Aufgaben zur Veranstaltung „Grundzüge der Spieltheorie“ von Prof. Dr. Stefan Winter, Ruhr-Universität Bochum.

Fassung vom 15. Dezember 2014

Weitere Materialien sind erhältlich unter: http://www.rub.de/spieltheorie

Literaturempfehlung: Winter, Stefan (2015): Grundzüge der Spieltheorie. Verlag Springer Gabler

2.7 Aufgaben

Aufgabe 2.7.1

Bestimmen Sie für die folgenden Spiele alle Gleichgewichte, also ggf. auch die Gleichgewichte in gemischten Strategien. Stellen Sie für die gefundenen Gleichgewichte auch fest, ob diese jeweils eindeutig und effizient sind.

Aufgabe 2.7.1.1

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	9 8	4 4
	unten	6 4	2 1

Aufgabe 2.7.1.2

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	3 3	1 4
	unten	6 1	2 2

Aufgabe 2.7.1.3

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 / 6	2 / 2
	unten	2 / 2	6 / 5

Aufgabe 2.7.1.4

		Spieler 2		
		links l	zentral z	rechts r
Spieler 1	oben o	5 / 4	0 / 0	0 / 0
	mitte m	0 / 0	2 / 7	0 / 0
	unten u	0 / 0	0 / 0	4 / 5

Hinweis: Das Spiel besitzt zusätzlich zu den Gleichgewichten in reinen Strategien noch 4 Gleichgewichte in gemischten Strategien:

- Beide Spieler mischen jeweils alle drei Strategien
- Spieler 1 mischt nur „oben“ und „mitte“, Spieler 2 mischt nur „links“ und „zentral“
- Spieler 1 mischt nur „oben“ und „unten“, Spieler 2 mischt nur „links“ und „rechts“
- Spieler 1 mischt nur „mitte“ und „unten“, Spieler 2 mischt nur „zentral“ und „rechts“

Aufgabe 2.7.2

Im Abschnitt 2.6.1 haben wir das Cournot-Duopol anhand eines Zahlenbeispiels kennengelernt. Bestimmen Sie nun die allgemeine algebraische Lösung des Gleichgewichts! Die Nachfragefunktion lautet $P = a - Q$, wobei Q die Gesamtmenge ist, die von beiden Unternehmen produziert wird, d.h. $Q = q_1 + q_2$. Die Gewinnfunktionen beider Unternehmen lauten:

$$G_1 = Pq_1 - cq_1$$

$$G_2 = Pq_2 - cq_2$$

Hierbei bezeichnet c die konstanten Stückkosten der Produktion.

Aufgabe 2.7.3

Die Strategie von Alena besteht in der Wahl des Wertes von x, die Strategie von Eva besteht in der Wahl von y. Die Auszahlungen der beiden Spielerinnen lauten:

Auszahlung Alena: $A_{Alena} = 10x + 0{,}5xy - x^2$

Auszahlung Eva: $A_{Eva} = 20y + 0{,}5xy - y^2$

a) Bestimmen sie die Beste-Antwort-Funktionen beider Spielerinnen und stellen Sie diese in einem geeigneten Diagramm grafisch dar!

b) Bestimmen Sie das Gleichgewicht des Spiels!

Lösung zu Aufgabe 2.7.1.1

Das Gleichgewicht lautet $\{oben; links\}$. Es ist eindeutig und effizient.

Lösung zu Aufgabe 2.7.1.2

Das Gleichgewicht lautet $\{unten; rechts\}$. Es ist eindeutig und ineffizient, da beide Spieler in der Strategiekombination $\{oben; links\}$ höhere Auszahlungen erreichen würden als im Gleichgewicht.

Lösung zu Aufgabe 2.7.1.3

Die Gleichgewichte in reinen Strategien lauten $\{oben; links\}$ und $\{unten; rechts\}$. Beide Gleichgewichte sind effizient. Da es mehrere Gleichgewichte gibt, sind diese nicht eindeutig. Zusätzlich zu den Gleichgewichten in reinen Strategien hat das Spiel ein Gleichgewicht in gemischten Strategien. Dieses Gleichgewicht lautet:

$$\left\{o = \frac{3}{7}, u = \frac{4}{7};\ l = \frac{4}{7}, r = \frac{3}{7}\right\}$$

In diesem Gleichgewicht erreicht Spieler 1 eine erwartete Auszahlung von:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot 5 + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot 6 = \frac{26}{7}$$

Spieler 2 erreicht eine erwartete Auszahlung von:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot 6 + \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot 2 + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{26}{7}$$

Da beide Spieler eine Auszahlung von 26/7, also ungefähr 3,71, erzielen, ist das Gleichgewicht ineffizient, da beide Spieler in den Gleichgewichten reiner Strategien höhere Auszahlungen erreichen.

Lösung zu Aufgabe 2.7.1.4

Die Gleichgewichte in reinen Strategien lauten:

$\{oben; links\}$, $\{mitte; zentral\}$, $\{unten; rechts\}$

Das Gleichgewicht, in welchem beide Spieler jeweils alle drei reinen Strategien mischen, lässt sich bestimmen, indem jeweils die erwarteten Auszahlungen eines Spielers für jede seiner drei reinen Strategien gegen die optimale gemischte Strategie seines Gegners gleichgesetzt werden.

Wenn Spieler 2 mit den Wahrscheinlichkeiten l „links“, z „zentral“ und mit der Wahrscheinlichkeit r „rechts“ spielt, dann sind die erwarteten Auszahlungen für Spieler 1:

- Wenn er „oben“ spielt: $5l$
- Wenn er „mitte“ spielt: $2z$
- Wenn er „unten“ spielt: $4r$

Im Gleichgewicht muss also gelten:

$$5l = 2z = 4r$$

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten 1 betragen muss:

$$l + z + r = 1$$

Die Gleichung $5l = 2z$ kann nun nach z aufgelöst werden und man erhält:

$$z = 2{,}5l$$

Ebenso kann die Gleichung $5l = 4r$ nach r aufgelöst werden, und man erhält:

$$r = 1{,}25l$$

Setzt man nun die beiden berechneten Gleichungen $z = 2{,}5l$ und $r = 1{,}25l$ in die Gleichung $l + z + r = 1$ ein, so erhält man:

$$l + z + r = 1$$

$$l + 2{,}5l + 1{,}25l = 4{,}75l = 1$$

Auflösen ergibt einen Wert für die optimale Wahrscheinlichkeit l für „links“ in Höhe von:

$$l = \frac{4}{19}$$

Diesen Wert kann man nun zurückeinsetzen in die beiden Gleichungen $z = 2{,}5l$ und $r = 1{,}25l$ und man erhält die optimalen Wahrscheinlichkeiten für „zentral“ und „rechts“ in Höhe von:

$$z = \frac{10}{19}$$

$$r = \frac{5}{19}$$

Damit ist die beste Antwort von Spieler 2 im Gleichgewicht gemischter Strategien mit allen drei reinen Strategien vollständig bestimmt.

Analog geht man nun für die erwarteten Auszahlungen von Spieler 2 vor, um die beste Antwort von Spieler 2 zu bestimmen. Die erwarteten Auszahlungen für Spieler 2 lauten:

- Wenn er „links“ spielt: $4o$
- Wenn er „zentral“ spielt: $7m$
- Wenn er „rechts“ spielt: $5u$

Mit den gleichen Berechnungsmethoden wie oben erhält man:

$$o = \frac{35}{83};\ m = \frac{20}{83};\ u = \frac{28}{83}$$

Damit lautet das Gleichgewicht gemischter Strategien bei jeweils allen drei reinen Strategien:

$$\left\{o = \frac{35}{83}, m = \frac{20}{83}, u = \frac{28}{83};\ l = \frac{4}{19}, z = \frac{10}{19}, r = \frac{5}{19}\right\}$$

Für die Bestimmung der Gleichgewichte gemischter Strategien mit jeweils nur 2 reinen Strategien pro Spieler ergibt sich:

Wenn Spieler 1 nur seine Strategien „oben“ und „mitte“ mischt und Spieler 2 nur seine Strategien „links“ und „zentral“ lautet das Gleichgewicht:

$$\left\{o = \frac{7}{11}, m = \frac{4}{11};\ l = \frac{2}{7}, z = \frac{5}{7}\right\}$$

Wenn Spieler 1 nur seine Strategien „oben“ und „unten“ mischt und Spieler 2 nur seine Strategien „links“ und „rechts“ lautet das Gleichgewicht:

$$\left\{o = \frac{5}{9}, u = \frac{4}{9};\ l = \frac{4}{9}, r = \frac{5}{9}\right\}$$

Wenn Spieler 1 nur seine Strategien „mitte“ und „unten“ mischt und Spieler 2 nur seine Strategien „zentral“ und „rechts“ lautet das Gleichgewicht:

$$\left\{m = \frac{5}{12}, u = \frac{7}{12};\ z = \frac{2}{3}, r = \frac{1}{3}\right\}$$

Lösung zu Aufgabe 2.7.2

Setzt man zunächst $Q = q_1 + q_2$ in die Nachfragefunktion ein, so erhält man $P = a - Q = a - q_1 - q_2$. Setzt man das wiederum in die Gewinnfunktionen der Unternehmen ein, so ergibt sich:

$$G_1 = Pq_1 - cq_1 = (\,a - q_1 - q_2)q_1 - cq_1$$

$$G_2 = Pq_2 - cq_2 = (\,a - q_1 - q_2)q_2 - cq_2$$

Ausmultiplizieren der Klammerterme ergibt:

$$G_1 = \; aq_1 - q_1^2 - q_2q_1 - cq_1$$

$$G_2 = aq_2 - q_1q_2 - q_2^2 - cq_2$$

Die Maximierung bezüglich der zu wählenden Produktionsmengen ergibt als Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{dG_1}{dq_1} = \; a - 2q_1 - q_2 - c = 0$$

$$\frac{dG_2}{dq_2} = a - q_1 - 2q_2 - c = 0$$

Im Gleichgewicht müssen die Strategien, hier also die Produktionsmengen, so gewählt werden, dass beide Bedingungen erster Ordnung simultan erfüllt sind. Hierzu lösen wir die erste Gleichung nach q_2 auf und erhalten:

$$q_2 = a - 2q_1 - c$$

Dies setzen wir in die obige zweite Gleichung ein und erhalten:

$$a - q_1 - 2q_2 - c = a - q_1 - 2(a - 2q_1 - c) - c = 0$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach q_1 auflösen und man erhält:

$$q_1 = \frac{a - c}{3}$$

Setzt man das zurück ein in $q_2 = a - 2q_1 - c$, so erhält man für q_2:

$$q_2 = \frac{a - c}{3}$$

Das Gleichgewicht des Spiels lautet also:

$$\left\{\frac{a-c}{3};\frac{a-c}{3}\right\}$$

Lösung zu Aufgabe 2.7.3

Teil a)

Wenn Alena ihre beste Antwort bestimmen will, muss Sie für ihre Auszahlung die Bedingung erster Ordnung aufstellen:

$$\frac{dA_{Alena}}{dx} = 10 + 0{,}5y - 2x = 0$$

Auflösen nach x ergibt Alenas Beste-Antwort-Funktion:

$$x = 0{,}25y + 5$$

Um diese Funktion in einem x-y-Diagramm grafisch darstellen zu können, muss sie nach y aufgelöst werden: Es ergibt sich

$$y = 4x - 20$$

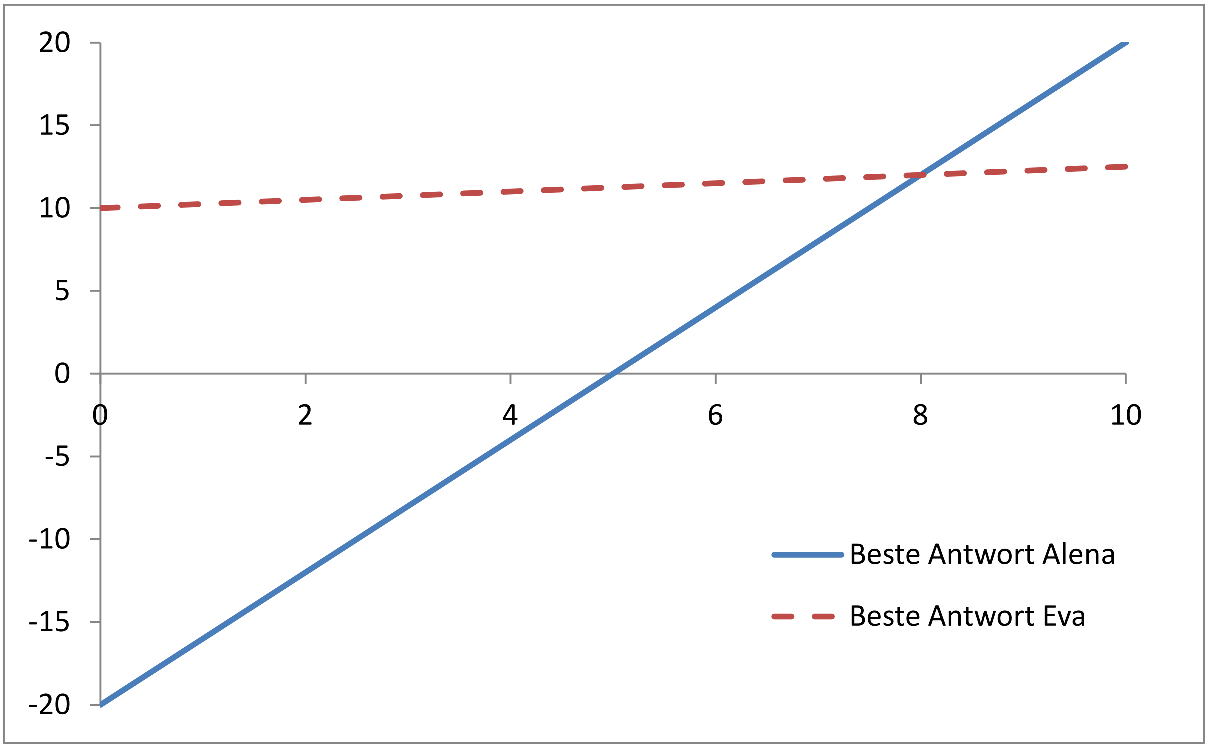
Wiederholung der gleichen Prozedur für Eva:

$$\frac{dA_{Eva}}{dy} = 20 + 0{,}5x - 2y = 0$$

Auflösen nach y ergibt Evas Beste-Antwort-Funktion:

$$y = 0{,}25x + 10$$

Da diese Funktion bereits nach y aufgelöst ist, kann sie direkt in ein Diagramm eingezeichnet werden. Es ergibt sich:



Teil b)

Das Gleichgewicht ist wieder durch den Schnittpunkt beider Funktionen gekennzeichnet. Im Gleichgewicht muss gelten, dass die beiden Spielerinnen jeweils die besten Antworten aufeinander wählen. Es müssen also gleichzeitig die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$y = 4x - 20$$

$$y = 0{,}25x + 10$$

Gleichsetzen ergibt:

$$4x - 20 = 0{,}25x + 10$$

Hieraus folgt ein optimaler Wert für x in Höhe von $x = 8$. Einsetzen in eine der Gleichungen $y = 4x - 20$ oder $y = 0{,}25x + 10$ ergibt einen optimalen Wert für y in Höhe von $y = 12$. Das Gleichgewicht des Spiels lautet daher:

$$\{8; 12\}$$