Monopoly
&
Markow-Ketten

Bachelorarbeit im Fach Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

vorgelegt von Julia Tenié
aus Rheinberg

Bochum, 20. April 2008

Titelbild: Das Spielfeld von Monopoly.

Monopoly ist ein eingetragenes Warenzeichen der Firma Hasbro Inc.

Bild-Quelle: Bewersdorff, J. (2008): *Wahrscheinlichkeiten beim Monopoly: Berechnung der zugehörigen Markoff-Kette.* Internet:

http://www.bewersdorff-online.de/monopoly/monopoly_m.htm (Zugriff am 13.04.2008).

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Seit 1931 spielen Generationen von Kindern und Erwachsenen begeistert Monopoly – das Spiel von Charles Darrow, bei dem man durch Kaufen von Straßen und Bauen von Häusern der reichste Spieler werden will. Inwieweit man seine Gewinnchancen durch mathematisch untermauerte Strategien verbessern kann, wurde seitdem oft untersucht. Die Überlegungen und Resultate, die Jörg Bewersdorff dazu in seinem Buch „Glück, Logik und Bluff“[1] getroffen hat, sollen hier unter Ausweitung der mathematischen Komponente dargestellt werden.
Diese Arbeit ist im Rahmen des Seminars „Mathematik und Spiel“ unter der Leitung von Prof. Dr. R. Verfürth an der Ruhr-Universität Bochum im Wintersemester 07/08 entstanden.

1.1 Die wichtigsten Spielregeln von Monopoly[2]

Auf dem Spielfeld ist ein aus 40 Feldern bestehender quadratischer Rundkurs abgebildet, bei dem die Eckfelder jeweils eine besondere Bedeutung besitzen (s. Deckblatt). Eine der vier Ecken ist das Startfeld, „Los“ genannt. Mit jedem Überschreiten des Feldes „Los“ erhält man sein Gehalt von 4000 Spielmark. Die zweite Ecke ist das „Gefängnis/Nur zu Besuch“-Feld, die dritte Ecke „Frei Parken“ und die vierte das „Gehen Sie in das Gefängnis“-Feld. Die übrigen Felder sind 22 Grundstücke – Straßen genannt – in acht verschiedenen Farben, vier Bahnhöfe, zwei Versorgungswerke, je drei Gemeinschafts- und Ereignisfelder und zwei Steuerfelder.

Jeder Spieler erhält ein Startkapital von 30.000 Spielmark, mit dem er Grundstücke kaufen und Häuser und Hotels bauen kann, aber auch Miete und Steuern zahlen muss. Gewürfelt wird mit zwei sechsseitigen Würfeln und die Spielfigur wird um die Summe der Augenzahlen vorgesetzt. Es dürfen mehrere Figuren gleichzeitig auf demselben Feld stehen.

[1]Vgl. Bewersdorff (2001) S. 69-81
[2]Vgl. Spielefabrik Franz Schmidt (2006)

Landet man auf einem Grundstück, das noch niemandem gehört, so kann man dieses kaufen. Befindet sich das Grundstück bereits im Besitz eines Gegenspielers, so muss man den Mietpreis zahlen, der sich mit der Anzahl der Häuser bzw. Hotels, die auf diesem Grundstück gebaut wurden, drastisch erhöht. Das Bauen von Häusern und Hotels ist jedoch nur möglich, wenn man einen ganzen Straßenzug, also alle zur gleichen Farbe gehörenden Straßen, besitzt. Auf jedem Grundstück können maximal vier Häuser bzw. ein Hotel gebaut werden. Zudem müssen die Häuser gleichmäßig auf die zu dem Straßenzug gehörenden Grundstücke verteilt werden. Die Gesamtanzahl der Häuser und Hotels im Spiel ist begrenzt.

Kommt man auf einem Gemeinschafts- oder Ereignisfeld zum Stehen, so zieht man eine Karte vom entsprechenden – 16 Karten umfassenden – Stapel und folgt den Anweisungen. Im Wesentlichen muss man Geld zahlen, erhält Geld oder man muss sich mit seiner Spielfigur auf ein anderes Spielfeld begeben. Letztere Karten werden im Folgenden „Transferkarten" genannt. Außerdem gibt es in beiden Stapeln je eine „Du kommst aus dem Gefängnis frei"-Karte.

Würfelt man einen Pasch, so muss man noch einmal würfeln. Wirft man jedoch drei Päsche in Folge, so wird der dritte Pasch nicht mehr gezogen, sondern der Spieler muss sich sofort in das Gefängnis begeben.
Ebenfalls ins Gefängnis kommt der Spieler, wenn er auf dem Feld „Gehen Sie in das Gefängnis" landet oder auf dem Ereignis- bzw. Gemeinschaftsfeld die Karte „Gehe in das Gefängnis" zieht. In jedem Fall ist der Spielzug nun beendet, auch wenn man zuletzt einen Pasch geworfen hat.

Man kann sich aus dem Gefängnis für 1000 Spielmark freikaufen, die Gemeinschafts- oder Ereigniskarte „Du kommst aus dem Gefängnis frei" benutzen oder versuchen, sich mit einem Pasch herauszuwürfeln. Hat man jedoch nach der dritten Runde immer noch keinen Pasch gewürfelt, muss man auch 1000 Spielmark zahlen und um die Augenzahl des dritten Wurfes vorziehen. Im Gefängnis dürfen Mieten kassiert werden.[3]

[3]„Da im Gefängnis Miete kassiert werden darf, aber keinesfalls welche fällig wird, ist es für einen Spieler in der Endphase günstig, möglichst viel Zeit dort zu verbringen. Die

Ziel des Spiels ist es, durch Kaufen, Bebauen und Verkaufen von Straßen möglichst viel Geld zu erwirtschaften, um schließlich der reichste Spieler zu sein und somit zu gewinnen.

1.2 Vorstellung der Problematik

Wie aus den Spielregeln deutlich wird – und wer das Spiel bereits gespielt hat, kennt diese Überlegungen von sich selbst – muss der Spieler jede Kauf- bzw. Bauoption in Hinblick auf die damit verbundenen möglichen Gewinne – aber auch Risiken – bewerten, um dem Ziel, der reichste Spieler zu werden, ein Stück näher zu kommen.

> *Soll ich auf meinem roten Straßenzug drei weitere Häuser bauen? Dadurch könnte ich mehr Miete einnehmen. Aber wann wird wohl der nächste Spieler auf meine roten Straßen kommen, und was passiert, wenn ich vorher bei jemand anderem eine dicke Miete zahlen muss? Möglicherweise ist durch diesen Kauf meine Liquidität nicht mehr gesichert - aber wenn ich kein Risiko eingehe und nicht baue, nehme ich mir vielleicht die Chance, zu gewinnen...*

Um fundierte Entscheidungen treffen zu können, nehmen wir uns die Mathematik zur Hilfe. Zwar basiert Monopoly auf einem beachtlichen Glücksfaktor – denn wer weiß schon, wie die Würfel fallen und wie oft die Gegner tatsächlich auf den eigenen mit Hotels bestückten Straßen landen werden? – aber mit Hilfe von Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten ist es doch möglich, Ertragsprognosen zu erstellen, die bei hinreichend vielen Spielzügen annähernd eintreffen.

Die Grundidee ist, die zu erwartenden Mieteinnahmen pro Spielzug zu berechnen, damit man als Spieler abschätzen kann, wie viele Runden vergehen

Möglichkeit eines unmittelbaren Freikaufs [sowie die ‚Du kommst aus dem Gefängnis frei'-Karte werden daher in den späteren Berechnungen nicht berücksichtigt]."(Bewersdorff (2001) S. 77) müssen, bis sich eine Investition rentiert hat und man Gewinne einfährt. Anhand dieser Rundenanzahl werden Bau- und Kaufentscheidungen gefällt. Zunächst beschränken wir unsere Überlegungen jedoch auf einen Wurf und weiten diese erst später auf einen Spielzug aus.

Die zu erwartende Mieteinnahme $E(M_x)$ einer Straße x pro Wurf ergibt sich aus dem Produkt aus der Miete M_x, die pro Besuch der Straße x fällig wird, und der Wahrscheinlichkeit $p(x)$, dass es beim Wurf eines Gegners zu einem solchen Besuch kommt:

$$E(M_x) = M_x \cdot p(x).$$

Der Mietbetrag wird durch die Bebauung der Straße festgelegt. Aber wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler auf dieser Straße landet? Wie unschwer zu erkennen ist, ist die Symmetrie beim Monopoly z.B. durch das Gefängnis und die Transferkarten zu stark gestört – es gibt also Straßen, auf denen man häufiger landet als auf anderen. Um die zu erwartenden Mieteinnahmen zu bestimmen, muss nun eine Methode gefunden werden, mit der sich die Besuchswahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Felder ermitteln lassen.

2 Problemanalyse am vereinfachten Modell

Um eine Methode zu entwickeln, die uns die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die 40 Felder des Monopolys liefert, analysieren wir das Problem an einem vereinfachten Modell. Dazu betrachten wir einen Rundkurs mit vier Feldern, welche mit den Ziffern 1 bis 4 nummeriert werden. Um die Gefängnissituation zu simulieren, wird die Spielfigur jedesmal, wenn sie auf Feld 4 landet, auf Feld 2 verschoben. Man darf von dort aus jedoch zunächst direkt weiterziehen (in Kapitel 3.2 wird anhand eines ähnlichen Beispiels die Gefängnissituation noch genauer modelliert).

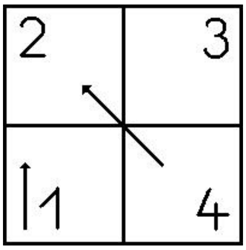

Abbildung 1: Ein Würfelrundkurs mit 4 Feldern (Bewersdorff (2001) S. 71)

Gewürfelt wird mit einem sechsseitigen Würfel. Will man wissen, wie häufig die Figur z.B. bei 1000 Spielzügen auf den jeweiligen Feldern landen wird, so kann man sich viel Zeit nehmen und das Experiment machen. Deutlich schneller kommt man jedoch zu einer Abschätzung, wenn man die Würfelwahrscheinlichkeiten auf das Spielbrett überträgt.

2.1 Aufstellen der Übergangsmatrix

Man nehme zunächst an, dass die Figur auf Feld 1, auf „Los“ steht. Würfelt man nun eine 1, 3 oder 5, so landet man auf Feld 2. Bei einer 2 oder 6 landet man auf Feld 3, bei einer 4 auf Feld 1.
In einem von sechs Fällen – also mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/6 – landet man wieder auf Feld 1. Diese Wahrscheinlichkeit nennt man Übergangswahrscheinlichkeit, weil sie den Übergang der Spielfigur von einem bestimmten Feld auf ein anderes oder auch auf dasselbe Feld beschreibt. Sie bleibt immer

gleich, weil die Ausgangssituation jedesmal gleich ist: Man steht auf Feld 1, würfelt mit einem fairen Würfel und gelangt nur mit der 4 wieder auf Feld 1. Übergangswahrscheinlichkeiten sind *bedingte Wahrscheinlichkeiten*, weil sie angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit $p(j|i)$ man auf Feld j landet unter der Bedingung, auf Feld i gestartet zu sein. Für obigen Fall schreibt man:

$$p(1|1) = \frac{1}{6}.$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit von Feld 1 auf Feld 2 beträgt $p(2|1) = 3/6$, dazu kommen $p(3|1) = 2/6$ und $p(4|1) = 0$. Summiert man die Übergangswahrscheinlichkeiten von Feld 1 auf jedes Feld auf, so ergibt dies genau Eins. Das muss auch so sein, weil sich die Übergangswahrscheinlichkeiten direkt aus den Würfelwahrscheinlichkeiten ableiten und man auf jeden Fall (mit einer Wahrscheinlichkeit von Eins) eine Zahl von 1 bis 6 würfelt.

Lässt man seine Spielfigur auf den anderen Feldern starten und überträgt wieder die Würfelwerte auf das Spielfeld, so erhält man analog die restlichen Übergangswahrscheinlichkeiten. Diese kann man in einer Tabelle zusammenfassen oder als sogenannte Übergangsmatrix darstellen:

		Feld nach einem Zug			
		1	**2**	**3**	**4**
Feld	**1**	1/6	1/2	1/3	0
vor	**2**	1/6	1/2	1/3	0
einem	**3**	1/3	1/2	1/6	0
Zug	**4**	1/3	1/2	1/6	0

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

Tabelle 1: Obwohl man auf Feld 4 nie zum Stehen kommt, da man direkt auf Feld 2 verschoben wird, muss man trotzdem die Übergangswahrscheinlichkeiten von Feld 4 auf die übrigen Felder angeben, denn es wäre ja zumindest denkbar, auf Feld 4 zu starten (vgl. Bewersdorff (2001) S. 71).

Eine Übergangsmatrix ist eine quadratische Matrix, die als Einträge die Übergangswahrscheinlichkeiten $p(j|i)$ besitzt, wobei wie in der Tabelle in der i-ten Zeile die vom i-ten Feld ausgehenden Übergangswahrscheinlichkeiten aufgelistet sind. Daraus folgt unmittelbar, dass die Einträge allesamt größer oder gleich Null sind und die Zeilensumme genau Eins beträgt.

Eine solche Übergangsmatrix bildet die Grundlage für ein mathematisches Theorem aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitstheorie, nämlich für die sogenannten *Markow-Ketten*.

2.2 Markow-Ketten

> „Bei einer Markow-Kette handelt es sich um eine Folge von zufälligen Versuchen, bei denen jeweils genau eins von insgesamt endlich vielen Ereignissen eintritt. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit, dass im $(n+1)$-ten Versuch ein bestimmtes Ereignis eintritt, nur von dem im n-ten Versuch eingetretenen Ereignis ab, nicht aber darüber hinaus auch von den davor eingetretenen. Das heißt, die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das im $(n+1)$-ten Versuch eingetretene Ereignis sind unabhängig davon, ob sich die Bedingtheit nur auf das im n-ten Versuch eingetretene Ereignis bezieht oder ob zusätzlich auch die weiter zurückliegenden Versuche mit einbezogen werden.“[4]

Monopoly und auch obiges Modell sind Beispiele für Markow-Ketten. Will man wissen, wie wahrscheinlich es ist, dass man mit dem nächsten (oder übernächsten etc.) Wurf auf einem bestimmten Feld landen wird – oder, in der Terminologie der Markow-Ketten, nach dem nächsten (oder übernächsten etc.) Versuch in einem bestimmten Zustand landen wird – so muss man wissen, in welchem Zustand man sich momentan befindet. Steht man bei Monopoly gerade auf „Los“, so ist es nicht möglich, mit nur einem Wurf auf der Parkstraße zu landen. Steht man jedoch auf dem Rathausplatz, so muss man nur eine sechs würfeln, was mit einer Wahrscheinlichkeit von 5/36 eintritt. Die Standorte vor „Los“ bzw. dem Rathausplatz sind dagegen uninteressant, da die einzelnen Würfe unabhängig sind. Autor Bewersdorff

[4] BEWERSDORFF (2001) S. 73

beschreibt diesen Sachverhalt „durch ein ‚Gedächtnis', das immer genau einen Zug lang währt.“[5]

Demnach handelt es sich bei unserem 4-Feld-Rundkurs um eine Markow-Kette mit vier Zuständen, wobei der aktuelle Zustand jeweils durch den Standort der Spielfigur festgelegt wird. Mit der zugehörigen Übergangsmatrix kann man nun Zug um Zug berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man sich nach n Zügen auf jedem Feld befindet. Dazu benötigt man eine sogenannte Zustandsverteilung p_k von der Form:

$$p_k = \begin{pmatrix} p_k(1), & p_k(2), & p_k(3), & p_k(4) \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt $p_k(i)$ mit $1 \leq i \leq 4$ an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Spielfigur nach dem k-ten Spielzug im Zustand i befindet. Da es sich bei den Einträgen von Zustandsverteilungen stets um Wahrscheinlichkeiten handelt und man sich auf jeden Fall in einem der Zustände befindet, gilt $0 \leq p_k(i) \leq 1$ für alle $1 \leq i \leq 4$ und $\sum_{i=1}^{4} p_k(i) = 1$. Für den Spielstart sieht die Zustandsverteilung, Startverteilung genannt, demnach folgendermaßen aus:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix},$$

da wir auf Feld 1 starten. Aus jeder beliebigen Verteilung p_k erhält man die Verteilung p_{k+1}, indem man p_k mit der Übergangsmatrix A multipliziert:

$$p_{k+1} = p_k A.$$

Dass diese Gleichung gilt, werden wir mit Hilfe des folgenden Satzes zeigen:

> Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit [6]:
> *Es sei $B_1, \ldots, B_n$ eine disjunkte Zerlegung des Ergebnisraumes Ω, d.h. $\Omega = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und es gelte $P(B_i) > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt für jedes Ereignis $A \subset \Omega$*
>
> $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

[5] Bewersdorff 2001, S. 73
[6] Dehling/Haupt (2004) S. 51

Die einzelnen Zustände einer Markow-Kette stellen eine disjunkte Zerlegung des Zustandsraumes dar, womit bereits die erste Voraussetzung des Satzes erfüllt ist.

Führt man nun die Vektor-Matrixmultiplikation der Gleichung $p_{k+1} = p_k A$ aus und vergleicht anschließend die beiden Vektoren eintragsweise, so erhält man die sogenannten Übergangsgleichungen:

$$p_{k+1}(i) = \sum_{j=1}^{4} p_k(j) A_{ji} \quad \text{mit} \quad A_{ji} = p(i|j) \,(\text{vgl. S. 9}), \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Diese Übergangsgleichungen entsprechen genau dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, womit die Rechenvorschrift $p_{k+1} = p_k A$ legitimiert ist.[7]

Die einzelnen Zustandsverteilungen berechnen sich also folgendermaßen:

$$\begin{array}{rrcl} & p_1 & = & p_0 A \\ & p_2 & = & p_1 A \ = \ (p_0 A) A \ = \ p_0 A^2 \\ \overset{\text{Itera-}}{\underset{\text{tion}}{\Rightarrow}} & p_k & = & p_0 A^k. \end{array}$$

Ein solches Verfahren, bei dem man den nächsten Wert p_{k+1} stets durch Anwendung der gleichen Funktion F auf das Ergebnis p_k der vorherigen Rechnung erhält, nennt man *Fixpunktiteration*, weil die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der einzelnen Ergebnisse unter bestimmten Voraussetzungen gegen einen Fixpunkt p mit $F(p) = p$ konvergiert. Die Funktion F wird Iterationsvorschrift genannt.[8]

---

[7]Bei der Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit $p(i|j)$ wurde für alle $1 \leq i, j \leq 4$ $p(j) = 1$ angenommen, sodass auch die zweite Forderung des Satzes erfüllt ist.

[8]Vgl. Lorenz (2006)

2.3 Grenzwert der Fixpunktiteration und stationäre Verteilungen

Wie bereits im vorherigen Kapitel angedeutet, stellt die Fixpunktiteration unter gewissen Voraussetzungen ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Fixpunkten dar. In unserem konkreten Fall wäre ein solcher Fixpunkt eine sogenannte stationäre Zustandsverteilung, also eine Zustandsverteilung, die sich bei einem Übergang der Markow-Kette nicht ändert:

$$p = pA.$$

Diese stationäre Verteilung würde dann die Information darüber geben, wie oft man sich im Durchschnitt in welchem Zustand befindet – unabhängig vom aktuellen Standort!

Tatsächlich gibt es bei Markow-Ketten immer stationäre Zustandsverteilungen, doch bei weitem nicht immer nur eine. Oft hängt die stationäre Verteilung nämlich von der Startverteilung ab, und dort gibt es unendlich viele Möglichkeiten.
Ist die Markow-Kette jedoch regulär, d.h. gibt es eine feste Schrittzahl k, sodass die Übergangsmatrix A^k keine Nullen enthält – anschaulich heißt das, dass man in k Schritten von jedem Zustand in jeden Zustand gelangen kann – so ist die stationäre Verteilung eindeutig. Zudem konvergiert die Fixpunktiteration für jede beliebige Startverteilung gegen diese stationäre Verteilung. Der Beweis zu diesen Aussagen wird in Kapitel 5 geliefert.

Die Markow-Kette zum 4-Feld-Rundkurs ist nicht regulär, da man nie in den vierten Zustand gelangt. Trotzdem ist die stationäre Verteilung eindeutig:

Bildet man aus $p = pA$ die Übergangsgleichungen und löst diese unter Verwendung der Nebenbedingung $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ mit $p_i \geq 0$, $1 \leq i \leq 4$ nach p_1, p_2, p_3 und p_4 auf, so ergibt sich als eindeutige Lösung die Verteilung $p_0 = \left(\frac{3}{14}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{2}{7}, \ 0 \right)$.

3 Anwendung auf Monopoly

3.1 Welche Zustände unterscheidet man?

Will man nun eine Markow-Kette konstruieren, die die Spielsituation beim Monopoly möglichst realistisch wiedergibt, so muss man zunächst eine Modellierung für die Paschregelung finden. Mit zwei Päschen kann man in nur einem Spielzug auf bis zu drei Straßen zum Stehen kommen. Deshalb konstruiert man eine Markow-Kette, bei der ein Übergang genau den Auswirkungen eines Wurfes statt denen eines gesamten Spielzuges entspricht. Ein Spielzug kann also ein bis drei Übergänge der Markow-Kette umfassen.

Somit ist schon einmal gewährleistet, dass jeder Zwischenstopp registriert wird. Landet man dabei auf einem Gemeinschafts- oder Ereignisfeld, so wird angenommen, „dass Karten immer von einem vollständigen und gerade durchgemischten Kartenstapel gezogen werden.“[9] Man zieht also immer mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/16 die Transferkarte „Rücke vor bis auf Los“. Würfelwurf und Transfer werden dann als ein Übergang gewertet und der Zwischenstopp auf dem Gemeinschafts- bzw. Ereignisfeld nicht erfasst. Wie erkennt man aber nun, dass ein Spielzug beendet ist und ein neuer beginnt?

Die Lösung liefert die Aufteilung der Zustände. Um die Paschregelung beachten zu können, muss jeder Zustand nicht nur den aktuellen Standort angeben, sondern auch, ob dieser ohne Pasch, mit einem Pasch oder mit Folgepasch erreicht wurde. Diese Unterscheidung liefert pro Feld drei Zustände. Eine Ausnahme bildet das Gefängnis, weil dort die Paschregelung nicht gilt. Kommt man ins Gefängnis, endet der Spielzug sofort, egal, mit welcher Würfelkombination man dorthin gelangt. Dennoch kann man beim Gefängnis auch drei Zustände unterscheiden, weil man – sofern man keinen Pasch wirft – drei Runden im Gefängnis verweilt.
Um Monopoly zu modellieren, braucht man also eine Markow-Kette mit 120 Zuständen!

[9] Bewersdorff (2001) S. 77

Die Übergangsmatrix erhält man, indem man die Würfelwerte auf das Spielfeld überträgt und dabei die Paschregelung sowie die Transferkarten berücksichtigt. Da die (120×120)-Matrix zu komplex ist, stelle ich die Übergangsmatrix eines weiteren vereinfachten Modells unter Beachtung einer Paschregelung wie beim Monopoly vor.

3.2 Vereinfachtes Modell mit Paschregelung

Es wird nun ein 4-Feld-Rundkurs betrachtet, der genau den vier Ecken des Monopoly-Spielfeldes entspricht. Gewürfelt wird mit zwei Würfeln, die jeweils zweimal die Zahlen 1 bis 3 zeigen, was neun verschiedenen Würfelkombinationen (unter Beachtung der Reihenfolge) entspricht. Nach dem ersten Pasch wird erneut gewürfelt. Der zweite Pasch in Folge wird jedoch nicht mehr gezogen, sondern man muss sich sofort ins Gefängnis begeben. Aus dem Gefängnis entlassen wird man entweder durch Werfen eines 2er-Paschs oder nach dem 2. Versuch, sich mit einem solchen frei zu würfeln.[10] Somit unterscheidet man hier acht Zustände.

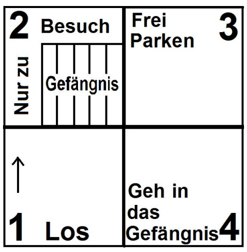

Abbildung 2: Die vier Ecken des Monopoly

Anhand dieser Regeln kann man mithilfe der Würfelwahrscheinlichkeiten die Übergangsmatrix zu diesem Modell erstellen (vgl. Tabelle 2, S. 16). Wir nehmen zunächst an, dass wir uns auf Feld 1 befinden und dort ohne Pasch angelangt sind. Ausgangspunkt ist also der Zustand 1a. Wieder auf Feld 1

[10] Man wird nur nach einem 2er-Pasch aus dem Gefängnis entlassen, weil man mit einem 1er- bzw. 3er-Pasch direkt wieder auf dem Feld „Gehen Sie in das Gefängnis“ landen würde. Anstatt jeden Pasch als Freikommen und den 1er- bzw. 3er-Pasch als direkte „Neueinlieferung“ zu interpretieren, werden der 1er- und 3er-Pasch als missglückter Versuch gewertet.

von \ *nach*	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b
1a	2/9	1/9	2/9	0	0	2/9	2/9	0
1b	2/9	0	2/9	0	0	0	5/9	0
2a	2/9	0	2/9	1/9	2/9	0	2/9	0
2b	2/9	0	2/9	0	2/9	0	3/9	0
3a	0	2/9	2/9	0	2/9	1/9	2/9	0
3b	0	0	2/9	0	2/9	0	5/9	0
4a	0	0	0	1/9	0	0	0	8/9
4b	2/9	0	2/9	1/9	2/9	0	2/9	0

Tabelle 2: Zustand 4 wird hier mit dem Gefängnis identifiziert, bei Entlassung wird jedoch von Zustand 2 aus gezogen. Bei den Zuständen 1a bis 3b stehen „a“ für „ohne Pasch erreicht“ und „b“ für „mit Pasch erreicht“, bei den Gefängniszuständen 4a und 4b stehen „a“ für „1. Versuch“ und „b“ für „2. Versuch“.

landet man, wenn man eine Vier würfelt. Das ist mit den Kombinationen (1,3), (3,1) oder als 2er-Pasch (2,2) möglich. Wirft man den Pasch, so landet man in Zustand 1b, weil das Feld 1 mit einem Pasch erreicht wurde. Ansonsten lautet der Endzustand 1a.
Startet man stattdessen in Zustand 1b, ist man also mit einem Pasch auf Feld 1 gekommen, und möchte wieder auf Feld 1 landen, so ist das mit dem 2er-Pasch nicht mehr möglich, weil man beim zweiten Pasch in Folge direkt ins Gefängnis muss. Also muss beim Übergang 1b nach 1b eine Null stehen zugunsten des Übergangs 1b nach 4a.

Die Benennung der Gefängniszustände weicht von der „mit bzw. ohne Pasch erreicht“ -Regelung ab. „a“ steht hier für 1. Versuch, „b“ für 2. Versuch. Kommt man ins Gefängnis, landet man also stets in Zustand 4a. Der Zustand 4b repräsentiert die zweite Runde im Gefängnis. Man gelangt nur vom Zustand 4a aus dorthin, und das sogar mit einer Wahrscheinlichkeit von 8/9, da man sich nur mit dem 2er-Pasch heraus würfeln kann. Der nächste Würfelwurf wird auf jeden Fall gezogen, und zwar vom Feld 2 aus. Daher ergeben sich hier die gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten wie vom Zustand 2a aus.

Die so erhaltene Übergangsmatrix ist regulär, weil ihre dritte Potenz keine Nullen mehr enthält. Somit existiert eine eindeutige stationäre Verteilung p, die ich mit Hilfe von *Derive* ^{TM} *6* berechnet habe:

$$p = \begin{pmatrix} 0,1351 & 0,0450 & 0,1751 & 0,0640 & 0,1351 & 0,0450 & 0,2122 & 0,1886 \end{pmatrix}.$$

Fasst man die a- und b-Werte für die jeweiligen Zustände zusammen, so erhält man die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder:

$$p' = \begin{pmatrix} 0,1801 & 0,2391 & 0,1801 & 0,4008 \end{pmatrix}.$$

3.3 Die stationäre Verteilung von Monopoly

Die Monopoly-Markow-Kette ist ebenfalls regulär. Die dritte Potenz der Übergangsmatrix besitzt keine Nullen mehr, d.h. man gelangt in drei Schritten von jedem Zustand in jeden Zustand. Gewährleistet wird dies durch die Transferkarten, welche es ermöglichen, mit nur einem Wurf große Distanzen auf dem Spielplan zurückzulegen.

Deshalb ergeben sich analog zu den Berechnungen in Abschnitt 3.2 für die 40 Felder des Monopoly-Rundkurses die in Tabelle 3 (s. Seite 18) aufgeführten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Multipliziert man diese Aufenthaltswahrscheinlichkeiten mit den entsprechenden Mietbeträgen bei maximaler Bebauung, so erhält man die maximale Mieterwartung pro Wurf. Die letzte Spalte der Tabelle fasst die maximalen Mieterwartungen aller zu einem Straßenzug gehörenden Straßen zusammen.

Anhand der stationären Verteilung der Monopoly-Markow-Kette mit ihren 120 Zuständen kann man auch ablesen, wie groß der Anteil an ersten Würfen eines Spielzuges ist. Ein Spielzug endet nämlich immer dann, wenn man keinen Pasch mehr wirft oder aber im Gefängnis ist. Demnach sind alle Würfe, die von einem der 39 „ohne Pasch erreicht“-Zustände oder von den drei Gefängniszuständen ausgehen, erste Würfe. Diese 42 Zustände belegen bei der stationären Verteilung einen Anteil von 0,8425. Jeder erste Wurf markiert aber auch einen neuen Spielzug, sodass sich 100 Würfe auf 84,25 Spielzüge aufteilen. Daraus folgt unmittelbar, dass ein Spielzug im Durchschnitt 1/0,8425 = 1,1869 Würfe umfasst.

	Straße	**Wahr.**	**maximale Miete**		
			absolut	**Erw.**	**Gruppe**
0	Los $T_E T_G$	$0,02889$			
1	Badstr. T_E	$0,02436$	5000	122	
2	Gemeinschaftsfeld	$0,01763$			
3	Turmstr.	$0,02040$	9000	184	305
4	Einkommenssteuer	$0,02210$			
5	Südbahnhof T_E	$0,02686$	4000	107	
6	Chausseestr.	$0,02169$	11000	239	
7	Ereignisfeld	$0,00972$			
8	Elisenstr.	$0,02246$	11000	247	
9	Poststr.	$0,02217$	12000	266	752
10	Nur zu Besuch	$0,02184$			
11	Seestr. T_E	$0,02596$	15000	389	
12	Elektrizitätswerk	$0,02378$	1400	33	
13	Hafenstr.	$0,02213$	15000	332	
14	Neue Str.	$0,02457$	18000	442	1164
15	Westbahnhof	$0,02531$	4000	101	
16	Münchener Str.	$0,02703$	19000	514	
17	Gemeinschaftsfeld	$0,02306$			
18	Wiener Str.	$0,02821$	19000	536	
19	Berliner Str.	$0,02794$	20000	559	1608
20	Frei Parken	$0,02806$			
21	Theaterstr.	$0,02594$	21000	545	
22	Ereignisfeld	$0,01209$			
23	Museumsstr.	$0,02549$	21000	535	
24	*Opernplatz* T_E	*0,02983*	22000	*656*	1750
25	Nordbahnhof	$0,02718$	4000	109	
26	Lessingstr.	$0,02540$	23000	584	
27	Schillerstr.	$0,02521$	23000	580	
28	Wasserwerk	$0,02480$	1400	35	68
29	Goethestr.	$0,02441$	24000	586	1750
30	Gefängnis $T_E T_G$	$0,09422$			
31	Rathausplatz	$0,02501$	25500	638	
32	Hauptstr.	$0,02438$	25500	622	
33	Gemeinschaftsfeld	$0,02193$			
34	Bahnhofstr.	$0,02312$	28000	647	1907
35	Hauptbahnhof	$0,02243$	4000	90	407
36	Ereignisfeld	$0,00934$			
37	*Parkstr.*	*0,02023*	30000	*607*	
38	Zusatzsteuer	$0,02023$			
39	Schloßallee T_E	$0,02457$	40000	983	1590

Tabelle 3: Aufenthaltswahrscheinlichkeiten sowie maximale Mieten der einzelnen Felder. Durch ein T_E bzw. T_G nach dem Namen sind die Felder markiert, auf die eine Transferkarte von den Ereignis- bzw. Gemeinschaftskarten verweist (dt. Ausgabe ab ca. 1985). Zudem gibt es noch die Ereigniskarten „Rücke vor bis zum nächsten Bahnhof“ und „Gehe drei Felder zurück“(vgl. Bewersdorff (2001) S. 76).

4 Auswertung

4.1 Vergleich der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Schaut man sich die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die einzelnen Felder des Monopoly-Rundkurses an, so stellt man erhebliche Unterschiede fest. Die kleinsten Aufenthaltswahrscheinlichkeiten haben die Ereignisfelder, was aber daran liegt, dass neun der 16 Ereigniskarten Transferkarten sind (dt. Ausgabe ab ca 1985). Unter den 16 Gemeinschaftskarten sind immerhin noch zwei Transferkarten, sodass auch dort die Aufenthaltswahrscheinlichkeit etwas unterhalb der der benachbarten Felder liegt. Daraus folgt unmittelbar, dass die Felder, auf die die Transferkarten verweisen, etwas höhere Aufenthaltswahrscheinlichkeiten haben. Diese Felder sind in Tabelle 3 (s. Seite 18) markiert.

Besonders hoch ist natürlich die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Gefängnis, zum einen, weil es relativ viele Möglichkeiten gibt, dort zu landen, aber vor allem deshalb, weil bei unserem Modell die Möglichkeit des Freikaufens und der „Du kommst aus dem Gefängnis frei“-Karten nicht berücksichtigt wurde, sodass man meist länger als nur eine Runde im Gefängnis verweilt.
Die relativ häufigen Gefängnisbesuche erklären auch, dass die Felder nach dem Gefängnis bis hin zum „Gehen Sie in das Gefängnis“-Feld im Durchschnitt höhere Aufenthaltswahrscheinlichkeiten haben als die Felder der anderen Spielfeldhälfte. Vor allem jene Felder, die vom Gefängnis aus mit einem Pasch bzw. besonders häufigen Würfelkombinationen erreicht werden können, profitieren von hohen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten. Der Opernplatz ist diesbezüglich in doppelter Weise begünstigt: Erstens liegt er 14 Felder hinter dem Gefängnis und kann von dort aus gut in zwei Zügen erreicht werden – schließlich machen die Zahlen 6, 7 und 8 immerhin 4/9 aller Würfe aus – und zweitens gibt es die Transferkarte „Rücke vor bis zum Opernplatz“, sodass der Opernplatz mit einem Wert von 0,02983 tatsächlich die Straße mit der höchsten Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist.

Die Straße mit der niedrigsten Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist die Parkstraße mit einem Wert von 0,02023. Dieser geringe Wert hängt damit zusammen, dass die Parkstraße in der weniger besuchten Spielfeldhälfte außer Reichweite eines Transferfeldes liegt und nicht mit der am häufigsten gewürfelten Zahl 7 erreicht werden kann, weil sieben Felder vorher das „Gehen Sie in das Gefängnis“-Feld liegt. Der relative Unterschied zwischen maximaler und minimaler Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei den Straßen beträgt also 47%. Deshalb hat ein Hotel auf dem Opernplatz mit 656 Spielmark pro Wurf trotz deutlich niedrigerer Miete eine höhere Mieterwartung als ein Hotel auf der Parkstraße mit 607 Spielmark pro Wurf.

4.2 Konsequenzen für den Grundstückshandel und das Bauverhalten

Die Mieterwartungen, die wir durch die Modellierung als Markow-Kette erhalten haben, kann man sich nun beim Grundstückshandel sowie beim Bau von Häusern und Hotels zunutze machen. Dabei muss man unterscheiden, in welcher Spielphase man sich befindet:

- In frühen Spielphasen ist noch nicht viel Geld im Umlauf und es sind noch nicht viele Häuser gebaut worden. Daher ist das Ziel jedes Spielers, möglichst schnell an Geld zu kommen, um seine Liquidität zu sichern. Man sucht nach Wegen, seine Mieterwartung mit dem vorhandenen Kapital zu maximieren. Dabei wird jedoch insbesondere darauf geachtet, wie schnell sich eine Investition rentiert, also nach wie vielen Spielrunden man den Baupreis durch die zusätzliche Mieterwartung wieder einholt. Eine Investition rentiert sich umso schneller, je mehr Mitspieler beteiligt sind.

- In späteren Spielphasen ist deutlich mehr Geld im Umlauf und es wurden bereits einige Häuser gebaut. Das Ziel jedes Spielers ist es hier, die anderen Mitspieler in den Ruin zu treiben. Deshalb werden soviele Häuser und Hotels wie möglich gebaut, insbesondere auf den Straßen

> mit sehr hohen Mieterwartungen. Der Baupreis ist dabei uninteressant, da die Mieteinnahmen in dieser Spielphase sehr hoch sind. Einzige Richtlinie ist, seine Gesamtmieterwartung zu maximieren. Gelingt es dauerhaft, seine Mieterwartung multipliziert mit der Anzahl der Gegenspieler (dies entspricht den erwarteten Einnahmen pro Spielrunde) größer zu halten als die Mieterwartung aller Gegenspieler zusammen (dies entspricht den eigenen zu erwartenden Ausgaben pro Spielrunde), so fährt man im Durchschnitt jede Spielrunde Gewinne ein und ist somit auf gutem Weg in Richtung Sieg.

Natürlich sind diese Überlegungen zusammen mit den Gewinnerwartungen kein Gewinngarant, da nach wie vor eine Menge Glück zum Monopoly gehört und im schlimmsten Fall die Würfel ständig so fallen, dass die Gegner die eigenen Straßen nicht besuchen.

Um obige Strategien noch etwas zu konkretisieren, werden in den beiden folgenden Tabellen (s. Seite 22f) die prozentualen Renditen beim Bau von weiteren Häusern sowie die absoluten Mieterwartungen der einzelnen Straßengruppen aufgeführt. Anders als noch in Tabelle 3 (s. Seite 18) beziehen sich hier alle Angaben auf einen Spielzug, also auf durchschnittlich 1,1869 Würfe (vgl. Seite 17).

Die Spalte „Mieterwartung bei Hotels“ in Tabelle 4 (s. Seite 22) erhält man, indem man die in Tabelle 3 aufgeführten Werte unter „maximale Miete – Gruppe“, die sich auf einen Wurf beziehen, mit 1,1869 multipliziert. Wie man die Werte der Renditespalten berechnet, führe ich hier beispielhaft an der Poststraße, die zu den hellblauen Straßen gehört, vor:
Die Poststraße hat eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit von 0,02217 und bei Besitz aller hellblauen Straßen einen Mietwert von 320 Spielmark. Dies entspricht einer Mieterwartung von $0,02217 \cdot 320 \cdot 1,1869 = 8,420$ pro Spielzug. Ein Haus kostet hier 1000 Spielmark, die Miete bei Bebauung mit einem Haus beträgt 800 Spielmark, was einer Mieterwartung von 21,051 pro Spielzug entspricht. Die zusätzliche Mieterwartung wäre also 21,051-8,420=12,631. Sie macht einen Anteil von 12,6/1000, also von 1,26% der Baukosten aus – das

Farbe	**Miet-erwartung bei Hotels**	**Rendite eines weiteren Hauses (in % pro Zug)**				
		1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**
lila	362	$0,5$	$1,5$	$4,6$	$5,4$	$5,7$
hellblau	892	$1,0$	$3,1$	$9,8$	$7,2$	$7,9$
violett	1381	$0,9$	$3,1$	$8,8$	$5,3$	$4,3$
orange	1909	$1,4$	$4,4$	$11,9$	$6,6$	$6,6$
rot	2061	$1,2$	$3,7$	$9,6$	$3,8$	$3,8$
gelb	2077	$1,3$	$4,5$	$9,4$	$3,5$	$3,5$
grün	2263	$1,2$	$3,9$	$7,5$	$2,9$	$2,6$
dunkelblau	1887	$1,4$	$4,9$	$9,4$	$3,4$	$3,4$

Tabelle 4: Mieterwartung bei Hotels und Renditen von weiteren Häusern für die jeweiligen Straßenzüge (vgl. Bewersdorff (2001) S. 79).

ist der Renditewert. In der Tabelle ist der Durchschnittsrenditewert für alle drei hellblauen Straßen notiert. Da die Poststraße die teuerste der drei Straßen ist, liegt ihr Renditewert über dem Durchschnitt von 1,0%. Die Renditewerte für die restlichen Häuser erhält man analog, indem man wieder den Anteil der zusätzlichen Mieterwartung an den Baukosten bestimmt.

Betrachtet man nun zunächst die Renditespalten, so fällt auf, dass sich der Bau eines dritten Hauses überall besonders lohnt. Daher sollte man auf all seinen Straßen so schnell wie möglich drei Häuser bauen, denn während man beim ersten Haus bei einer Rendite von ungefähr einem Prozent rund 100 Spielzüge braucht, bis sich das Haus rentiert hat, dauert dies beim dritten Haus mit Renditewerten von ca. zehn Prozent nur zehn Spielzüge. So hätte man den Baupreis für alle drei Häuser bereits nach 30 Spielzügen wieder eingespielt. Bei fünf Gegnern ist dies erwartungsgemäß nach sechs Runden der Fall.

Die Renditewerte bei den orangen und hellblauen Straßen sind insgesamt höher als bei den anderen Straßenzügen. Vor allem die letzten drei Häuser erzielen im Vergleich deutlich höhere Renditen. Deshalb führt orange gefolgt

Anlage		**Rendite**
Farbe	**Häuser**	**(% pro Zug)**
orange	**1.-5.**	$6,2$
hellblau	**1.-5.**	$5,8$
dunkelblau	**1.-3.**	$5,2$
gelb	**1.-3.**	$5,1$
rot	**1.-3.**	$4,9$
violett	**1.-5.**	$4,5$
grün	**1.-3.**	$4,2$
rot	**4.-5.**	$3,8$
lila	**1.-5.**	$3,6$
gelb	**4.-5.**	$3,5$
dunkelblau	**4.-5.**	$3,4$
grün	**4.-5.**	$2,7$

Tabelle 5: Durchschnittsrenditewerte aus Tabelle 4 für die einzelnen Straßengruppen. Die ersten drei Häuser werden dabei teilweise getrennt von den letzten beiden betrachtet, da bei den meisten Straßen die Renditen für das vierte und fünfte Haus schlecht sind verglichen mit denen für das zweite und dritte (vgl. BEWERSDORFF (2001) S. 79).

von hellblau auch die Rangliste der Renditen, die in Tabelle 5 aufgeführt ist, an – sogar für alle fünf Häuser. Diese Tabelle liefert eine Hilfestellung für die erste Spielphase, weil man ihr entnehmen kann, wo man zuerst bauen sollte.

Für die zweite Spielphase ist dann die Spalte „Mieterwartung“ bei Hotels in Tabelle 4 (s. Seite 22) ausschlaggebend. Insgesamt steht man also gut da, wenn man die orangen oder hellblauen Straßen sowie rot, gelb oder grün besitzt, weil man dann für jede der beiden Spielphasen sprichwörtlich ein Ass im Ärmel hat.

5 Fixpunkte von Markow-Ketten

Wir wollen nun die in Kapitel 2.3 getroffene Aussage, dass für reguläre Markow-Ketten genau eine stationäre Verteilung existiert und sich diese bei jeder beliebigen Startverteilung einstellt, beweisen.[11] Um den Beweis etwas zu entzerren, unterteilen wir die Aussage in drei Sätze, die jeweils einzeln, jedoch aufeinander aufbauend, bewiesen werden:

- Satz 5.1 (Existenz von Fixpunkten),
- Satz 5.2 (Eindeutigkeit von Fixpunkten bei Regularität),
- Satz 5.3 (Konvergenz der Fixpunktiteration bei Regularität).

Zunächst beschäftigen wir uns jedoch mit den Eigenwerten einer $(n \times n)$-Übergangsmatrix, um später auf diese Erkenntnisse zurückgreifen zu können.

Lemma 5.0. *Sei A eine $(n \times n)$-Übergangsmatrix, d.h. alle Einträge sind größer oder gleich Null und die Zeilensumme beträgt jeweils Eins:*

$$A_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad \textit{und} \quad \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Sei weiter $e \in \mathbb{R}^n$ der Vektor, der nur Einsen als Einträge besitzt:

$$e = (1, \ldots, 1)^t.$$

Dann gilt:

$$Ae = e. \tag{1}$$

Sei λ ein Eigenwert von A. Dann gilt:

$$|\lambda| \leq 1. \tag{2}$$

[11] Beweisidee nach Prof. Dr. Rüdiger Verfürth, Ruhr-Universität Bochum, nicht veröffentlicht.

Beweis. ad (1): Bei dem Matrix-Vektor-Produkt Ae wird jeder Eintrag von A mit Eins multipliziert und dann zeilenweise aufsummiert. Da die Zeilensumme von A Eins beträgt, besitzt der resultierende Vektor als Einträge nur Einsen, man erhält also den Vektor e.
$\Rightarrow$ *Damit ist* 1 *ein Eigenwert von* A.

ad (2): Da es zu jedem Eigenwert λ einen Eigenvektor gibt, existiert ein $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit

$$Ax = \lambda x.$$

Da auch alle Vielfachen von x mit Ausnahme des Nullvektors Eigenvektoren sind, kann man o.E. annehmen, dass x so normiert ist, dass die betragsmäßig größte Komponente genau Eins ist:

$$||x||_\infty = 1.$$

Sei nun i so gewählt, dass $|x_i| = 1$.

$$\begin{aligned} |\lambda| &\overset{|x_i|=1}{=} |\lambda x_i| \\ &\underset{\text{zu A}}{\overset{\lambda\,\text{EW}}{=}} \left| \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right| \\ &\underset{\text{ungl.}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{\leq}} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}||x_j| \\ &\overset{A_{ij}\geq 0}{=} \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|x_j| \\ &\overset{||x||_\infty = 1}{\leq} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \\ &\underset{\text{von A}}{\overset{\text{Def.}}{=}} 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *Alle Eigenwerte von* A *erfüllen* $|\lambda| \leq 1$. □

Wir beweisen nun mit Hilfe des Schauder'schen Fixpunktsatzes, dass es für jede Markow-Kette eine stationäre Verteilung gibt.

Zur Erinnerung:

> Schauderscher Fixpunktsatz.[12] *Seien X ein normierter Vektorraum, $K \subset X$ konvex, $C \subset K$ kompakt und $f \in C(K, C)$. Dann besitzt f einen Fixpunkt in C.*

Satz 5.1 (Existenz von Fixpunkten). *Sei A eine $(n \times n)$-Übergangsmatrix und die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $F(y)^t = y^t A$. Weiter sei $K \subset \mathbb{R}^n$ die Menge aller Zustandsverteilungen,*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Dann besitzt F einen Fixpunkt in K.

Beweis. Seien $x, y \in K$, dann gilt für die Verbindungsstrecke S von x nach y:

$$S = \{tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Da nach Definition von K $x_i, y_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ und nach Definition von S $t, (1-t) \geq 0$ sind, gilt $tx_i + (1-t)y_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
Außerdem gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(tx_i + (1-t)y_i\big) = t \sum_{i=1}^{n} x_i + (1-t) \sum_{i=1}^{n} y_i \underset{\text{von K}}{\overset{\text{Def.}}{=}} t + (1-t) = 1.$$

Die Verbindungsstrecke S liegt also ganz in K, $S \subset K$. Somit ist K konvex.
Da K abgeschlossen und durch die abgeschlossene, n-dimensionale Einheitskugel beschränkt ist, ist K kompakt.

$\Rightarrow$ *K ist konvex und kompakt.*

Sei nun $y \in K$.
Da nach Definition von K $y_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ und nach Definition von A $A_{ij} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$, folgt:

$$F(y) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \forall y \in (\mathbb{R}_+)^n.$$

[12] Verfürth (2006) S. 133

Aus Lemma 5.0 wissen wir, dass $Ae = e$ gilt. Wir bilden nun das Skalarprodukt aus $F(y)$ und e:

$$F(y)^t e = (y^t A)e = y^t(Ae) = y^t e = \sum_{i=1}^{n} y_i \overset{y \in K}{=} 1.$$

Da $F(y)^t e = \sum_{i=1}^{n} F(y)_i$, hat $F(y)$ die Zeilensumme 1.
Somit haben wir gezeigt, dass $F(y) \in K$ ist, falls $y \in K$.

$$\Rightarrow F(K) \subset K.$$

$\Rightarrow$ *Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz besitzt F dann einen Fixpunkt in K, d.h. $\exists\, p \in K : F(p) = p$.* □

Um zu beweisen, dass die stationäre Verteilung einer regulären Markow-Kette eindeutig ist, werden wir zunächst zeigen, dass 1 ein *einfacher* Eigenwert der zugehörigen Übergangsmatrix ist, d.h. dass alle Eigenvektoren zum Eigenwert 1 linear abhängig sind. Daraus folgt dann direkt die Behauptung.

Satz 5.2 (Eindeutigkeit von Fixpunkten bei Regularität). *Seien A eine reguläre $(n \times n)$-Übergangsmatrix und F, K wie in Satz 5.1. Dann besitzt F genau einen Fixpunkt.*

Beweis. 1. Schritt: A ist regulär, d.h.

$$\exists\, k \geq 1 : \quad (A^k)_{ij} > 0 \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n.$$

Aus Lemma 5.0 wissen wir, dass $e = (1, \ldots, 1)^t$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 ist. Da sich e also nach jeder Anwendung auf A wieder reproduziert, ist e ebenfalls Eigenvektor von A^k. Aus $A^k e = e$ folgt dann mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Lemma 5.0, dass die Zeilensumme von A^k gleich Eins sein muss:

$$\sum_{j=1}^{n} (A^k)_{ij} = 1 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Da ebenfalls alle Einträge von A^k größer als Null sind, folgt unmittelbar, dass diese echt kleiner als Eins sind:

$$0 < (A^k)_{ij} < 1 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Formt man die Gleichung $A^k e = e = Ie$ zu $(I - A^k)e = 0$ um, so sieht man, dass e im Kern von $(I - A^k)$ liegt. Da der Kern nicht leer ist, gilt:

$$\text{rang}(I - A^k) < n.$$

Die Matrix B entstehe nun aus $(I - A^k)$ durch Streichen der letzten Zeile und Spalte.
Wir wollen zeigen, dass B vollen Rang hat, indem wir die folgende Annahme zum Widerspruch führen:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\} \quad \text{mit} \quad Bx = 0,$$

d.h. wir nehmen an, der Kern von B sei nicht leer und damit der Rang nicht voll.
Da jedes Vielfache von x die Annahme ebenfalls erfüllen würde, können wir x ohne Einschränkung derart normiert annehmen, dass die betragsmäßig größte Komponente gleich Eins ist: $||x||_\infty = 1$.

Sei i nun so, dass $|x_i| = 1$. O.E. gilt $x_i = 1$.

$$\begin{aligned}
0 &= (Bx)_i \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} B_{ij} x_j \\
&= B_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} B_{ij} x_j \\
&\underset{\text{für } i \neq j}{\overset{|x_j| \leq 1,\, B_{ij} < 0}{\geq}} B_{ii} + \sum_{j \neq i} B_{ij} \\
&\overset{B_{ij} = (I - A^k)_{ij}}{=} 1 - (A^k)_{ii} - \sum_{j \neq i, j \neq n} (A^k)_{ij} \\
&\underset{\text{von } A^k \text{ gleich } 1}{\overset{\text{Zeilensumme}}{=}} \sum_{j=1}^{n} (A^k)_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} (A^k)_{ij} \\
&= (A^k)_{in} > 0. \quad \lightning
\end{aligned}$$

Unsere Annahme führt zu einem Widerspruch, d.h. der Rang von B ist voll:

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(B) &= n-1 \\ \Rightarrow \operatorname{rang}(I-A^k) &\geq n-1. \end{aligned}$$

Da ebenfalls $\operatorname{rang}(I-A^k) < n$, folgt:

$$\operatorname{rang}(I-A^k) = n-1.$$

$\Rightarrow$ 1 *ist* einfacher *Eigenwert von* A^k*, d.h. alle Eigenvektoren zum Eigenwert* 1 *sind linear abhängig.*

2. Schritt: Wir wollen nun zeigen, dass für A regulär der Fixpunkt von F eindeutig ist. Dazu nehmen wir an, F würde zwei verschiedene Fixpunkte p, $q \in K$ besitzen und führen auch diese Annahme zum Widerspruch.
Als Fixpunkte von F erfüllen sie die Gleichungen $p^t = p^t A$ bzw. $q^t = q^t A$, p und q sind also Linkseigenvektoren von A zum Eigenwert 1.
$\Rightarrow$ p, q sind Linkseigenvektoren von A^k zum Eigenwert 1.
Da $p, q \in K$ laut Annahme verschieden sind, sind p und q linear unabhängig, denn lineare Abhängigkeit wird durch die Bedingung, dass die Summe aller Einträge von p bzw. q Eins beträgt, ausgeschlossen. Dies steht im Widerspruch zu dem Resultat aus Schritt 1, dass 1 ein *einfacher* Eigenwert von A^k ist.
$\Rightarrow$ *Für reguläre Markow-Ketten ist der Fixpunkt von F eindeutig.* $\square$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass sich die eindeutige stationäre Verteilung aus jeder beliebigen Startverteilung einstellt, also dass die durch die Funktion F beschriebene Fixpunktiteration konvergiert. Dazu zeigen wir zunächst, dass sich die stationäre Verteilung für die Markow-Kette mit Übergangsmatrix A^k einstellt und können daraus leicht folgern, dass diese auch der Grenzwert der Markow-Kette mit Übergangsmatrix A ist.

Satz 5.3 (Konvergenz der Fixpunktiteration bei Regularität). *Seien A eine reguläre $(n \times n)$-Übergangsmatrix und F, K wie in Satz 5.1. Dann konvergiert die durch F beschriebene Fixpunktiteration $p_{n+1} = F(p_n)$ für jede beliebige Startverteilung p_0 gegen den eindeutigen Fixpunkt von F.*

Beweis. 1. Schritt: Sei $p_0 \in K$ beliebig. Definiere die Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$p_{n+1} = F(p_n), \quad \text{d.h.} \quad p_{n+1}^t = p_n^t A.$$

Aus Satz 5.1 wissen wir, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ganz in K verläuft, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$.
Da K kompakt ist, besitzt $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Häufungspunkte in K. Sollte $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, so wäre der Grenzwert der Folge ein Fixpunkt von F, und da A regulär ist, wäre dieser Fixpunkt eindeutig (vgl. Satz 5.2).

2. Schritt: Sei $q_0 \in K$ beliebig und $k \geq 1$ so, dass $A_{ij}^k > 0 \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$.
Definiere $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$q_{n+1} = F^k(q_n), \quad \text{d.h.} \quad q_{n+1}^t = q_n^t A^k.$$

Vereinfachende Annahme: A^k besitze einen vollständigen Satz von Eigenvektoren $y_1, \dots, y_n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1,\ \underbrace{|\lambda_2| < 1, \dots, |\lambda_n| < 1.}_{\text{da alle EW } |.| \leq 1 \text{ und 1 einf. EW}}$
Die Eigenvektoren $y_1, \dots, y_n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, deshalb lässt sich q_0 folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
q_0 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \\
\Rightarrow \quad q_0 A^k &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_i A^k) \\
&\overset{y_i \text{ EV}}{\underset{\text{zu } \lambda_i}{=}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i y_i \\
\overset{\text{Ind.}}{\Rightarrow} \quad q_l &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^l y_i \\
&= \alpha_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \lambda_i^l y_i \\
&\overset{\lambda_i^l \to 0}{\underset{\text{für } l \to \infty}{\longrightarrow}} \alpha_1 y_1.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und der Grenzwert ist der eindeutige Fixpunkt von F^k (s. Schritt 1). Da jeder Fixpunkt von F gleichzeitig auch Fixpunkt von F^k ist, muss der Grenzwert von $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der eindeutige Fixpunkt von F sein.

3. Schritt: Betrachte nun wieder die in Schritt 1 definierte Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit beliebigem Startwert p_0. Aus Schritt 2 folgt, dass die Teilfolgen $(p_{mk+l})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $l \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ alle gegen den eindeutigen Fixpunkt von F konvergieren.
$\Rightarrow (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen den Fixpunkt von F.* □

Bemerkung: Falls die vereinfachende Annahme in Schritt 2 nicht erfüllt ist, muss man zur Jordanschen Normalform übergehen und wie beim Stabilitätsbeweis für lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen[13] argumentieren.

[13] vgl. Verfürth (2006) S. 163f

6 Literaturverzeichnis

BEWERSDORFF, J. (2003): *Glück, Logik und Bluff: Mathematik im Spiel – Methoden, Ergebnisse und Grenzen.* Braunschweig/Wiesbaden, 2. Auflage.

DEHLING, H./HAUPT, R. (2004): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* Berlin Heidelberg, 2. Auflage.

LORENZ, G. (2006): *Allgemeines Näherungsverfahren zur Lösung von $f(x) = 0$ – Fixpunkt-Iteration.* Internet: http://gernotvonmedard.de/mathe/fixpunktiteration.pdf, (Zugriff am 06.04.2008).

SPIELEFABRIK FRANZ SCHMIDT, München 13 mit Genehmigung der Fa. Parker Bros. Inc. USA: *Monopoly – Gesellschaftsspiel.* Internet (2006): http://www.gerald-gradl.de/brettspiele/monopoly/Monopoly.pdf (Zugriff am 13.04.2008).

VERFÜRTH, R. (2006): *Analysis III - Vorlesungsskriptum WS 2006/07.* Bochum.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, Julia Tenié, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit mit dem Titel

Monopoly und Markow-Ketten

selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Bochum, den ____________________

____