

## Genauere Torsionskenngrößen von UPE- und UAP-Profilen auf Grundlage der FE-Methode

Matthias Kraus

### 1 Einleitung

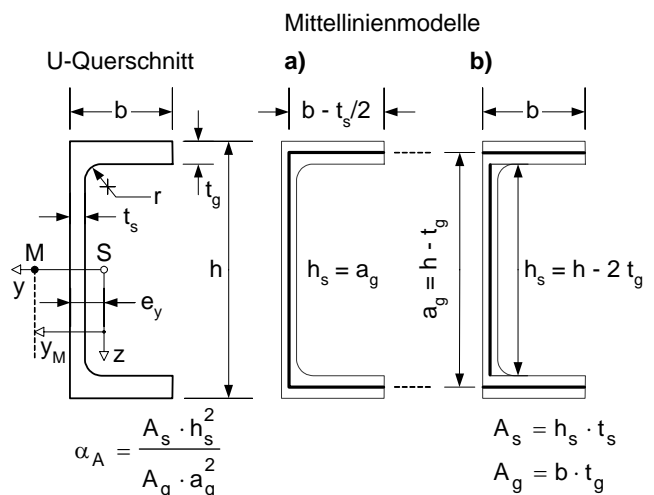
Für die statische Analyse von Stabtragwerken ist die Kenntnis der Querschnittskennwerte von grundlegender Bedeutung. Da für gewalzte Querschnittsformen keine analytischen Lösungen vorliegen, werden sie, zur Bestimmung der Torsionskenngrößen, häufig als dünnwandige Querschnitte (Mittellinienmodell) betrachtet. Mit Hilfe von weggroßenorientierten Vorgehensweisen erlauben aktuelle Entwicklungen eine exakte Bestimmung der Kennwerte. So werden von *Wagner/Sauer/Gruttmann* in [3] für eine Vielzahl von gewalzten Querschnitten genaue Kenngrößen angegeben. Eine vollständige Zusammenstellung der genauen Lösungen für U-Profile mit parallelen Flanschflächen liegt jedoch noch nicht vor, wobei in [2] die UPE-Reihe bereits betrachtet worden ist. Mit dem von *Kraus* in [2] formulierten Verfahren basierend auf der Finite-Elemente-Methode, das unter anderem die genauen Torsionskenngrößen beliebiger Querschnittsformen liefert, werden diese hier für die UPE- und UAP-Reihe bereitgestellt.

### 2 Bezeichnungen

x	Stablängsrichtung
y, z	Hauptachsen in Querschnittsebene
$\omega$	normierte Wölbordinate
$\bar{\omega}$	Wölbordinate bezüglich eines Drehpunktes D
S	Schwerpunkt
M	Schubmittelpunkt
D	beliebiger Drehpunkt
u	Verschiebung in x-Richtung (auch Verwölbung)
$\bar{u}$	Verwölbung bezüglich eines Punktes D
$\vartheta'$	Verdrillung
G	Schubmodul
A	Querschnittsfläche
$I_\omega$	Wölbwiderstand
$I_T$	Torsionsträgheitsmoment
$\eta, \zeta$	dimensionslose, normierte Koordinaten
$N_i$	Formfunktion des Knotens i
$\underline{n}$	Vektor der Formfunktionen
$\partial \underline{n} / \partial y$	Vektor der abgeleiteten Formfunktionen nach y
$\underline{y}, \underline{z}$	Vektor der Elementkoordinaten y bzw. z
$\underline{u}^{(e)}$	Vektor der Knotenverschiebungen eines Elements
$\underline{\omega}$	Vektor der Wölbordinaten des Querschnitts
$\underline{K}^{(e)}, \underline{K}$	Element- und Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\underline{f}_s^{(e)}, \underline{f}_s$	Element- und Gesamtlastvektor
$\det(\underline{J})$	Jacobi-Determinante (Koordinatentransformation)
W	Arbeit
$\partial \phi / \partial y$	partielle Ableitung nach y
$\delta \phi$	virtuelle Zustandsgröße

### 3 Formeln zur Berechnung der Kennwerte

Torsionskenngrößen für UPE- und UAP-Profile werden z.B. in [1] von *Kindmann/Frickel* bzw. [4] von *Schneider-Bürger* angegeben. Die Lage des Schubmittelpunktes  $y_M$ , der Wölbwiderstand  $I_\omega$  sowie die maximale Wölbordinate  $\max \omega$ , die für die Berechnung von Wölbnormalspannungen von Interesse ist, werden mit Hilfe des Mittellinienmodells eines Querschnitts bestimmt, s. Modell a) in Bild 1. In [7] wird ein neues Mittellinienmodell vorgestellt (Bild 1, Modell b), das für die Kennwerte der UPE und UAP-Reihe, im Vergleich zur genauen Lösung, zu besseren Ergebnissen führt.



**Bild 1** U-Querschnitt und Idealisierung durch Mittellinienmodelle

Mit Hilfe des Mittellinienmodells b) aus Bild 1 und der Normierung, wie sie in [1] ausführlich beschrieben wird, ergeben sich für die Kennwerte folgende Bestimmungsgleichungen:

$$y_M = a_M + e_y - \frac{t_s}{2} \quad \text{mit} \quad a_M = \frac{b - t_s}{2 + \alpha_A / 3} \quad (1)$$

$$I_\omega = \frac{A_g \cdot a_g^2}{24 + 4 \cdot \alpha_A} \cdot \left[ b^2 + \alpha_A \cdot \left( \frac{2 \cdot b^2}{3} - b \cdot t_s + \frac{t_s^2}{2} \right) \right] \quad (2)$$

$$\max \omega = \left[ (b - t_s / 2) - a_M \right] \cdot a_g / 2 \quad (3)$$

Durch die Mittellinienmodelle (Theorie dünnwandiger Querschnitte) können weder der Einfluss der Dicke eines Blechs noch der der Walzausrundungen erfasst werden.

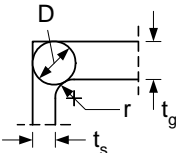
Die Berechnung des Torsionsträgheitsmoments geht auf einen Ansatz von *Trayer/March* [5] zurück. Dabei wird die

erhöhte Torsionssteifigkeit im Bereich der Walzausrundungen durch zusätzliche Ersatz-Torsionssteifigkeiten  $\alpha \cdot D^4$  näherungsweise erfasst, wobei  $D$  der Durchmesser des größten einbeschriebenen Kreises ist, s. Tabelle 1. Zudem wird mit dem Term  $0,4 \cdot t_g / b$  die geringere Torsionsträgheit im Bereich der freien Gurtenden berücksichtigt. Für einen dünnwandigen, rechteckigen Teilquerschnitt, der zwei freie Enden aufweist, ergibt sich der Faktor zu  $0,63 \cdot t_g / b$  (anstelle von  $0,4 \cdot t_g / b$ ). Häufig wird dieser Faktor für U-Profile halbiert, also mit  $0,315$  angesetzt, da jeder Gurt des U-Profils nur ein freies Ende aufweist. Bei genauerer Betrachtung der Schubspannungsverteilungen wird jedoch deutlich, dass an den Gurtenden, an denen der Steg anschließt, ebenfalls eine geringe Abminderung vorhanden sein muss. Um dies zu erfassen wird hier der Faktor  $0,4$  vorgeschlagen, der insbesondere für die UAP-Reihe zu besseren Ergebnissen führt.

**Tabelle 1** Torsionsträgheitsmoment für U-Profile

$$I_T = \frac{2}{3} \cdot b \cdot t_g^3 \cdot \left( 1 - 0,4 \cdot \frac{t_g}{b} \right) + \frac{1}{3} \cdot t_s^3 \cdot (h - 2 \cdot t_g) + 2\alpha D^4$$

$$D = 2 \cdot (t_g + t_s + 3 \cdot r) - \sqrt{8 \cdot (t_g + 2 \cdot r) \cdot (t_s + 2 \cdot r)}$$

$$\alpha = \left( 0,07 \frac{r}{t_g} + 0,076 \right) \cdot \frac{t_s}{t_g}$$


#### 4 Finite-Elemente-Methode

Die ausführliche Darstellung und Herleitung des hier angewandten Finite-Elemente-Verfahrens kann [2] entnommen werden. Die hier aufgeführten Gleichungen und Formulierungen sollen vielmehr einen gewissen Überblick verschaffen.

Zur Bestimmung der Kenngrößen wird der reine Schubspannungszustand der *St. Venantschen* Torsion (Primärer Zustand) betrachtet. Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen lässt sich für beliebige, dickwandige Querschnittsformen folgende virtuelle Arbeit herleiten:

$$\delta W = - \int_A \mathbf{G} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \right)}_{=\delta W_u} \cdot dA$$

$$- \int_A \mathbf{G} \cdot \underbrace{\left( (y - y_M) \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} - (z - z_M) \cdot \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} \right)}_{=\delta W_{\vartheta'}} \cdot \vartheta' \cdot dA = 0$$

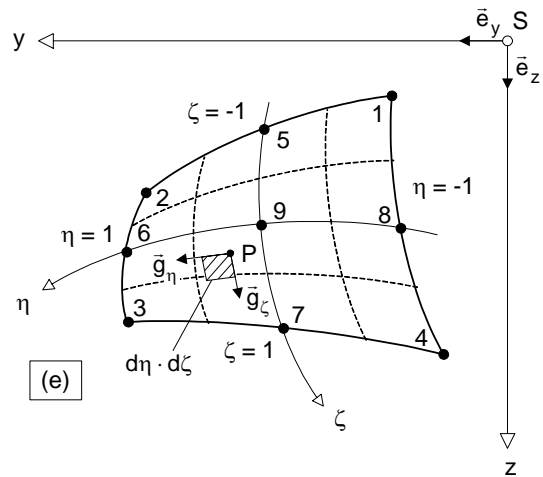
(4)

Dieser Ausdruck setzt sich aus zwei Anteilen zusammen (Verwölbungsanteil  $\delta W_u$ , Verdrillungsanteil  $\delta W_{\vartheta'}$ ). Beide Anteile müssen im Gleichgewicht stehen, d.h., durch Vorgabe einer Verdrillung  $\vartheta'$  kann die sich einstellende Querschnittsverwölbung  $u$  bestimmt werden. Zu dieser Verwölbung (primäre Torsionstheorie) korrespondiert die normierte Wölbordinate, der Einfluss sekundärer Schubverwölbungen wird somit als vernachlässigbar klein angenommen.

Es wird eine isoparametrische Elementformulierung angewandt, bei der die Geometrie und die Verwölbungen über die gleichen Formfunktionen  $N$  approximiert werden, s. Bild 2. Es kommen die so genannten *Lagrangeschen* Interpolationspolynome zum Einsatz, wobei für die hier durchgeführten Berechnungen der biquadratische Ansatz (9-Knotenelement) Berücksichtigung findet. Der allgemeine Verschiebungsansatz sowie die Transformationsbeziehungen zur Abbildung der Elementgeometrie lauten:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_9 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(e)} \quad (5a)$$

$$\mathbf{y} = \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{y}} \quad , \quad \mathbf{z} = \underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{z}} \quad (5b, c)$$



**Bild 2** Abbildung eines Elementes

Durch Einführung des Verschiebungsansatzes (5a) in die virtuelle Arbeit, Abbildung der Elementgeometrie im element-spezifischen  $\eta$ - $\zeta$ -System (5b, c) sowie der Transformation des Bereichsdifferentials  $dA$  in  $d\eta \cdot d\zeta$  ergeben sich aus der virtuellen Arbeit (4) folgende Beziehungen, mit Hilfe derer die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementlastvektor bestimmt werden können:

$$-\delta W_u = \delta \underline{\mathbf{u}}^{(e)T} \cdot \mathbf{G}$$

$$\cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}^T}{\partial z} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}}{\partial z} + \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}^T}{\partial y} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}}{\partial y} \right) \cdot \det(\mathbf{J}) \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(e)} \quad (6)$$

$$= \delta \underline{\mathbf{u}}^{(e)T} \cdot \underline{\mathbf{K}}^{(e)} \cdot \underline{\mathbf{u}}^{(e)}$$

$$-\delta W_{\vartheta'} = \delta \underline{\mathbf{u}}^{(e)T} \cdot \mathbf{G}$$

$$\cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{l} [(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{y}}) - y_D] \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}^T}{\partial z} \\ - [(\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{z}}) - z_D] \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{n}}^T}{\partial y} \end{array} \right\} \cdot \det(\mathbf{J}) \cdot d\eta \cdot d\zeta \cdot \vartheta' \quad (7)$$

$$= \delta \underline{\mathbf{u}}^{(e)T} \cdot \underline{\mathbf{f}}_{\vartheta'}^{(e)} \cdot \vartheta'$$

Mit dem Ersetzen von  $u$  durch  $\bar{u}$  (Hinzufügen des Querstrichs) soll verdeutlicht werden, dass sich die Verwölbungen der Gln. (6) und (7) auf einen beliebigen Drehpunkt  $D$  beziehen. Die auftretenden Integrationen lassen sich im Allgemeinen nicht analytisch lösen, weshalb auf eine numerische Integration übergegangen werden muss. Für die Steifigkeitsbeziehung eines Elements ergibt sich:

$$-\delta \bar{u}^{(e)T} \cdot \underline{K}^{(e)} \cdot \bar{u}^{(e)} - \delta \bar{u}^{(e)T} \cdot \underline{f}_{g'}^{(e)} \cdot g' = 0 \tag{8}$$

Für einen Querschnitt, der sich aus mehreren Elementen zusammensetzt, erfolgt der Zusammenbau der Element-Steifigkeitsbeziehungen. Zur Ermittlung des Lastterms ist die Vorgabe einer einheitlichen Verdrillung  $g'$ , d.h. der gleichen Verdrillung für jedes Element, notwendig. Es gilt:

$$u = -\omega \cdot g' \Rightarrow \bar{u} = -\bar{\omega} \cdot g' \Rightarrow \text{für } g' = -1: \bar{u} = \bar{\omega} \tag{9}$$

Somit kann unter Vorgabe der Verdrillung  $g' = -1$  die Wölbordinate  $\bar{\omega}$  bezüglich eines beliebigen Drehpunktes bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Beziehung (9) ergibt sich die Gesamtsteifigkeitsbeziehung zu:

$$\delta \bar{\omega}^T \cdot \underline{K} \cdot \bar{\omega} = \delta \bar{\omega}^T \cdot \underline{f}_{g'} \tag{10}$$

Das entstandene Gleichungssystem nach Gl. (10) ist singular und kann zunächst nicht gelöst werden, da keine Lagerung des Querschnitts vorliegt. Aus diesem Grund muss ein beliebiger Knoten  $i$  als gelagert vorausgesetzt werden:

$$\bar{\omega}_i = 0 \tag{11}$$

Unter Berücksichtigung dieser Randbedingung unterscheidet sich der entstehende Lösungsvektor um einen Starrkörperanteil von den wirklichen Verwölbungen. Dieser ergibt sich aus der Normierung der Wölbfläche, bei der die negativen und positiven Anteile gleich groß werden (Flächenausgleich). Außerdem muss zur Normierung der Wölbordinate die Lage des Schubmittelpunktes  $M$  bestimmt werden, um sie auf diesen zu beziehen ( $M$ : Drehpunkt). Er ergibt sich mit:

$$y_M - y_D = \frac{A}{I_y} \int z \cdot \bar{\omega} \cdot dA \tag{12a}$$

$$z_M - z_D = -\frac{A}{I_z} \int y \cdot \bar{\omega} \cdot dA \tag{12b}$$

Eine strukturierte und veranschaulichte Vorgehensweise zur Normierung der Wölbordinate  $\bar{\omega}$  ist in [1] enthalten. In [2] werden die entsprechenden Beziehungen der FE-Formulierung angepasst. Mit Hilfe der normierten Wölbordinate lassen sich der Wölbwiderstand und das Torsionsträgheitsmoment bestimmen:

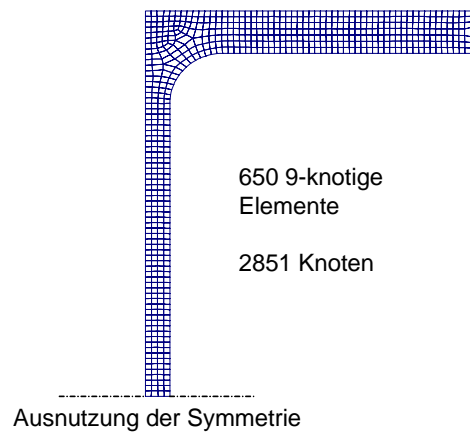
$$I_T = \int_A \left[ \left( -\frac{\partial \omega}{\partial z} + (y - y_M) \right) \cdot (y - y_M) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + (z - z_M) \right) \cdot (z - z_M) \right] \cdot dA \tag{13}$$

$$I_\omega = \int_A \omega \cdot \omega \cdot dA \tag{14}$$

Die Gln. (13) und (14) sind in [2] für das FE-Verfahren ebenfalls ausformuliert.

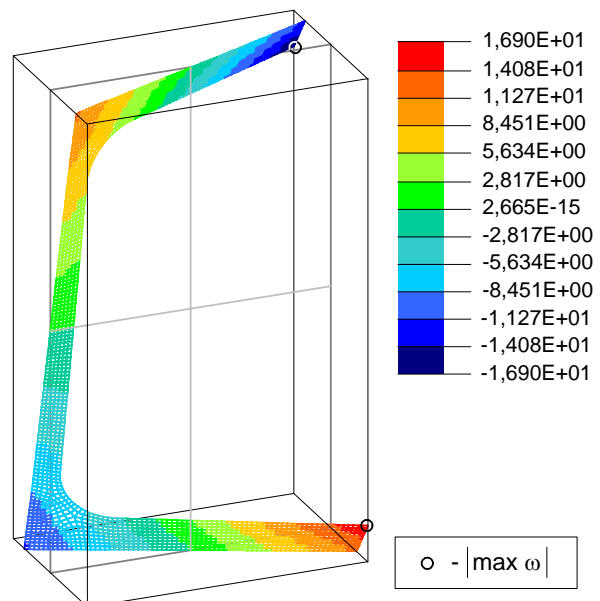
### 5 Genaue Torsionskenngrößen

Das beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Querschnittskenngrößen ist Bestandteil des Finite-Elemente-Programms *QSW-FE* [6]. Mit diesem Programm sind die genauen Torsionskenngrößen berechnet worden. Weitere Ausführungen zu dem Programm und zu dem FE-Verfahren, mit denen neben den Querschnittskennwerten auch Schubspannungsverteilungen aus Querkraft sowie primärer und sekundärer Torsion bestimmt werden können, sind [2] zu entnehmen.



**Bild 3** Diskretisierung der U-Querschnitte (Beispiel)

Die Querschnitte werden mit Hilfe von neunknotigen Elementen diskretisiert. Es werden auch Berechnungen unter der Ausnutzung der Querschnittssymmetrie durchgeführt, s. Bild 3. Die sich ergebende normierte Wölbordinate  $\omega$  wird beispielhaft in Bild 4 für einen UPE 100 dargestellt. Die Maxima der Ordinate stellen sich am Ende der inneren Flanschflächen ein.



**Bild 4** Normierte Wölbordinate [cm<sup>2</sup>] des UPE 100

**Tabelle 2** Torsionskenngrößen der UPE- und UAP-Profile

UPE	$e_y$ [cm]	$y_M$			$\max \omega$			$I_T$			$I_\omega$		
		FE [cm]	Formel [cm]	AW [%]	FE [cm <sup>2</sup> ]	Formel [cm <sup>2</sup> ]	AW [%]	FE [cm <sup>4</sup> ]	Formel [cm <sup>4</sup> ]	AW [%]	FE [cm <sup>6</sup> ]	Formel [cm <sup>6</sup> ]	AW [%]
80	1,817	<b>3,520</b>	3,703	5,2	<b>12,32</b>	9,907	-19,6	<b>1,462</b>	1,423	-2,7	<b>248,8</b>	240,3	-3,4
100	1,906	<b>3,758</b>	3,915	4,2	<b>16,90</b>	14,07	-16,8	<b>2,010</b>	1,977	-1,7	<b>590,1</b>	574,7	-2,6
120	1,983	<b>3,934</b>	4,113	4,5	<b>22,22</b>	18,87	-15,0	<b>2,884</b>	2,820	-2,2	<b>1 238</b>	1 210	-2,3
140	2,173	<b>4,362</b>	4,530	3,8	<b>27,94</b>	23,86	-14,6	<b>4,037</b>	3,954	-2,1	<b>2 418</b>	2 359	-2,4
160	2,270	<b>4,596</b>	4,750	3,3	<b>34,48</b>	29,87	-13,4	<b>5,196</b>	5,125	-1,4	<b>4 303</b>	4 217	-2,0
180	2,468	<b>5,034</b>	5,181	2,9	<b>41,36</b>	35,91	-13,2	<b>6,993</b>	6,932	-0,9	<b>7 368</b>	7 216	-2,1
200	2,560	<b>5,243</b>	5,397	2,9	<b>49,22</b>	43,12	-12,4	<b>8,884</b>	8,793	-1,0	<b>11 880</b>	11 656	-1,9
220	2,703	<b>5,544</b>	5,690	2,6	<b>57,54</b>	50,57	-12,1	<b>12,05</b>	12,00	-0,4	<b>18 898</b>	18 588	-1,6
240	2,792	<b>5,734</b>	5,902	2,9	<b>66,80</b>	59,03	-11,6	<b>15,13</b>	14,97	-1,1	<b>28 449</b>	27 978	-1,7
270	2,893	<b>5,970</b>	6,126	2,6	<b>79,50</b>	70,75	-11,0	<b>19,92</b>	19,81	-0,5	<b>46 533</b>	45 886	-1,4
300	2,887	<b>5,877</b>	6,015	2,4	<b>94,10</b>	84,38	-10,3	<b>31,54</b>	31,66	0,4	<b>76 676</b>	76 173	-0,7
330	2,900	<b>5,824</b>	5,985	2,8	<b>109,9</b>	99,14	-9,8	<b>45,20</b>	45,27	0,2	<b>117 919</b>	117 538	-0,3
360	2,970	<b>5,947</b>	6,096	2,5	<b>126,2</b>	114,5	-9,3	<b>58,52</b>	58,84	0,5	<b>174 446</b>	174 179	-0,2
400	2,977	<b>5,902</b>	6,035	2,3	<b>148,0</b>	135,4	-8,5	<b>79,17</b>	79,95	1,0	<b>269 016</b>	269 258	0,1

UAP	$e_y$ [cm]	$y_M$			$\max \omega$			$I_T$			$I_\omega$		
		FE [cm]	Formel [cm]	AW [%]	FE [cm <sup>2</sup> ]	Formel [cm <sup>2</sup> ]	AW [%]	FE [cm <sup>4</sup> ]	Formel [cm <sup>4</sup> ]	AW [%]	FE [cm <sup>6</sup> ]	Formel [cm <sup>6</sup> ]	AW [%]
80	1,610	<b>3,014</b>	3,150	4,5	<b>11,14</b>	8,854	-20,5	<b>1,905</b>	1,914	0,5	<b>200,8</b>	196,6	-2,1
100	1,700	<b>3,241</b>	3,364	3,8	<b>15,45</b>	12,74	-17,5	<b>2,654</b>	2,669	0,6	<b>490,4</b>	483,7	-1,4
130	1,775	<b>3,433</b>	3,550	3,4	<b>22,13</b>	18,82	-15,0	<b>4,154</b>	4,173	0,5	<b>1 315</b>	1 304	-0,9
150	2,053	<b>4,009</b>	4,131	3,0	<b>30,26</b>	26,01	-14,0	<b>6,515</b>	6,561	0,7	<b>3 208</b>	3 182	-0,8
175	2,124	<b>4,190</b>	4,305	2,8	<b>38,20</b>	33,42	-12,5	<b>8,432</b>	8,495	0,7	<b>5 985</b>	5 950	-0,6
200	2,219	<b>4,402</b>	4,518	2,6	<b>46,95</b>	41,48	-11,7	<b>11,24</b>	11,32	0,7	<b>10 577</b>	10 525	-0,5
220	2,398	<b>4,799</b>	4,925	2,6	<b>54,90</b>	48,47	-11,7	<b>14,41</b>	14,47	0,4	<b>16 808</b>	16 692	-0,7
250	2,454	<b>4,895</b>	5,022	2,6	<b>66,77</b>	59,51	-10,9	<b>20,39</b>	20,50	0,6	<b>28 976</b>	28 860	-0,4
300	2,963	<b>5,994</b>	6,149	2,6	<b>93,64</b>	83,28	-11,1	<b>36,32</b>	36,42	0,3	<b>79 608</b>	79 012	-0,7

In Tabelle 2 sind die genauen Kenngrößen der Finite-Elemente-Berechnung angegeben (FE). Zum Vergleich werden ebenfalls die Kennwerte aufgeführt, die sich mit Hilfe der Formeln des Abschnitts 3 ergeben (Formel) sowie die Abweichung dieser von der genauen FE-Lösung (AW).

Für die maximale Wölbordinate ergeben sich gravierende Abweichungen, was aber auch auf die Tatsache zurückzuführen ist, dass mit dem Mittellinienmodell eine maximale Ordinate bestimmt wird, die näherungsweise ein Mittelwert des Verlaufs über die Blechdicke darstellt.

Es wird deutlich, dass das Torsionsträgheitsmoment mit der Formel aus Tabelle 1 gut abgeschätzt wird. Mit einer Ausnahme ist der Wölbwiderstand, unter Verwendung der Formel des Mittellinienmodells, zu gering, was auf verschiedene Effekte zurückzuführen ist. Zum einen wird durch das Mittellinienmodell die normierte Wölbordinate mit einem Mittelwert als konstant über die Blechdicke angenommen, was nicht der genauen Lösung entspricht (vgl. Bild 4). Außerdem wird der Einfluss von Walzausrundungen nicht erfasst. Analysen haben gezeigt, dass die Berücksichtigung von Walzausrundungen zu einer Verringerung der Querschnittsverwölbung führen, wenn sich die Lage des Schubmittelpunktes nicht verändert. Die somit geringere normierte Wölbordinate führt im Allgemeinen ebenfalls zu einem geringeren Wölbwiderstand, obwohl sich die Querschnittsfläche aufgrund der Walzaus-

rundungen entsprechend vergrößert. Für die Profile gemäß Tabelle 2 liegt der Schubmittelpunkt jedoch näher am Steg des Querschnitts, als das mit dem Mittellinienmodell angenommen wird. Es liegt also eine Verschiebung des Schubmittelpunktes vor, die zu einer Vergrößerung der maximalen Verwölbungen führt.

## Literatur

- [1] Kindmann, R., Frickel, J.: Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit, Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2002
- [2] Kraus, M.: Computerorientierte Berechnungsmethoden für beliebige Stabquerschnitte des Stahlbaus, Shaker Verlag, Aachen 2005
- [3] Wagner, W., Sauer, R., Gruttmann, F.: Tafeln der Torsionskenngrößen von Walzprofilen unter Verwendung von FE-Diskretisierungen, Stahlbau 68 (1999), Heft 2, S. 102-111
- [4] Schneider-Bürger, M.: Stahlbau Profile, 23. Auflage, Verlag Stahleisen, Düsseldorf 2001
- [5] Trayer, G. W., March, H. W.: Torsion members having sections common in aircraft construction, NACA-Report 334 (1930)
- [6] Kraus, M.: QSW-FE, FE-Programm mit zweidimensionalen Elementen zur Berechnung von Querschnittswerten und Spannungen, Ruhr-Universität Bochum 2004
- [7] Kindmann, R., Lindner, J., Sedlacek, G., Wolf, C., Glitsch, T., Stangenberg, H.: Untersuchungen zum Einfluß der Torsionseffekte auf die plastische Querschnittstragfähigkeit, Bericht P 554, FOSTA, Düsseldorf 2004