

Zur Anwendung der Wölbkrafttorsion auf Systeme mit Wölbfedern

Matthias Kraus

1 Einleitung

Eine Torsionsbeanspruchung führt bei Stäben im Allgemeinen zu Verwölbungen des Querschnitts, was ggf. mit dem Entstehen von Normalspannungen σ_x verbunden ist, wodurch die Voraussetzung der *St. Venantschen* Torsionstheorie eines reinen Schubspannungszustandes nicht mehr eingehalten wird. Mit Ausnahmen muss in diesen Fällen die Theorie der Wölbkrafttorsion Anwendung finden. Im Folgenden soll gezeigt werden, wie mit Hilfe der Differentialgleichungslösung die Schnittgrößen und Verformungen nach dieser Theorie bestimmt werden können. Dabei wird darauf eingegangen, wie Federn, insbesondere Wölbfedern, zu berücksichtigen sind. Die sich ergebenden Gleichungen werden an Beispielen exemplarisch dokumentiert und für eine Handrechnung mit Hilfe von Reduktionsfaktoren ausgearbeitet.

2 Erläuterungen zur Wölbkrafttorsion

Das Entstehen von Normalspannungen unter Torsionsbeanspruchungen kann durch verschiedene Aspekte hervorgerufen werden. Natürlich spielen dabei die Randbedingungen (Lagerungen) eine wesentliche Rolle. Es wird aber auch durch eine über die Stablänge veränderliche Torsionsbeanspruchung $M_x(x)$ verursacht. Für einen nicht konstanten Verlauf des Torsionsmoments stellt sich ebenfalls die Verdrehung pro Längeneinheit, also die Verdrillung ϑ' , veränderlich ein, was somit auch für die Verwölbung u gilt:

$$\vartheta'(x) \neq \text{konst.} \Rightarrow u(x, y, z) = -\omega(y, z) \cdot \vartheta'(x) \neq \text{konst.} \quad (1)$$

Die Normalspannungen σ_x sind nach dem Elastizitätsgesetz (*Hookesches Gesetz*) und den Beziehungen zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen abhängig von der Verformung u . Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

Wenn ein reiner Schubspannungszustand ($\sigma_x = 0$) vorherrschen soll, wie es in der *St. Venantschen* Torsionstheorie angenommen wird, muss sich die partielle Ableitung $\partial u / \partial x$ zu null ergeben, was nur der Fall sein kann, wenn die Verwölbung u konstant ist. Wie mit Gl. (1) dargestellt, ist dies bei einem veränderlichen Verlauf des Torsionsmomentes jedoch nicht gegeben, wodurch sich Normalspannungen σ_x einstellen. Im Allgemeinen ist in diesen Fällen die *St. Venantsche* Torsionstheorie unzureichend, und es muss die Theorie der Wölbkrafttorsion Anwendung finden (Ausnahmen bilden

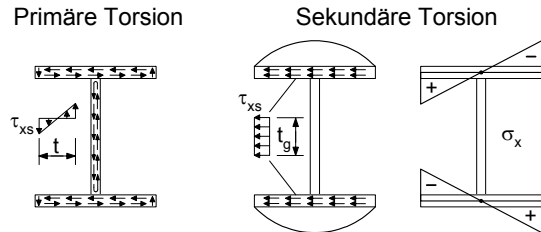


Bild 1 Spannungen aus Torsionsbeanspruchungen

wölbfreie bzw. wölbarme Querschnitte). Dabei werden zwei Zustände betrachtet und die Schubspannungen entsprechend in zwei Anteile aufgespalten, wie in Bild 1 beispielhaft für einen I-Querschnitt dargestellt. Zum Einen ist das ein reiner Schubspannungszustand, der zur *St. Venantschen* Torsionstheorie korrespondiert, (primäre Torsion) und zum Anderen ein Zustand, bei dem zur Bildung des Gleichgewichts neben den Schubspannungen auch die Normalspannungen auftreten (sekundäre Torsion). Die Integration der Spannungsanteile über die Querschnittsfläche führt zu Spannungsresultierenden - den zugehörigen Schnittgrößen. Aus den Schubspannungen resultiert das primäre Torsionsmoment M_{xp} und das sekundäre Torsionsmoment M_{xs} . Die Resultierende der Normalspannungen bildet das Wölbmoment M_ω . Durch die Berücksichtigung von Gleichgewichtsbeziehungen, des Elastizitätsgesetzes, der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen sowie $u = -\omega \cdot \vartheta'$ können folgende Grundgleichungen angegeben werden:

$$M_x = M_{xp} + M_{xs} \quad (3)$$

$$M_{xp} = G \cdot I_T \cdot \vartheta'; \quad M_{xs} = -(E \cdot I_\omega \cdot \vartheta'') \quad (4)$$

$$M_\omega = -E \cdot I_\omega \cdot \vartheta'' \quad (5)$$

Für einen torsionsbeanspruchten Stab sollen diese Schnittgrößen und Verdrehungen bestimmt werden. Dabei ist zu ermitteln, wie sich das Torsionsmoment M_x , in Abhängigkeit der Steifigkeiten (Torsionssteifigkeit GI_T , Wölbsteifigkeit EI_ω), auf die zwei Anteile M_{xp} und M_{xs} aufteilt und welches zugehörige Wölbmoment sich im Stab einstellt. Voraussetzung für die Bestimmung ist die Kenntnis der benötigten Querschnittskennwerte (z.B. Schubmittelpunkt, normierte Wölbordinate) und den daraus resultierenden Steifigkeiten GI_T und EI_ω , was beispielsweise in [1] ausführlich behandelt wird. Ausgangspunkt der Schnittgrößenermittlung stellt die Differentialgleichung der Torsion dar, die sich aus den Gln. (3) und (4), unter Berücksichtigung des Gleichgewichts bezüglich der Torsion an einem Stababschnitt, ergibt:

$$(EI_{\omega} \cdot \vartheta''') - (GI_T \cdot \vartheta') - m_x = 0 \tag{6}$$

Mit Hilfe der Lösung dieser Differentialgleichung können die Schnittgrößen bzw. Verformungen bestimmt werden.

3 Lösung der DGL mit Anfangswerten

Die Differentialgleichung (6) kann gelöst werden, vorausgesetzt GI_T und EI_{ω} sind konstant und das Gleichstreckentorsionsmoment m_x sowie die Verdrehung ϑ und deren Ableitungen verlaufen stetig. In [2] wird die Lösung für $m_x = \text{konst.}$ als *Anfangswerte-Lösung* dargestellt, bei der die vier entstandenen mathematischen Unbekannten durch mechanisch definierte Anfangsgrößen des Integrationsbereichs ersetzt werden. Der Vorteil dieser Lösung ist, dass neben der größeren Anschaulichkeit in vielen Fällen zwei Anfangsgrößen (aufgrund der Randbedingungen) bekannt sind, wodurch sich die Zahl der Unbekannten auf die Hälfte reduziert. Die Lösung für $m_x = \text{konst.}$ eines Stabes der Länge L lautet:

$$\begin{aligned} \vartheta(x) = & \vartheta(0) + \vartheta'(0) \cdot \frac{L}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} + \frac{M_{\omega}(0)}{G \cdot I_T} \cdot \left(1 - \cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right) \\ & + \frac{M_x(0) \cdot L}{G \cdot I_T} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right) \\ & + \frac{m_x \cdot L^2}{G \cdot I_T} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_T^2} \cdot \left(\cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} - 1 \right) - \frac{x^2}{2 \cdot L^2} \right] \end{aligned} \tag{7}$$

Dabei gibt die Stabkennzahl ε_T den Einfluss des Lastabtrages der primären und sekundären Torsion wieder:

$$\varepsilon_T = L \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega}}} \tag{8}$$

Für größer werdende Stabkennzahlen wird der Einfluss der sekundären Torsion geringer.

Durch das Ableiten der Verdrehung ϑ (Gl. (7)) können die Schnittgrößen der Wölbkrafttorsion bestimmt werden. Benötigte Beziehungen zur Ermittlung der unbekanntenen Anfangswerte und zur Bestimmung der Schnittgrößen bzw. Verformungen werden als Gleichungssystem mit Gl. (9) gegeben. Zur Bestimmung von M_{xp} und M_{xs} sind die Gln. (3) und (4) zu berücksichtigen.

4 Randbedingungen

Für die Randbedingungen gelten die in Tabelle 1 dargestellten Beziehungen. Ergeben sich durch angreifende Einzellasten oder Lagerreaktionen innerhalb eines Stabes Unstetig-

keitsstellen der Verdrehung ϑ oder derer Ableitungen, muss die Lösung nach Gl. (7) für die Abschnitte zwischen diesen Punkten formuliert werden. An den Unstetigkeitsstellen sind Übergangs- oder Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen.

Tabelle 1 Allgemeine Randbedingungen

Gabellager:		$\vartheta = 0$ $\vartheta'' = 0 \hat{=} M_{\omega} = 0$
Starre Einspannung:		$\vartheta = 0$ $\vartheta' = 0$
Freies Stabende:		$M_x = 0$ $M_{\omega} = 0$
Starre Kopfplatte:		$\vartheta' = 0$ $M_x = 0$

5 Berücksichtigung von Federn

Es können Wölb- und Torsionsfedern mit Hilfe des Elastizitäts- bzw. Federgesetzes berücksichtigt werden, s. Tabelle 2. Wölbefedern behindern die Querschnittsverwölbung und sind über die Verdrehung ϑ' mit dem Wölbmoment M_{ω} verknüpft. Torsionsfedern stellen eine Behinderung der Verdrehung ϑ dar, die über diese mit dem Torsionsmoment M_x gekoppelt sind.

Tabelle 2 Bedingungen für Federn

Wölbfeder:		$M_{\omega}(0) = -C_{\omega} \cdot \vartheta'(0)$ $M_{\omega}(L) = +C_{\omega} \cdot \vartheta'(L)$
Torsionsfeder:		$M_x(0) = +C_{\vartheta} \cdot \vartheta(0)$ $M_x(L) = -C_{\vartheta} \cdot \vartheta(L)$

6 Bestimmung von Wölbfedersteifigkeiten

Durch **aufgeschweißte Stirnplatten** wird eine Wölbbehinderung verursacht, die über eine Wölbfedersteifigkeit C_{ω} erfasst werden kann. Diese Steifigkeit stellt ein Wölbmoment dar, das eine Verdrehung der Stirnplatte $\bar{\vartheta}$ (bezüglich der lokalen Koordinate \bar{x} nach Bild 2) der Größe eins hervorruft:

$$\bar{\vartheta}' = \frac{\Delta \bar{\vartheta}}{h} = 1 \tag{10}$$

Dabei spiegelt $\Delta \bar{\vartheta}$ für I-Querschnitte die gegenseitige Verdrehung der Profilgurte infolge des Wölbmoments wieder. Das M_{ω} wird über die Trägerhöhe h in zwei Gurtmomente

$$\begin{bmatrix} \vartheta(x) \\ \vartheta'(x) \\ M_{\omega}(x) \\ M_x(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} & 1 - \cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} & \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} - \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \\ 0 & \frac{\varepsilon_T}{L} \cdot \cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} & -\frac{\varepsilon_T}{L} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} & \frac{\varepsilon_T}{L} \cdot \left(1 - \cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right) \\ 0 & -GI_T \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} & GI_T \cdot \cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} & GI_T \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \\ 0 & 0 & 0 & GI_T \cdot \frac{\varepsilon_T}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta(0) \\ \vartheta'(0) \cdot \frac{L}{\varepsilon_T} \\ \frac{M_{\omega}(0)}{GI_T} \\ \frac{M_x(0) \cdot L}{GI_T \cdot \varepsilon_T} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} - \frac{(\varepsilon_T \cdot x)^2}{2 \cdot L^2} - 1 \right) \cdot \frac{m_x \cdot L^2}{GI_T \cdot \varepsilon_T^2} \\ \left(\frac{L}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} - x \right) \cdot \frac{m_x}{GI_T} \\ \left(-\cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} + 1 \right) \cdot \frac{m_x \cdot L^2}{\varepsilon_T^2} \\ x \cdot m_x \end{bmatrix} \tag{9}$$

aufgeteilt, die die Stirnplatte als Torsionsmoment $M_{\bar{x}}$ beanspruchen. Mit Hilfe des Arbeitssatzes ergibt sich für die Stirnplatte folgende Wölbfedersteifigkeit:

$$\bar{g}' = \int_h \frac{\bar{M}_{\bar{x}} \cdot M_{\bar{x}}}{G I_T} \cdot d\bar{x} = \frac{1/h \cdot C_{\omega} / h}{G I_T} \cdot h = 1 \Rightarrow C_{\omega} = G I_T \cdot h \quad (11)$$

mit $I_T = b \cdot t^3 / 3$

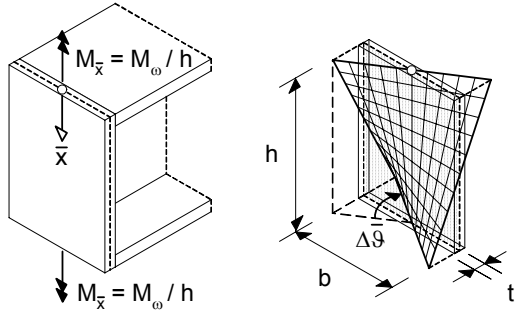


Bild 2 Stirnplattenverformung aus Flanschverdrehungen

Analog können Wölbfedersteifigkeiten für **eingeschweißte Steifen** ermittelt werden, die in Tabelle 3 angegeben sind.

Tabelle 3 Wölbfedersteifigkeiten bei doppelsymmetrischen I-Profilen

Wölbfedersteifigkeit: $C_{\omega} = G I_T \cdot h$	
<p>Flachsteifen</p>	<p>Eingeschweißte U-Profile</p>

Für über das Endlager hinausgeführte **Stabüberstände** können Ersatzwölbfedersteifigkeiten mit Hilfe der *Anfangswerte-Lösung* bestimmt werden, indem man das überstehende Trägerstück am Auflager mit einem Wölbmoment $M_{\omega,L} = 1$ belastet und die zugehörige Verdrehung ϑ' berechnet (s. Bild 3). Aus den Randbedingungen (a) und (b) nach Bild 3 sind zwei Anfangswerte bereits bekannt. Die dritte Randbedingung (c) liefert den Anfangswert $M_x(0) = 0$. Mit Hilfe der vierten Randbedingung (d) und unter Berücksichtigung der bereits bekannten Anfangswerte kann nach Gl. (9) folgende Beziehung angegeben werden:

$$M_{\omega}(L_{\bar{U}}) = -\sinh \varepsilon_T \cdot \vartheta'(0) \cdot \frac{L_{\bar{U}}}{\varepsilon_T} \cdot G \cdot I_T + \cosh \varepsilon_T = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta'(0) = \frac{\varepsilon_T}{G \cdot I_T \cdot \tanh \varepsilon_T \cdot L_{\bar{U}}} \quad (12)$$

Die Steifigkeit ermittelt sich über $C_{\omega} = M_{\omega} / \vartheta' = 1 / \vartheta'$ zu:

$$C_{\omega} = \frac{G \cdot I_T \cdot \tanh \varepsilon_T \cdot L_{\bar{U}}}{\varepsilon_T} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_T = L_{\bar{U}} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_{\omega}}} \quad (13)$$

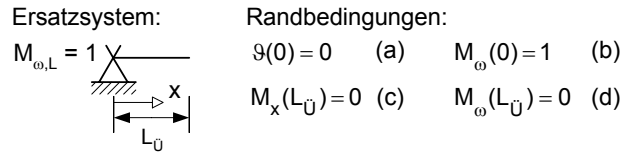


Bild 3 Ersatzsystem zur Ermittlung der Wölbfeder eines Überstandes

7 Beispiel: Gabelgelagerter Kragträger mit Wölbfeder und Einzeltorsionsmoment

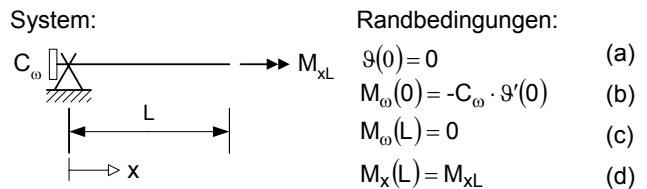


Bild 4 System und Randbedingungen

Das System und die zugehörigen Randbedingungen sind mit Bild 4 gegeben. Unter Berücksichtigung der bereits bekannten Anfangswerte aus den Randbedingungen (a) und (b), kann nach Gl. (7) folgende allgemeine Bestimmungsgleichung angegeben werden:

$$\vartheta(x) = \vartheta'(0) \frac{L}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} - \frac{C_{\omega} \cdot \vartheta'(0)}{G \cdot I_T} \cdot \left(1 - \cosh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right) + \frac{M_x(0) \cdot L}{G \cdot I_T} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{\varepsilon_T} \cdot \sinh \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right) \quad (14)$$

Die vierte Randbedingung (d) führt mit Gl. (9) zu $M_x(0) = M_{xL}$. Mit Hilfe von Gl. (9) und der dritten Randbedingung (c) kann der vierte Anfangswert $\vartheta'(0)$ bestimmt werden:

$$\vartheta'(0) = \frac{M_{xL} \cdot L \cdot \sinh \varepsilon_T}{G \cdot I_T \cdot L \cdot \sinh \varepsilon_T + \varepsilon_T \cdot C_{\omega} \cdot \cosh \varepsilon_T} \quad (15)$$

Somit sind alle vier Anfangswerte bekannt. Durch deren Einsetzen in Gl. (9) und unter Berücksichtigung der Gln. (3) und (4) können Funktionen für die Schnittgrößenermittlung und die Verdrehung aufgestellt werden. Nach Umformung ergeben sich folgende Lösungen für $0 \leq x \leq L$:

$$M_{\omega}(x) = -\frac{M_{xL} \cdot L \cdot C_{\omega} \cdot \sinh \left(\varepsilon_T - \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right)}{C_{\omega} \cdot \varepsilon_T \cdot \cosh \varepsilon_T + G \cdot I_T \cdot L \cdot \sinh \varepsilon_T}$$

$$M_{xS}(x) = \frac{M_{xL} \cdot C_{\omega} \cdot \varepsilon_T \cdot \cosh \left(\varepsilon_T - \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right)}{C_{\omega} \cdot \varepsilon_T \cdot \cosh \varepsilon_T + G \cdot I_T \cdot L \cdot \sinh \varepsilon_T}$$

$$M_{xp}(x) = M_{xL} - M_{xS}(x)$$

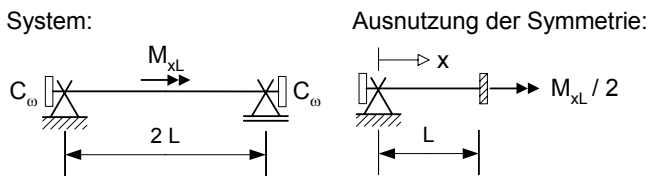
$$\vartheta(x) = \frac{M_{xL} \cdot \left[C_{\omega} \cdot \varepsilon_T \cdot x \cdot \cosh \varepsilon_T + L \cdot \left[(G \cdot I_T \cdot x - C_{\omega}) \cdot \sinh \varepsilon_T + C_{\omega} \cdot \sinh \left(\varepsilon_T - \frac{\varepsilon_T \cdot x}{L} \right) \right] \right]}{G \cdot I_T \cdot (C_{\omega} \cdot \varepsilon_T \cdot \cosh \varepsilon_T + G \cdot I_T \cdot L \cdot \sinh \varepsilon_T)}$$

Diese Funktionen, die den Verlauf über die Stablängskoordinate x wiedergeben, werden in Tabelle 4 an den Stabenden (maßgebende Stellen) mit Hilfe von Reduktionsfaktoren ausgedrückt.

Tabelle 4 Reduktionsfaktoren für das System nach Bild 4

<p>Verläufe:</p> <p>— $C_\omega = 0$ - - - $C_\omega = \infty$</p>	<p>Bestimmungsgleichungen:</p> $\vartheta(0) = 0$ $\vartheta(L) = \frac{M_{xL} \cdot L}{G \cdot I_T} \cdot (1 - f_{C_\omega} \cdot f_g)$ $M_\omega(0) = -M_{xL} \cdot L \cdot f_{C_\omega} \cdot f_{M_\omega}; \quad M_\omega(L) = 0$ $M_{xs}(0) = M_{xL} \cdot f_{C_\omega}; \quad M_{xs}(L) = M_{xL} \cdot f_{C_\omega} \cdot f_{M_{xs}}$ $M_{xp} = M_{xL} - M_{xs}$ <p>mit:</p> $\varepsilon_T = L \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_\omega}}; \quad \varepsilon_{C_\omega} = \frac{C_\omega}{\sqrt{G \cdot I_T} \cdot \sqrt{E \cdot I_\omega}}$ $f_{C_\omega} = \frac{\varepsilon_{C_\omega}}{\varepsilon_{C_\omega} + \tanh \varepsilon_T}$ <p>Grenzfälle: $C_\omega = 0 \Rightarrow \varepsilon_{C_\omega} = 0; f_{C_\omega} = 0$ $C_\omega = \infty \Rightarrow \varepsilon_{C_\omega} = \infty; f_{C_\omega} = 1$</p>	<p>$f_g = f_{M_\omega} = \tanh \varepsilon_T / \varepsilon_T; \quad f_{M_{xs}} = 1 / \cosh \varepsilon_T$</p>
---	---	--

8 Beispiel: Gabelgelagerter Einfeldträger mit Wölbfedern und Einzeltorsionsmoment



Randbedingungen unter Ausnutzung der Symmetrie:

$\vartheta(0) = 0$ (a) $M_\omega(0) = -C_\omega \cdot \vartheta'(0)$ (b)

$\vartheta'(L) = 0$ (c) $M_x(L) = M_{xL}/2$ (d)

Bild 5 System und Randbedingungen

Durch Ausnutzung der Symmetrie und Berücksichtigung der Randbedingungen (s. Bild 5) lassen sich die vier Anfangswerte analog zum vorherigen Beispiel ermitteln.

Auf die Darstellung der allgemeinen Lösungen wird an dieser Stelle verzichtet, da sich sehr umfangreiche Gleichungen ergeben. Vielmehr wird direkt die ausgearbeitete Reduktionsfaktor-Lösung mit Tabelle 5 angegeben.

Literatur

- [1] Kindmann, R., Frickel, J.: Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit, Ernst & Sohn, Berlin 2003
- [2] Friemann, H.: Schub und Torsion in geraden Stäben, 2. Auflage, Werner-Verlag, Düsseldorf 1993
- [3] Petersen, C.: Stahlbau, 3. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1993
- [4] Merziger, G., Mühlbach, G., Wille, D., Wirth, T.: Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik, Binomi Verlag, Hannover 1993
- [5] Kindmann, R.: Unterlagen zur Lehrveranstaltung Stahlbau. Band 15 der Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahlbau, Ruhr-Universität Bochum, April 2003

Tabelle 5 Reduktionsfaktoren für das System nach Bild 5

<p>Verläufe:</p> <p>— $C_\omega = 0$ - - - $C_\omega = \infty$</p>	<p>Bestimmungsgleichungen:</p> $\vartheta(0) = 0$ $\vartheta(L) = \frac{M_{xL} \cdot L}{G \cdot I_T} \cdot f_{C_\omega} \cdot [(1 - f_g) + \varepsilon_{C_\omega} \cdot (1 - f_{g,C})]$ $M_\omega(0) = -1/2 \cdot M_{xL} \cdot L \cdot f_{C_\omega} \cdot \frac{\varepsilon_{C_\omega}}{\varepsilon_T} \cdot (1 - f_{M_\omega,C})$ $M_\omega(L) = 1/2 \cdot M_{xL} \cdot L \cdot f_{C_\omega} \cdot f_{M_\omega} - M_\omega(0)$ $M_{xs}(0) = 1/2 \cdot M_{xL} \cdot f_{C_\omega} \cdot (f_{M_{xs}} + \varepsilon_{C_\omega} \cdot \varepsilon_T \cdot f_{M_{xs},C})$ $M_{xs}(L) = 1/2 \cdot M_{xL}; \quad M_{xp} = 1/2 M_{xL} - M_{xs}$ <p>mit:</p> $\varepsilon_T = L \cdot \sqrt{\frac{G \cdot I_T}{E \cdot I_\omega}}; \quad \varepsilon_{C_\omega} = \frac{C_\omega}{\sqrt{G \cdot I_T} \cdot \sqrt{E \cdot I_\omega}}$ $f_{C_\omega} = \frac{1}{1 + \varepsilon_{C_\omega} \cdot \tanh \varepsilon_T}$ <p>Grenzfälle: $C_\omega = 0 \Rightarrow \varepsilon_{C_\omega} = 0; f_{C_\omega} = 1$ $C_\omega = \infty \Rightarrow \varepsilon_{C_\omega} = \infty; f_{C_\omega} = 0; \varepsilon_{C_\omega} \cdot f_{C_\omega} = 1 / \tanh \varepsilon_T$</p>	<p>$f_g = 1 - [1/2 - \tanh \varepsilon_T / (2 \cdot \varepsilon_T)]$</p> <p>$f_{g,C} = 1 - [1 / (\varepsilon_T \cdot \cosh \varepsilon_T) - 1/\varepsilon_T + \tanh \varepsilon_T / 2]$</p> <p>$f_{M_\omega,C} = f_{M_{xs}} = 1 / \cosh \varepsilon_T; \quad f_{M_\omega} = f_{M_{xs},C} = \tanh \varepsilon_T / \varepsilon_T$</p>
---	--	--