
Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:
<http://www.rub.de/spieltheorie>

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:

„Grundzüge der Spieltheorie“
von **Stefan Winter**,
Springer Gabler,
Erschienen im Dezember 214



Vorbemerkungen und Begriffe

Spieltheorie:

Theorie optimaler Entscheidungen interdependenter Akteure

Merkmal:

Entscheidungen von Person A beeinflussen Wohlergehen von Person B und umgekehrt!

Bezeichnung:

„Spiele“ = Interdependente Entscheidungssituationen

„Spieler“ = Handelnde Akteure

Arten von Spielen:

- **Statische Spiele:** Alle Spieler handeln gleichzeitig.
- **Dynamische Spiele:** Spieler handeln nacheinander.

Zweige der Spieltheorie:

- **Nichtkooperative Spieltheorie:**
Spieler können keine bindenden Verträge schließen.
- **Kooperative Spieltheorie:**
Spieler können bindende Verträge schließen.

Ein sinnloses aber simples Spiel:

- Mimi legt eine Münze mit „Kopf“ oder „Zahl“ nach oben auf den Tisch.
- Caro sieht, was Mimi getan hat.
- Dann legt Caro eine Münze mit „Kopf“ oder „Zahl“ nach oben auf den Tisch.

Spielergebnis:

- Haben beide Spielerinnen ihre Münzen mit unterschiedlichen Symbolen nach oben auf den Tisch gelegt, gewinnt Mimi die Münze von Caro.
- Liegen beide Münzen mit dem gleichen Symbol oben, gewinnt Caro die Münze von Mimi.

Wer wird das Spiel wohl gewinnen?

Begriff „Zug“:

Eine einzelne Entscheidung eines Spielers zu einem bestimmten Zeitpunkt des Spiels.

Zwei willkürliche Beispiele möglicher Züge:

- Mimi legt ihre Münze mit „Kopf“ nach oben auf den Tisch.
- Caro legt ihre Münze mit „Zahl“ nach oben auf den Tisch.

Begriff „Strategie“:

Vollständiger Spielplan, den sich ein Spieler vor Beginn des Spiels zurechtlegt.

Vollständiger Spielplan:

Der Spielplan eines Spielers ist vollständig, wenn er für jede denkbare Situation im Spiel angibt, welchen Zug der Spieler dann machen soll.

„Strategie“ daher:

Vollständige Verhaltensanweisung, die angibt, wie der Spieler sich über den gesamten Spielverlauf verhalten soll.

Beispiel für einen Spielplan von Caro:

Spielplan 1

Wenn Mimi „Kopf oben“
legt, lege ich „Kopf oben“,
legt Mimi „Zahl oben“, lege
ich „Zahl oben“.

Ist dieser Spielplan vollständig, also eine Strategie?

Mimi kann nur zwei Dinge tun:

Caros Spielplan:

„Kopf oben“

„Zahl oben“

Spielplan 1

Wenn Mimi „Kopf oben“
legt, lege ich „Kopf oben“,
legt Mimi „Zahl oben“, lege
ich „Zahl oben“.

Ergebnis:

Caros Spielplan enthält für jede mögliche Situation eine Anweisung, welchen Zug sie dann ausführen soll:

Caros Spielplan ist eine Strategie!

Begriff „Strategiemenge“:

Eine „Strategiemenge“ ist die Menge aller überhaupt möglichen Strategien, die sich ein Spieler zurechtlegen könnte.

Beispiel Caros Strategiemenge:

Spielplan 1

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt,
lege ich „Kopf oben“, legt Mimi
„Zahl oben“, lege ich „Zahl oben“.

Spielplan 2

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt, lege
ich „Kopf oben“, legt Mimi „Zahl
oben“, lege ich „Kopf oben“.

Spielplan 3

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt,
lege ich „Zahl oben“, legt Mimi
„Zahl oben“, lege ich „Zahl oben“.

Spielplan 4

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt, lege
ich „Zahl oben“, legt Mimi „Zahl
oben“, lege ich „Kopf oben“.

Mimis Strategiemenge:

Spielplan A

Lege „Kopf oben“

Spielplan B

Lege „Zahl oben“

Anmerkungen:

Mimi ist als Erste am Zug und zieht während des Spiels auch nur einmal.
Ihre Strategien enthalten daher keine Wenn-/Dann-Bedingungen!

Notation von Strategiemengen (SM):

$$SM_{Mimi} = \{\text{Spielplan A}; \text{Spielplan B}\}$$

$$SM_{Caro} = \{\text{Spielplan 1}; \text{Spielplan 2}; \text{Spielplan 3}; \text{Spielplan 4}\}$$

Begriff „Strategiekombination“:

Eine „Strategiekombination“ (SK) ist eine geordnete Menge von jeweils einer Strategie pro Spieler.

Beispiel einer Strategiekombination:

Mimis Strategie:

Spielplan A

Lege „Kopf oben“

Caros Strategie:

Spielplan 1

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt, lege ich „**Kopf oben**“, legt Mimi „Zahl oben“, lege ich „**Zahl oben**“.

Allgemeine Notation:

SK = {Eine Strategie von Spieler 1; Eine Strategie von Spieler 2; ...}

Inhaltliche Bedeutung von Strategiekombinationen:

Wenn jeder Spieler seine Strategie festgelegt hat, resultiert daraus ein kompletter Spielverlauf!

Wie verläuft das Spiel, wenn Mimi und Caro die eben beschriebene Strategiekombination wählen?

Mimis Strategie:

Spielplan A

Lege „Kopf oben“

Caros Strategie:

Spielplan 1

Wenn Mimi „Kopf oben“ legt, lege ich „**Kopf oben**“, legt Mimi „Zahl oben“, lege ich „**Zahl oben**“.

Ergebnis:

Mimi legt „Kopf oben“, Caro dann auch und Caro gewinnt das Spiel!

Wie viele Strategiekombinationen sind möglich?

Mimis Strategiemenge:

$$SM_{Mimi} = \{\text{Spielplan A}; \text{Spielplan B}\}$$

Caros Strategiemenge:

$$SM_{Caro} = \{\text{Spielplan 1}; \text{Spielplan 2}; \text{Spielplan 3}; \text{Spielplan 4}\}$$

Jede Strategie von Mimi kann mit jeder Strategie von Caro kombiniert werden, es gibt also 8 Strategiekombinationen!

Und:

Aus jeder Strategiekombination folgt ein ganz bestimmter Spielverlauf!

Welche Strategiekombinationen gibt es in Mimis und Caros Münzspiel?

Strategiekombination	Strategie Mimi	Strategie Caro
<i>SK 1</i>	Spielplan A	Spielplan 1
<i>SK 2</i>	Spielplan A	Spielplan 2
<i>SK 3</i>	Spielplan A	Spielplan 3
<i>SK 4</i>	Spielplan A	Spielplan 4
<i>SK 5</i>	Spielplan B	Spielplan 1
<i>SK 6</i>	Spielplan B	Spielplan 2
<i>SK 7</i>	Spielplan B	Spielplan 3
<i>SK 8</i>	Spielplan B	Spielplan 4

Zentrale Frage der Spieltheorie:

Welche Strategiekombination kann als „optimal“ aus der Sicht aller Spieler bezeichnet werden?

Zielsetzung der Spieltheorie:

Auffinden der optimalen Strategiekombination!

Frage:

Wie beurteilen die Spieler die möglichen Strategiekombinationen?

Antwort:

Anhand von sog. „Auszahlungen“

Begriff „Auszahlung“:

Bewertungsmaßzahl, mit der jeder Spieler für sich den Ausgang des Spiels bewertet.

Zusammenhang zwischen Auszahlungen und Strategiekombinationen:

- Jeder mögliche Spielausgang wird von jedem Spieler mit seiner Auszahlung bewertet.
- Jeder Spielverlauf und damit auch Spielausgang wird aber durch eine bestimmte Strategiekombination herbeigeführt.

Ergebnis:

Auszahlungen sind die Maßzahlen zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit jeder Strategiekombination.

Aber:

Spieler können die einzelnen Spielverläufe durchaus unterschiedlich bewerten.

Beispiel:

Eine Strategiekombination, bei der Mimi gewinnt, wird von ihr sicher anders bewertet als von Caro, die dann ja verliert!

Was sind Auszahlungen?

Auszahlungen sind allgemein tatsächlich nur als reine Bewertungsmaßzahlen definiert.

In ökonomischen Anwendungen:

Auszahlungen sind häufig Geld- oder Nutzenwerte

Aber auch möglich:

Auszahlungen bestehen in Freude, Spaß ...

Wichtig aber:

Spieler streben möglichst hohe Auszahlungen an. Hohe Zahlenwerte der Auszahlungen werden also positiv von den Spielern bewertet.

Darstellungsweise von Spielen

Zielsetzung:

Spiele sollten so dargestellt werden, dass man möglichst den Zusammenhang zwischen Strategiekombinationen und Auszahlungen direkt erkennen kann!

Beispiel:

- Konni und Sven haben sich im Urlaub in Australien aus den Augen verloren.
- Handys funktionieren nicht.
- Es sind zwei kleinere Städte in der Nähe, Blackall und Charleville.
- Beide entscheiden gleichzeitig, wohin sie jeweils fahren sollen.

Strategiemengen:

$$SM_{\text{Konni}} = \{\text{Fahre nach Blackall}; \text{Fahre nach Charleville}\}$$

$$SM_{\text{Sven}} = \{\text{Fahre nach Blackall}; \text{Fahre nach Charleville}\}$$

Darstellungsweise in Matrixform:

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall		
	Fahre nach Charleville		

Annahme:

Beiden wäre es egal, wo sie sich wiederfinden, die Hauptsache ist, dass sie sich wiederfinden.

Wenn sie sich wiederfinden, bewerten beide dies mit Auszahlungen in Höhe von 10:

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10; 10	
	Fahre nach Charleville		10; 10

Nächste Annahme:

Wenn sie sich verfehlen, bewerten beide dies mit Auszahlungen in Höhe von 0:

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10; 10	0; 0
	Fahre nach Charleville	0; 0	10; 10

Vorteil dieser Darstellungsweise:

Für jede der 4 möglichen Strategiekombinationen können die Auszahlungen beider Spieler direkt abgelesen werden:

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10; 10	0; 0
	Fahre nach Charleville	0; 0	10; 10

Begriff „Gleichgewicht“:

Ein Gleichgewicht ist eine optimale Strategiekombination!

Problem:

Eine Strategiekombination, die für einen Spieler gut ist, kann für den anderen Spieler sehr schlecht sein!

Frage:

Was also bedeutet „optimale“ Strategiekombination?

Zentrales Optimalitätskonzept der Spieltheorie:

Eine Strategiekombination ist dann optimal, wenn keiner der Spieler seine Strategie nachträglich noch ändern wollen würde, nachdem er erfahren hat, welche Strategien die anderen Spieler gewählt haben.

Bezeichnung:

Eine solche Strategiekombination wird auch als Nash-Gleichgewicht bezeichnet.

Gleichgewichte des Reisespiels:

{Fahre nach Blackall; Fahre nach Blackall}

{Fahre nach Charleville; Fahre nach Charleville}

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10; 10	0; 0
	Fahre nach Charleville	0; 0	10; 10

Prüfung 1. Gleichgewicht:

Konni ist nach Blackall gefahren und Sven auch: Würde sich einer von beiden nachträglich individuell umentscheiden wollen?

Antwort:

Nein! (Warum nicht?)

Optisches Hilfsmittel zum Auffinden von Gleichgewichten:

Pfeile zeigen an, wer sich in welcher Situation umentscheiden wollen würde.

Gleichgewichte:

Felder (=Strategiekombinationen), aus denen kein Pfeil herausführt!

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10; ↑ 10 ← 0	0; ↓ 0
	Fahre nach Charleville	0; ↓ 0 → 10	10; ↓ 10

Eventuelles Problem:

Einzeichnen von Pfeilen wird sehr unübersichtlich, wenn die Zahl der Zeilen und Spalten größer wird.

Alternatives Hilfsmittel:

Einkreisen der maximalen Auszahlungen je gegebener Strategie des Gegenspielers.

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	<div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; display: inline-block;">10;</div> 10	<div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; display: inline-block;">0;</div> 0
	Fahre nach Charleville	<div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; display: inline-block;">0;</div> 0	<div style="border: 1px dashed red; padding: 2px; display: inline-block;">10;</div> 10

Jetzt:

Gleiche Prozedur für Sven!

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	(10;)	0;
	Fahre nach Charleville	0;	(10;)

		(10)	0
		0	(10)

Ergebnis:

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	$(10; 10)$	$(0; 0)$
	Fahre nach Charleville	$(0; 0)$	$(10; 10)$

Gleichgewichte:

Strategiekombinationen, in denen die Auszahlungen beider Spieler eingekreist sind!

Begriff „Beste Antwort“:

Mit dem Begriff „beste Antwort“ bezeichnet man eine Strategie, die die Auszahlung eines Spielers gegen gegebene Strategien der übrigen Spieler maximiert.

Im Reisebeispiel:

Wenn Sven die Strategie „Fahre nach Blackall“ wählt, ist Konnis beste Antwort die Strategie „Fahre nach Blackall“.

Gleichgewicht:

Ein Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der die Strategien aller Spieler jeweils beste Antworten aufeinander sind.

Empfehlung der Spieltheorie an jeden Spieler:

Wähle die Strategie, die deine beste Antwort auf die Strategien der übrigen Spieler ist!

**Ende des Abschnitts
„Vorbemerkungen und Begriffe“**

Nutzungshinweise:

Das hier vorliegende Vorlesungsskript darf ausschließlich im Rahmen gebührenfreier Bildungsangebote ohne weitere Genehmigung genutzt werden. Im Fall von gebührenpflichtigen Bildungsangeboten wenden Sie sich zur Klärung der Nutzungsbedingungen bitte vorab an Prof. Dr. Stefan Winter. Die Weitergabe der hier verwendeten Materialien ist nicht gestattet, alle Unterlagen dienen ausschließlich dem persönlichen Gebrauch. Mit der Nutzung der hier bereitgestellten Materialien erklären Sie sich mit diesen Bedingungen einverstanden.