



### Bemessung von Trägern unter Biegung und Torsion nach Th. II. Ordnung Jörg Frickel

#### 1 Einleitung

Stäbe und Stabwerke werden u.a. durch Biegung und Torsion beansprucht. Man unterscheidet dabei zwischen planmäßiger Torsion infolge der Belastung und unplanmäßiger Torsion. Diese entsteht z.B. infolge geometrischer Ersatzimperfectionen (siehe Tabelle 1) bei Gleichgewichtsbildung am verformten System nach Theorie II. Ordnung (Th. II. O.).

**Tabelle 1** Stich  $v_{0m}$  der geometrischen Ersatzimperfection gemäß DIN 18800 Teil 2 [3]

KSL für das Ausweichen rechtwinklig zur z-Achse	a	b	c	d
Vorkrümmung $v_{0m}$	L/600	L/500	L/400	L/300
Anmerkung: Für das Nachweisverfahren Elastisch-Elastisch (E-E) darf $v_{0m}$ auf 2/3 abgemindert werden.				

Bei den im Stahlbau oftmals verwendeten, dünnwandig offenen Querschnitten kommt erschwerend hinzu, dass sich die Torsion aus **primärer (St. Venantscher) und sekundärer (Wölbkraft-) Torsion** zusammensetzt. Dies führt im Zusammenhang der Th. II. O. dazu, dass derartige Berechnungen i.d.R. nur mit Hilfe von EDV-Programmen möglich sind. Der vereinfachte Nachweis mittels des  $\kappa_M$ -Verfahrens gemäß DIN 18800 Teil 2 [3] kann ebenfalls **nicht** angewendet werden, weil dort die Wirkung planmäßiger Torsion explizit ausgeschlossen wird.

#### 2 Schnittgrößenermittlung mit dem $\alpha_\vartheta$ -Verfahren

Mit dem in Tabelle 2 dargestellten  $\alpha_\vartheta$ -Verfahren können die Schnittgrößen nach Th. II. O. unter Ansatz einer geometrischen Ersatzimperfection (siehe Tabelle 1) mit oder ohne planmäßige Torsion näherungsweise berechnet werden.

**Tabelle 2** Näherungsweise Schnittgrößenermittlung nach Elastizitätstheorie II. Ordnung mit dem  $\alpha_\vartheta$ -Verfahren

$$\varepsilon_T = L \cdot \sqrt{\frac{GI_T^*}{EI_\omega}} \leq 21$$

$$I_T^* = I_T \cdot \left( \frac{10}{\varepsilon_T^2} + 1 \right)$$

**Verdrehung** es muss gelten:  $|\vartheta_m^{\parallel}| \leq 0,3$

$$\vartheta_m^{\parallel} = \alpha_\vartheta \cdot \left( 1,09 \cdot \frac{q_z \cdot v_{0m}}{GI_T^*} \cdot \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 + \frac{|m_x| \cdot L^2}{8 \cdot GI_T^*} \right) \cdot \text{sgn}(m_x)$$

mit:  $\alpha_\vartheta = \frac{1}{1-\bar{q}}$  für:  $\bar{q} < 1$

$\bar{q} = \bar{q}_{v0m}$  für **unplanmäßige Torsion** ( $m_x = 0$ ):

$$\bar{q}_{v0m} = q_z \cdot \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1,21 \cdot q_z \cdot (L/\pi)^4 - 0,98 \cdot EI_z \cdot z_F}{EI_z \cdot GI_T^*}$$

$\bar{q} = \bar{q}_{mx}$  für **planmäßige Torsion** ( $m_x \neq 0$ ):

$$\bar{q}_{mx} = q_z \cdot \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1,25 \cdot q_z \cdot (L/\pi)^4 - 1,03 \cdot EI_z \cdot z_F}{EI_z \cdot GI_T^*}$$

**Schnittgrößen**

$M_{y,m} = q_z \cdot L^2 / 8$

$V_{z,a} = q_z \cdot L / 2$

$M_{z,m}^{\parallel} = -M_{y,m} \cdot \vartheta_m^{\parallel}$

$M_{xp,A}^{\parallel} = GI_T \cdot \vartheta_m^{\parallel} \cdot \pi / L$

$$M_{\omega,m}^{\parallel} = \alpha_\vartheta \cdot \frac{m_{x,m}^{\parallel} \cdot L^2}{\varepsilon_T^2} \cdot \left[ 1 - \frac{2 \cdot \sinh(\varepsilon_T/2)}{\sinh \varepsilon_T} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{1,23 \cdot q_z \cdot v_{0m}}{74 \cdot |m_{x,m}^{\parallel}|} \cdot (21 - \varepsilon_T) \right]$$

mit:  $m_{x,m}^{\parallel} = (|m_x| + 1,23 \cdot q_z \cdot v_{0m}) \cdot \text{sgn}(m_x)$

**Anmerkung:** Vorzeichenfunktion  $\text{sgn}(m_x) = 1$  für  $m_x \geq 0$  sonst:  $\text{sgn}(m_x) = -1$

Das  $\alpha_9$ -Verfahren ist für eine Handrechnung geeignet und basiert auf der Elastizitätstheorie II. Ordnung. Es beruht auf der Bestimmung eines Vergrößerungsfaktors  $\alpha_9$  für die Verdrehung  $\vartheta$  um die Stablängsachse in Feldmitte. Der Einfluss der Wölbsteifigkeit wird dabei über ein ideales *St. Venant'sches* Torsionsträgheitsmoment  $I_T^*$  erfasst, vergl. Herleitung in [2]. Ausreichende Tragsicherheit kann durch anschließende Überprüfung der **elastischen oder plastischen Querschnittstragfähigkeit** nachgewiesen werden, siehe Abschnitt 3.

Das Anwendungsspektrum ergibt sich wie folgt (siehe auch Darstellung in Tabelle 2):

- beidseitig gabelgelagerte Einfeldträger unter Gleichstreckenlast  $q_z$
- beliebiger Lastangriffspunkt (Ordinaten:  $y_F$  und  $z_F$ )
- Berücksichtigung eines zusätzlichen Gleichstreckentorsionsmomentes  $m_x$
- sinusförmige Vorkrümmung in Richtung der schwachen Hauptachse (y-Achse)
- zur y-Achse symmetrischer Querschnitt

### 3 Querschnittstragfähigkeit

Da die Schnittgrößen mit dem  $\alpha_9$ -Verfahren auf Grundlage der Elastizitätstheorie berechnet werden, ist es prinzipiell sowohl für das Nachweisverfahren **Elastisch- Elastisch (E-E)** als auch für das Nachweisverfahren **Elastisch-Plastisch (E-P)** gemäß DIN 18800 [3] geeignet.

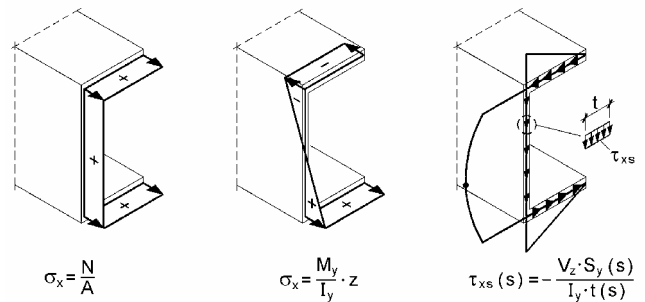
Die Ausnutzung der plastischen Querschnittstragfähigkeit kann für viele gängige Querschnittsformen mit dem **Teilschnittgrößenverfahren (TSV)** nach *Kindmann/Frickel* [1] erfolgen. Im Rahmen dieses Beitrags wird jedoch vorwiegend das Nachweisverfahren E-E angewendet. Dabei ist zu beachten, dass die gemäß DIN 18800 Teil 2 [3] anzusetzende geometrische Ersatzimperfection auf 2/3 abgemindert werden dürfen, vergl. Anmerkung in Tabelle 1.

Wenn man bedenkt, dass in Feldmitte des Trägers die Schnittgrößen  $M_y$ ,  $M_z$  und  $M_\omega$  wirken (siehe Tabelle 2) und welche  $\sigma_x$ -Spannungszustände z.B. für einen U-förmigen Querschnitt (vergl. Bild 1) daraus folgen, ist klar, dass i.d.R. an mehreren Stellen des Querschnitts untersucht werden muss, ob die betragsmäßig größte Spannung  $\max \sigma_x$  die Streckgrenze  $f_{y,d}$  nicht überschreitet. Vereinfachend und auf der sicheren Seite liegend kann man aber die Extremwerte der Spannungsanteile gemäß Gl. (1) superponieren:

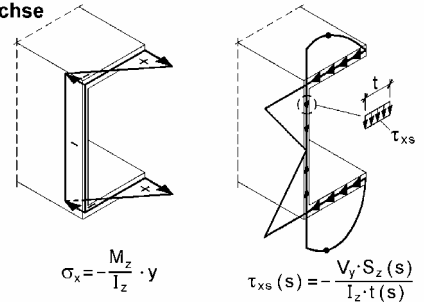
$$\max \sigma_x \leq \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} + \frac{|M_\omega|}{I_\omega} \cdot \max \omega \leq f_{y,d} \quad (1)$$

Am Auflager ist zu überprüfen, ob die Schubspannungen die Grenzschubspannung  $\tau_{R,d}$  nicht überschreiten. Analog zur  $\sigma_x$ -Spannung kann Gl. (2) auf der sicheren Seite liegend zur Abschätzung benutzt werden, obgleich die einzelnen Spannungsanteile nicht an derselben Stelle wirken (vergl. Bild 1).

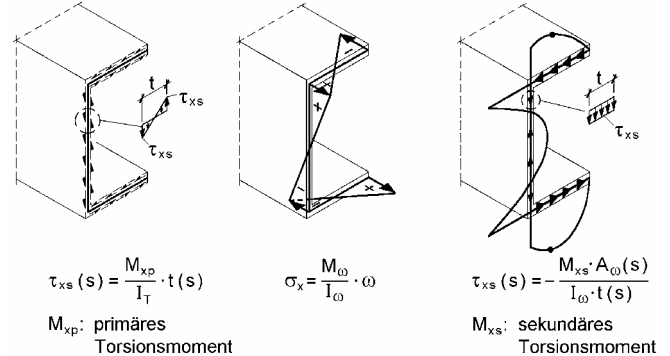
#### Normalkraft und Biegung um die y - Achse



#### Biegung um die z - Achse



#### Torsion

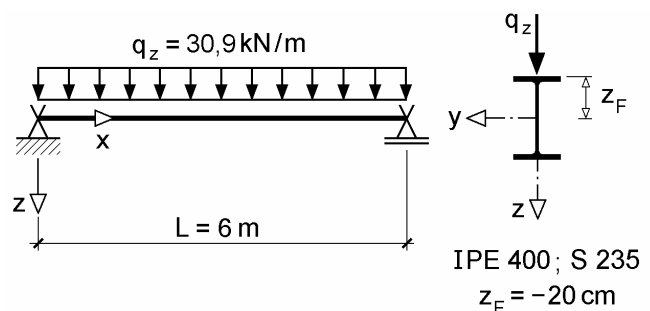


**Bild 1** Elastische Spannungsverläufe für einen U-förmigen Querschnitt

Für baupraktische Fälle kann darüber hinaus i.d.R. der Einfluss der sekundären Schubspannungen vernachlässigt werden.

$$\max \tau_{xs} \leq \frac{|V_z| \cdot \max S_y}{I_y \cdot \min t} + \frac{|M_{xp}|}{I_T} \cdot \max t \leq \tau_{R,d} \quad (2)$$

### 4 Beispiel 1 (ohne planmäßige Torsion)



**Bild 2** Doppelsymmetrischer I-Querschnitt ohne planmäßige Torsion

Für das in Bild 2 dargestellte Beispiel werden die Schnittgrößen nach Th. II. O. gemäß Tabelle 2 berechnet. Dazu werden folgende Zwischenwerte benötigt:

$$\varepsilon_T = 600 \cdot \sqrt{\frac{8100 \cdot 51,1}{21000 \cdot 490048}} = 3,804$$

$$I_T^* = 51,1 \cdot \left( \frac{10}{3,804^2} + 1 \right) = 86,37 \text{ cm}^4$$

Da **keine** planmäßige Torsionsbeanspruchung ( $m_x = 0$ ) vorliegt wird mit

$$\bar{q}_{v0m} = 0,309 \cdot \left( \frac{600}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1,21 \cdot 0,309 \cdot (600/\pi)^4 - 0,98 \cdot 21000 \cdot 1318 \cdot (-20)}{21000 \cdot 1318 / 1,1 \cdot 8100 \cdot 86,37 / 1,1}$$

$$\Rightarrow \bar{q} = \bar{q}_{v0m} = 0,698 < 1$$

weiter gerechnet. Zu beachten ist dabei gemäß DIN 18800 Teil 2 [3], dass bei Berechnungen nach Th. II. O. die **Designwerte der Steifigkeiten**  $EI_{z,d} = EI_z / \gamma_M$  usw. zu verwenden sind ( $\gamma_M = 1,1$ ).

Durch  $\bar{q} < 1$  ist gewährleistet, dass die **Verzweigungslast** nicht überschritten wird. Eine zusätzliche Überprüfung von  $M_{ki,y}$  ist nicht erforderlich. Somit kann der Vergrößerungsfaktor für die Verdrehung nach Th. II. O. bestimmt werden.

$$\alpha_g = \frac{1}{1 - 0,698} = 3,311$$

Für das vorliegende Profil IPE 400 sowie die zu untersuchende Ausweichrichtung senkrecht zur z-Achse ist Knickspannungslinie (KSL) b maßgebend. Ferner wird das Nachweisverfahren Elastisch-Elastisch gewählt (vergl. Tabelle 1:  $v_{0m} = 2/3 \cdot 600/500 = 0,8 \text{ cm}$ ). Es folgt:

$$\vartheta_m^{II} = 3,311 \cdot \left( 109 \cdot \frac{0,309 \cdot 0,8}{8100 \cdot 86,37 / 1,1} \cdot \left( \frac{600}{\pi} \right)^2 + 0 \right)$$

$$\Rightarrow \vartheta_m^{II} = 0,0512 \text{ rad} < 0,3 \text{ rad}$$

Damit ergeben sich die Schnittgrößen wie folgt (die Werte in Klammern zeigen die Ergebnisse des RUBSTAHL-Programms KSTAB [1] – FE-Stabwerksprogramm):

$$M_{y,m} = 0,309 \cdot 600^2 / 8 = 13905 \text{ kNcm}$$

$$V_{z,a} = 0,309 \cdot 600 / 2 = 92,7 \text{ kN}$$

$$M_{z,m}^{II} = -13905 \cdot 0,0512 = -717 \text{ kNcm} \quad (-717 \text{ kNcm})$$

$$M_{xp,A}^{II} = 8100 \cdot 51,1 / 1,1 \cdot 0,0512 \cdot \pi / 600 = 100,9 \text{ kNcm} \quad (99,8 \text{ kNcm})$$

$$M_{\omega,m}^{II} = 3,311 \cdot \frac{0,304 \cdot 600^2}{3,804^2} \cdot \left[ 1 - \frac{2 \cdot \sinh(3,804/2)}{\sinh 3,804} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{21 - 3,804}{74} \right]$$

$$\Rightarrow M_{\omega,m}^{II} = 13610 \text{ kNcm}^2 \quad (13641 \text{ kNcm}^2)$$

$$\text{mit: } m_{x,m}^I = 1,23 \cdot 0,8 \cdot 0,309 = 0,304 \text{ kNcm/cm}$$

Nun wird die Aufnahme der Schnittgrößen durch den Querschnitt auf Grundlage der Elastizitätstheorie gemäß den Gln. (1) und (2) nachgewiesen (Feldmitte:  $\sigma_x$ ; Auflager:  $\tau_{xs}$ ; Grenzspannungen:  $f_{y,d} = 21,82$  und  $\tau_{R,d} = 12,60$  in  $\text{kN/cm}^2$ ):

$$\max \sigma_x \leq \frac{13905}{1156,4} + \frac{711}{146,4} + \frac{13610}{490048} \cdot 173,9 = 21,71 < 21,82$$

$$\max \tau_{xs} \leq \frac{92,7 \cdot 653,6}{23120 \cdot 0,86} + \frac{100,9}{51,1} \cdot 1,35 = 5,71 < 12,60$$

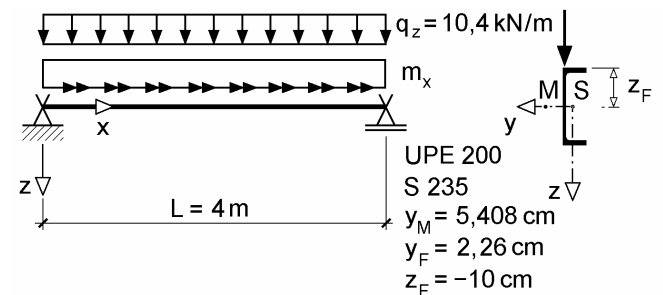
Ein zusätzlicher Biegedrillknicknachweis mit dem  $\kappa_M$ -Verfahren gemäß DIN 18800 Teil 2 [3] ist überflüssig. Wie man an dem in Tabelle 3 dargestellten **Vergleich für verschiedene Berechnungsgrundlagen** sieht, ergeben sich mit zunehmender Trägerlänge ähnliche Grenzlaster. Bei kürzeren Trägerlängen hingegen, wie in dem diskutierten Beispiel, nähern sich die Grenzlaster auf Grundlage des Nachweisverfahrens Elastisch-Elastisch von unten (sichere Seite) denen des  $\kappa_M$ -Verfahrens. An dieser Stelle sei angemerkt, dass bei großen Trägerlängen häufig nicht die elastische oder plastische Querschnittstragfähigkeit, sondern die Beschränkung von  $|\vartheta| \leq 0,3 \text{ rad}$  (entspricht  $17,2^\circ$ : **Gültigkeitsgrenze der Th. II. O.**) maßgebend wird.

**Tabelle 3** Grenzlaster  $\max q_z$  bezüglich Bild 2

L [m]	E - P				E - E	
	$\kappa_M$ -Verfahren [3]		KSTAB + TSV [1]		$\alpha_g$ -Verfahren <sup>1)</sup>	
	kN/m	%	kN/m	%	kN/m	%
3	227,22	100	226,02	99,5	183,80	80,9
6	34,13	100	34,74	101,8	30,92	90,6
9	10,23	100	10,13	99,0	9,69	94,7
12	4,38	100	4,23	96,7	4,22	96,5
15	2,27	100	2,17	95,5	2,21	97,4
18	1,33	100	1,27	95,0	1,29	97,0

<sup>1)</sup> mit den Gln. (1) und (2)

### 5 Beispiel 2 (mit planmäßiger Torsion)



$I_T = 8,88 \text{ cm}^4$	$t_s ; t_a = 0,6 ; 1,1 \text{ cm}$
$I_{\omega} = 11565 \text{ cm}^6$	$\max \omega = 43,02 \text{ cm}^2$
$I_v = 1909 \text{ cm}^4$	$W_v = 190,9 \text{ cm}^3$
$I_z = 187,3 \text{ cm}^4$	$W_z = 34,4 \text{ cm}^3$
$W_v = 190,9 \text{ cm}^3$	$\max S_v = 110,0 \text{ cm}^3$

**Bild 3** U-Querschnitt mit planmäßiger Torsion

Im Falle planmäßiger Torsion, wie sie bei dem in Bild 3 dargestellten baustatischen System aufgrund der Exzentrizität der Last  $q_z$  zum Schubmittelpunkt M des U-förmigen Querschnitts auftritt, **darf das  $\kappa_M$ -Verfahren nicht angewendet**

**werden**, vergl. in DIN 18800 Teil 2, Element (311), [3]. Dann verbleibt prinzipiell nur die Nachweismöglichkeit der Schnittgrößenberechnung nach Th. II. O. mit anschließendem Nachweis ausreichender Querschnittstragfähigkeit. Die Berechnung der Schnittgrößen verläuft prinzipiell analog zu Beispiel 1, so dass hier nur die Ergebnisse mitgeteilt werden. Unterschiedlich ist lediglich der Stich der Vorkrümmung  $v_{0m} = 0,67$  cm (KSL c, siehe Tabelle 1) und das zur Berechnung des Vergrößerungsfaktors  $\alpha_g$  der Beiwert  $\bar{q}_{mx}$  für planmäßige Torsion (anstelle von  $\bar{q}_{v0m}$  für unplanmäßige Torsion) verwendet wird. Die Schnittgrößen in den Klammern zeigen zum Vergleich die Ergebnisse des RUBSTAHL-Programms KSTAB [1].

$$I_T^* = 10,75 \text{ cm}^4 \quad \text{mit: } \varepsilon_T = 6,882$$

$$m_x = -0,327 \text{ kNcm/cm} \rightarrow \text{sgn}(m_x) = -1$$

$$g_m^{II} = -0,1649 \text{ rad} \quad \text{für: } \alpha_g = 1,733 \quad \text{mit: } \bar{q} = \bar{q}_{mx} = 0,423$$

$$M_{y,m} = 2\,080 \text{ kNcm} \quad \text{und} \quad V_{z,a} = 20,8 \text{ kN}$$

$$M_{z,m}^{II} = 343 \text{ kNcm} \quad (342 \text{ kNcm})$$

$$M_{\omega,m}^{II} = -2\,241 \text{ kNcm}^2 \quad (-2\,179 \text{ kNcm}^2)$$

$$M_{xp,A}^{II} = -84,6 \text{ kNcm} \quad (-86,4 \text{ kNcm})$$

Die **Spannungen** gemäß den Gln. (1) und (2) ergeben sich somit zu  $\tau_{xs} = 12,48$  kN/cm<sup>2</sup> und  $\sigma_x = 29,19$  kN/cm<sup>2</sup>, so dass sowohl die Grenzschubspannung  $\tau_{R,d}$  als auch die Streckgrenze  $f_{y,d}$  überschritten werden. Berechnet man hingegen die Spannungen für jeden Punkt des Querschnitts genau (siehe auch Spannungsverläufe in Bild 1), gemäß den Spannungsgleichungen (s: Profilordinate)

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega \quad (3)$$

$$\tau_{xs}(s) = \frac{|V_z \cdot S_y(s)|}{I_y \cdot t(s)} + \frac{M_{xp}}{I_T} \cdot t(s) \quad (4)$$

ergibt sich für Schub- und Normalspannungen, dass in der linken, oberen Ecke des Querschnitts die betragsmäßig größten Spannungen wirken, welche gerade noch nachgewiesen werden können.

$$|\sigma_x| = |-21,34| < 21,82 = f_{y,d} \quad \text{und} \quad \tau_{xs} = 11,27 < 12,60 = \tau_{R,d}$$

**Tabelle 4** Grenzlaster max  $q_z$  bezüglich Bild 3

L [m]	E - P				E - E ( $\alpha_g$ -Verfahren)			
	KSTAB+TSV		$\kappa_{MT}$ -Verf. [4]		Gln. (3), (4)		Gln. (1), (2)	
	KN/m	%	KN/m	%	KN/m	%	KN/m	%
2	61,13	100	59,37	97,1	39,13	64,0	32,67	53,4
3	23,80	100	23,17	97,3	18,56	78,0	15,63	65,7
4	12,16	100	11,78	96,9	10,44	85,9	8,89	73,0
5	6,88	100	6,58	95,6	6,42	93,4	5,54	80,6
6	4,15	100	4,02	96,7	4,17	100,3	3,68	88,5
7	2,71	100	2,64	97,3	2,75	101,6	2,55	94,3
8	1,87	100	1,83	97,7	1,90	101,6	1,84	98,4

Die **Grenzlaster**, bei der  $\sigma_x$  den Wert der Streckgrenze annimmt, ergibt sich zu  $\max q_z = 10,44$  kN/m, siehe Tabelle 4. Bei Ausnutzung der plastischen Querschnittstragfähigkeit mit dem Teilschnittgrößenverfahren [1] liegt die Grenzlaster für dieses Beispiel trotz größerer Ersatzimperfektion (Abminderung auf 2/3 entfällt, da Nachweisverfahren E-P) um 16,5% höher. Außerdem zeigt Tabelle 4 auch die Grenzlaster mit dem modifizierten  $\kappa_{MT}$ -Verfahren [4], welches auf den hier behandelten Fall angewendet werden kann.

## 6 Zusammenfassung

Mit dem vorgestellten  $\alpha_g$ -Verfahren können für Standardfälle die Schnittgrößen nach Elastizitätstheorie II. Ordnung mit oder ohne planmäßige Torsion (einschließlich der Wölbkrafttorsion) unter Ansatz einer geometrischen Ersatzimperfektion näherungsweise berechnet werden. Der eigentliche Tragsicherheitsnachweis erfolgt durch Überprüfung der elastischen oder plastischen Querschnittstragfähigkeit. Für den Fall nicht vorhandener Torsion entspricht diese Vorgehensweise einem **alternativen Biegedrillknicknachweis** ( $\kappa_M$ -Verfahren muss nicht zusätzlich angewendet werden; Berechnungsaufwand in etwa gleich). Der wesentliche Vorteil des Verfahrens liegt in der Anwendung bei planmäßiger Torsion, wie sie z.B. bei **U-Profilen** aufgrund der Querschnittscharakteristik fast immer gegeben ist. In derartigen Fällen darf das  $\kappa_M$ -Verfahren nicht angewendet werden, so dass i.d.R. eine aufwendige, programmgestützte Berechnung durchzuführen ist. Hier bietet das Verfahren den Vorteil einer Handrechnung bei beliebigem Lastangriff. Darüber hinaus wurde gezeigt, dass sich insbesondere bei kurzen und mittellangen Trägern die Ausnutzung plastischer Querschnittsreserven lohnen kann.

Im Allg. wird folgende **Empfehlung** gegeben:

- **ohne** planmäßige Torsion: herkömmliches  $\kappa_M$ -Verfahren nach DIN 18800 Teil 2 [3]
- **mit** planmäßiger Torsion:
  - a) Systeme gemäß Bild 3 (U-Profile mit Lastangriff am oberen Stegende): modifiziertes  $\kappa_M$ -Verfahren nach [4]
  - b) sonst:  $\alpha_g$ -Verfahren (Tabelle 2) mit Spannungsnachweis oder Teilschnittgrößenverfahren [1]

## 7 Literaturverzeichnis

- [1] Kindmann, R., Frickel, J.: Elastische und plastische Querschnittstragfähigkeit. Verlag Ernst & Sohn, Berlin 2002
- [2] Frickel, J.: Zur Torsionsbeanspruchung von Stäben unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität. Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 4, Nr. 191, VDI-Verlag, Düsseldorf 2003
- [3] DIN 18800 (11.90): Stahlbauten; Teil 1: Bemessung und Konstruktion; Teil 2: Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken
- [4] Kindmann, R., Frickel, J.: Modifiziertes  $\kappa_M$ -Verfahren für U-Profile mit Biege- und Torsionsbeanspruchung. RUBSTAHL-Bericht 1-2002, Ruhr-Universität Bochum 2002