehmer bereits eine vollständige Lösung besitzt und neues Wissen ko-konstruiert wird.
Insbesondere die kommunikativen Rollen, die Schülerinnen und Schüler einnehmen, sollen hier als ein wichtiger Aspekt der Phase der Ko-Konstruktion angesprochen werden. Hierzu werden in der Theorie [Tatsis04] die Rollen *dominant initiator*, *collaborative initiator*, *collaborative evaluator* und *insecure concilliator* genannt. Der *dominant initiator* entwickelt dabei ständig neue Ideen und versucht, die Vorherrschaft in der Gruppe einzunehmen. Dagegen sind der *collaborative initiator* und der *collaborative evaluator* auf Zusammenarbeit aus und bereit, Ideen anzuregen bzw. auszuwerten. Fachlich unsicher ist der *insecure concilliator*, der zudem Konflikte scheut. Aus diesen sozialen Rollen ergibt sich, dass eine Zusammenarbeit eines *dominant initiator* mit einem *insecure concilliator* kontraproduktiv ist, da ein hochgradig asymmetrischer Interaktionsprozess vorliegt. Am produktivsten können der *collaborative initiator* und der *collaborative evaluator* zusammenarbeiten. Sie bauen die beste Gruppendynamik auf und bringen die besten Ergebnisse. Bei der Einrichtung kooperativer Lernarrangements ist darauf zu achten, möglichst solche Konstellationen einzuteilen. Wenn dies nicht möglich ist, sollten Konstellationen gebildet werden, in denen ein *dominant initiator* mit einem *collaborative evaluator* zusammenarbeitet. Hier kann es zwar vereinzelt zu Konflikten kommen, jedoch ist prinzipiell eine Zusammenarbeit möglich.

2.6 Die Rolle des Lehrers und seine Funktionen

Im Rahmen einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft ergeben sich mehrere pädagogische Handlungsfelder, die im Zusammenhang mit den Lehrerfunktionen stehen. Ich möchte besonders auf die Lehrerfunktionen *Unterrichten* und *Diagnostizieren und Fördern* eingehen und beziehe mich auf die Rahmenvorgabe [RV2004]. Beim *Unterrichten* geht es darum,

„grundlegende Kenntnisse, Fähigkeiten, Fertigkeiten und Methoden adressatengerecht zu vermitteln“. Ferner sollen unterschiedliche Unterrichtsformen eingesetzt werden, die Aufgabenstellungen sollen didaktisch-methodisch differenzieren und individualisieren sowie reflektieren, Kompetenzen sollen nachhaltig aufgebaut und selbständiges Lernen gefördert werden. Dies alles lässt sich hervorragend durch eine Arbeitsgemeinschaft realisieren, an der interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler teilnehmen. Methodisch kann kooperativ und frei gearbeitet werden. Die Aufgaben lassen sich leicht an das Lernniveau der Teilnehmer anpassen. Damit kann die geforderte Differenzierung und Individualisierung erreicht werden. Dieser Forderung kann man insbesondere vor dem Hintergrund kleiner Lerngruppen gerecht werden. Da die mathematische Arbeitsgemeinschaft desweiteren die prozessbezogenen Kompetenzen *Problemlösen* und *Argumentieren* ins Blickfeld nimmt, erfährt der reflektierende Aspekt der Aufgabenstellungen eine besondere Betonung. Im Idealfall werden Aufgaben von den Teilnehmer noch erweitert oder eigene Fragestellungen eingebracht, was die Förderung selbständigen Lernens unterstreicht. Somit werden in besonderem Maße Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten adressatengerecht vermittelt und Kompetenzen nachhaltig aufgebaut.

Bezüglich der Lehrerfunktion *Diagnostizieren und Fördern* geht es darum, „Lernnotwendigkeiten zu diagnostizieren und Schülerinnen und Schüler entsprechend zu fördern.“ Dies beinhaltet auch, „Schülerinnen und Schüler [...] mit herausragenden Leistungen und Begabungen [zu] fördern.“ An dieser Stelle möchte ich unterstreichen, dass sich Diagnose und Förderung eben nicht nur auf Schülerinnen und Schüler mit Lernschwächen bezieht, sondern im gleichen Maße auf besonders Begabte. Die Teilnehmer der Mathematik-AG sind allesamt gute Schülerinnen und Schüler im Klassenunterricht und erhalten im Rahmen der Arbeitsgemeinschaft eine besondere, individuelle Förderung, die im Klassenverband in dieser Form nicht zu leisten wäre. Hierzu sei angemerkt, dass ein Vergleich des Leistungsstandes von besonders interessierten Schülerinnen und Schülern mit allgemeinen Leistungsniveaus nicht dazu führen sollte, das Fehlen von Lernnotwendigkeiten zu konstatieren. An Stelle der Diagnose von Lernnotwendigkeiten kann hier im besten Sinne die Analyse von Schülerkenntnissen und -interessen treten. Die darauf folgende Förderung ist im §1(1) des Schulgesetzes [SchulG10] verankert: „Jeder junge Mensch hat ohne Rücksicht auf seine wirtschaftliche Lage und Herkunft und sein Geschlecht ein Recht auf schulische Bildung, Erziehung und individuelle Förderung.“ Diese individuelle Förderung kann besonders im Rahmen einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft realisiert werden.

Kapitel 3

Planung der mathematischen Arbeitsgemeinschaft

Welche AG-Formate und Aufgabentypen sind besonders geeignet, um bei mathematisch interessierten Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8 die prozessbezogenen Kompetenzen *Argumentieren* und *Problemlösen* zu fördern? In der eigenen Schulzeit hatte ich selbst an Knobel- und Olympiade-AGs teilgenommen und war zu mathematischen Veranstaltungen gefahren, bei denen Projekte erarbeitet oder Vorgriffe auf die höhere Mathematik gegeben wurden. Eine solche Abwechslung, bei der man viele verschiedene Aspekte der Mathematik kennenlernt, erschien mir immer reizvoll. Im Folgenden wird ein Förderkonzept vorgestellt, das vom Format her eine Mischung aus Olympiade- und Projekt-AG darstellt. Darüber hinaus wird auf mathematische Hintergrundideen eingegangen, die hinter den behandelten Themen stehen. Abschließend werden zwei Sequenzen exemplarisch vorgestellt.

3.1 Beschreibung des methodischen Konzepts

Mir ist es ein wichtiges Anliegen beim methodischen Vorgehen, den Schülerinnen und Schülern Impulse und Lernangebote zu unterbreiten, die sie zu einer weitergehenden, eigenen Beschäftigung mit Mathematik führt. Eine hohe Problemorientierung soll hierbei im Vordergrund stehen. Die Probleme sollten dabei spielerisch und herausfordernd sein, sie sollten in kompakter Form unterbreitet werden können, aber einen intensiven Denkprozess in Gang setzen. Darüber hinaus sollten sie zu Kooperationen mit den Mitschülerinnen und Mitschülern einladen.
Für eine erste Phase der mathematischen Arbeitsgemeinschaft möchte ich Aufgaben aus vergangenen Jahren der Mathematik-Olympiade verwenden. Solche Aufgaben bieten den Vorteil, dass sie zum einen an das Schulwissen der jeweiligen Jahrgangsstufen anknüpfen und über verschiedene Wettbewerbsrunden auch unterschiedliche Schwierigkeitsstufen bieten. Darüber hinaus gibt es durch die 50-jährige Wettbewerbsgeschichte einen großen Vorrat an verschiedenen Themen. Die Aufgaben sind meist gestuft und laden gerade im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft zu Diskussionen über verschiedene Lösungsansätze ein. Der eigentliche Vorteil ist jedoch, dass eine Besprechung von älteren Aufgaben auch

Schülerinnen und Schüler zur Teilnahme an aktuellen Wettbewerben anleitet. Aus Erfahrung weiß ich, dass erfolgreiche Wettbewerbsteilnehmer häufig eine eigene Dynamik in der Beschäftigung mit Mathematik entwickeln. An dieser Stelle möchte ich vor allem Aufgaben der Mathematik-Olympiade verwenden, da dieser Wettbewerb immer am Schuljahresanfang startet. Darüber hinaus beginnt jährlich Mitte Dezember der Bundeswettbewerb Mathematik, der sich vor allem für Schülerinnen und Schüler der Oberstufe anbietet. Mitte März findet jedes Jahr der Känguru-Wettbewerb statt, an dem Schüler aller Jahrgangsstufen teilnehmen können. Diese Wettbewerbe durch eine Mathematik-AG fest im Schulkalender zu etablieren, soll ein Pfeiler der Arbeitsgemeinschaft sein. Die Mathe-AG soll daher zum Teil eine Olympiade-AG sein (vgl. Kapitel 2).
Der zweite Pfeiler der Mathematik-AG soll vom Format einer Projekt-AG sein. Dies beinhaltet insbesondere, dass die Schülerinnen und Schüler eigene Themen in die Arbeitsgemeinschaft einbringen können bzw. Wünsche äußern dürfen, was sie gern behandeln möchten. Jedoch gibt es auch hier erprobte Projekte (vgl. [ReeMül01]), die mit den Schulkenntnissen der jeweiligen Klassenstufen erfolgreich gemeistert werden können. Charakteristisch für diese Projekte ist, dass sie sehr offen und spielerisch beginnen. Jeder Teilnehmer soll sich zuerst mit der Projektsituation vertraut machen. Danach sollen verschiedene „Forschungsfragen" entworfen werden und eine Einigung auf bestimmte Aspekte herbeigeführt werden. An dieser Stelle wird es als Leiter der Arbeitsgemeinschaft wichtig sein, eigene Erfahrungen einzubringen, um die Projekte auf Durchführbarkeit zu überprüfen und damit unnötige Frustrationen für die Schüler zu vermeiden. Das Wesentliche ist jedoch, dass die Projekte deutlich umfangreicher sind als die oben genannten Wettbewerbsaufgaben, und damit intensive Argumentations- und Kooperationsprozesse in Gang setzen können. Auch die im Theorieteil beschriebenen kommunikativen Rollen in kooperativen Lernformen spielen hier eine wichtige Rolle. Dabei muss gewährleistet werden, dass möglichst kein Teilnehmer die Rolle des *dominant initiator* von selbst einnimmt oder in die Rolle des *insecure concilliator* gedrängt wird. Schüler in der erstgenannten Rolle fühlen sich unverstanden, wenn andere nicht sofort ihre Ideen aufnehmen wollen, während Schüler in der Rolle des *insecure concilliator* verunsichert werden. In beiden Fällen können Schülerinnen und Schüler die Freude an der mathematischen Beschäftigung verlieren. Daher ist ein gutes Lernarrangement mit auf Zusammenarbeit gerichteten Problemen von entscheidender Bedeutung. Dies bezieht auch die Sitzordnung und Arbeitsatmosphäre ein: Es sollte nach Möglichkeit Tischgruppen geben, in denen gut kommuniziert werden kann. Desweiteren beabsichtige ich, mich selbst an einen benachbarten Tisch zu setzen, um den Fokus auf die Kommunikation der Schüler untereinander zu richten. Arbeitsmaterialien und Kekse zur Stärkung sollen auf einem weiteren Tisch positioniert werden.

3.2 Beschreibung des inhaltlichen Konzepts

Bezüglich des inhaltlichen Konzepts des Olympiade-AG-Parts möchte ich näher auf die Aufgabenformate eingehen und exemplarisch zeigen, wie sich an einzelne Wettbewerbsaufgaben weitere Themen anknüpfen lassen. Der Dortmunder Mathematikwettbewerb umfasst mit seiner Hausaufgaben- und Klausurrunde genau die erste und zweite Runde der Mathematik-Olympiade. Inhaltlich orientieren sich die Aufgaben dabei am behandelten

Unterrichtsstoff, insbesondere gibt es entsprechende Aufgaben aus dem Bereich Arithmetik und Geometrie. Hinzu kommen einige logische und kombinatorische Textaufgaben, die die Schülerinnen und Schüler ebenfalls entweder aus dem Mathematikunterricht oder aus Rätselheften kennen. Insgesamt stammen die Aufgaben meist aus einem innermathematischen Kontext und lassen eine konzise Lösungsdarstellung zu. Dabei kommt es auf das Begründen und Argumentieren an, während in den höheren Jahrgängen mehr und mehr das Konzept des Beweisens zum Tragen kommt. Die folgende Beispielaufgabe stammt aus der ersten Runde (Jahrgangsstufe 8) der Mathematik-Olympiade des Schuljahres 2006/07.

> *Bernd soll große Zahlen in Primfaktoren zerlegen. Er kennt Teilbarkeitsregeln für die Primfaktoren 2, 3, 5 und 11, aber keine für 7. „Ich kenne eine, verstehe sie aber nicht", sagt ihm sein Freund Rolf: „Nimm an, du hast eine sechsstellige Zahl z aus den Ziffern* a, b, c, d, e *und* f*, also* $z = abcdef$*. Trenne die vorderen 3 Ziffern abc ab und schreibe sie unter die letzten 3 Ziffern. Subtrahiere die beiden so erhaltenen dreistelligen Zahlen so voneinander, dass eine nicht negative Differenz entsteht. Ist diese Differenz durch 7 teilbar, dann trifft dies auch auf z zu. Natürlich klappt das Verfahren auch für fünf- und für vierstellige Zahlen, wenn man* $a = 0$ *bzw.* $a = 0$ *und* $b = 0$ *setzt." Bernd überlegt: „Doch, ich habe eine Erklärung: 1001 ist durch 7 teilbar."*
>
> *a) Überprüfe an drei selbst gewählten Beispielen, ob das Verfahren zum richtigen Ergebnis führt und ob es auch für vierstellige und fünfstellige Zahlen anwendbar ist.*
>
> *b) Beweise, dass jede Zahl der Form abcabc durch 7 teilbar ist.*
>
> *c) Erkläre damit das von Rolf beschriebene Verfahren.*
>
> *d) Gibt es ein ähnliches Verfahren für den Primfaktor 13? Wenn ja, dann gib das Verfahren an.*

Diese Aufgabe ist schon vom Textverständnis für Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung. Zuerst findet ein Austausch über die Aufgabenstellung statt, danach kann mit eigenen Zahlbeispielen experimentiert werden. Inhaltlich bietet diese Aufgabe einen geeigneten Übergang, um über Primfaktorzerlegungen und Teilbarkeitseigenschaften zu sprechen. Dies soll konkretisiert werden, indem der Übergang von Teilbarkeitsregeln zur Betrachtung von Resten bei der ganzzahligen Division gelenkt wird. Es soll den Schülern verdeutlicht werden, dass eine Zahl genau dann durch eine andere teilbar ist, wenn sie bei Division durch diese den Rest 0 lässt. Danach sollen sie schrittweise an das Rechnen mit Resten herangeführt werden. Es sollen Restsysteme notiert und Addition-, Subtraktions- und Multiplikationstafeln ausgefüllt werden. Danach kann überlegt werden, ob sich lineare Gleichungen auch mit Restklassen lösen lassen, wobei hier insbesondere bedacht werden muss, wann eine Division möglich ist. Im Anschluss bieten sich viele Anwendungsmöglichkeiten dieser *modularen Arithmetik* an wie z.B. Teilbarkeitsregeln für die Division durch 9 und 11. Auch im Hinblick auf Wettbewerbsaufgaben ergeben sich mit diesen Strategien sehr elegante Lösungen.

Hinter diesen neuen Objekten zum Rechnen spiegelt sich schon eine neue Struktur wieder, nämlich das Konzept der *Gruppe*, das auch weiter verfolgt werden soll. Die nachfolgenden Projekte zum Rubik-Würfel und zu den Polyeder-Konstruktionen sind entsprechend angelegt. So wie Reste addiert und subtrahiert werden, können auch Zugfolgen am Rubik-Würfel kombiniert und rückgängig gemacht werden. Bei den Polyedern können ebenso die Symmetrieabbildungen nacheinander ausgeführt und rückgängig gemacht werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen jedoch so spielerisch wie möglich an diese Objekte herangehen. Erst wenn genug experimentelle Erfahrung gesammelt wurde, können strukturelle Gemeinsamkeiten thematisiert werden.

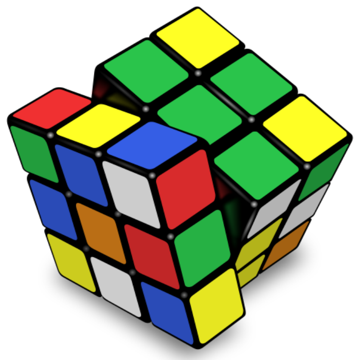
3.3 Beschreibung exemplarischer Themen

Im Folgenden beschreibe ich zwei Unterrichtssequenzen, die in der Mathematik-AG einen größeren Raum einnehmen sollen. Insbesondere soll neben einem intensiven Diskussions- und Argumentationsprozess die Förderung der Problemlöse-Kompetenz in den Blick genommen werden, wobei nach [KLP07] „zum Problemlösen gehört, Problemsituationen zu erfassen, zu erkunden, zu lösen und die Lösungswege und Ergebnisse zu reflektieren.“ Desweiteren soll an den folgenden, exemplarischen Themen deutlich werden, dass ein Lösungsweg nicht unmittelbar erkennbar ist und auch nicht unmittelbar auf erlernte Verfahren zurückgegriffen werden kann.

3.3.1 Lösungsstrategien am Rubik-Würfel

Wer kennt ihn nicht, den 1975 von Ernõ Rubik erfundenen und 1980 auf dem deutschen Markt erschienenen „Zauberwürfel“ bzw. Rubik-Würfel? Allein Anfang der 1980er Jahre wurden über 160 Millionen Exemplare verkauft.

Doch auch danach lebte er in regelmäßigen Abständen immer wieder auf, insbesondere gab es in den vergangenen Jahren wieder einen Boom, was auch den gesteigerten Kommunikationsmöglichkeiten über Internetforen und YouTube zuzuschreiben ist. Darüber hinaus gibt es internationale Wettbewerbe für Rubik-Löser, über die in TV-Reportagen und Talkshows berichtet wird und die nicht selten als genial dargestellt werden.

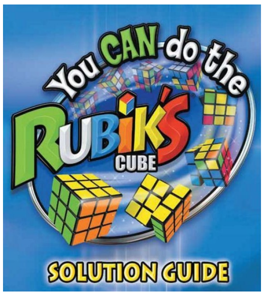


Der Rubik-Würfel an und für sich ist bereits ein gestelltes Problem, das vielen Schülerinnen und Schülern bekannt ist. Da aber die meisten Zauberwürfel verdreht in heimischen Kellern liegen, ist klar, dass es sich um ein sehr anspruchsvolles Problem handelt, zumindest wenn man versucht, den Würfel durch unsystematisches Herumdrehen zu lösen. Daher bietet sich an, zu überlegen, wie viele (verdrehte) Zustände es für den Würfel eigentlich gibt. Man leitet experimentell an, dass es $n!$ Möglichkeiten gibt, n Objekte zu vertauschen (permutieren). Wenn nun die 12 Kantensteine bzw. die 8 Ecksteine des Würfels beliebig vertauscht werden können, und man annimmt, dass die Kanten durch entsprechende Zugfolgen „geflippt“ (2 verschiedene Positionen) und die Ecken gedreht werden können (3 verschiedene Positionen), erhält man als obere Abschätzung für die

Anzahl der Würfelzustände

$$12! \cdot 2^{12} \cdot 8! \cdot 3^{8} = 519.024.039.293.878.272.000$$

Möglichkeiten. Die exakte Anzahl der Zustände erhält man aus obiger Abschätzung durch Division mit $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, wobei die Faktoren von der Gesamtorientierung des Würfels und Geschlossenheitsrelationen der Kantenflips und der Eckendrehungen herrühren. Aber auch bei den dann verbleibenden 43 Trillionen Möglichkeiten ist eine „zufällige“ Lösung so gut wie ausgeschlossen. Wie lässt sich das Problem systematisch bzw. mathematisch lösen? Hierzu nimmt man sich Elementarzüge her, also solche Züge, die nur aus der Drehung einer einzelnen Seite entstehen. Jede Zugfolge ist dann aus solchen Elementarzügen zusammengesetzt, und zwei Zugfolgen lassen sich „addieren“, indem man die Elementarzugfolgen hintereinander ausführt. Umgekehrt lässt sich jede Zugfolge umkehren, indem die Elementarzüge in umgekehrter Reihenfolge rückgängig gemacht werden. Diese Sprechweise soll dazu dienen, dass die Schülerinnen und Schüler sich über die Zugfolgen verständigen und einen fehlerhaften Zug schnell rückgängig machen können. Als weitere grundlegende Strategie möchte ich die Schichtenstrategie [RuCu10] wählen. Hier wird durch relativ einfache Züge die unterste Ebene/Schicht gelöst.



Danach stehen komplexere Zugfolgen zur Verfügung, die Steine in den oberen Ebenen permutieren und die untere Ebene invariant lassen. Diese Strategie hat für die Teilnehmer den Vorteil, dass sie nach jeder Zugfolge sehen, ob sie alles richtig gemacht haben, denn nur dann bleiben die bereits gelösten Ebenen auch gelöst. Andererseits handelt es sich um einen intuitiven Zugang, da man darauf achtet, das Erreichte nicht kaputt zu machen. Nun soll eine intensive eigene Beschäftigung mit den Zugfolgen stattfinden, wobei eine Verwendung der in der Literatur geschilderten Zugfolgen stets möglich ist. Zwischendurch soll aber Zeit für Diskussionen unter den Teilnehmern bleiben, in denen sie sich über die Zugfolgen austauschen, und argumentieren, welche Position vorliegt und welche Strategie zum jeweiligen Problem passt.

3.3.2 Konstruktion von Polyedern mit Hilfe von Stecksystemen

Mit bunten Plastikrahmen verschiedene Objekte zu bauen, bereitet Kindern (und auch vielen Erwachsenen) Freude. Es ist anschaulich, experimentell, und es ist möglich, ohne Vorkenntnisse zu beginnen. Lassen sich solche Bausätze auch im Mathematikunterricht einsetzen und damit mathematische Inhalte und Kompetenzen vermitteln? Meine Antwort ist uneingeschränkt „ja“, und zwar für jede Altersstufe.

An der Ausbildungsschule steht ein Bausatz der Marke *POLYDRON Frameworks* zur Verfügung. Am Anfang der Sequenz sollen die Schülerinnen und Schüler die Bausteine erkunden und nach eigenen Vorstellungen Objekte bauen. Nach dieser spielerischen Phase sollen sich die Schüler auf einen Bausteintyp festlegen und mit diesem geometrische Körper konstruieren. Dies führt zu den fünf Platonischen

Körpern. Hierzu sollen auch wichtige Erfahrungen beim Bauprozess schriftlich festgehalten werden, in einer Tabelle wird zudem notiert, wie viele Flächen, Kanten und Ecken bei jedem Körper vorhanden sind. Experimentell soll so der Zusammenhang durch die Euler-Charakteristik

$$E - K + F = 2$$

für einfach zusammenhängende Polyeder bestätigt werden. Die Schüler sollen dann überlegen, ob diese Formel auch für andere Körper gilt, indem sie die Flächen (F), Kanten (K) und Ecken (E) der jeweils gebauten Körper zählen und den Zusammenhang überprüfen. Die Schüler sollen argumentieren, warum dieser Ausdruck bei den bisher erstellten Körpern immer gleich bleibt. Sie können erkunden, ob man für andere Körper eine andere Euler-Charakteristik erhält. Eine Vertiefung der allgemeinen Formel $E - K + F = 2 - 2g$, wobei g das Geschlecht des Polyeders (also die Anzahl der Löcher) bezeichnet, wird nicht angestrebt.

Nach dieser Sequenz soll in Vorbereitung auf die Fußball-WM 2010 überlegt werden, wie man einen Fußball konstruieren kann. Dazu sollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zuerst aus dem Kopf einen Fußball zeichnen und überlegen, aus welchen Bausteinen er zusammengesetzt sein könnte. Danach sollen die Schüler mit den Bausteinen experimentieren und darüber diskutieren, wie die richtige Form aussehen kann.
Da jedoch der Vorrat an Fünf- und Sechsecken im Baukasten begrenzt ist und nicht jeder Schüler einen eigenen Fußball erstellen kann, sind die Schüler zur Kooperation gezwungen. Hier werden sich neue Schwierigkeiten ergeben, da die Bausteine orientiert sind (also insbesondere keine Spiegelsymmetrie aufweisen). Um einen vollständigen Fußball zusammenzusetzen, müssen einige Teilkonstruktionen aufgebrochen werden und neu konstruiert werden. Dies stellt ein eigenes Problem dar und bedarf mathematischer Argumentationen.

In einer weiteren Sitzung kann untersucht werden, durch welche Bewegungen im Raum ein Platonischer Körper wieder in sich überführt wird. Diese Aufgabe fordert ein hohes Maß der Kompetenzen Problemlösen und Argumentieren ein, da den Schülerinnen und Schülern erst einmal keine geeigneten Notationen zur Verfügung stehen. Sie können aber im Fall des Würfels verschiedene Seitenfarben verwenden und die Bewegungen durch die verschiedenen Farben beschreiben. Alternativ kann auch der Würfel auf einem Blatt Papier abgerollt werden oder die Ecken durchnummeriert werden. Dies öffnet dann auch arithmetische Zugänge. Zu zwei solchen Bewegungen kann eine Argumentation darüber geführt werden, ob deren Hintereinanderausführung wieder eine zulässige Bewegung ist. Desweiteren können auch Spiegelsymmetrien von Platonischen Körpern untersucht werden. So können Schülerinnen und Schüler an Grundvorstellungen zu Symmetriegruppen der Gruppentheorie herangeführt werden.

Ein weiteres großes Feld zum Spielen und Experimentieren stellen Parkettierungen und Platonische/Archimedische Körper dar [ReeMül01]. Hier können Schülerinnen und Schüler zuerst in der Ebene überlegen, welche regelmäßigen Muster sich aus regelmäßigen Polygonen zusammensetzen lassen und dies gleichseitig experimentell überprüfen. Mit der gewonnenen Systematik ist es möglich, eine Klassifikation der Archimedischen Körper zu erhalten. Sollten die Teilnehmer nicht spielerisch alle Körper finden, bietet sich weiter an, eine mathematische Systematisierung zu thematisieren. Diese Ideen lassen sich dann auch in höheren Klassenstufen weiter verfolgen.

Kapitel 4

Durchführung der Mathe-AG

„Du hast Spaß am Tüfteln und Entwickeln mathematischer Ideen?“, war der erste Satz auf der Einladung an die Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 8, gefolgt von „Dann ist die Mathematik-AG genau das richtige für dich!“. Dieser Einladung sind 10 Schülerinnen und Schüler gefolgt, die mir neugierig bei der ersten Sitzung gegenüber saßen. Im Folgenden möchte ich über den organisatorischen und methodischen Rahmen berichten und danach auf die Durchführung der im vorigen Kapitel beschriebenen exemplarischen Sequenzen eingehen.

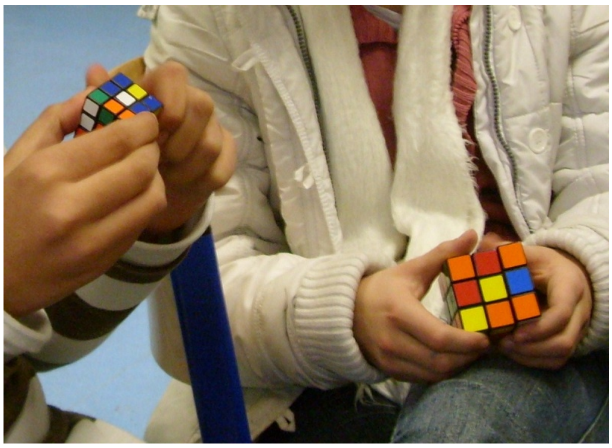
4.1 Organisatorischer und methodischer Rahmen

Als Termin konnten sich die Teilnehmer schnell auf freitags in der 7. Stunde einigen. Für die Schülerinnen und Schüler war das einleuchtend, denn an diesem Termin hatten alle Zeit. Für mich war dieser Termin aber ebenso ein Indiz für das Interesse der Teilnehmer, die die Mathematik anderen Freizeitaktivitäten vorzogen. Natürlich sind Schüler nach sechs Stunden Unterricht etwas erschöpft und bringen ein Kommunikations- und Bewegungsbedürfnis mit. Diese Erfahrungen hatte ich selbst als Schüler gemacht und versuchte nun als AG-Leiter eine angenehme Arbeitsatmosphäre herzustellen. Hierzu ordnete ich eine aus mehreren Partnertischen zusammengesetzte runde Tischordnung an. Gleichzeitig standen an einem separaten Tisch Kekse oder kleine Süßigkeiten bereit, an denen sich die Schüler bedienen konnten. Getränke brachten sie selbst mit.
Ich stellte Problemaufgaben auf Arbeitsblättern bereit oder brachte spezielle Materialien mit. Dies sollte dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler erst einmal eine hohe Eigenaktivität entwickeln. Auf fachliche Instruktionen versuchte ich so weit wie möglich zu verzichten und lieferte lieber Erklärungen für die Gruppe nach, wenn die Schülerinnen und Schüler selbst nicht weiter kamen. Insgesamt war das Lernarrangement offen, kooperativ und problemorientiert angelegt. Es sollte die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zum argumentativen Austausch einladen. Hierzu kann ich anmerken, dass z.B. bei Hereingabe von Aufgaben aus den ersten Runden der Mathematik-Olympiade vergangener Jahre oder von alten Aufgaben des Känguru-Wettbewerbs die Schüler die ganze Unterrichtsstunde mit sich selbst beschäftigt waren oder sich gegenseitig austauschten, wenn sie nicht weiter kamen. Ich zog mich dann meist mit ein paar Keksen an einen separaten Tisch zurück und löste die gestellten Aufgaben noch einmal für mich. Die Schülerinnen und Schüler

hatten so den Eindruck einer sehr symmetrischen Situation, wussten aber, dass sie mich auch jederzeit fragen konnten, wenn sie nicht weiter kamen. Obwohl diese Entscheidung bewusst getroffen war und dies den Schülern aus dem Unterricht nicht unbekannt war, schlugen einige Schüler nach einigen Sitzungen vor, dass ich mich doch auch zu ihnen an den Gruppentisch setzen sollte. Dies wirkte sich nicht negativ auf die Schülerkommunikation aus, und so manch nichtmathematisches Gespräch mit Schülern trug wohl auch zur guten AG-Atmosphäre insgesamt bei.

4.2 Durchführung der Rubik-Würfel-Sequenz

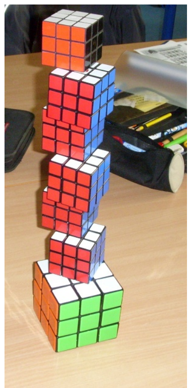
Schon zu Beginn der Mathe-AG hatten sich viele Schülerinnen und Schüler gewünscht, Lösungsstrategien am Rubik-Würfel zu behandeln. Demzufolge hatten die meisten von ihnen auch eigene Zauberwürfel mitgebracht, als ich ankündigte, dass es in der nächsten Sitzung um den Würfel gehen würde. Viele drehten schon am Würfel, als ich den Raum betrat und meinen Zauberwürfel hochhielt: „Heute werden wir Strategien kennenlernen, wie man den Rubik-Würfel lösen kann!“ Daraufhin entgegnete ein Schüler: „Herr Reeker, ich wette, dass Sie diesen Würfel nicht lösen können! Den haben wir zu Hause zehn Jahre verdreht, das können Sie einfach nicht lösen!“ Mit dieser Aussage waren auch die Erwartungen der anderen AG-Teilnehmer geweckt. Ich beschloss, die Herausforderung anzunehmen, „Dann gib den Würfel mal her und stop die Zeit!“ Hier kam mir zugute, dass ich vorher im Lehrerzimmer noch einige Mal geübt hatte, so dass ich in knapp 3 Minuten den Würfel gelöst hatte, wofür ich mit einem Applaus der Schüler belohnt wurde.



Nun erklärte ich prinzipielles zur Schichtenstrategie als Lösungsstrategie [RuCu10], dass man zuerst versucht, eine Seite mit den angrenzenden Seitenflächen richtig zu positionieren. Erst danach begibt man sich an die zweite und dritte Schicht und nutzt komplexere Zugfolgen, um die Steine zu verschieben ohne die erste Schicht zu verändern. Dieses prinzipielle Vorgehen akzeptierten die Schülerinnen und Schüler sehr schnell und wollten wissen, wie man die erste Schicht löst.

Dazu erklärte ich ihnen, dass man zuerst auf der weißen Seite ein weißes Kreuz herstellen muss. Dabei ertappte mich eine Schülerin: „Ist es nicht vollkommen egal, mit welcher Seite man anfängt?“ Sie hatte vollkommen recht und so entstanden auch rote und grüne Kreuze. Nachdem jeder Schüler diesen Schritt mehrfach durchgeführt hatte, erklärte ich, wie man in drei Elementarzügen den jeweils richtigen Eckstein ins Kreuz drehen kann. Auch dies übten die Schülerinnen und Schüler eine gute Viertelstunde. Danach teilte ich Ihnen den Rubik's Cube Solution Guide [RuCu10] aus.

In den weiteren AG-Sitzungen orientierten sich die Schülerinnen und Schüler an [RuCu10] und verbesserten ihre Fertigkeiten am Zauberwürfel. Wenn es Probleme oder Schwierigkeiten gab, halfen sie sich untereinander und fragten mich gegebenenfalls. Es herrschte eine produktive Arbeitsatmosphäre. Dabei lagen hohe Aktivitäten im eigenen Problemlösen vor, d.h. die Schülerinnen und Schüler versuchten, die Zugfolgen geeignet zu kombinieren und durchzuführen.



Es fanden auch aufgeregte Diskussionen statt, bei denen schwierige Würfelstellungen versprachlicht wurden. Vor allem mussten die Teilnehmer prüfen, ob die Voraussetzungen zu bestimmten Zugfolgen an ihrem konkreten Würfel gegeben waren. Dies war ein kontinuierlicher Prozess, in den ich nicht eingreifen musste. Nach und nach konnten sie nun den Würfel lösen. Dies dauerte jedoch noch 15 Minuten und klappte auch nicht immer. Aber die Freude war riesig, wenn sie es geschafft hatten. Über die Weihnachtsferien beschäftigten sich einige so intensiv mit den Lösungsstrategien, dass sie mich in der ersten Sitzung danach zu einem Schnelllöse-Wettkampf aufforderten. Desöfteren musste ich dabei Niederlagen einstecken...

4.3 Durchführung der Polyeder-Sequenz

Für die Sequenz mit dem Bausystem Polydron Frameworks hatte ich Arbeitsblätter mit den fünf Platonischen Körpern und einer auszufüllenden Tabelle für die jeweilige Anzahl von Ecken, Kanten und Flächen mitgebracht. Diese Arbeitsblätter wurden jedoch trotz der Aufforderungen, die Beobachtungen schriftlich festzuhalten, erst einmal zurückgelegt. „Wollt ihr erst mit dem Stecksystem experimentieren?“ Doch dies war eigentlich keine Frage mehr, die Antwort „ja“ stand bei allen schon fest! Insgesamt haben sich die Schülerinnen und Schüler in zwei Sitzungen fast ausschließlich spielerisch mit den Bauteilen beschäftigt. In einigen Phasen waren die Teilnehmerinnen und Teilnehmer dabei stark mit sich selbst beschäftigt, wie man es auch manchmal bei Kindern beobachten kann, die in ein Spiel vertieft sind oder mit Lego-Steinen ein Haus bauen. In der dritten Sitzung war der erste Spieltrieb ausgelebt und eine systematischere Beschäftigung mit den geometrischen Körpern möglich. Dazu sollten die Schülerinnen und Schüler mit gleichen Bausteinen geometrische Körper formen. Neben den von mir intendierten regelmäßigen Platonischen Körpern stellten die Schüler noch andere weniger symmetrische Körper her. Zu allen Körper sollte dann auf dem Arbeitsblatt die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen notiert werden. Für die Platonischen Körper ergab sich insbesondere:

Körper	Anzahl der Ecken	Anzahl der Kanten	Anzahl der Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Ikosaeder	12	30	20
Dodekaeder	20	30	12

Anhand dieser Tabelle erkannten einige Schülerinnen und Schüler den Zusammenhang der jeweiligen Anzahlen und konnten ihn in der Form $E + F = K + 2$ beschreiben. Andere Teilnehmer vollzogen diese Formel an eigenen Beispielen nach. Ein Schüler bemerkte an dieser Stelle, dass die Zahlenwerte von Würfel und Oktaeder sowie von Ikosaeder und

Dodekaeder ganz ähnlich aussehen, nur dass die Flächen und die Ecken vertauscht sind. Hier konnte ich seinen Eindruck bestätigen und lobte ihn für die Beobachtung. Auf eine *Dualität* wollte ich mich an dieser Stelle nicht einlassen. Und auf einen Beweis verzichtete ich lieber. Stattdessen regte ich an, was einem denn eine solche Formel bringt, wenn man bestimmte Anzahlen kennt und andere nicht. Dann forderte ich die Teilnehmer auf, zu prüfen, ob die Eulersche Polyederformel wirklich für alle Körper gilt oder ob es Ausnahmen gibt. Die Schülerinnen und Schüler entwickelten hierzu mehrere Ideen: Zum einen wurden Bausteine aus den Körpern ausgebaut und gezeigt, dass jetzt die Formel nicht mehr gilt. Das war eine trickreiche Idee, jedoch musste ich an dieser Stelle die „Spielregel“ nachschieben, dass die Körper *geschlossen* sein sollten. Zwei Schülern gelang hierzu in Zusammenarbeit die Konstruktion eines Rings (Torus): Beim Nachrechnen kam hier $E + F = K$ heraus!

In der nächsten Sitzung teilte ich an jeden Teilnehmer ein leeres Blatt aus und forderte sie auf: „Zeichnet mal einen Fußball!“ Nach kurzer Absprache erkannten die Schülerinnen und Schüler, dass die Oberfläche eines klassischen Fußballs aus Fünf- und Sechsecken besteht. Doch wie viele sind es genau? Hierzu reichten die Schätzungen für die Sechsecke von 8 bis 18 und die für die Fünfecke von 6 bis 24!

Im Team versuchten nun die Teilnehmer einen Fußball mit Hilfe des Stecksystems zu bauen, wobei für diese anspruchsvolle Aufgabe viele Absprachen nötig waren. Dies beruhte vor allem auf der Tatsache, dass die einzelnen Bausteine eine Orientierung besitzen, die beim Zusammensetzen von vorgefertigten Konstruktionsteilen berücksichtigt werden muss. „Warum passt das hier nicht?“, war eine häufige Frage, die die Schülerinnen und Schüler stets konstruktiv zu lösen hatten. Schließlich waren alle stolz auf den gemeinsam konstruierten Fußball - jedoch waren noch genug Bausteine vorhanden, um fünf Stützsäulen an den Fußball zu bauen und damit einen richtigen Pokal zu erstellen. Hierzu brauchte es keine Anregung durch den AG-Leiter.

Kapitel 5

Evaluation des Förderkonzepts

Um eine möglichst valide Evaluation des Förderkonzepts zu erhalten, gehe ich multiperspektivisch vor und hole die Sichtweise der Schülerinnen und Schüler sowie ihrer Fachlehrerinnen und Fachlehrer ein. Darüber hinaus nutze ich den Lernstand 8, an dem alle Schülerinnen und Schüler der Mathematik-AG teilgenommen haben. Der Lernstand 8 bietet einerseits eine Ausweisung der Kompetenzen zu den jeweiligen Aufgaben. Andererseits kann die Korrelation zwischen den Schülerergebnissen beim Lernstand und der Teilnahme an der Mathematik-AG beschrieben werden und ein Vergleich zu den Lernstands-Ergebnissen der vergangenen drei Jahre der Schule hergestellt werden. Mir ist jedoch bewusst, dass eine objektive Evaluation durch Ein- und Ausgangstest, die das Förderkonzept der Mathematik-AG unabhängig vom Klassenunterricht und weiterer Einflussfaktoren herauslösen, nicht möglich ist. Ebenfalls ist anzumerken, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bezüglich ihrer Mathematikkenntnisse keine repräsentative Auswahl der Jahrgangsstufe darstellen. Die Lernstands-Ergebnisse der AG-Teilnehmer können im Vergleich zu früheren Lernstands-Ergebnissen der Schule daher lediglich als Indikator gesehen werden. Abschließend berichte ich in dieser Evaluation des Förderkonzepts über eigene Beobachtungen zu ausgewählten Forschungsfragen.

5.1 Schüler-Fragebogen

Insgesamt 10 Schülerinnen und Schüler haben zu Beginn des Schuljahres 2009/10 einen Eingangsbogen ausgefüllt, in dem ich nach motivationalen Aspekten gefragt habe („Warum machst Du gern Mathematik?“), nach inhaltlichen Themen und Wünschen für die Mathe-AG („Was macht Dir an der Mathematik Spaß?“ bzw. „Welche Themen möchtest Du gern in der Mathematik-AG behandeln?“). Eine exemplarische Auswahl der Schüleräußerungen findet sich im Anhang. Am Schuljahresende haben diese Schülerinnen und Schüler dann einen umfangreichen Evaluationsbogen ausgefüllt, um ein differenziertes Meinungsbild einzuholen. Hierbei mussten sie insgesamt 23 Aussagen in fünf Abstufungen von „Stimmt voll und ganz“ bis „Stimmt gar nicht“ bewerten bzw. sie konnten sich enthalten. Außerdem konnten sie in drei Sätzen beschreiben, warum sie an der Mathematik-AG teilnehmen. Die 23 Aussagen lassen sich den Kategorien *Motivation und AG-Atmosphäre* (Fragen a,b,d,e,f,w,x), *Kommunikationsfähigkeit und Selbstbewusstsein* (Fragen g,q,r,s,t,u), *Kreativität und Problemlösen* (Fragen c,h,i,j,k,p) sowie *inhaltlichen Themen* (Fragen l,m,n,o) zuordnen. Um Reihenfolge-Effekte zu vermeiden, wurden die Aussagen in eine zufällige Reihenfolge gebracht. Die Evaluationsbögen wurden von den Schülerinnen und Schülern außerhalb der Mathe-AG bearbeitet und mir anonym zurückgegeben. Die Ergebnisse dieser Schülerumfrage befinden sich im Anhang. An dieser Stelle werden zuerst die Ergebnisse beschrieben und dann wird auf ihre Bedeutung für die Kompetenzen *Argumentieren* und *Problemlösen* eingegangen.

5.1.1 Beschreibung der Umfrageergebnisse

Im Bereich *Motivation und AG-Atmosphäre* ist der Auswertung zu entnehmen, dass die Schülerinnen und Schüler den Aussagen „Die Mathe-AG macht mir Spaß„(Aussage a) und „Die Leitung der Mathematik-AG durch Herrn Reeker finde ich gut.“ (Aussage f) voll zustimmen. Desweiteren wird eindeutig die lockere und entspannte Atmosphäre in der Mathe-AG hervorgehoben (Aussage w) und betont, die Mathematik-AG voll und ganz weiterempfehlen zu können (Aussage v). Bei der etwas spezielleren Aussage b „Die Aufgaben innerhalb der Mathe-AG finde ich spannend und herausfordernd“ stimmen zwei Teilnehmerinnen und Teilnehmer mit leichter Einschränkung zu, die anderen voll und ganz. Darauf aufbauend folgen die Aussagen d und e, bei denen es um eine Unterforderung der Schülerinnen und Schüler im Unterricht und einer Überforderung in der Mathe-AG geht. Hier ist zu entnehmen, dass viele Teilnehmer im Unterricht teilweise unterfordert sind, aber in der Mathematik-AG auch manchmal an Grenzen stoßen. Einer Unterforderung im Unterricht stimmen immerhin drei voll und ganz sowie vier mit Einschränkung zu. In Bezug auf eine Überforderung in der Mathe-AG gibt es drei Schülerantworten im Mittelfeld, diese Schüler könnten schon einmal an persönliche Grenzen gestoßen sein.

In der Kategorie *Kommunikationsfähigkeit und Selbstbewusstsein* (vgl. Kap. 2.1 und 2.5) ging es vor allem darum, wie die Schülerinnen und Schüler mit Fragen und Diskussionen untereinander umgegangen sind (Aussagen q,r,s), und wie sie ihre Entwicklung einschätzen (Aussagen t,u,g). Hier ist insbesondere auffällig, dass es den Schülerinnen und Schülern leicht fiel, die Lehrperson zu fragen, denn alle stimmten der Aussage s „Ich konnte Herrn Reeker bei Schwierigkeiten immer fragen“ voll und ganz zu. Dies wurde jedoch mit Einschränkungen versehen, wenn sie untereinander das Gespräch suchen sollten. Einmal wurde sogar bemerkt, dass man Angst habe, andere Schüler zu fragen. Dies könnte auf eine gewisse Konkurrenzsituation der Schüler hindeuten bzw. auf die Angst, anderen ein Nicht-Wissen einzugestehen. Jedoch wurde der Aussage u „Die Diskussion mit den anderen Teilnehmern hat mich fachlich weitergebracht“ weitgehend zugestimmt (Durchschnitt 4.2). Ganz ähnlich wurde die Aussage g „Durch die Mathe-AG habe ich mich im mathematischen Argumentieren verbessert“ bewertet.

Im Aussagenfeld zum Thema *Kreativität und Problemlösen* geht es zuerst um freies und kreatives Arbeiten (Aussagen j und h). Hier stimmen sechs Schülerinnen und Schüler der Aussage „Mir hat das freie Arbeiten in der Mathe-AG gefallen“ voll und ganz zu, die übrigen vier haben die nächste Abstufung angekreuzt. Dieser Wunsch, auch im Unterricht mehr kreativ zu basteln und zu rätseln, wird entsprechend übertragen (Durchschnitt 4.2). Zum Problemlösen äußern sich die Teilnehmer in leichten Abstufungen: Die Aussage k „Ich habe Strategien gelernt, wie man mathematische Probleme lösen kann“ erreicht 4.8

Punkte, während die Aussage i „Mir fällt es durch die AG leichter, mich an unbekannte Probleme zu begeben“ immerhin noch 4.5 Punkte erreicht. Die langfristige Kompetenzerweiterung c „In der Mathe-AG habe ich meine Fähigkeit, mathematische Rätsel zu lösen, sehr erweitert“ erreicht durchschnittlich 4.4 Punkte. Auch wenn diese Unterschiede zwischen den Fragen sehr gering sind, ist doch erkennbar, dass sich einzelne Schülerinnen und Schüler hier differenziert geäußert haben.

Zu den spezielleren *inhaltlichen Themen* ist eine erhöhte Anzahl von Stimmenthaltungen auffällig. Dies könnte an der zeitlichen Begrenzung der jeweiligen Sequenzen und der Abwesenheit einzelner Schüler bei den entsprechenden Sitzungen liegen. Ansonsten kann man diesem Fragenteil vor allem entnehmen, wie beliebt die einzelnen Themen bei den Schülerinnen und Schülern waren. Besonders beliebt war hier der Polyeder-Baukasten (Aussage l), denn alle Schülerinnen und Schüler stimmten der Aussage „Das Experimentieren mit dem mathematischen Baukasten hat mir gefallen“ voll und ganz zu. Bei den Fragen zum Rubik Würfel (Aussage o) und zu den Wettbewerbsaufgaben (Aussage n) gab es leichte Abstufungen. Zur Aussage m „Ich habe gelernt, beim Rubik Würfel systematisch vorzugehen, um den Würfel zu lösen“ kann festgehalten werden, dass drei Schülerinnen und Schüler zumindest keine vollständige Lösung eigenständig erreichen konnten (insbesondere zwei Kreuze bei „Stimmt gar nicht“).

5.1.2 Bedeutung für die Kompetenz *Argumentieren*

Aus obiger Beschreibung der Kommunikationsfähigkeit und des Selbstbewusstseins ist zu entnehmen, dass es den Schülerinnen und Schülern bei schwierigen und herausfordernden Problemen deutlich schwerer fällt, den Mitschülern die eigenen Schwierigkeiten zuzugestehen, indem die Schwierigkeiten des Problems offengelegt werden, als die Lehrperson zu fragen. Im alltäglichen Unterricht dagegen hatte ich eher das Gefühl, dass sich die Schülerinnen und Schüler lieber selbst Fragen beantworten und bei größeren Problemen den Lehrer befragen. In der Mathematik-AG kann die bereits erwähnte Konkurrenzsituation von sehr guten Schülern verschiedener Klassen hierfür anfangs auch eine Ursache gewesen sein. Mit der einsetzenden lockeren und entspannten AG-Atmosphäre wurden jedoch auch diese Hürden beseitigt, so dass die Basis für mathematisches Argumentieren gelegt war. Hierzu sei auf die in Kapitel 2.1 erwähnte Plausibilitätsprüfung und das Erarbeiten von Argumentationsketten verwiesen. Die Aufgaben waren vielfältig so angelegt, dass die Schülerinnen und Schüler gezwungen waren, Lösungsideen und Schwierigkeiten zu kommunizieren. Diesbezüglich gaben die Schüler in der Bewertung der Aussage q an, dass es ihnen gefallen habe, anderen Mitschülern die eigene Lösung zu erläutern. Bei dieser Schülertätigkeit nahm der Gesprächspartner mehr und mehr eine kritische Prüfhaltung ein, so dass an die Qualität der Argumentationsketten nach und nach höhere Maßstäbe angelegt wurden. Insgesamt stimmten die AG-Teilnehmer weitgehend der Aussage zu, dass sie die Diskussionen mit den anderen Teilnehmern fachlich weitergebracht hätten. Dies mag als Verbesserung der Argumentationskompetenz gedeutet werden.

5.1.3 Bedeutung für die Kompetenz *Problemlösen*

Zur Problemlösekompetenz wurden bereits die durch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer in Abstufungen bewerteten Aussagen des Fragebogens beschrieben. Insgesamt liegt das Niveau der Schülerbewertungen der jeweiligen Aussagen zwischen 4.5 und 4.8. Dieses hohe Niveau macht deutlich, dass Schülerinnen und Schüler die Erfahrung gemacht haben, von ihnen als Probleme wahrgenommene Aufgabenstellungen wirklich durch eine Kombination bekannter und neuer Fertigkeiten selbständig bearbeiten zu können. Dies entspricht einer Förderung der in Kapitel 2.2 bzw. [KLP07] beschriebenen Problemlösekompetenz. Als Indiz sei hierfür die hohe Zustimmung zur Aussage „Mir fällt es durch die Mathe-AG leichter, mich an unbekannte Probleme zu begeben“ genannt.

5.2 Lehrer-Interviews

In regelmäßigen Abständen erkundigten sich die Fachlehrerinnen und Fachlehrer der AG-Schüler, wie sich ihre Schülerinnen und Schüler denn „so machen“. Sie fragten mich nach meinem Eindruck bzgl. der Begabung einzelner Schüler und umgekehrt konnte ich auch ausführlich erfragen, wie sich die Schüler im Fachunterricht verhalten und ob die Lehrer Unterschiede feststellen konnten. Hier möchte ich exemplarisch über eine Schülerin A. und einen Schüler D. berichten, über die ich sehr häufig mit den Fachlehrerinnen sprechen konnte.

5.2.1 Die Schülerin A.

Das folgende Gespräch über die Schülerin A. ergab sich am Schuljahresende. Ich fragte die Fachlehrerin, wie sich die Schülerin entwickelt habe, und ob sie Unterschiede erkennen könne, wie A. an Aufgaben herangehe und darüber kommuniziere. Darauf antwortete die Fachlehrerin:

„Die Schülerin A. war mir von Anfang an als ruhig und zurückhaltend aufgefallen. Sie ist aber interessiert und fleißig. Vielleicht liegt das auch am Elternhaus. Ihre Eltern kommen aus Ägypten. Sie hat noch 4 Schwestern, von denen noch eine an der Schule ist. Ihre Leistungen in den Klassenarbeiten im ersten Halbjahr waren gut, aber nicht sehr gut. Nach und nach ist mir aufgefallen, dass A. mehr und mehr aus sich herausgekommen ist. Sie ist sicherer geworden und hat sich mehr zugetraut. Im Unterricht hat sie sich deutlich mehr beteiligt und konnte sich auch besser ausdrücken. Vielleicht hatte sie sich vorher auch gerade deswegen weniger beteiligt, weil sie ihre Ideen nicht so gut ausdrücken konnte. Jedenfalls habe ich den Eindruck, dass bei ihr sozusagen der Knoten geplatzt ist. Sie hat sich in diesem Schuljahr einfach gut entwickelt. Mündlich und schriftlich steht sie nun im zweiten Halbjahr im Einser-Bereich.“

Insgesamt liegt die Folgerung nahe, dass der Schülerin A. die Teilnahme an der Mathematik-AG für den Mathematik-Klassenunterricht zugute kam. Sie ist selbstbewusster an die mathematischen Probleme herangegangen und konnte ihre Fähigkeiten im Argumentieren verbessern.

5.2.2 Der Schüler D.

Über den Schüler D. sagte mir die Fachlehrerin vor dem Start der Mathematik-AG

„Der D. ist seinen Klassenkameraden fachlich so weit voraus, ich weiß einfach nicht, was ich mit dem in der Unterrichtstunde machen soll. Wofür andere 20 Minuten brauchen, hat der in fünf Minuten locker erledigt. Dann fragt der ständig Sachen, wo die anderen noch nicht einmal die Frage verstehen. Darauf kann ich dann natürlich im Rahmen des Unterrichts nicht eingehen. Der ist so wissbegierig und lässt einfach nicht locker. Manchmal zeigt der 45 Minuten auf und nimmt den Arm gar nicht mehr 'runter, das ist echt anstrengend.“

Als der Schüler D. in die Mathe-AG kam, bestätigte sich auch mir der von der Lehrerin geschilderte Eindruck. In Gesprächen mit den anderen redete er ununterbrochen und ließ die anderen Schüler kaum ausreden. Jedoch pfegten wir einen respektvollen und sehr guten Umgang. Trotz des anfangs sehr auffälligen Verhaltens empfand ich ihn als freundlich. Wöchentlich tauschte ich mich mit der unterrichtenden Fachlehrerin aus. Ich fragte, wie sich D. im Unterricht verhalte und wie er sich mit welchen Ideen im Unterrichtsgespräch einbringe. Darauf antwortete sie:

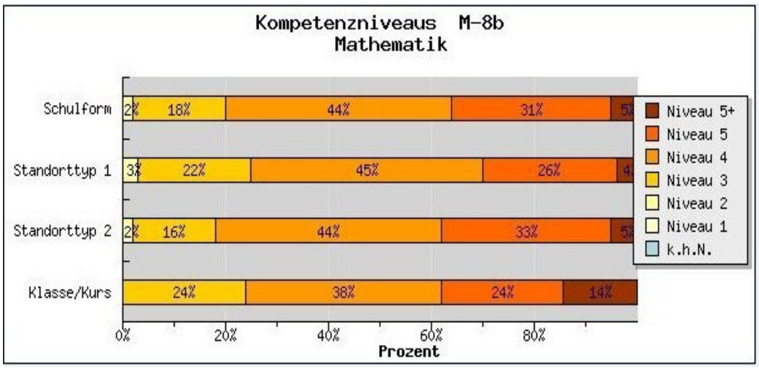
„Der D. ist ja total begeistert von Ihnen. Der hat mir erzählt, was Sie letzte Woche in Ihrer AG gemacht haben, und ist dann im Hoppsalauf in die Pause gegangen, einfach drollig. Der ist froh, dass er sich nun mit Gleichgesinnten über Mathematik austauschen kann, da hat er ja in der Klasse nicht die passenden Gesprächspartner gehabt. Ich merke, dass ihm das gut tut. Er ist im Unterricht gelassener geworden und kann sich besser konzentrieren. Vor allem ist es aber wichtig, dass der den Spaß bei der Sache behält, und ich den nicht ständig abwürgen muss. Natürlich müsste der mit seinem Übergewicht auch mal Sport machen, aber das ist 'ne andere Geschichte. Der D. ist einfach froh, dass er mit anderen über Mathematik und Knobelaufgaben sprechen kann.“

Beim Schüler D. hat das Angebot einer Mathematik-AG vor allem bewirkt, dass er durch eine Unterforderung im Klassenunterricht möglichen Negativerfahrungen ausgewichen ist. Er musste nicht „abgewürgt“ werden, sondern konnte sein Interesse am Fach Mathematik kanalisieren. Hier führte das Angebot einer Mathematik-AG dazu, dass D. bei der Weiterentwicklung seiner mathematischen Kompetenzen Argumentieren und Problemlösen nicht ausgebremst wurde. Zusätzlich hat er wertvolle soziale Erfahrungen gemacht, da er sich mit Schülerinnen und Schüler mathematisch auf Augenhöhe unterhalten konnte.

5.3 Vergleich mit den Ergebnissen des Lernstand 8

Auch die Schülerinnen und Schüler der Mathe-AG haben alle am Lernstand 8 [LS2010] im Schuljahr 2010 teilgenommen. Da im Lernstand 8 zentrale Kompetenzen geprüft werden, möchte ich die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler der Mathe-AG mit in diese Evaluation einfließen lassen. Von den 21 gestellten Aufgaben haben sich zwölf mit den Kompetenzen Argumentieren/Kommunizieren (Lesen, Begründen, Kommunizieren) beschäftigt. Bei elf Aufgaben kam die Kompetenz Problemlösen (Lösen, Erkunden, Reflektieren) zum Tragen. Vom Schulstandort liegt ein Gymnasium vom „Typ 1“ vor, d.h.

erhöhter Schüleranteil mit Migrationshintergrund, weniger Akademikerfamilien, eher geringer Wohnwert im Wohnumfeld der Schüler. In den Jahren 2007-2009 war die Jahrgangsstufe 8 der Schule stets signifikant schlechter als die Vergleichsgruppe der Schulform, sogar in allen Jahren signifikant schlechter als die Vergleichsgruppe der Gymnasien vom Standorttyp 1. Insbesondere erreichten im Vergleich mit anderen Schulen der Schulform weniger Schülerinnen und Schüler das Niveau 5 bzw. 5+, also das höchste erreichbare Niveau.



In diesem Jahr erreichten die Schülerinnen und Schüler der Schule bessere Ergebnisse. Insbesondere unterschieden sie sich nicht signifikant von den Vergleichsgruppen, auch nicht vom Standorttyp 2. Ich möchte dies nicht als belastbaren Beweis für die Einrichtung einer Mathematik-AG darstellen.

Durch Nachfragen bei den Fachlehrern der AG-Teilnehmer ergab sich, dass sechs Schülerinnen und Schüler der Mathe-AG das höchste Kompetenzniveau 5+ erreichten. Die anderen vier erlangten das nächsthöhere Niveau 5. Es gab jedoch auch einen Schüler, der das Kompetenzniveau 5+ erreichte und nicht an der Mathe-AG teilnahm. Insgesamt ist jedoch auffällig, dass die Schülerinnen und Schüler der Mathematik-AG ein besonders hohes Kompetenzniveau beim Lernstand 8 erreichten und damit zum erfolgreichen Abschneiden der Jahrgangsstufe beitrugen. Das nebenstehende Diagramm zeigt exemplarisch die Schülerergebnisse der Klasse 8b. In dieser Klasse erreichten drei Schülerinnen und Schüler das Kompetenzniveau 5+, zwei von ihnen waren AG-Teilnehmer. Insgesamt kamen die Schülerinnen und Schüler der Mathe-AG aus vier parallelen achten Klassen. Ihre Ergebnisse beim Lernstand 8 waren stets an der Klassenspitzte angesiedelt. Umgekehrt besuchten die besten Schülerinnen und Schüler der jeweiligen Klassen die Mathematik-AG. Es besteht also eine Korrelation zwischen dem Besuch der Mathe-AG und gutem Abschneiden beim Lernstand 8. Jedoch lässt sich nicht schließen, ob lediglich sehr gute Schülerinnen und Schüler die Mathe-AG besuchen oder das Abschneiden beim Test vom Besuch der Mathe-AG herrührt.

5.4 Eigene Beobachtungen

Bei meinen eigenen Beobachtungen habe ich mich im Laufe des Schuljahres vor allem auf die Frage konzentriert, wie sich das Argumentations- und Kommunikationsverhalten der Schülerinnen und Schüler untereinander entwickelt hat. Am Anfang des Schuljahres waren die Schülerinnen und Schüler noch abwartend zurückhaltend und auf mich fixiert. Teilweise kannten sich die SuS noch nicht, da diese aus vier verschiedenen Parallelklassen kamen. Darüber hinaus waren sie sehr auf die ihnen vorgelegten Aufgabenblätter fixiert und versuchten, Probleme erst einmal selbst zu lösen. Die Gespräche mit den Mitschülern waren eher auf einer formalen als auf einer inhaltlichen Ebene („...warum rechnest du da mal drei?“). Mit schwieriger werdenden Aufgaben merkten sie jedoch, dass sie allein vermutlich nicht alles lösen konnten. Nachdem jeder erst einmal für sich arbeiten konnte, begann eine konstruktive Austauschphase. Hier wurden Überlegungen zum strategischen Vorgehen angestellt („Wie können wir hier am besten vorgehen?“) und verschiedene Ideen diskutiert. An dieser Stelle war mir besonders wichtig, dass nicht nur die eigene Idee der Gruppe mitgeteilt wird, sondern vielmehr auch die Ideen der anderen aufgegriffen und weiterentwickelt werden. An dieser Stelle kam es jedoch dazu, dass der bereits erwähnte Schüler D. versuchte, seine Ideen den anderen Schülern aufzuzwingen. Andererseits war er aber nicht im gleichen Maße bereit, den anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern zuzuhören und deren Ideen aufzugreifen. Er nahm also die Rolle des *dominant initiator* ein (vgl. Kapitel 2.5). Hinzu kam, dass er ungeduldig wurde, wenn andere Schüler seine Ideen intensiver hinterfragten und auf Plausibilität prüften. Ich habe dies zum Anlass genommen, mit dem Schüler D. unter vier Augen darüber zu sprechen. Durch regelmäßiges Feedback konnte ich erreichen, dass sich sein auffälliges Verhalten nachhaltig verändert hat.

In eine auf Zusammenarbeit ausgelegte konstruktive Austauschphase begaben sich acht der zehn Schülerinnen und Schüler. Sie entwickelten ein respektvolles Kommunikationsverhalten, bei dem jeder Ideen beisteuern konnte und jeder bereit war, Ideen der anderen aufzunehmen. Dieses Verhalten zeigte sich vor allem bei den Lösungsstrategien beim Rubik-Würfel. Hier wurde intensiv über die anstehenden strategischen Züge diskutiert. Die Schülerin A. zeigte hier ein besonderes Einfühlungsvermögen und setzte sich neben ihre Mitschüler, um diese individuell bei den einzelnen Zügen zu beraten. Ihr Coaching führte dazu, dass die meisten Schülerinnen und Schüler bei diesem Problem Erfolgserlebnisse aufweisen konnten. Die kommunikativen Rollen dieser Schülerinnen und Schüler während der kooperativen Phasen lassen sich im Sinne von Kapitel 2.5 als *collaborative initiator* und *collaborative evaluator* beschreiben. Im Laufe des Schuljahres konnte ich feststellen, dass sich diese kommunikativen Rollen von selbst stabilisieren. Die Schülerinnen und Schüler beschäftigten sich zunehmend selbstbestimmt mit den Aufgaben und Problemen und benötigten mit der Zeit wesentlich weniger Impulse von mir. Für das Argumentationsverhalten bedeutete dies, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer zunehmend komplexere Argumentationsketten aufbauten und die Argumente der Mitschüler kritisch hinterfragten (vgl. Kap. 2.1).

Leider musste ich auch beobachten, wie ein AG-Teilnehmer die Rolle des *insecure concilliator* einnahm, wobei besonders das Merkmal „unsicher“ betont sei. Durch Beobachtungen konnte ich erfahren, dass dieser im Klassenunterricht sonst gute Schüler durch die komplexeren Aufgabenformate und die möglicherweise subjektiv wahrgenommene Konkurrenzsituation in der Mathe-AG Schwierigkeiten hatte, sich auf die Probleme einzulassen. Er wurde zunehmend unsicherer, und auch zusätzliche Impulse und Hilfen von meiner Seite brachten oft keinen Erfolg. Entsprechend elementar entwickelten sich seine Argumentationsketten.

Kapitel 6

Ausblick und Fazit

Nachdem die Resonanz auf die Mathematik-AG im Schuljahr sehr groß war, entschloss ich mich, die AG auf die Jahrgangsstufen 8 und 9 auszuweiten, um einerseits den interessierten ehemaligen Achtklässlern weiterhin die Möglichkeit eines mathematischen Angebots zu geben und gleichzeitig ein Angebot für die neuen Schülerinnen und Schüler bereit zu halten. Zu Beginn des Schuljahrs 2010/11 mussten jedoch 5 AG-Teilnehmer absagen, da sie als G8-Kandidaten in der Jahrgangsstufe 9 einen vollen Stundenplan hatten, und zwar montags bis donnerstags durchgängig 7 Stunden und freitags bis zur 5. Stunde. Da die AG freitags nicht vor die siebte Stunde gezogen werden konnte, waren hier Grenzen gesetzt. Nach den Herbstferien konnten desweiteren eine Schülerin und ein Schüler nicht mehr an der AG teilnehmen, da nun freitags in der 7. Stunde Klassenunterricht anstand. Für diese insgesamt sieben Schülerinnen und Schüler plane ich ein „Aufgabe und Keks"-Projekt für die 5-Minuten-Pause zwischen fünfter und sechster Stunde. Diese AG-Teilnehmer sind interessiert und mittlerweile selbständig genug, um sich mit einigen kniffligen Aufgaben zu beschäftigen und untereinander auszutauschen. Um die Teilnehmer nicht als „Streber" darzustellen, sondern als gute Schüler anzuerkennen, wird die Aufgabe mit einem Keks kombiniert, nach einem langen Schultag erfahrungsgemäß gern genommen. Erfreulich ist, dass zwei neue Achtklässler zur AG hinzugekommen sind und weiteres Interesse in der Jahrgangsstufe besteht. In der AG-Stunde hat sich bisher bestätigt, dass die alten Teilnehmer den neuen gern Aufgaben erklären. Ansonsten halte ich stets Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrads bereit, um auch die Neuntklässler zu fordern.

Als Fazit möchte ich sagen, dass die AG-Teilnehmer das zusätzliche Förderangebot interessiert aufgenommen und als sehr wertvoll empfunden haben. Die Mischung aus fordernden Problemen einerseits und der offenen Beschäftigung in kooperativen Lernformen mit intensiven Kommunikations- und Argumentationsprozessen eignet sich besonders für interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler. Jedoch muss man als Lehrperson darauf achten, welche kommunikativen Rollen die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einnehmen. In jedem Fall sollte eine mittelfristige Überforderung und damit das Entstehen von Frustration verhindert werden.

Übertragbar ist das beschriebene Förderkonzept auch auf höhere Jahrgangstufen bis in die Oberstufe hinein. Hier können die spielerischen Phasen beim Polyeder-Bau durch theoretische Sequenzen zu (halb-)regulären Polyedern ersetzt werden. Insbesondere kann ein starker Bezug zur analytischen Geometrie hergestellt werden. Auch der anschaulich gewonnene Gruppenbegriff kann axiomatisch vertieft werden.

Schwierigkeiten und Grenzen des Förderkonzepts der beschriebenen Mathematik-AG sehe ich hinblicklich der Teilnehmerzahlen und des Leistungsniveaus der Teilnehmer. Bei einer Kursgröße von 30 Teilnehmern könnte die beschriebene intensive Förderung nicht geleistet werden. Auch muss man bei heterogenen Lerngruppen vermehrt darauf achten, leichtere Aufgabenformate bereitzuhalten, da es sehr wichtig ist, beim Problemlösen und beim Argumentieren mit Hilfe leichter Aufgaben die notwendige Sicherheit zu gewinnen. Mit der Zeit verspüren die Teilnehmer dann von selbst die Lust, auch „höhere Berge“ zu besteigen.

Literaturverzeichnis

[Blum06] Werner Blum, Christina Drüke-Noe, Ralph Hartung, Olaf Köller (Hrsg.), Bildungsstandards Mathematik: konkret, Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen, Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB), Cornelsen Scriptor Berlin, 2006.

[Bovet08] Gislinde Bovet und Volker Huwendiek (Hrsg.), Leitfaden Schulpraxis - Pädagogik und Psychologie für den Lehrberuf, 5. Auflage, Cornelsen Verlag Scriptor, 2008.

[Fthe09] Wassilios Fthenakis, Ko-Konstruktion: Lernen durch Zusammenarbeit, „Natur-Wissen schaffen" - ein Projekt der Deutsche Telekom Stiftung an der Universität Bremen, erschienen in: Elternzeit 3-2009.

[Gagne69] R.M. Gagne, Die Bedingungen des menschlichen Lernens, Schroedel Verlag, Hannover 1969.

[HeHu03] Lisa Hefendehl-Hebeker, Stephan Hußmann, Beweisen-Argumentieren, in: Mathematikdidaktik (Hrsg. Leuders)- Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, Cornelsen Scriptor Berlin, 2003.

[Loyd07] Sam Loyd, Die kniffeligsten mathematischen Rätsel - Neue Denksportaufgaben für kluge Köpfe. Herausgegeben von Hans Landolin, Verlag Dumont, 2007.

[LS2010] Zentrale Lernstandserhebung in der Jahrgangsstufe 8 im Jahr 2010, Testentwicklung: Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) Berlin, MSW NRW (Hrsg.), 2010.

[Klix71] F. Klix, Information und Verhalten, Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.

[KLP07] Kernlehrplan Mathematik für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein Westfalen, Heft 3401 (G8), herausgegeben vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein Westfalen, Ritterbach Verlag Frechen, 2007.

[Leuders03] Timo Leuders et. al., Mathematikdidaktik - Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, Cornelsen Scriptor Berlin, 2003.

[Polyá95] George Polyá, Schule des Denkens - Vom Lösen mathematischer Probleme, Francke Verlag Tübingen und Basel, Vierte Auflage, 1995.

[Polyá69] George Polyá, Mathematical Discovery, On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving, 1969.

[ReeMül01] Holger Reeker und Eike Müller, Mathe ist cool! - Eine Sammlung mathematischer Probleme, Cornelsen Verlag Berlin 2001.

[RuCu10] Rubik's Cube Solution Guide, You can do the Rubik's cube - Unlock the secret, `http://www.YouCanDoTheCube.com`, 2010.

[RV2004] BASS 20-03 Nr. 21: Rahmenvorgabe für den Vorbereitungsdienst in Studienseminar und Schule, RdErl. des Ministeriums für Schule, Jugend und Kinder v. 1.7.2004 (ABI. NRW. S. 242)

[SchulG10] Schulgesetz des Landes Nordrhein-Westfalen (Schulgesetz NRW-SchulG) vom 15. Februar 2005 (GV.NRW.S. 102) zuletzt geändert durch Gesetz vom 17. Dezember 2009 (GV.NRW.S. 863), Stand: 15.2.2010.

[Sutter09] Tilmann Sutter, Interaktionistischer Konstruktivismus - Zur Systemtheorie der Sozialisation, VS Verlag für Sozialwissenschaften, Wiesbaden, 2009.

[Tatsis04] Konstantinos Tatsis und Eugenia Koleza, The effect of students' roles on the establishment of shared meanings during problem solving, Proc. of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 4 pp. 289–296, 2004.

[Winter83] Heinrich Winter, Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, S. 37-46, 1996.

[Zech78] Friedrich Zech, Grundkurs Mathematikdidaktik - Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen im Fach Mathematik, Beltz Verlag, Weinheim und Basel, 2. Auflage 1978.

[Zeitz99] Paul Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

Abbildungsverzeichnis

Anhang A: Schülerfragebögen

Auf den folgenden Seiten geht es um eine kurze Eingangsbefragung der Schülerinnen und Schüler zur eigenen Einstellung hinblicklich des Fachs Mathematik. Der für die Evaluation bedeutendere Fragebogen ist der darauf folgende Ausgangsbogen, bei dem die Schülerinnen und Schüler 23 Aussagen in Abstufungen bewerten sollten. Danach sollten sie sich in offener Form zur Teilnahmemotivation äußern.

Wünsche und Erwartungen im Eingangsbogen

In der ersten Sitzung der Mathematik-AG sollten die Schülerinnen und Schüler zwei Fragen zur eigenen mathematischen Motivation und zu den Themenwünschen in der Mathematik-AG beantworten. Es folgen einige exemplarische Antworten.

„Was macht dir an der Mathematik Spaß?“

- Gleichungen, Dreisatz
- Das Lösen von komplizierten Aufgaben durch logisches Denken
- praktische Anwendungen, Experimente
- Formeln
- Dass es nur eine Lösung gibt
- Verschiedene Sachen, wo man knobeln kann und auch Denksportaufgaben

„Welche Themen möchtest du gern in der Mathematik-AG behandeln?“

- Mathematikwettbewerbsaufgaben
- Denksportaufgaben
- Das Lösen eines Zauberwürfels auf einfachem mathematischem Wege
- Das Lösen alltäglicher Probleme durch Mathematik
- Gewinnstrategien bei Spielen
- Wie man das Volumen eines Kegels ausrechnen kann
- etwas über die Zahl π

Auswertung des Multiple-Choice-Teils im Ausgangsbogen

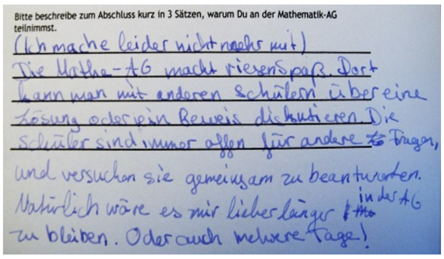
Die Schülerinnen und Schüler konnten die folgenden 23 Fragen in 5 Abstufungen von *„Stimmt voll und ganz“* (=5) bis *„Stimmt gar nicht“* (=1) bewerten bzw. konnten sich enthalten (=e). In der letzten Spalte ist das arithmetische Mittel der gegebenen Stufen notiert (d=Durchschnitt).

	Aussage	5	4	3	2	1	e	d
a	„Die Mathe-AG macht mir Spaß.	10						5.0
b	„Die Aufgaben innerhalb der Mathe-AG finde ich spannend und herausfordernd.“	8	2					4.8
c	„In der Mathe-AG habe ich meine Fähigkeit, mathematische Rätsel zu lösen, sehr erweitert.“	4	6					4.4
d	„Im Mathematik-Unterricht fühle ich mich manchmal unterfordert.“	3	5	1			1	4.22
e	„In der Mathematik-AG fühle ich mich manchmal überfordert.“			3	4	2	1	2.11
f	„Die Leitung der Mathematik-AG durch Herrn Reeker finde ich gut.“	10						5.0
g	„Durch die Mathe-AG habe ich mich im mathematischen Argumentieren verbessert.“	1	7	1			1	4.0
h	„Im Mathematik-Unterricht würde ich gern mehr kreativ basteln und rätseln.“	4	4	2				4.2
i	„Mir fällt es durch die Mathe-AG leichter, mich an unbekannte Probleme zu begeben.“	5	5					4.5
j	„Mir hat das freie Arbeiten in der Mathe-AG gefallen.“	6	4					4.6
k	„Ich habe Strategien gelernt, wie man mathematische Probleme lösen kann.“	8	2					4.8
l	„Das Experimentieren mit dem mathematischen Baukasten zum Bau eines Fußballs hat mir gefallen.“	8					2	5.0
m	„Ich habe gelernt, beim Rubik Würfel systematisch vorzugehen, um den Würfel zu lösen.“	6		1		2	1	3.89
n	„Ich fand die Aufgaben vom Dortmunder Mathematik-Wettbewerb interessant.“	4	6					4.4
o	„Beim Rubik Würfel habe ich mit den anderen Schülern über die Lösungsstrategien diskutiert.“	5	2				3	4.71
p	„Im Laufe des Schuljahres konnte ich bei Knobelaufgaben immer schneller die Aufgabenstellung verstehen.“	4	4	2				4.2
q	„Mir hat es gefallen, anderen Schülern meine Lösung zu erläutern.“	4	4	2				4.2
r	„Ich hatte keine Angst, andere Schüler zu fragen, wenn ich etwas nicht verstanden hatte.“	4	4	1		1		4.0
s	„Ich konnte Herrn Reeker bei Schwierigkeiten immer fragen.“	10						5.0
t	„Durch die Mathe-AG bin ich selbstsicherer geworden.“	2	6				2	4.25

	Aussage	5	4	3	2	1	e	d
u	„Die Diskussion mit den anderen Teilnehmern hat mich fachlich weitergebracht.“	3	6	1				4.2
v	„Ich würde die Mathe-AG guten Schülerinnen und Schülern weiterempfehlen.“	10						5.0
w	„Die Atmosphäre in der Mathe-AG war locker und entspannt.“	10						5.0

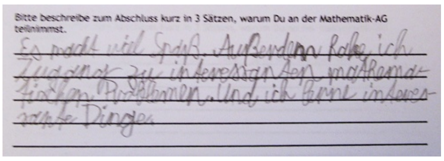
Auswertung der Frage zur Teilnehmermotivation im Ausgangsbogen

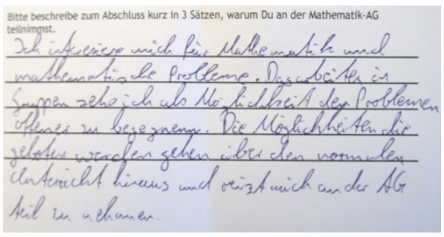
Auf dem Schülerfragebogen gab es zum Schluss die Möglichkeiten, sich zur eigenen Motivation für die Teilnahme zu äußern: „Bitte beschreibe zum Abschluss kurz in 3 Sätzen, warum Du an der Mathematik-AG teilnimmst.“ Nicht alle Schülerinnen und Schüler nutzten diese Möglichkeit der Äußerung, die folgenden Abgaben präsentieren eine Auswahl.



„(Ich mache leider nicht mehr mit.) Die Mathe-AG macht riesen Spaß. Dort kann man mit anderen Schülern über eine Lösung oder einen Beweis diskutieren. Die Schüler sind immer offen für andere Fragen, und versuchen sie gemeinsam zu beantworten. Natürlich wäre es mir lieber länger in der AG zu bleiben. Oder auch mehrere Tage!“

„Es macht viel Spaß. Außerdem habe ich Zugang zu interessanten mathematischen Problemen. Und ich lerne interessante Dinge.“





„Ich interessiere mich für Mathematik und mathematische Probleme. Das Arbeiten in Gruppen sehe ich als Möglichkeit, den Problemen offener zu begegnen. Die Möglichkeiten, die geboten werden, gehen über den normalen Unterricht hinaus und reizen mich, an der AG teilzunehmen.“

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit eigenständig verfasst, keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt und die Stellen der Arbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen sind, in jedem einzelnen Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe. Das Gleiche gilt auch für beigegebene Zeichnungen, Kartenskizzen und Darstellungen. Anfang und Ende von wörtlichen Textübernahmen habe ich durch An- und Abführungszeichen, sinngemäße Übernahmen durch direkten Verweis auf die Verfasserin oder den Verfasser gekennzeichnet.

Dortmund, 5. Dezember 2010
Dr. Holger Reeker

Ich bin damit einverstanden, dass diese Hausarbeit nach Abschluss meiner Zweiten Staatsprüfung wissenschaftlich und pädagogisch interessierten Personen oder Institutionen zur Einsichtnahme zur Verfügung gestellt wird und dass zu diesem Zweck Ablichtungen dieser Hausarbeit hergestellt werden, sofern diese keine Korrektur- oder Bewertungsvermerke enthalten.

Dortmund, 5. Dezember 2010
Dr. Holger Reeker