

# Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter  
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:  
<http://www.rub.de/spieltheorie>

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:

**„Grundzüge der Spieltheorie“**  
von **Stefan Winter**,  
**Springer Gabler**,  
Erschienen im Dezember 2014



# 3. Dynamische Spiele mit vollständiger Information

#### **Dynamische Spiele:**

Die Züge der Spieler werden nacheinander ausgeführt.

#### **Vollständige Information:**

Alle Spieler kennen die Auszahlungen aller anderen Spieler.

#### **Implikation vollständiger Information:**

Jeder Spieler kann sich perfekt in jeden anderen Spieler hineinversetzen.

#### Beispiel für ein dynamisches Spiel – Das Münzspiel:

- Mimi legt eine Münze mit „Kopf“ oder „Zahl“ nach oben auf den Tisch.
- Caro sieht, was Mimi getan hat.
- Dann legt Caro eine Münze mit „Kopf“ oder „Zahl“ nach oben auf den Tisch.

#### Spielergebnis:

- Haben beide Spielerinnen ihre Münzen mit unterschiedlichen Symbolen nach oben auf den Tisch gelegt, gewinnt Mimi die Münze von Caro.
- Liegen beide Münzen mit dem gleichen Symbol oben, gewinnt Caro die Münze von Mimi.

#### Wer wird das Spiel gewinnen?

#### Mimis Strategiemenge:

Spielplan A

Lege „Kopf oben“

Spielplan B

Lege „Zahl oben“

#### Anmerkungen:

Mimi ist als Erste am Zug und zieht während des Spiels auch nur einmal.  
Ihre Strategien enthalten daher keine Wenn-/Dann-Bedingungen!

## Caros Strategiemenge:

### Spielplan 1

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt,  
lege ich „**Kopf oben**“, legt Mimi  
„Zahl oben“, lege ich „**Zahl oben**“.

### Spielplan 2

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt, lege  
ich „**Kopf oben**“, legt Mimi „Zahl  
oben“, lege ich „**Kopf oben**“.

### Spielplan 3

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt,  
lege ich „**Zahl oben**“, legt Mimi  
„Zahl oben“, lege ich „**Zahl oben**“.

### Spielplan 4

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt, lege  
ich „**Zahl oben**“, legt Mimi „Zahl  
oben“, lege ich „**Kopf oben**“.

## Welche Strategiekombinationen gibt es in Mimis und Caros Münzspiel?

Strategiekombination	Strategie Mimi	Strategie Caro
<i>SK 1</i>	Spielplan A	Spielplan 1
<i>SK 2</i>	Spielplan A	Spielplan 2
<i>SK 3</i>	Spielplan A	Spielplan 3
<i>SK 4</i>	Spielplan A	Spielplan 4
<i>SK 5</i>	Spielplan B	Spielplan 1
<i>SK 6</i>	Spielplan B	Spielplan 2
<i>SK 7</i>	Spielplan B	Spielplan 3
<i>SK 8</i>	Spielplan B	Spielplan 4



## Rückwärtsinduktion

### Zielsetzung:

Spiele sollten so dargestellt werden, dass man möglichst den Zusammenhang zwischen Strategiekombinationen und Auszahlungen direkt erkennen kann und außerdem der zeitliche Ablauf zum Ausdruck kommt!

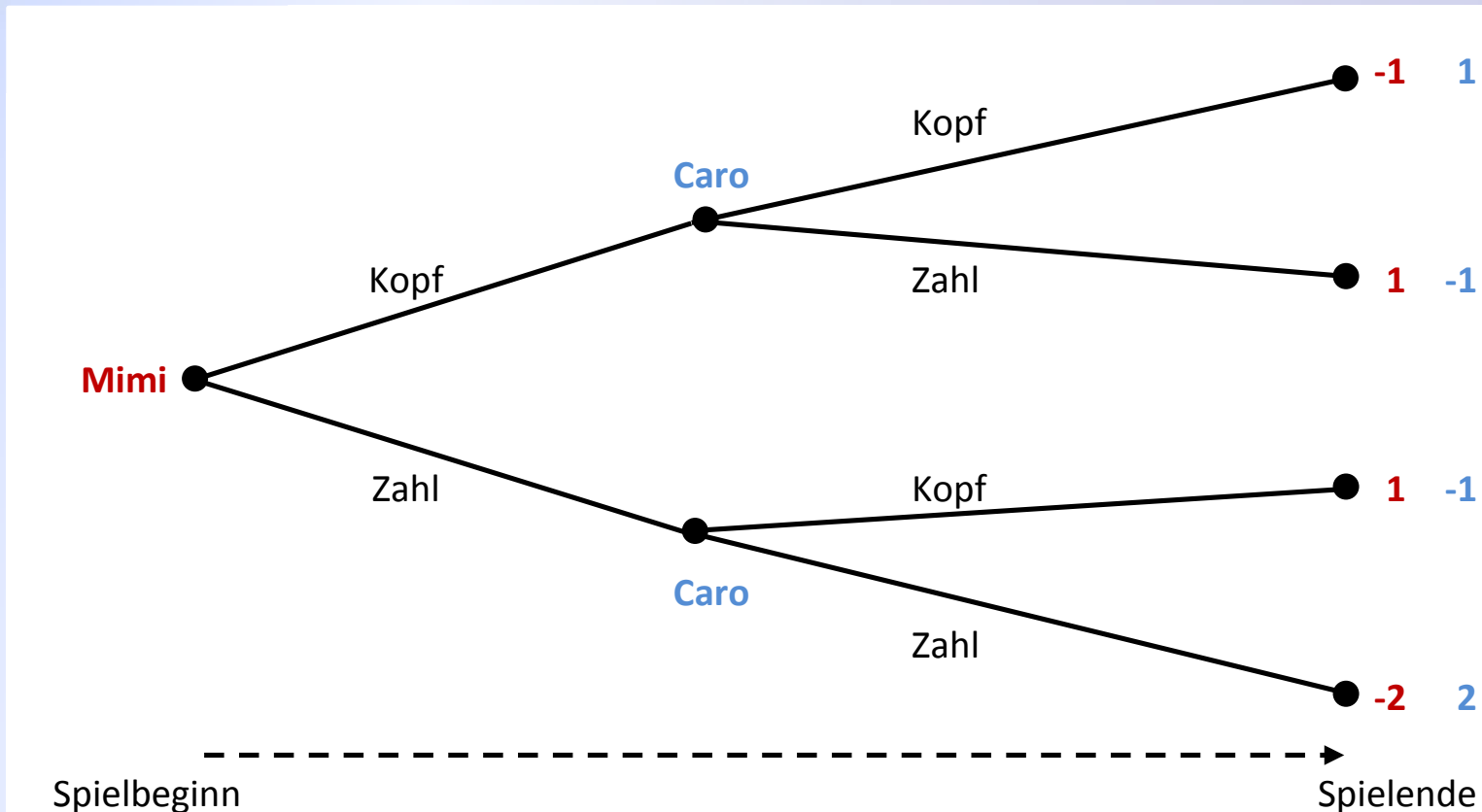
### Darstellung:

Die Darstellung erfolgt als sogenannter „Spielbaum“. Eine Darstellung in der Matrixform ist auch möglich, allerdings kommt bei dieser Darstellungsart der zeitliche Ablauf nicht zum Ausdruck und es können jeweils nur zwei Spieler betrachtet werden.

## Beispiel: Das Münzspiel

### Regeländerung:

Wenn Mimi und Caro beide „Zahl“ zeigen, dann verliert Mimi noch eine zusätzliche Münze an Caro



#### Bezeichnungen:

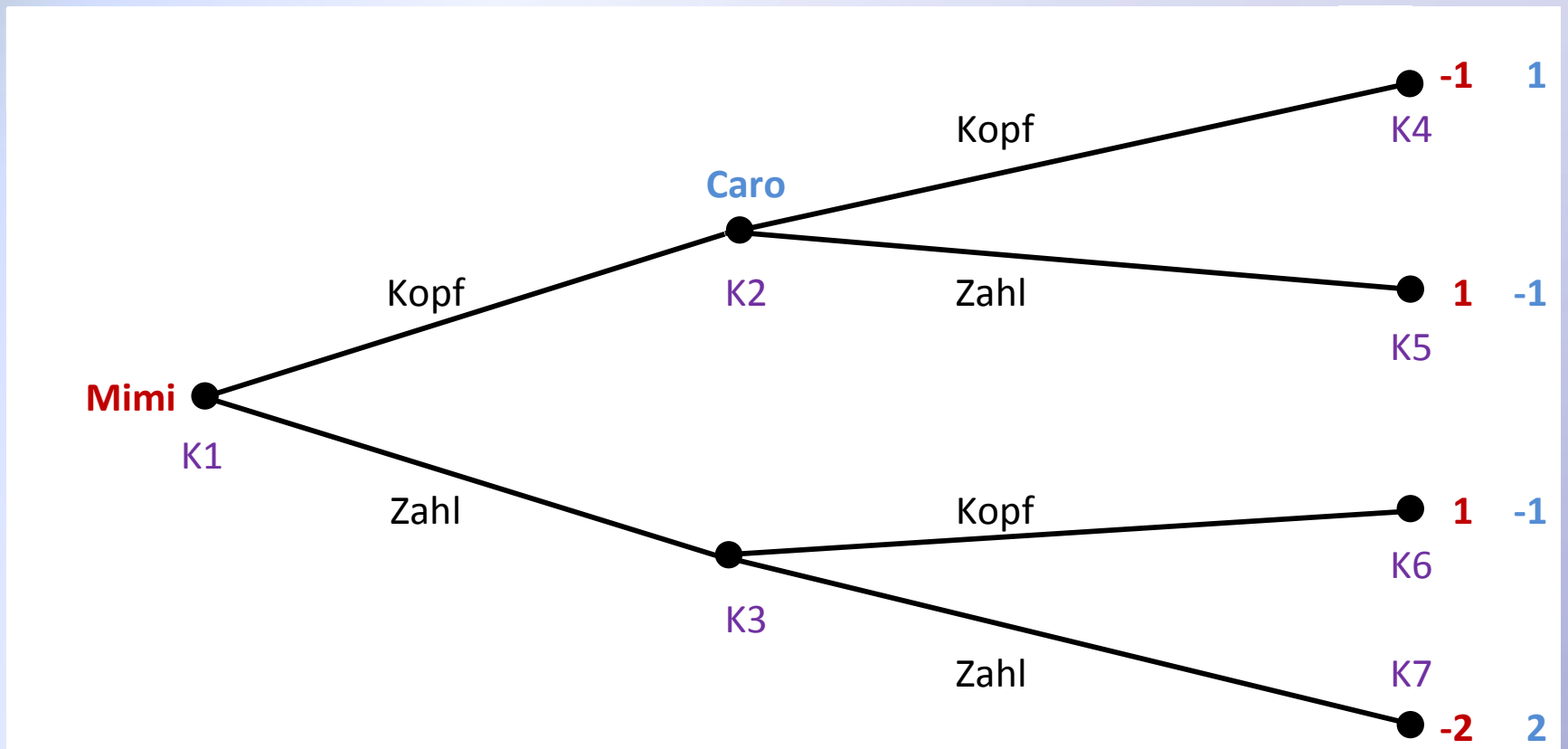
- bezeichnet man als Knoten. Es wird zwischen zwei verschiedenen Arten, den „Entscheidungsknoten“ und den „Endknoten“ unterschieden.
  - *Entscheidungsknoten* werden mit dem Namen des Spielers beschriftet, der am Zug ist. Sie zeigen an, dass der betreffende Spieler in dem Knoten eine Entscheidung zu treffen hat.
  - *Endknoten* befinden sich am äußersten rechten Rand des Spielbaums. Sie zeigen das Ende des Spiels an. Die Knoten werden mit den Auszahlungen der Spieler beschriftet, wobei die Reihenfolge der Auszahlungen der Reihenfolge der Spieler entspricht.

werden „Kanten“ genannt und repräsentieren die jeweils möglichen Züge des Spielers. Dementsprechend werden die *Kanten* mit dem Zug beschriftet, den sie darstellen.

#### Anpassungen:

- Der gestrichelte Pfeil stellt den Zeitverlauf dar. Er wurde in der obigen Abbildung nur zur Verdeutlichung eingezeichnet und gehört nicht zur üblichen Spielbaumdarstellung.
- Entscheidungsknoten, die direkt übereinander liegen gehören zu demselben Spieler. Deshalb wird in Zukunft jeweils nur noch der obere der Knoten mit dem Spielernamen beschriftet.
- Dort, wo es für sinnvoll erscheint, werden die Entscheidungsknoten und Endknoten durchnummeriert und mit  $K1, K2, \dots, KN$  bezeichnet.

Unter Berücksichtigung dieser Anpassungen ergibt sich folgender Spielbaum:



#### **Ablauf der Rückwärtsinduktion:**

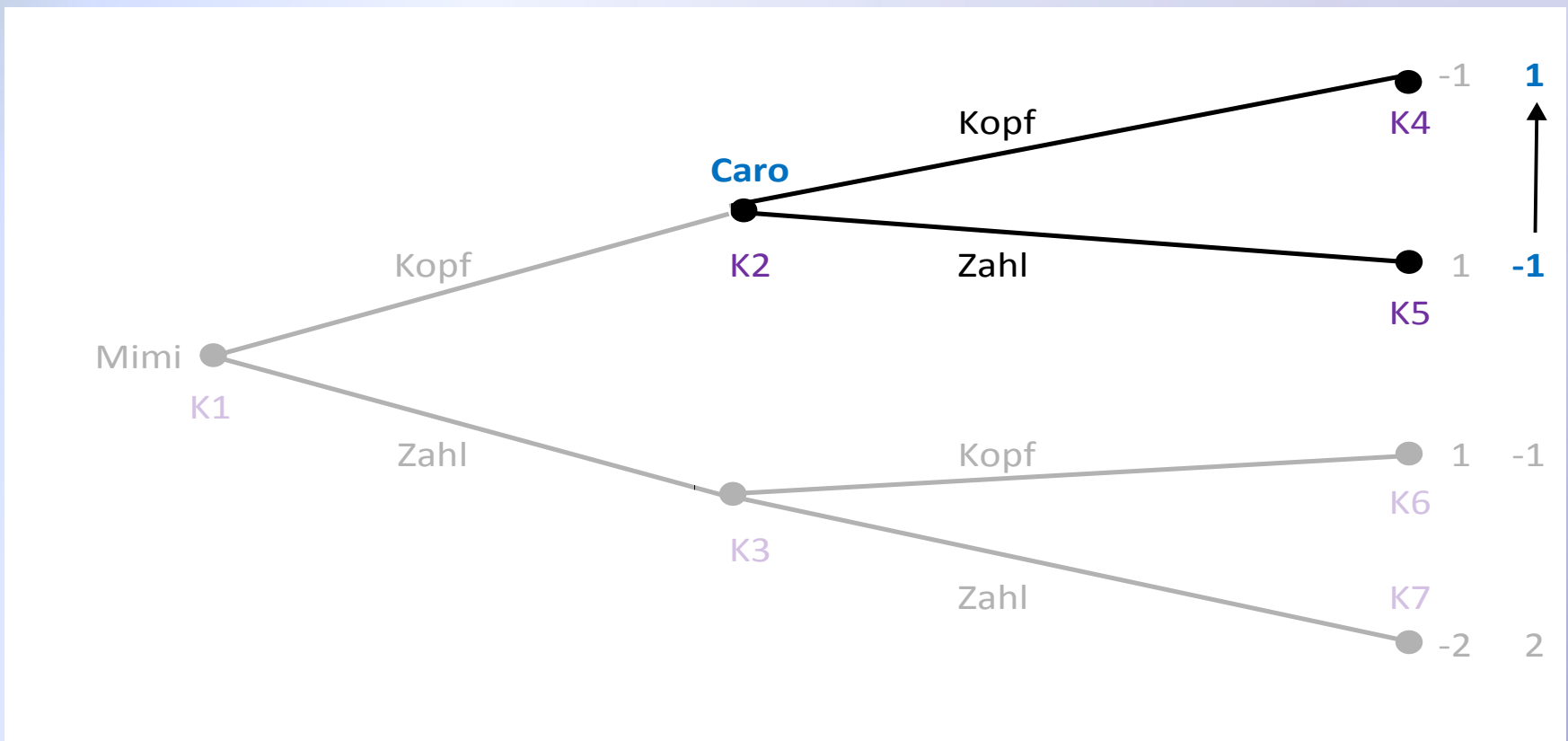
*Grundgedanke:* Mimi muss im obigen Spiel zuerst ihre Entscheidung treffen. Welche Entscheidung für sie die beste ist, hängt davon ab, wie Caro reagieren wird. Deshalb muss sie zunächst deren Entscheidungssituation analysieren.

#### **Ergebnis:**

Die Analyse des Spiels beginnt zeitlich am Ende, d.h. bei dem Spieler, der als letzter am Zug ist.

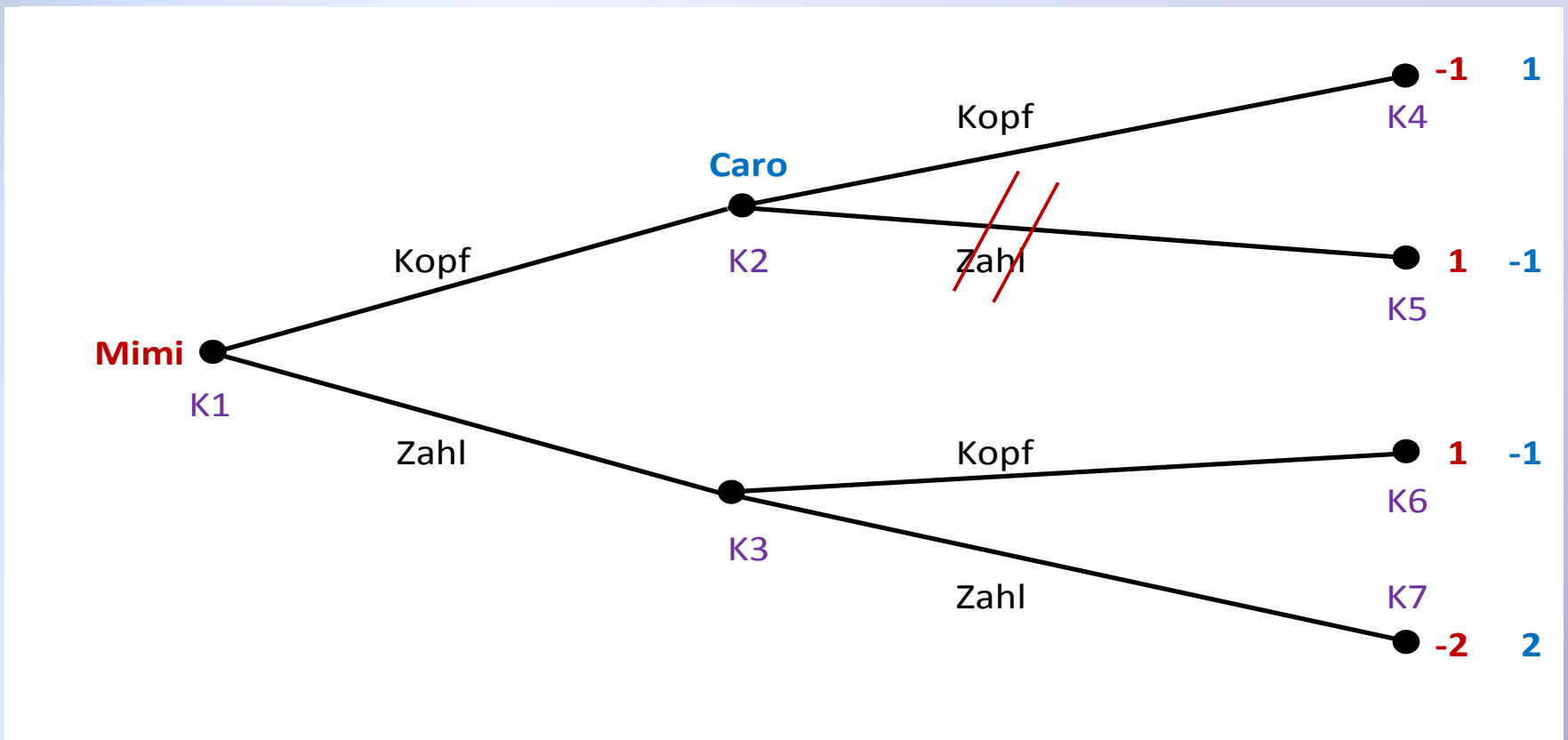
## 1. Analyse von Caros möglichen Entscheidungen

Im Entscheidungsknoten **K2**, also wenn Mimi vorher „Kopf“ gewählt hat, wählt Caro „Kopf“ mit einer Auszahlung von 1. Bei „Zahl“ bekäme sie nur eine Auszahlung von -1.



## Erste Streichung:

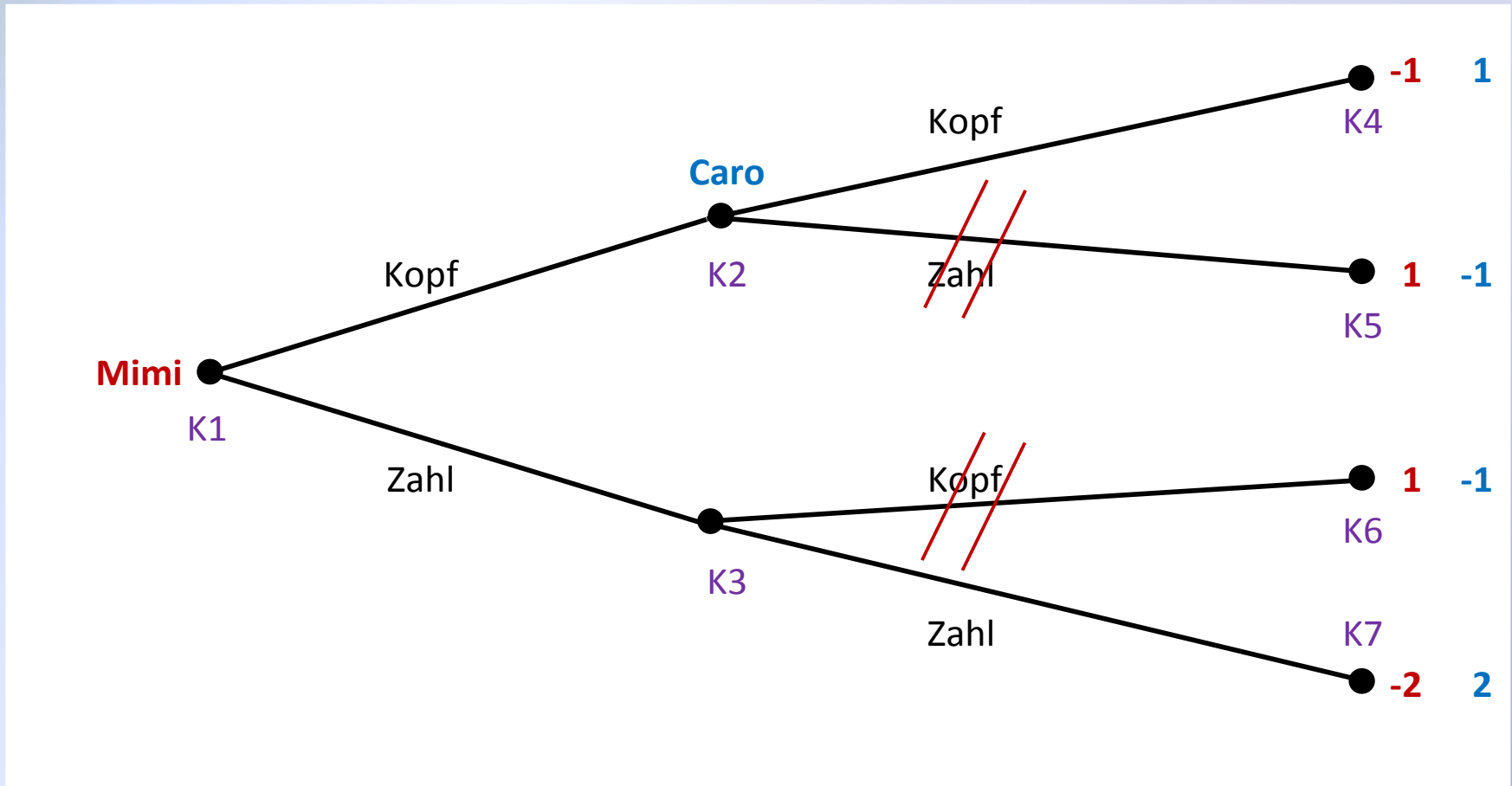
Der Zug „Zahl“ im Entscheidungsknoten **K2** kann gestrichen werden.





## Zweite Streichung:

Im Entscheidungsknoten **K3** sollte Caro „Zahl“ bevorzugen und „Kopf“ streichen.



## 2. Analyse von Mimis möglichen Entscheidungen

- Fazit aus Caros Entscheidungen: das Spiel kann nicht in K5 oder K6 enden

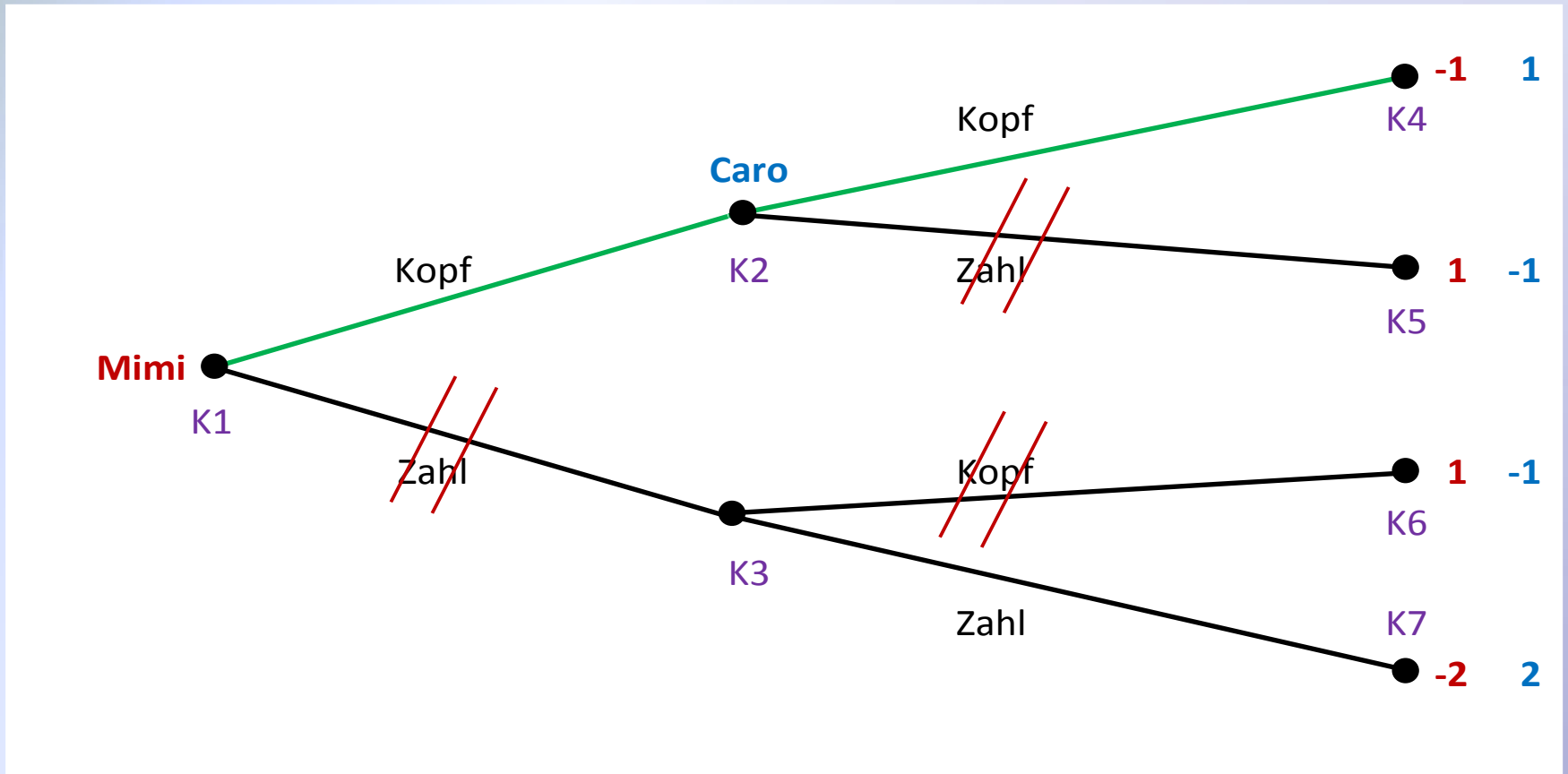
### Mimis Handlungsmöglichkeiten:

- Wählt Mimi „Kopf“ wird Caro auch „Kopf“ wählen. Das Spiel endete in Endknoten K4 und Mimi erhalte eine Auszahlung von -1.
- Wählt Mimi „Zahl“ entscheidet sich Caro für „Zahl“. Das Spiel würde in Endknoten K7 enden und Mimi erhalte eine Auszahlung von -2.

### Mimis Entscheidung:

- Da eine Auszahlung von -1 besser ist als eine Auszahlung von -2, sollte Mimi „Kopf“ wählen und die Alternative „Zahl“ streichen.

Ergebnis des Spiels:



Rückwärtsinduktionsergebnis:  $\{\text{Zug Mimi}; \text{Zug Caro}\} = \{\text{Kopf}; \text{Kopf}\}$

#### Anmerkungen:

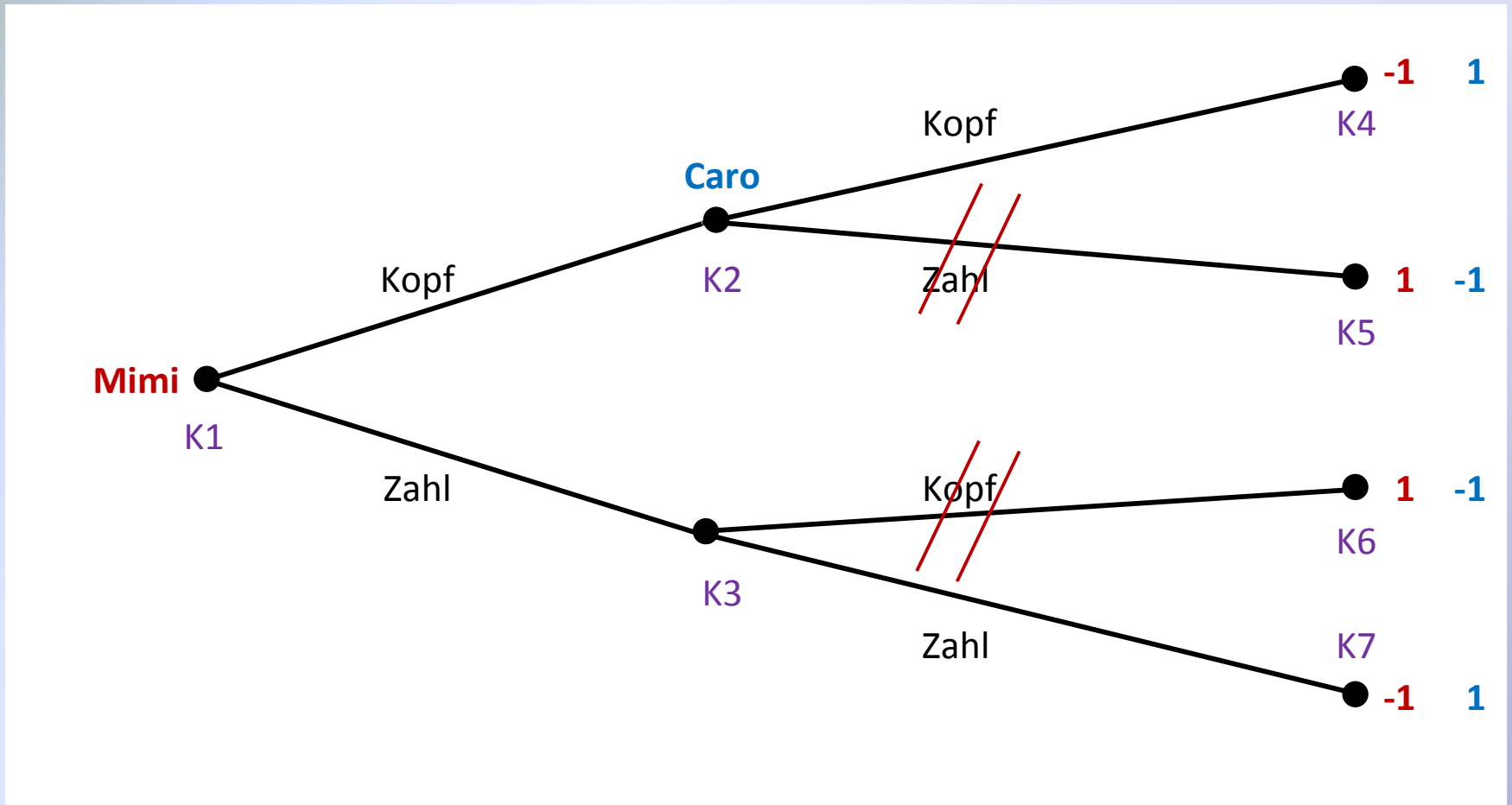
- Das Rückwärtsinduktionsergebnis eines Spiels ist kein Gleichgewicht!
- Rückwärtsinduktionsergebnisse müssen nicht eindeutig sein!

#### Beispiel für ein nicht eindeutiges Spiel:

#### Regeländerung:

- Mimi erhält bei der Zugkombination „Zahl“/„Zahl“ auch eine Auszahlung von -1

Ergebnis des Spiels:



Rückwärtsinduktionsergebnisse: {Zahl; Zahl} und {Kopf; Kopf}

## Darstellung von Gleichgewichten dynamischer Spiele:

### Problem:

Spielbäume geben den zeitlichen Ablauf von Spielen wieder und die zu jedem Zeitpunkt möglichen Züge, aber sie geben nicht direkt die Strategien wieder.

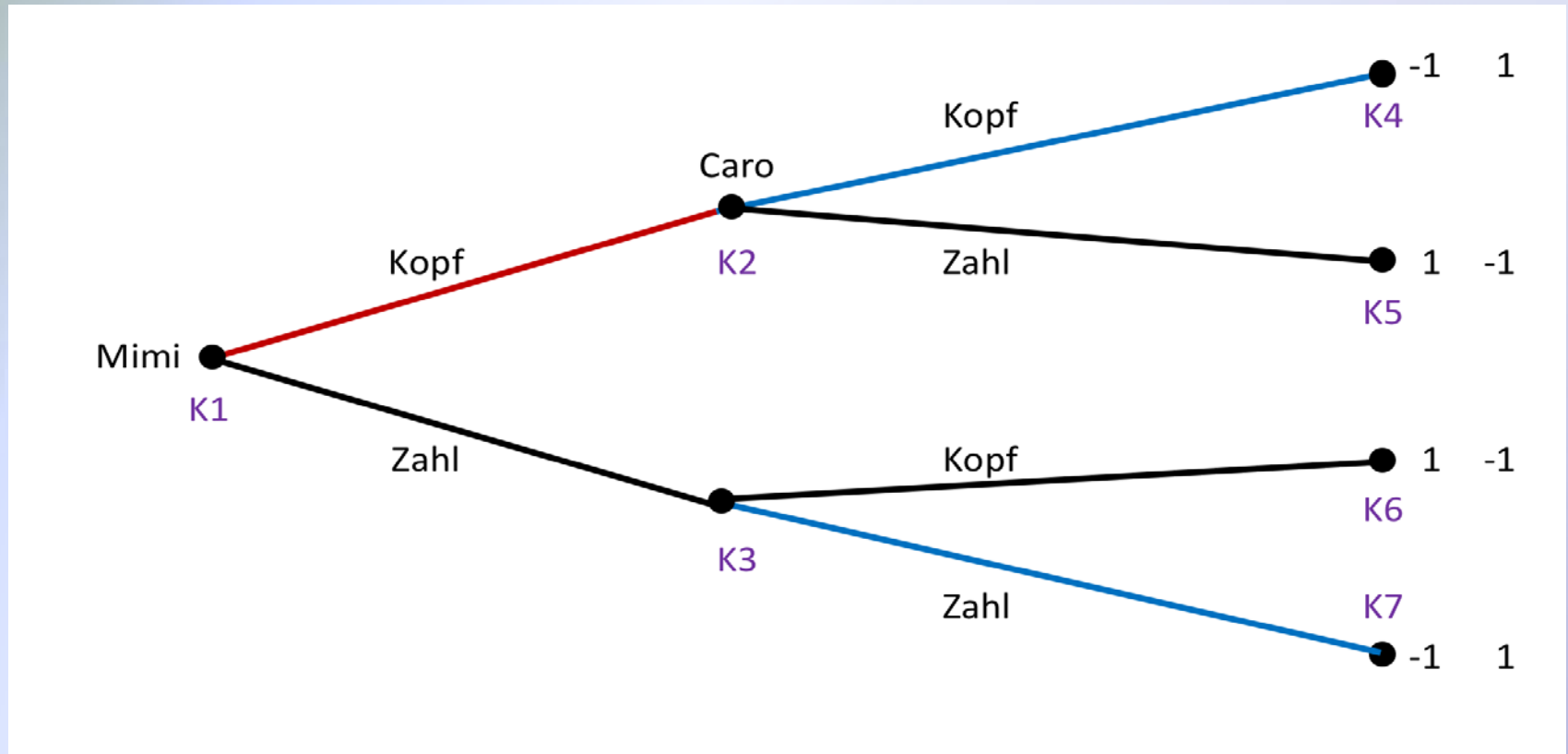
### Problemlösung:

Alle bedingten Züge, die zu einer Strategie eines Spielers gehören, werden als gleichfarbige Kanten dargestellt.

### Im Beispiel:

- Mimis Strategie: Rote Kante
- Caros Strategie: Blaue Kanten

## Darstellung als Spielbaum:



*Mimis Strategie: „Kopf“*

*Caros Strategie: „Kopf wenn Kopf, Zahl wenn Zahl“*

## Ist diese Strategiekombination ein Gleichgewicht?

**Antwort:** Ja!

### Prüfung Mimi:

- Bleibt Mimi bei „Kopf“ endet das Spiel im Knoten **K4** mit einer Auszahlung von -1
- Bei dem Wechsel auf „Zahl“ endet das Spiel im Knoten **K7** mit einer Auszahlung von ebenfalls -1

### Ergebnis:

Mimi hat keinen Grund zu wechseln, ihre Strategie ist eine beste Antwort!



#### Prüfung Caro:

- Bei der gegebenen Strategie von Mimi landet sie mit ihrer eigenen Strategie im Endknoten **K4** mit einer Auszahlung von 1.

#### Ergebnis:

Da Caro in keinem anderem Fall eine höhere Auszahlung als 1 erreichen kann, ist ihre Strategie eine beste Antwort auf die Strategie von Mimi.

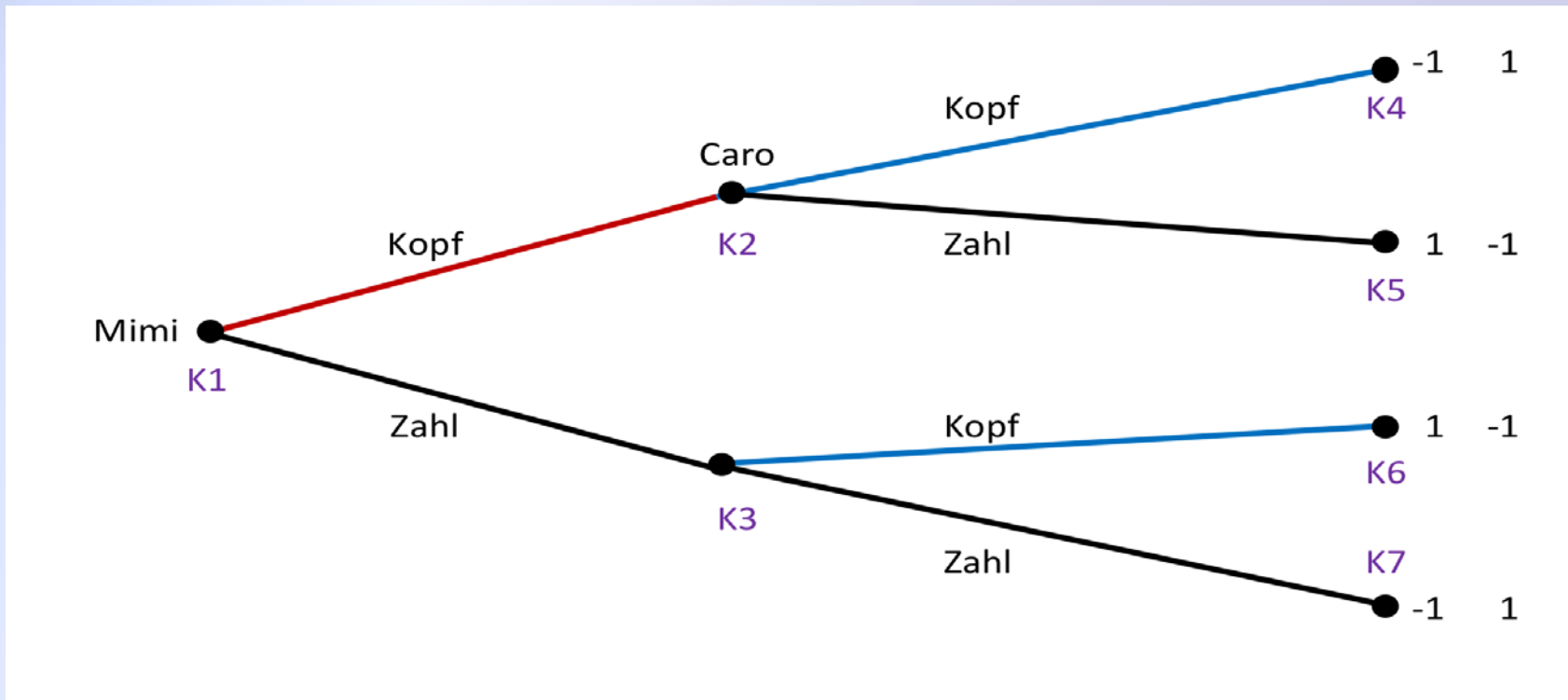
#### Fazit:

Die Strategiekombination {Kopf; Kopf wenn Kopf, Zahl wenn Zahl} ist ein Gleichgewicht!

## Annahme:

- Caro ändert ihre Strategie und wählt im Knoten K3 statt „Zahl“ lieber „Kopf“
- Mimi bleibt bei der Strategie „Kopf“

## Abbildung als Spielbaum:



#### Ergebnis:

Diese Strategiekombination würde wieder zu dem Endknoten **K4** führen.

**Aber:** es bestände kein Gleichgewicht mehr.

- Für Mimi wäre es gegen Caros Strategie besser „Zahl“ zu spielen um in den Endknoten **K6** zu gelangen mit einer Auszahlung von 1 statt -1 im Knoten **K4**.
- Mimi würde wechseln, es liegt kein Gleichgewicht vor.

## Überführung des Spielbaums in Matrixform:

		Caro			
		Kopf wenn Kopf Zahl wenn Zahl	Kopf wenn Kopf Kopf wenn Zahl	Zahl wenn Kopf Zahl wenn Zahl	Zahl wenn Kopf Kopf wenn Zahl
Mimi	Kopf	$\textcircled{-1}$ ; $\textcircled{1}$	$-1$ ; $\textcircled{1}$	$\textcircled{1}$ ; $-1$	$\textcircled{1}$ ; $-1$
	Zahl	$\textcircled{-1}$ ; $\textcircled{1}$	$\textcircled{1}$ ; $-1$	$-1$ ; $\textcircled{1}$	$-1$ ; $-1$

## Gleichgewichte in reinen Strategien:

*{Kopf; Kopf wenn Kopf, Zahl wenn Zahl}*

und

*{Zahl; Kopf wenn Kopf, Zahl wenn Zahl}*

## Teilspielperfektion und Rückwärtsinduktion

### Idee:

Menschen versuchen häufig das Verhalten von anderen zu beeinflussen, indem sie den anderen Menschen für bestimmte Verhaltensweisen Belohnungen versprechen oder Sanktionen androhen.

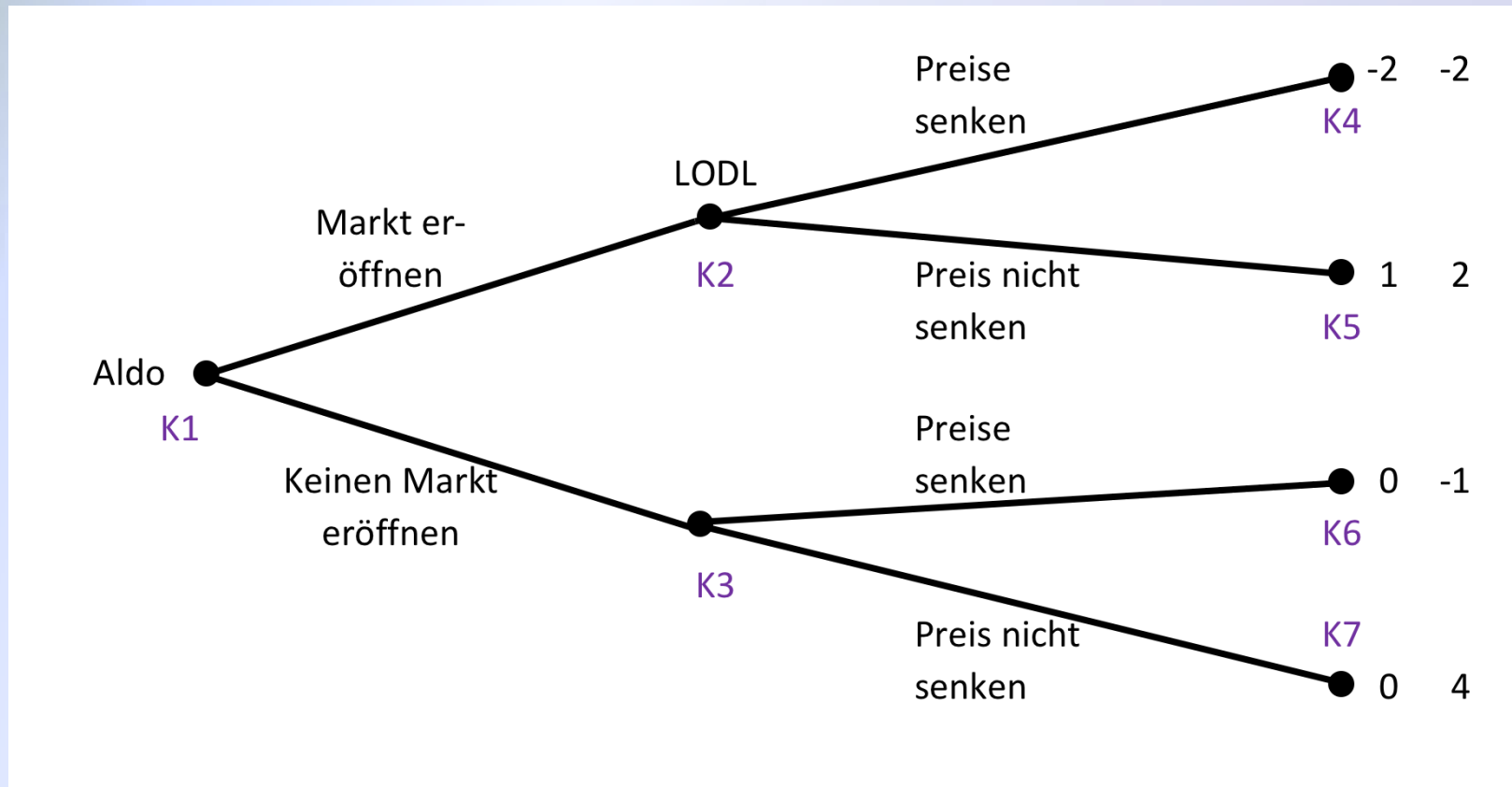
### Fragestellung:

Wie müssen solche Drohungen (oder auch Versprechungen) beschaffen sein, damit sie tatsächlich das Verhalten von anderen im gewünschten Sinne beeinflussen?

#### Beispiel:

- Die Supermarktkette LODL hat einen gut laufenden Supermarkt in Berlin-Kreuzberg. LODL bekommt die Information, dass die Konkurrenz Aldo dort auch einen Supermarkt eröffnen möchte.
- In einem Interview gibt der Vorstand darauf an, dass LODL grundsätzlich immer dort sehr niedrige Preise anbietet, wo man sich im Wettbewerb mit starken Konkurrenten befände.
- Aldo muss sich nach dem Interview nun entscheiden, ob es dieser Drohung glauben soll.

## Darstellung als Spielbaum:





Darstellung in Matrixform:

		LODL			
		Preise senken Preise senken	Preise senken Preise n. senken	Preise n. senken Preise senken	Preise n. senken Preise n. senken
Aldo	Markt eröffn.	-2 ; -2	-2 ; -2	1 ; 2	1 ; 2
	keinen Markt eröffn.	0 ; -1	0 ; 4	0 ; -1	0 ; 4

#### Gleichgewichte:

- {*Markt eröffnen; Preise nicht senken, Preise senken*}
- {*Markt eröffnen; Preise nicht senken, Preise nicht senken*}
- {*keinen Markt eröffnen; Preise senken, Preise nicht senken*}

#### Ergebnis:

- Das letzte der drei Gleichgewichte ist für LODL das vorteilhafteste, da es zu einer Auszahlung von 4 statt wie die anderen beiden von 2 führt.
- Gemäß dieses Gleichgewichts würde das Spiel in Knoten **K7** enden.

#### Problem:

- Es gibt mehrere Gleichgewichte, das heißt das Hauptziel der Spieltheorie, nämlich den Spielern eindeutige Anweisungen für die Wahl ihrer besten Antworten zu geben, kann nicht erfüllt werden.

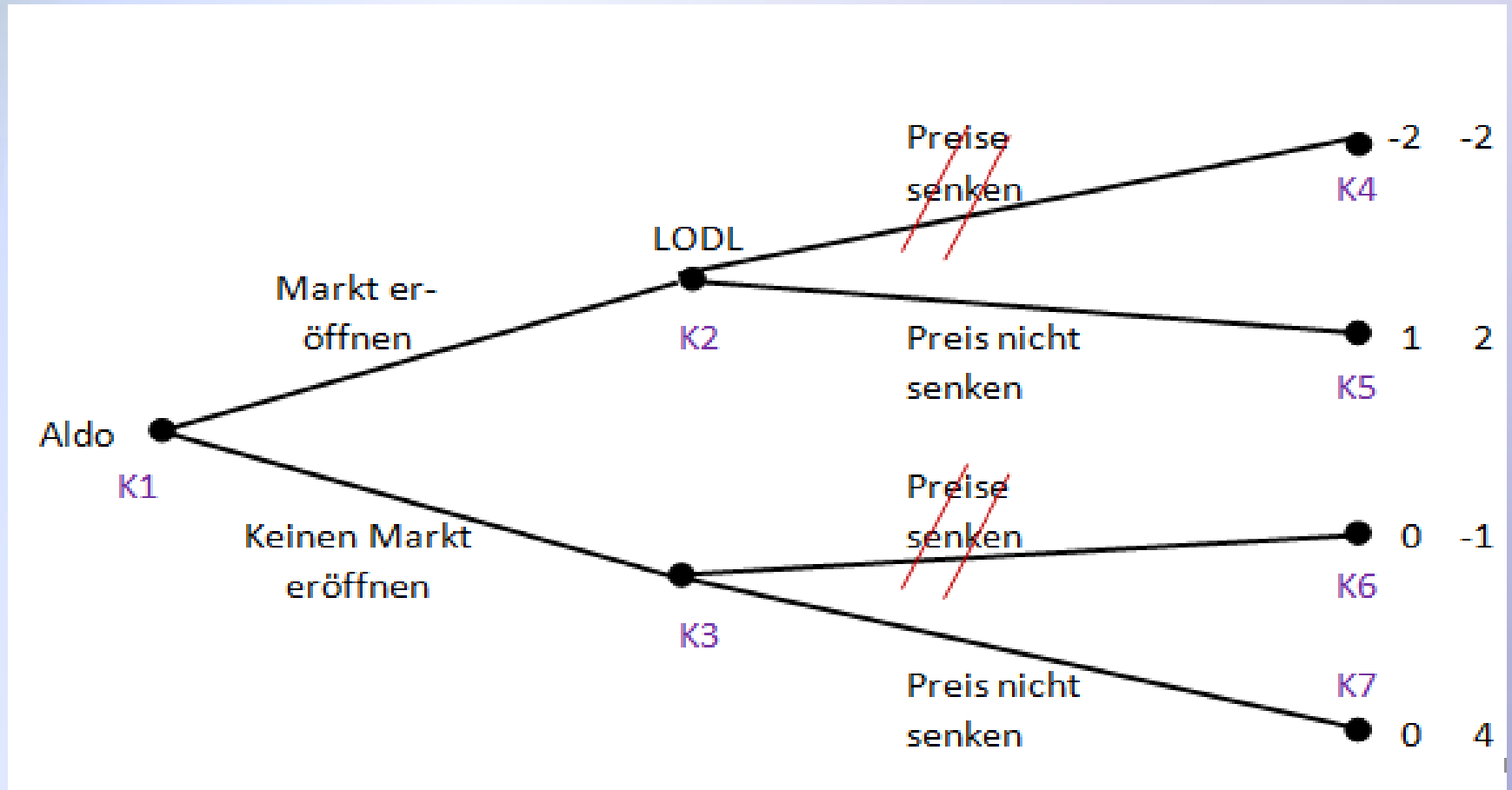
#### Lösung:

- Aufstellen einer zusätzlichen, sinnvollen Anforderung.

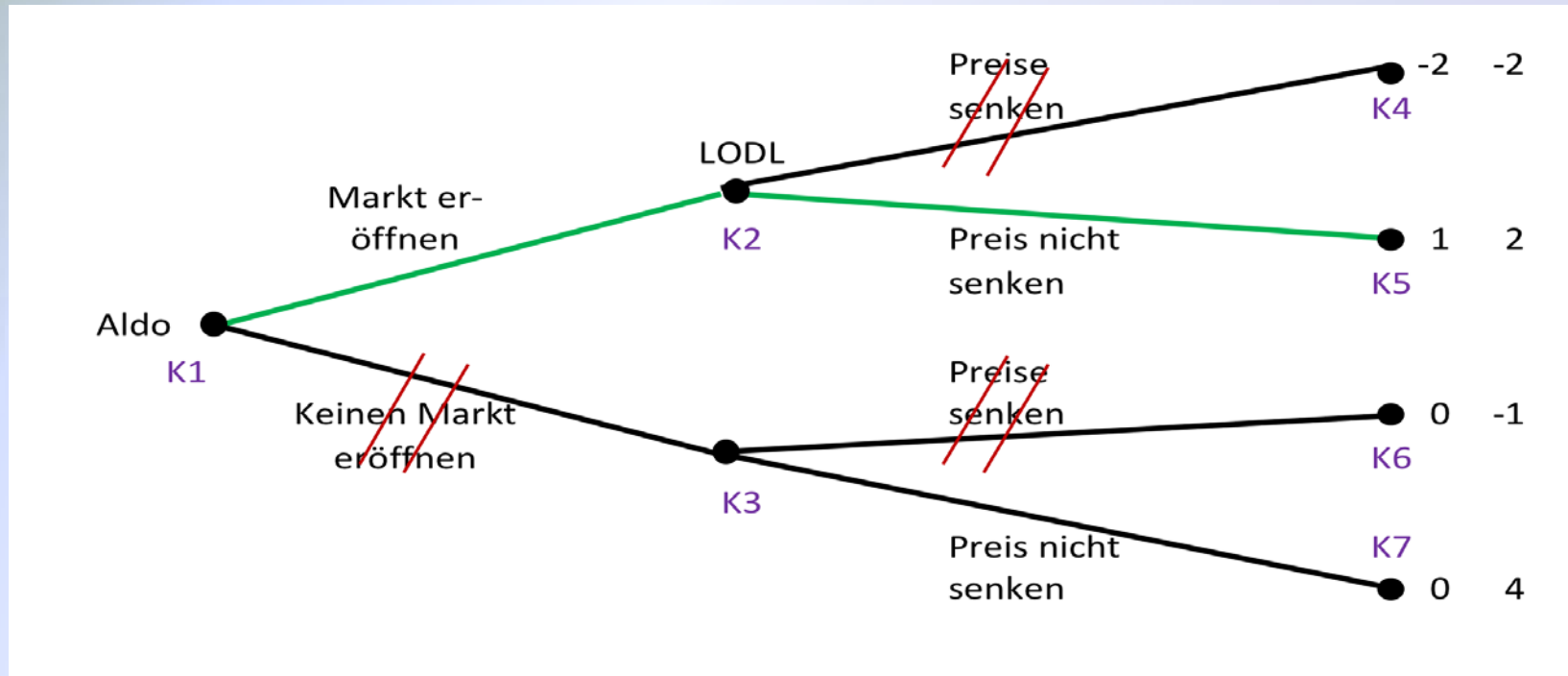
**Also:** Verfeinerung!

## Aufstellen der Anforderung am Beispiel mittels der Methode der Rückwärtsinduktion:

### Streichung der schlechten Züge von LODL:



## Wahl des besten Zuges für Aldo:



## Ergebnis:

- Für LODL ist es niemals optimal seine Preise zu senken, denn in jedem der Entscheidungsknoten K2 und K3 würde sich LODL durch Preissenkungen selbst schädigen

## Begriff „Teilspielperfektion“:

Eine Strategie eines Spielers A heißt „teilspielperfekt“, wenn in dieser Strategie keine Züge enthalten sind, die den Spieler A in irgendeinem seiner Entscheidungsknoten selbst schädigen würde.

## Beispiel:

LODL hat nur eine einzige teilspielperfekte Strategie, nämlich die Preise nicht zu senken, wenn Aldo einen Markt eröffnet und die Preise nicht zu senken, wenn Aldo keinen Markt eröffnet.

## Begriff „teilspielperfektes Gleichgewicht“:

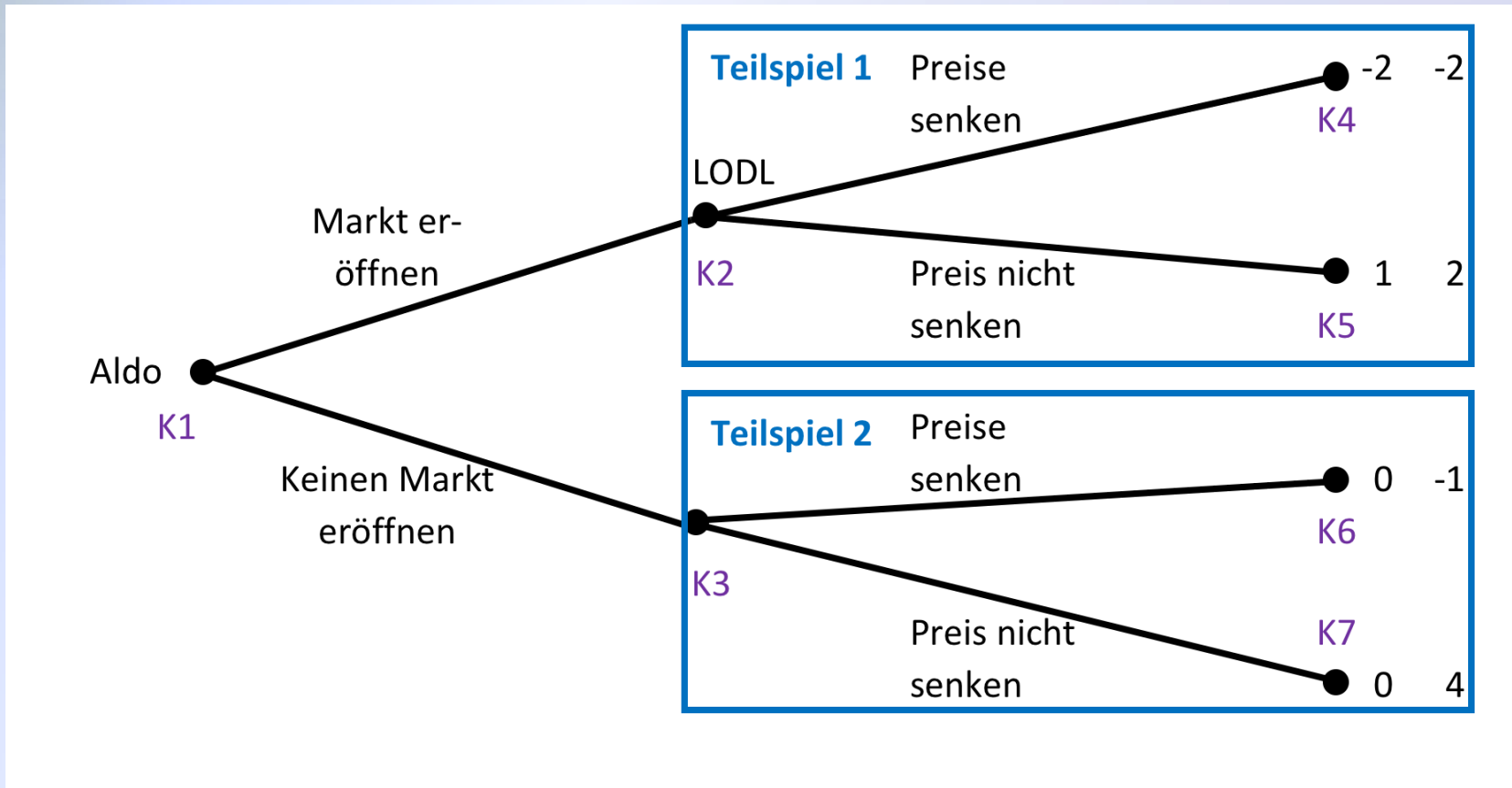
Ein Gleichgewicht heißt teilspielperfekt, wenn alle in der Strategiekombination des Gleichgewichts enthaltenen Strategien aller Spieler teilspielperfekte Strategien sind.

## Beispiel:

Das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht im Supermarktspiel lautet

{*Markt eröffnen; Preise nicht senken, Preise nicht senken*}

Teilspielperfektion im Spielbaum:





## Ermittlung eines teilspielperfekten Gleichgewichts mithilfe der Rückwärtsinduktionsmethode

### Beispiel:

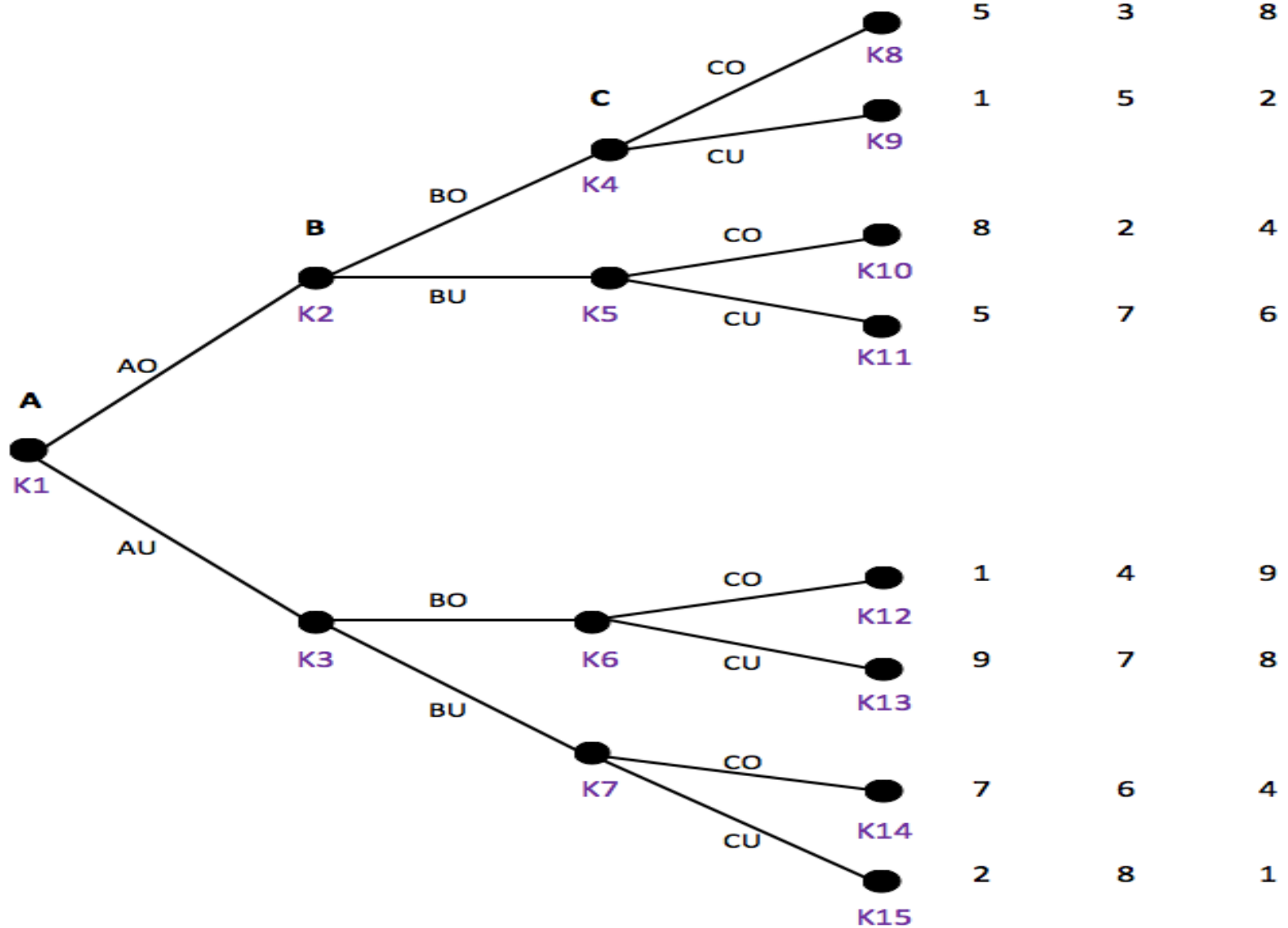
Betrachtung eines abstrakten Spiels mit den Spielern A, B und C

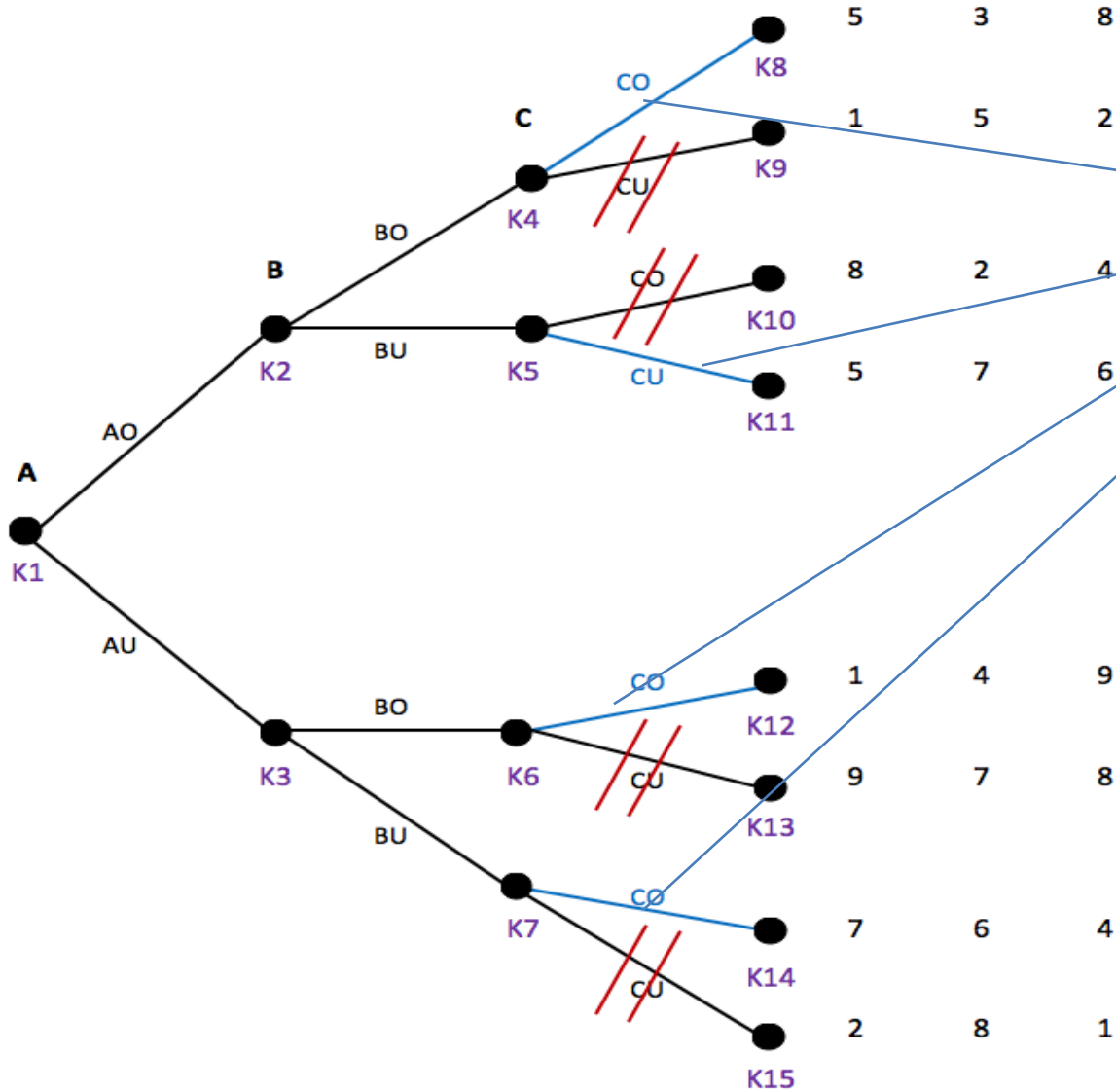
### Züge der Spieler:

AO, AU, BO usw.

### Spielbaum:

Siehe folgende Abbildung...

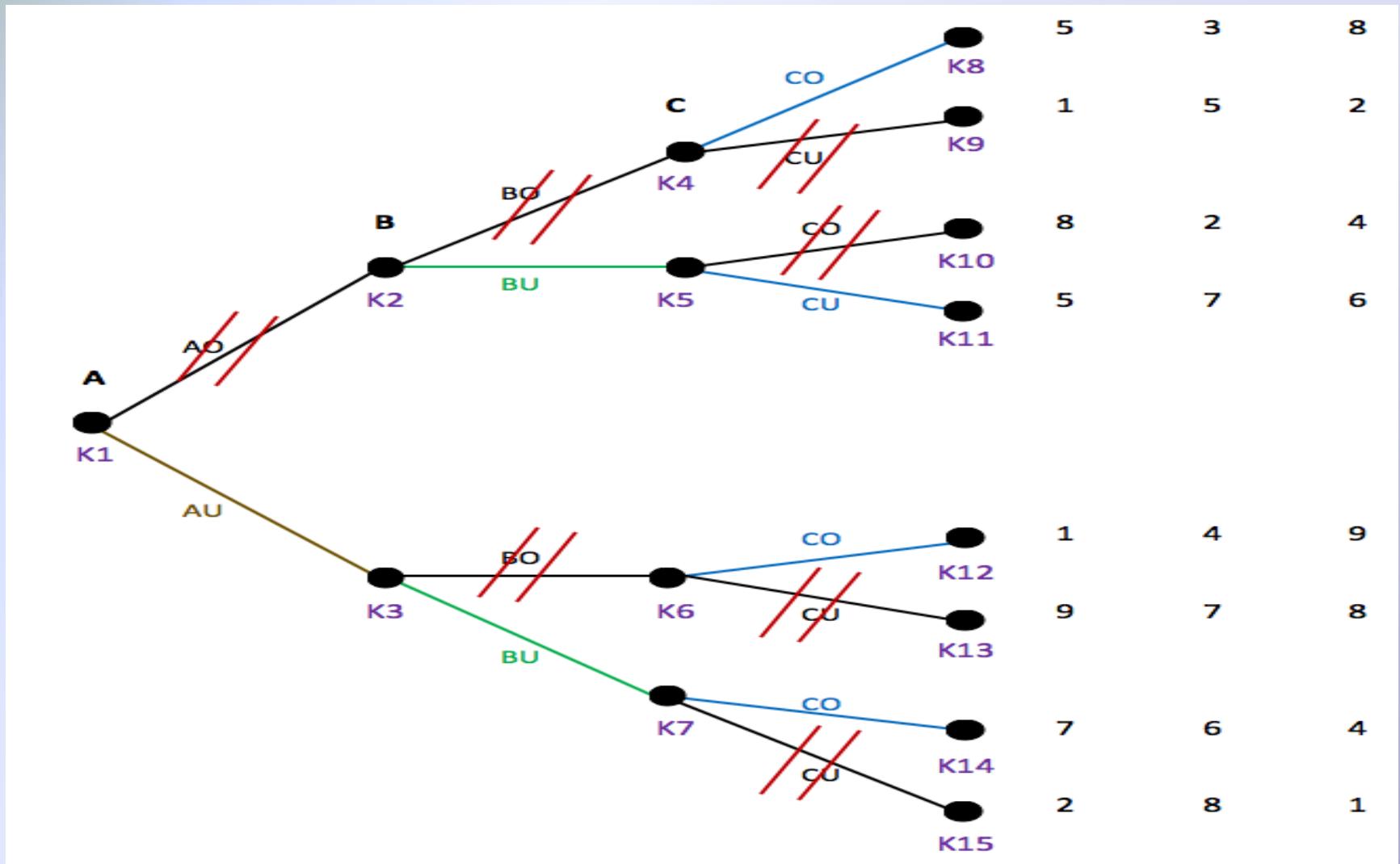




**Teilspielperfekte Strategie des Spielers C:**

„Wenn K4: CO,  
wenn K5: CU,  
wenn K6: CO,  
wenn K7: CO“

## Rückwärtsinduktion – Streichung der Züge von Spieler A und B



**Ergebnis:**

**Teilspielperfekte Strategie von Spieler B:**

„Wenn  $K2$ :  $BU$ , wenn  $K3$ :  $BU$ “

**Teilspielperfekte Strategie von Spieler A:**

„ $AU$ “

**Teilspielperfektes Gleichgewicht also:**

{ „ $AU$ “; „Wenn  $K2$ :  $BU$ , wenn  $K3$ :  $BU$ “; „Wenn  $K4$ :  $CO$ , wenn  $K5$ :  $CU$ , wenn  $K6$ :  $CO$ ,  
wenn  $K7$ :  $CO$ “ }

#### Teilspielperfektes Gleichgewicht:

- Werden die teilspielperfekten Strategien der Spieler gespielt, endet das Spiel im Endknoten **K14**.
- Dieses Gleichgewicht ist nicht effizient, da jede Strategiekombination, die die Spieler in den Endknoten **K13** führen würde, für alle Spieler gleichzeitig höhere Auszahlungen bedeuten würde.

#### Folgerung:

Auch in dynamischen Spielen könnte es vorteilhaft sein, wenn die Spieler bindende Strategien über die zu wählenden Strategien schließen könnten!

## Teilspielperfektion und Selbstbindung:

### Fragestellung:

Können unglaubwürdige Drohungen glaubwürdig gemacht werden?

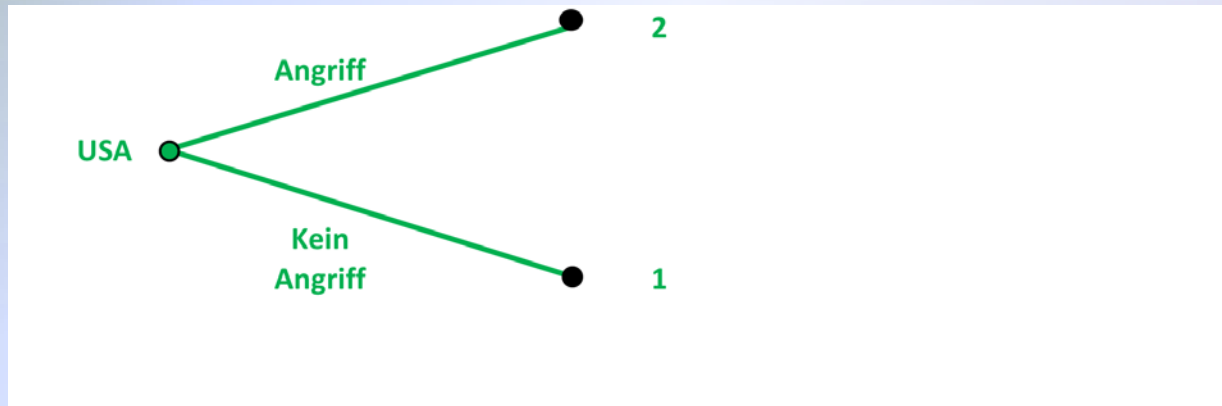
### Antwort:

Spieler müssen etwas tun, was ihre eigenen Auszahlungen verändert oder die möglichen Züge, die sie ausführen können.

### Beispiel:

- Aus dem Film „Dr. Seltsam – oder wie ich lernte, die Bombe zu lieben“ von Stanley Kubrick
- US-Fliegergeneral schickt seine Bomberstaffel zu einem atomaren Angriff gegen Ziele in der damaligen Sowjetunion.
- Er wusste nicht, dass die UdSSR eine geheime Superbombe gebaut hatte, die bei einem Angriff automatisch explodieren und die ganze Welt verseuchen würde.

## Entscheidungsmöglichkeiten der USA als Spielbaum



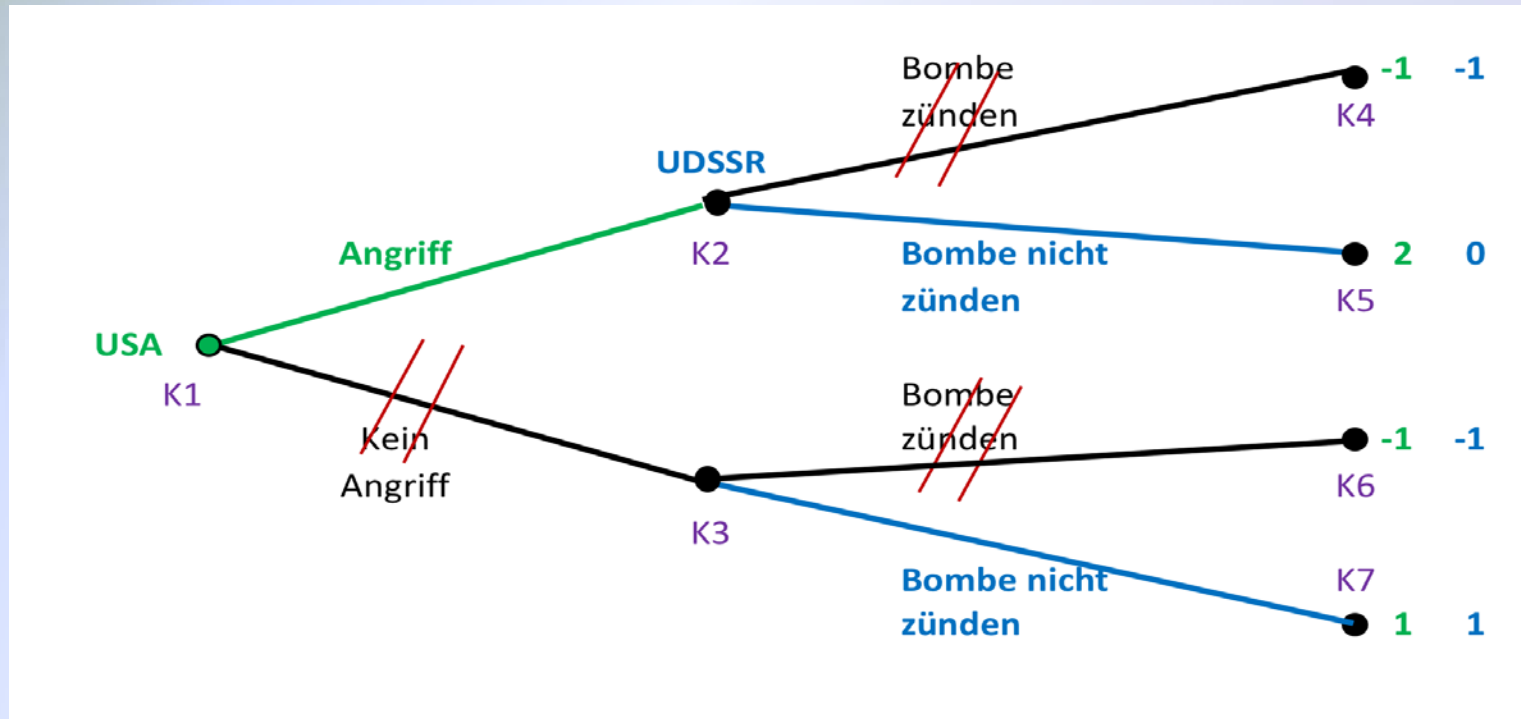
„Angriff“ wäre in dieser Situation die beste Entscheidung für die USA

### Annahmen:

- Die USA wüssten von der Weltvernichtungsmaschine der Sowjetunion
- Die Megabombe ist so konstruiert, dass sie bei einem Angriff per Hand gezündet werden müsste.
- Das Zünden der Weltvernichtungsmaschine ist auch aus der Perspektive der Sowjetunion immer die schlechteste Möglichkeit.



## Spielbaum unter den Annahmen



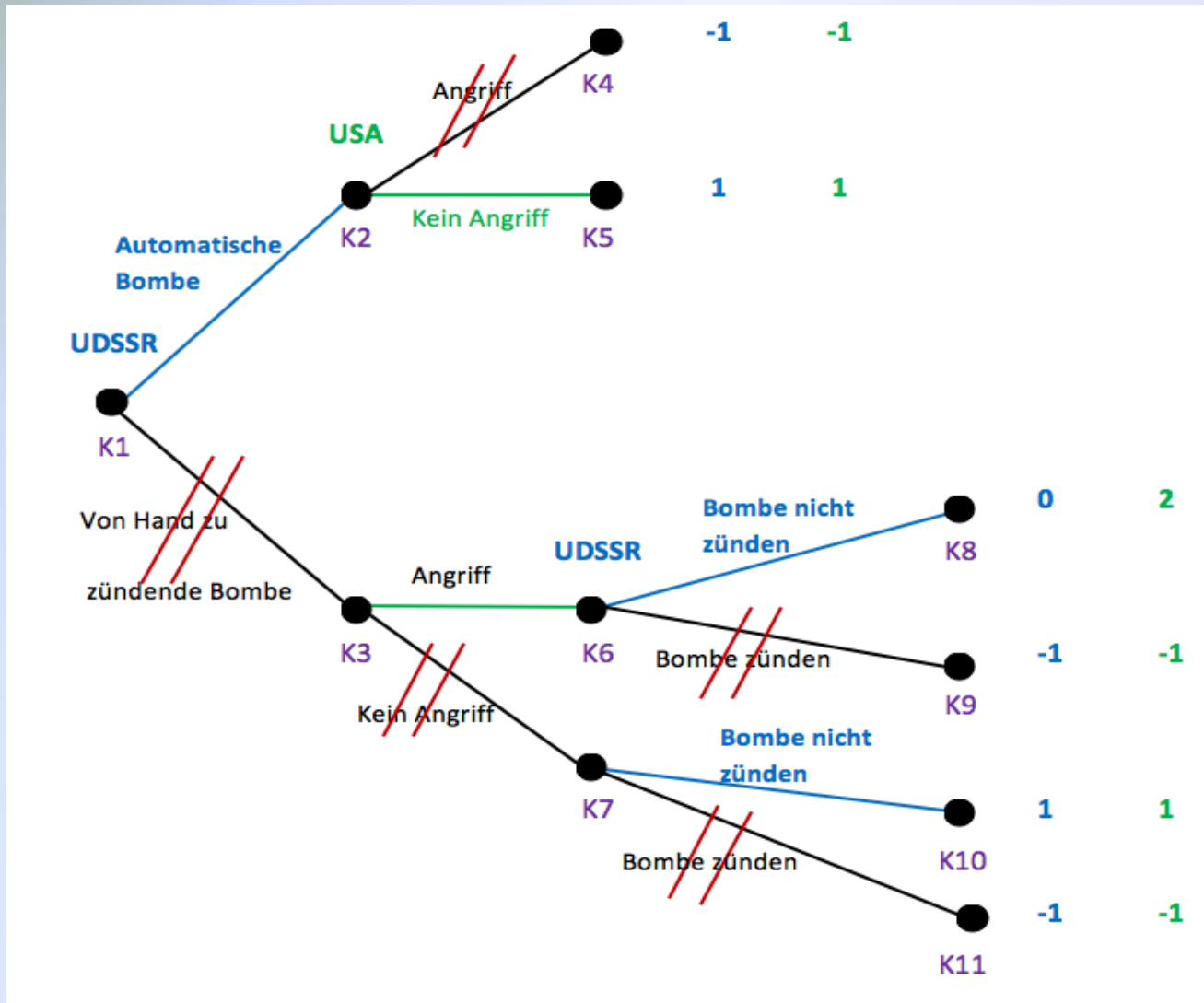
## Ergebnis:

Trotz der Bombe ist der Angriff die beste Entscheidung der USA. Die Drohung die Bombe zu zünden, ist nicht teilspielperfekt, weil kein vernünftiger Mensch eine solche Bombe zünden würde!

#### **Veränderung der Annahmen:**

- Die Bombe ist so konstruiert, dass sie bei einem Angriff automatisch detonieren würde.

# Spielbaum unter veränderten Annahmen:



**Rückwärtsinduktionsergebnis:**

Bau einer automatischen Bombe durch die UDSSR  
Kein Angriff durch die USA.

#### Im Allgemeinen:

- Drohungen, die nicht teilspielperfekt sind, sind in einer Welt rational handelnder Akteure sinnlos.
- Das Verhalten anderer Akteure kann durch Drohungen (oder dem Versprechen von Belohnungen) nur beeinflusst werden, wenn diese teilspielperfekt gemacht werden.
- Drohungen müssen dabei nicht nur glaubwürdig, sondern dem Gegenspieler auch bekannt sein.

## **Spiele mit imperfekter Information:**

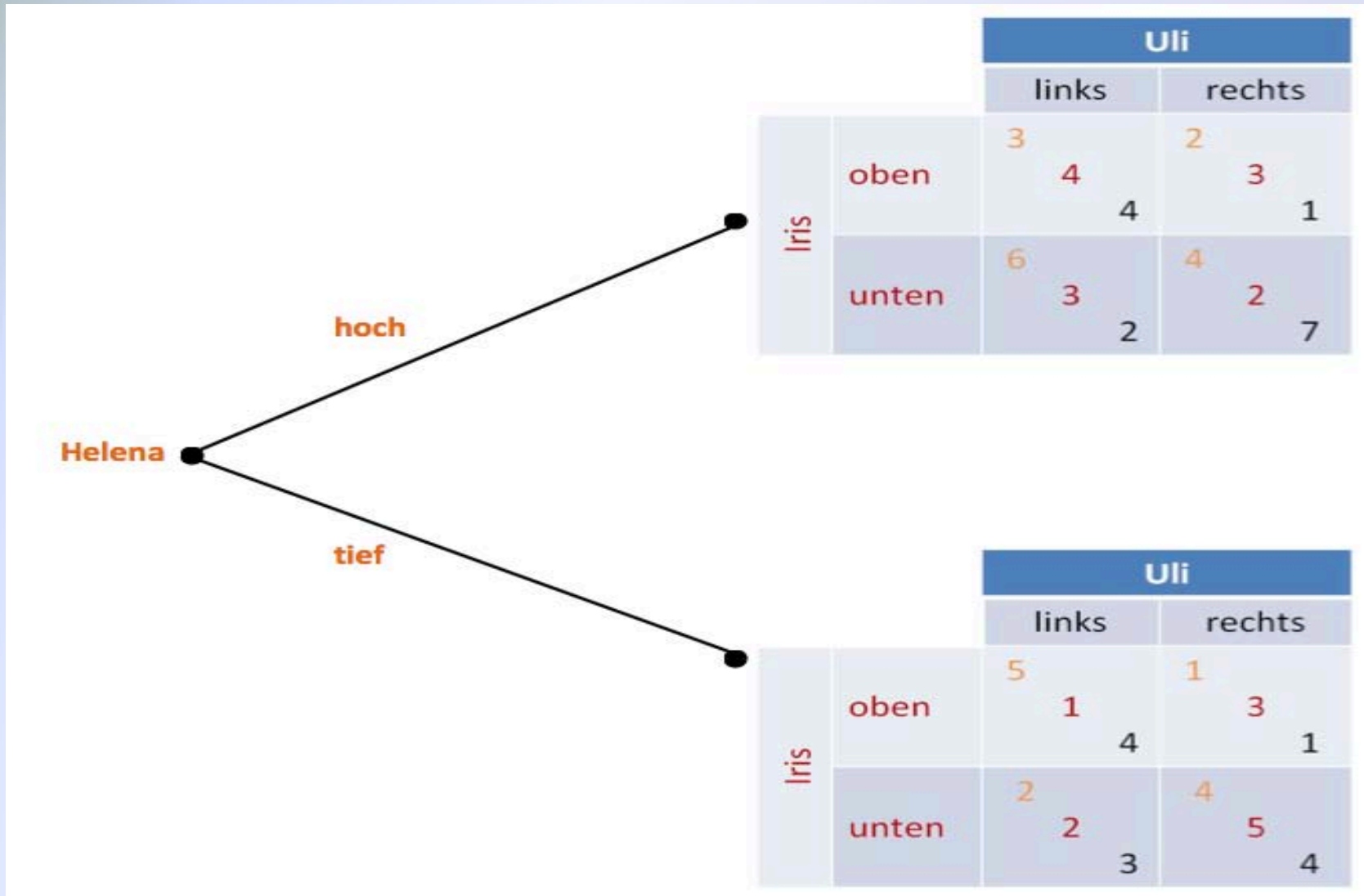
### **Begriff „Spiele imperfekter Information“:**

Spiele bei denen mehrere Spieler zu einem bestimmten Zeitpunkt gleichzeitig am Zug sind oder nicht alle Spieler immer genau beobachten können, was die anderen bereits getan haben.

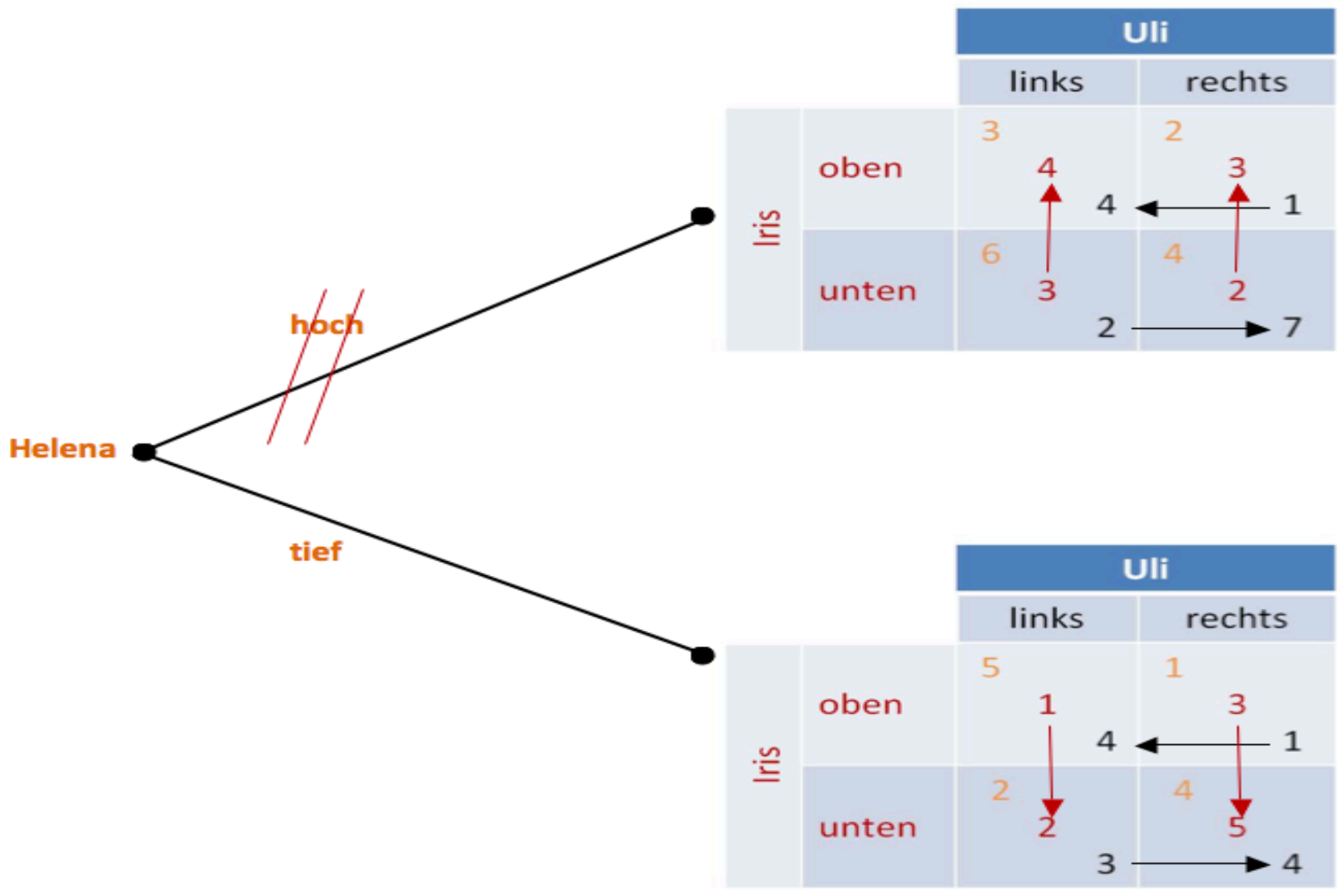
#### **1. Fall: Mehrere Spieler gleichzeitig am Zug**

Helena ist zuerst am Zug, danach ziehen Uli und Iris gleichzeitig.

# Darstellung als Spielbaum



# Lösung des Spiels mithilfe der Rückwärtsinduktionsmethode



Teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels:

{ *tief; oben falls hoch, unten falls tief; links falls hoch, rechts falls tief* }

**Achtung:**

Die Strategien von Iris und Uli hängen nur von Helenas Zug ab, nicht aber wechselseitig von ihren eigenen Zügen!

**Grund:**

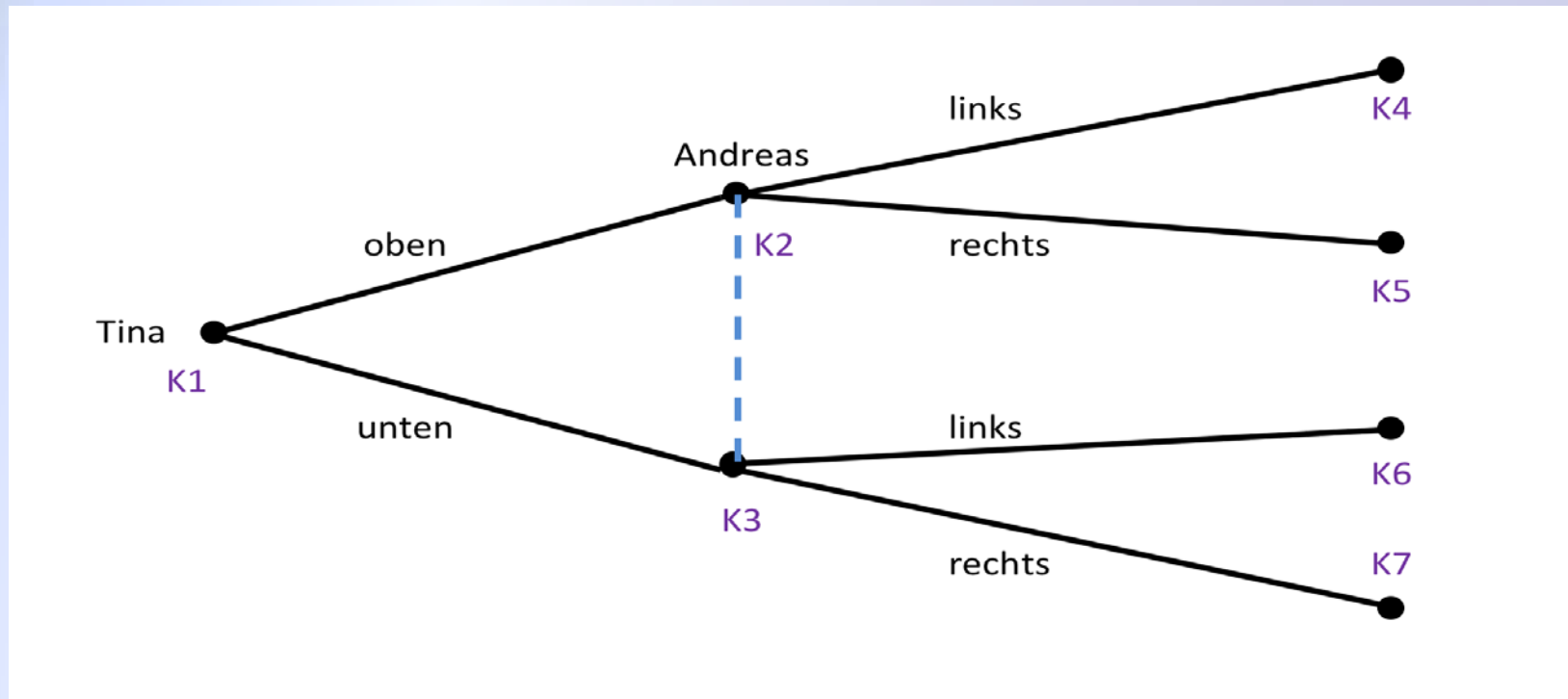
Iris und Uli ziehen gleichzeitig!



## 2. Fall: Spieler ziehen nacheinander, können sich aber nicht beobachten

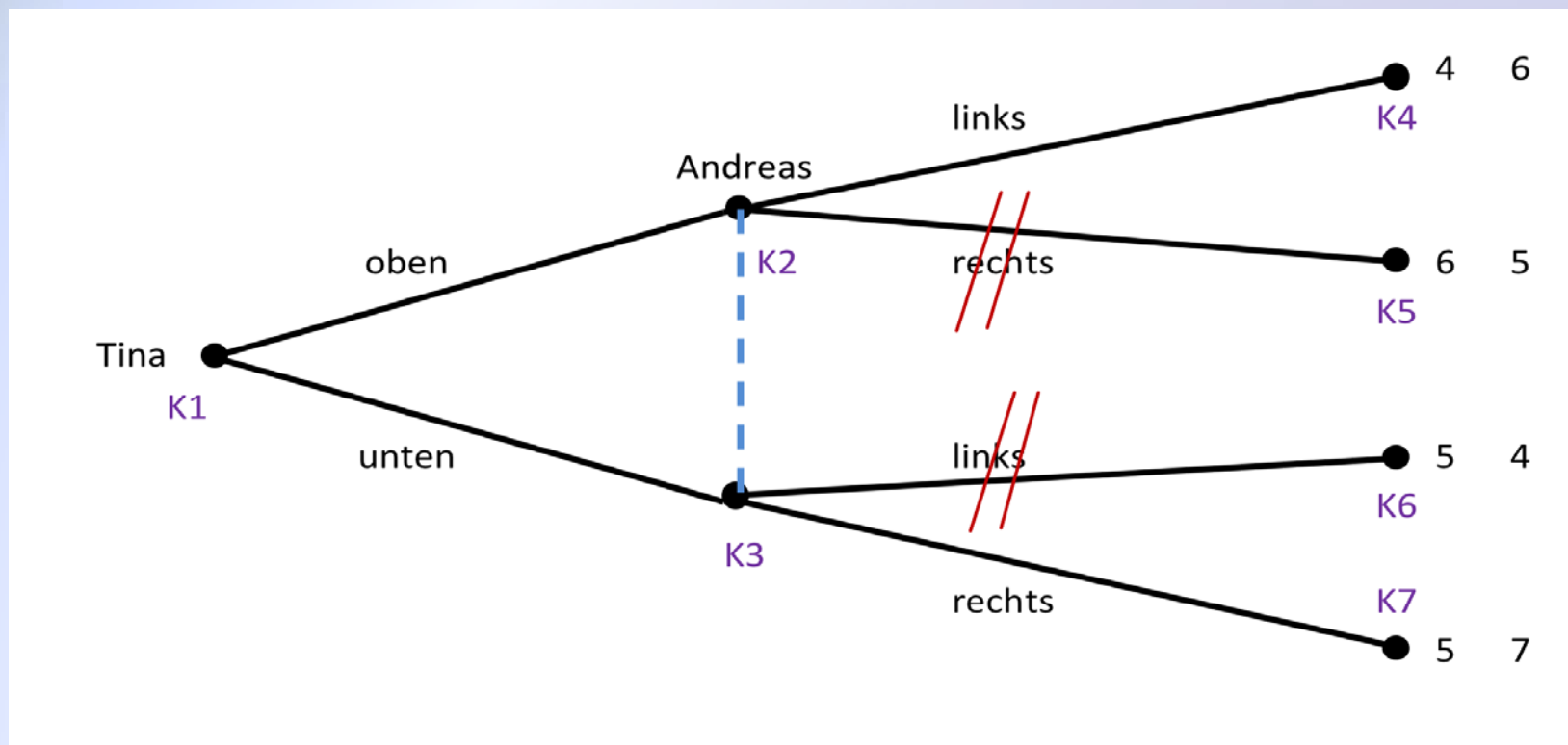
Tina zieht zuerst. Danach ist Andreas am Zug, er kann jedoch nicht feststellen, was Tina gezogen hat.

### Spielbaumdarstellung:



**Darstellungshinweis:**

Das Nichtwissen wird als gestrichelte Linie dargestellt.

**Spielbaumdarstellung mit angenommenen Auszahlungen:**

#### **Ergebnis:**

- Andreas würde „rechts“ streichen, wenn er im Knoten K2 wäre und er würde „links“ streichen wäre er im Knoten K3.
- Da er nicht weiß, in welchem Knoten er sich befindet, kann er keine eindeutige Entscheidung treffen.
- Tina weiß ebenfalls nicht, was sie tun soll, da sie nicht weiß, ob Andreas „rechts“ oder „links“ spielt. Je nachdem wie er sich entscheidet, wäre es für sie besser „oben“ oder „unten“ zu spielen.

#### **Problem:**

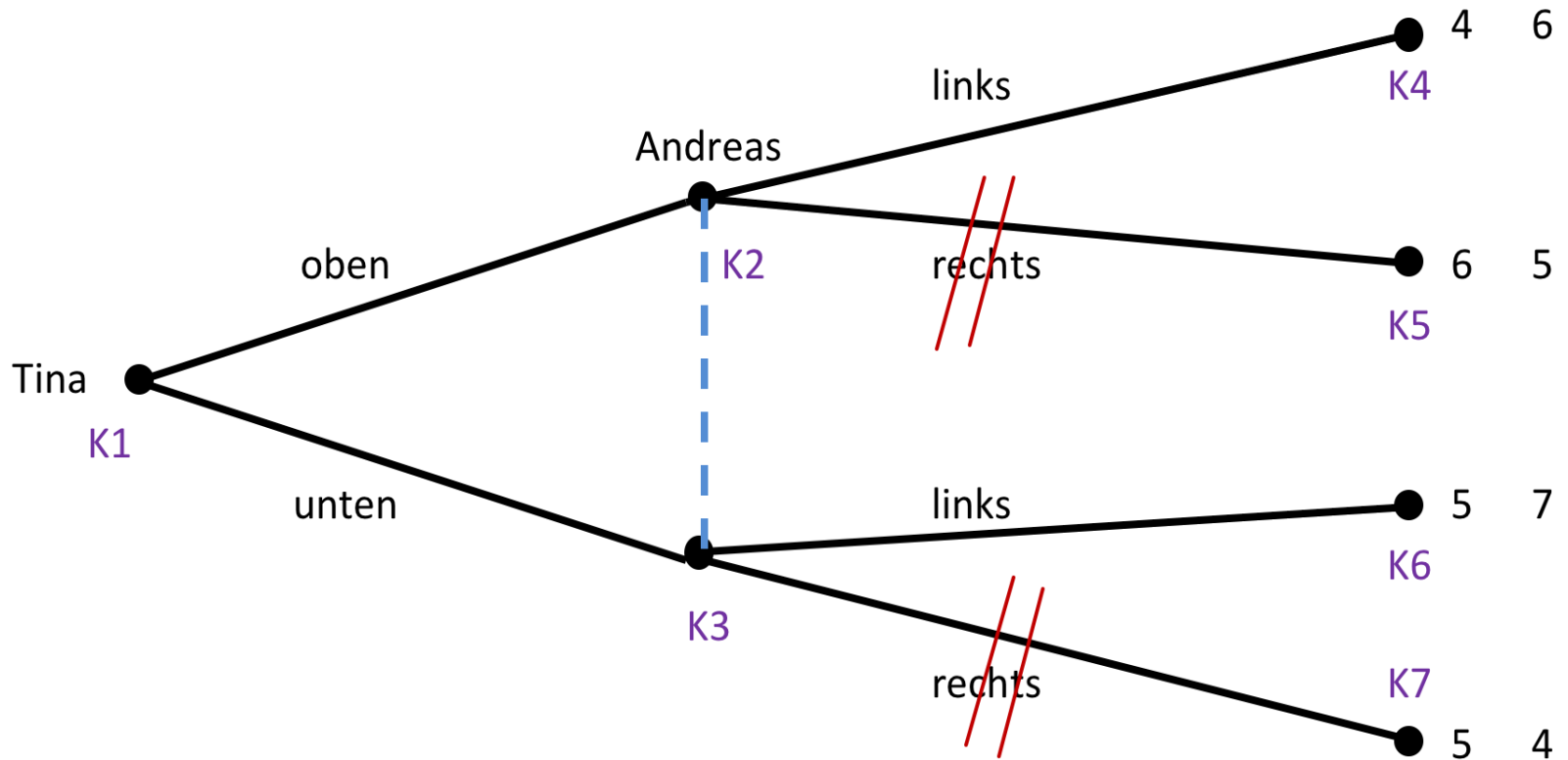
Die Spieler wissen nicht, was sie wählen sollen, weil sie nicht wissen, wo im Spiel sie sich befinden.

#### **Frage:**

Wie können sie also in solchen Spielen korrekte Entscheidungen treffen?

1. Beispiel bei dem imperfekte Informationen kein Problem sind:

Vertauschung der Auszahlungen in den Knoten K6 und K7



#### **Ergebnis:**

- Sowohl in Knoten K2 als auch in Knoten K3 würde Andreas „rechts“ streichen.

#### **Folgerung:**

„links“ ist für Andreas dominant und wird von ihm gewählt

#### **Schlussfolgerung Tina:**

Tina weiß das und wird „unten“ spielen.

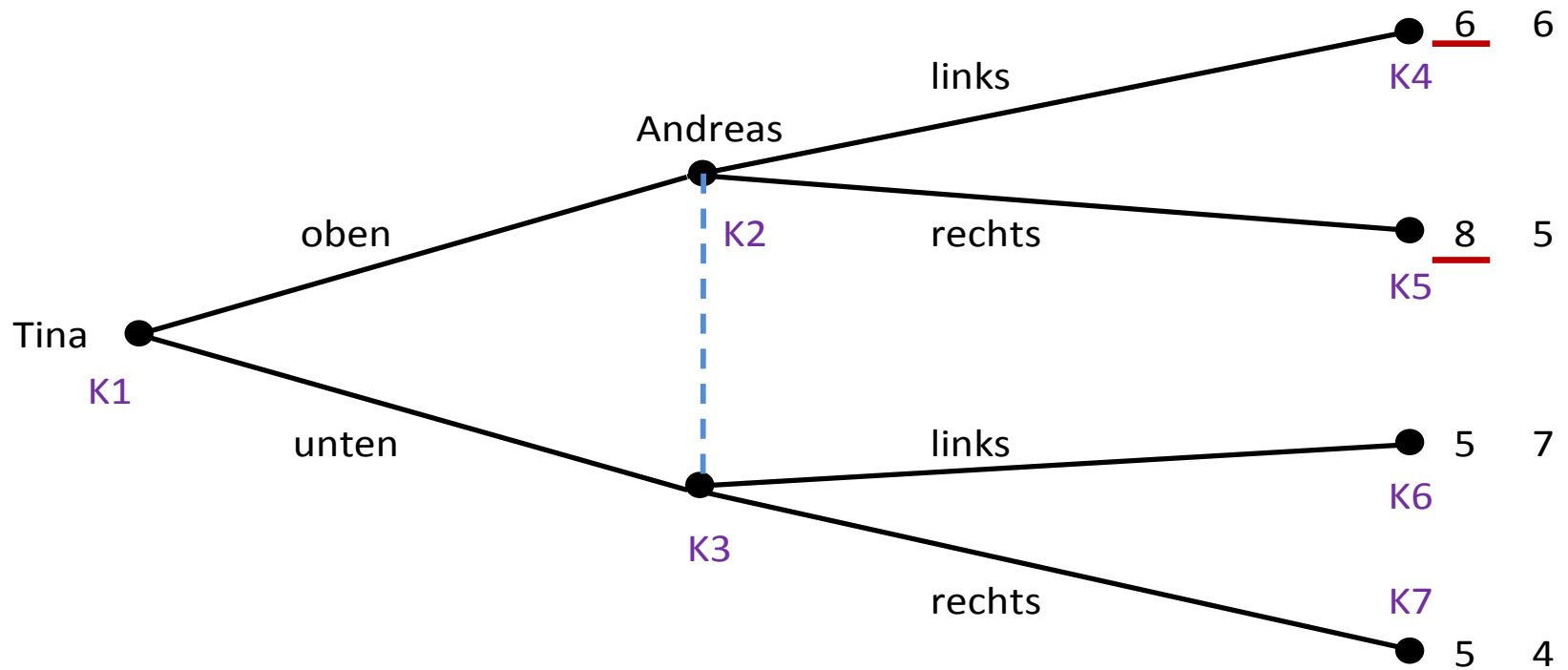
#### **Rückwärtsinduktionsergebnis:**

*{unten; links}*

## 2. Beispiel, bei dem imperfekte Informationen kein Problem sind:

In Endknoten K4 und K5 werden jeweils +2 zu Tinas Auszahlungen hinzuaddiert.

Es ergibt sich:



#### Ergebnis:

- Tina erhält bei der Wahl der Strategie „oben“ immer höhere Auszahlungen als bei Wahl der Strategie „unten“.

#### Folgerung:

„oben“ ist für Tina eine dominante Strategie, die sie wählen sollte.

#### Schlussfolgerung Andreas:

- Andreas entscheidet sich für „links“, da er weiß, dass er sich in Knoten K2 befindet

#### Rückwärtsinduktionsergebnis:

{*oben; links*}

## Wiederholte Spiele:

### Idee:

Dieselben Spieler spielen ein und dasselbe Spiel mehrfach miteinander.

### Beispiel:

Gefangenendilemma aus dem 2. Kapitel

		Al Capone	
		Schweigen	Aussagen
Pablo Escobar	Schweigen	$-1;$ $\downarrow$ $-1$	$-10;$ $\downarrow$ $0$
	Aussagen	$0;$ $\downarrow$ $-10$	$-9;$ $\downarrow$ $-9$



#### **Zur Wiederholung:**

Wird das Gefangenendilemma nur einmal gespielt, ist {Aussagen; Aussagen} ein Gleichgewicht dominanter Strategien.

#### **Aber:**

Das Gleichgewicht ist ineffizient.

#### **Frage:**

Haben die Spieler im Fall einer oder mehrerer Wiederholungen die Möglichkeit, aus der Dilemmasituation zu entkommen?

#### **Begriff „Stufenspiel“:**

Jede Wiederholung wird als „Stufenspiel“ bezeichnet.

#### **Annahme:**

Auszahlungen der Spieler für das Gesamtspiel ergeben sich aus der Summe der Auszahlungen der Stufenspiele.

#### **Frage:**

Haben die Spieler im Fall einer oder mehrerer Wiederholungen die Möglichkeit, aus der Dilemmasituation zu entkommen?

#### **Mögliche Strategien der Spieler bei einmaliger Wiederholung:**

Siehe Folgeseite...

1. Stufe	2. Stufe
Schweigen	Schweigen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Schweigen.
Schweigen	Schweigen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst Aussagen.
Schweigen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst Schweigen.
Schweigen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Aussagen.
Aussagen	Schweigen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Schweigen.
Aussagen	Schweigen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst Aussagen.
Aussagen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst Schweigen.
Aussagen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Aussagen.

## Lösungsweg Teil 1:

- Jeder Spieler hat acht Strategien, es gibt insgesamt 64 Strategiekombinationen
- Mittels Rückwärtsinduktion können sämtliche Strategien, in der für die zweite Stufe „Schweigen“ vorgesehen ist, ausgeschlossen werden.

## Grund:

Egal was in der ersten Stufe passiert ist, in der zweiten Stufe bleibt „Aussagen“ die dominante Strategie des Stufenspiels.

1. Stufe	2. Stufe
Schweigen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Aussagen.
Aussagen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Aussagen.

## Nach Streichung aller nicht-teilspielperfekter Strategien verbleiben:

1. Stufe	2. Stufe
Schweigen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Aussagen.
Aussagen	Aussagen, falls der andere Spieler in der ersten Runde geschwiegen hat, sonst auch Aussagen.

## Lösungsweg Teil 2:

- Beide Spieler wissen nun, dass sie beide in der zweiten Stufe aussagen werden. Sie werden also in der zweiten Runde jeder eine Auszahlung von -9 bekommen
- Mit diesem Wissen können sie die Auszahlungen des Gesamtspiels bereits in der ersten Stufe berechnen:

		Al Capone	
		Schweigen	Aussagen
Pablo Escobar	Schweigen	$-1 + (-9) = -10$ ; $-1 + (-9) = -10$	$-10 + (-9) = -19$ ; $0 + (-9) = -9$
	Aussagen	$0 + (-9) = -9$ ; $-10 + (-9) = -19$	$-9 + (-9) = -18$ ; $-9 + (-9) = -18$

#### **Ergebnis:**

„Aussagen“ bleibt auch in der ersten Stufe dominant.

#### **Folgerung:**

{„Immer Aussagen“; „Immer Aussagen“} ist das einzige teilspielperfekte Gleichgewicht des Spiels!

#### **Verallgemeinerung:**

Dieses Ergebnis hängt nicht von der Anzahl der Wiederholungen ab!

#### **Logik:**

Die Spieler wissen, dass sie in der letzten Runde aussagen werden.

Das wissen sie bereits in der vorletzten Runde, in der sie daher auch aussagen werden.

Das wissen sie bereits in der vor-vorletzten Runde, in der sie daher....

#### **Fazit:**

Durch Wiederholung kann man dem Gefangenendilemma nicht entkommen!

#### **Einschränkung:**

Wenn die Spieler nicht wissen, wann die letzte Runde des Stufenspiels ist, kann es ein Entkommen aus dem Gefangenendilemma geben!



#### **Annahmen:**

- Nach jeder Runde ist bekannt, dass das Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von  $W$  wiederholt wird.
- Dementsprechend ist die Summe der Auszahlungen aller Stufen zufallsabhängig. Die Spieler können also nur mit einem Erwartungswert rechnen.

#### **Fragestellung:**

Wie groß ist der Erwartungswert der Auszahlungen bei einem Spiel, das mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit wieder und wieder wiederholt wird?

#### **Beispiel:**

Stufenspiel wird über maximal 20 Runden wiederholt.

Ein Spieler erhält eine Auszahlung von 5 pro Stufe.

Die Wahrscheinlichkeit für die nächste Wiederholung liegt bei  $W=0,7$ .

#### **Berechnung der erwarteten Auszahlung:**

$$A = 5 + 5W + 5W^2 + 5W^3 + \dots + 5W^{19}$$

**Oder allgemein mit Auszahlung  $a$  pro Runde und maximal  $T$  Wiederholungen:**

$$A = a + aW + aW^2 + aW^3 + \dots + aW^{T-1}$$

#### **Problem:**

Bei hoher Anzahl möglicher Wiederholungen, d.h. bei großem Wert  $T$ , ist Berechnung sehr aufwändig!

**Ausweg:**

Berechnung über eine Formel!

**Herleitung der Formel**

**Bekannt ist:**

$$A = a + aW + aW^2 + aW^3 + \dots + aW^{T-1}$$

**Multiplizieren der Gleichung mit W ergibt:**

$$AW = (a + aW + aW^2 + aW^3 + \dots + aW^{T-1})W$$

**Ausmultiplizieren der rechten Seite ergibt:**

$$AW = aW + aW^2 + aW^3 + \dots + aW^{T-1} + aW^T$$

Subtraktion:

$$\begin{array}{r}
 A = a + aW + aW^2 + aW^3 + \dots + aW^{T-1} \\
 - (AW = aW + aW^2 + aW^3 + \dots + aW^{T-1} + aW^T) \\
 \hline
 \end{array}$$

$$A - AW = a - aW^T$$

Ausklammern:

$$A \cdot (1 - W) = a \cdot (1 - W^T)$$

Auflösen nach A:

$$A = a \cdot \frac{1 - W^T}{1 - W}$$

Es gilt also allgemein:

$$A = a \cdot \frac{1 - W^T}{1 - W}$$

Beispiel für  $a = 5$  und  $W = 0,7$ :

$$A = 5 * \frac{1 - 0,7^{20}}{1 - 0,7} = 16,65$$

Frage:

Wenn  $W$  kleiner als 1 ist und  $T$  unendlich groß wird, es also kein feststehendes, spätestes Ende des Spiels gibt, wie groß ist dann die Auszahlung  $A$ ?

Für  $W$  kleiner als 1 und unendlich großes  $T$  gilt:

$$W^T = 0$$

Es gilt also allgemein:

$$A = a \cdot \frac{1 - W^T}{1 - W}$$

Für  $W$  kleiner als 1 und unendlich großes  $T$  gilt:

$$W^T = 0$$

Also gilt bei unendlicher Wiederholung:

$$A = a \cdot \frac{1 - W^T}{1 - W} = a \cdot \frac{1 - 0}{1 - W} = \frac{a}{1 - W}$$

Beispiel für  $a = 5$  und  $W = 0,7$ :

$$A = \frac{5}{1 - 0,7} = 16,67$$

#### **Problem:**

Bei unendlicher Wiederholung funktioniert die Rückwärtsinduktion nicht mehr.

#### **Begründung:**

Rückwärtsinduktion beginnt in der letzten Stufe, diese ist aber nicht bekannt!

#### **Aber:**

Gerade das erlaubt unter bestimmten Bedingungen ein Entkommen aus dem Dilemma!

#### **Definition „Triggerstrategie“:**

- Eine Triggerstrategie ist eine Strategie, bei der sich ein Spieler 1 zunächst kooperativ verhält.
- Dies tut er so lange, bis er beobachtet, dass sich Spieler 2 einmal unkooperativ verhält.
- Ab dann verhält sich Spieler 1 für immer unkooperativ.

#### **Beispiel „Triggerstrategie“ im Gefangenendilemma:**

*„Beginne mit Schweigen und schweige solange weiter, bis der andere einmal ausgesagt hat, danach sage immer aus“*

#### **Befund:**

Wenn beide Triggerstrategien spielen, werden sie in jeder Runde schweigen, da keiner von beiden jemals mit „Aussagen“ anfängt.

#### **Frage:**

Wie hoch sind die Auszahlungen von Pablo und AI, wenn sie beide Triggerstrategien spielen?

#### **Annahmen:**

Zeithorizont ist unendlich.

Wiederholungswahrscheinlichkeit beträgt jeweils  $W = 0,7$ .



#### Auszahlung in jeder Stufe:

Wenn beide „Schweigen“ spielen, erhalten sie in jeder Stufe Auszahlungen in Höhe von -1.

#### Gesamte erwartete Auszahlung:

$$A = \frac{-1}{1 - 0,7} = -3,33$$

#### Frage:

Lohnt es sich für Pablo, von seiner Triggerstrategie abzuweichen?

#### Annahme:

Pablo sagt bereits in der ersten Periode aus!

#### Folgen:

Ab der zweiten Stufe wird Al immer aussagen, da er eine Triggerstrategie spielt. Daher sollte auch Pablo ab der zweiten Runde immer aussagen.

#### Welche Auszahlung erzielt Pablo also, wenn er von Beginn an immer aussagt und Al eine Triggerstrategie spielt?

In der ersten Stufe erzielt Pablo eine Auszahlung von Null.

In allen anderen Stufen erzielt Pablo eine Auszahlung von -9.

#### Gesamte Auszahlung Pablo:

$$B = 0 + \frac{-9}{1 - 0,7} - (-9) = -21$$

**Ergebnis:**

Spielt Pablo seine Triggerstrategie, so erzielt er eine Auszahlung in Höhe von :

$$A = \frac{-1}{1 - 0,7} = -3,33$$

Sagt er hingegen in der ersten Stufe aus, so beträgt seine Auszahlung:

$$B = 0 + \frac{-9}{1 - 0,7} - (-9) = -21$$

**Hinweis zur Berechnung:**

Der Term

$$\frac{-9}{1 - 0,7} = -30$$

gibt an, welche Auszahlung Pablo insgesamt jeder Stufe Auszahlungen in Höhe von -9 bekommt.

Da er in der ersten Stufe aber 0 statt -9 bekommt, muss die 0 addiert und die (-9) einmal subtrahiert werden.

bekommt, wenn er von Beginn an in

#### Vergleich:

Die Auszahlung

$$A = \frac{-1}{1 - 0,7} = -3,33$$

ist besser als die Auszahlung

$$B = 0 + \frac{-9}{1 - 0,7} - (-9) = -21$$

#### Folgerung:

Pablo sollte bei seiner Triggerstrategie bleiben.

#### **Frage:**

Bisher wurde nur gezeigt, dass es sich für Pablo nicht lohnt, in der ersten Runde auszusagen. Könnte es sich in einer späteren Runde lohnen?

#### **Antwort:**

Nein!

#### **Begründung:**

Wenn Pablo in einer der späteren Stufen auf das Spiel sieht, welches noch vor ihm liegt, dann sieht er exakt dasselbe Spiel, welches er auch in der ersten Stufe vor sich sieht.

#### **Ergebnis:**

Wenn es sich z.B. in Stufe 10 lohnen würde, mit dem Aussagen zu beginnen, dann muss es sich auch bereits in der ersten Stufe lohnen.

#### **Ergebnis hier:**

Da sich „Aussagen“ in der ersten Stufe nicht lohnt, lohnt es sich nie!

#### **Folgerung:**

Die beiden Triggerstrategien bilden ein teilspielperfektes Gleichgewicht des Spiels!

#### **Frage:**

Bilden Triggerstrategien immer ein Gleichgewicht?

#### **Antwort:**

Nein!

#### **Denn:**

Bei geringer Wahrscheinlichkeit für ein erneutes Aufeinandertreffen lohnt sich kooperatives Verhalten nicht!

## Berechnung in Abhängigkeit von variablen Wahrscheinlichkeiten

Die Triggerstrategie wird beibehalten, solange gilt:

$$\frac{-1}{1-W} \geq 0 + \frac{-9}{1-W} - (-9)$$

Dies ist der Fall für:

$$W \geq 1/9$$

**Also:**

Für alle Wahrscheinlichkeiten  $W$  größer/gleich  $1/9$  bilden die Triggerstrategien ein teilspielperfektes Gleichgewicht des obigen Gefangenendilemmas.

#### **Generelle Aussage:**

Bei offenem Zeithorizont existieren in Dilemmaspielen teilspielperfekte Gleichgewichte, in denen in jeder Stufe kooperativ gespielt wird und die Spieler pro Stufe durchschnittliche Auszahlungen erhalten, die besser sind als die Auszahlungen des einfachen Stufenspiels.

#### **Dies ist das sog. Folk-Theorem!**

#### **Voraussetzung:**

Die Wahrscheinlichkeit für eine Wiederholung des Stufenspiels darf nicht zu klein sein.



## Anwendung zu Kapitel 3: Das Stackelberg-Duopol

### Spieler:

Staake AG

Michels GmbH

### Unternehmenszweck:

Produktion von Silber.

### Produktionsmenge Staake AG:

$q_S$

### Produktionsmenge Michels GmbH:

$q_M$

#### Spielreihenfolge:

Staake AG produziert zuerst.

Michels AG beobachtet Produktionsmenge der Staake AG und legt dann eigene Produktionsmenge fest.

#### Marktpreis:

$$P = 1000 - q_S - q_M$$

#### Gewinnfunktionen (vgl. Kapitel 2 zum Cournot-Duopol):

$$G_S = 990q_S - q_S^2 - q_Mq_S$$

$$G_M = 990q_M - q_Sq_M - q_M^2$$

#### Analysetechnik:

Rückwärtsinduktion!

**Hier:**

Michels GmbH zieht als letztes und muss daher als erstes analysiert werden.

**Bedingung erster Ordnung für Gewinnmaximum der Michels GmbH:**

$$\frac{dG_M}{dq_M} = 990 - q_S - 2q_M = 0$$

**Teilspielperfekte Strategie der Michels GmbH:**

$$q_M^* = 495 - 0,5q_S$$

**Nächster Schritt der Rückwärtsinduktion:**

Analyse der Staake AG

Gewinn der Staake AG:

$$G_S = 990q_S - q_S^2 - q_M q_S$$

Berücksichtigung, dass Michels GmbH teilspielperfekte Strategie spielen wird:

$$\begin{aligned} G_S &= 990q_S - q_S^2 - q_M^* q_S \\ &= 990q_S - q_S^2 - (495 - 0,5q_S)q_S \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen:

$$G_S = 495q_S - 0,5q_S^2$$

Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{dG_S}{dq_S} = 495 - q_S = 0$$

Aus der Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{dG_S}{dq_S} = 495 - q_S = 0$$

Folgt als Lösung:

$$q_S^* = 495$$

Daher lautet das teilspielperfekte Gleichgewicht des Spiels:

$$\{q_S^* = 495; q_M^* = 495 - 0,5q_S\}$$

Beispiel weiteres Gleichgewicht, aber nicht teilspielperfekt:

$$\{q_S^* = 330; \text{immer } q_M^* = 330\}$$

#### Nutzungshinweise:

Das hier vorliegende Vorlesungsskript darf ausschließlich im Rahmen gebührenfreier Bildungsangebote ohne weitere Genehmigung genutzt werden. Im Fall von gebührenpflichtigen Bildungsangeboten wenden Sie sich zur Klärung der Nutzungsbedingungen bitte vorab an Prof. Dr. Stefan Winter. Die Weitergabe der hier verwendeten Materialien ist nicht gestattet, alle Unterlagen dienen ausschließlich dem persönlichen Gebrauch. Mit der Nutzung der hier bereitgestellten Materialien erklären Sie sich mit diesen Bedingungen einverstanden.