Analysis III

Vorlesungsskriptum WS 2006/07

R. Verfürth

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL IX

Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

In diesem Kapitel entwickeln wir die Lebesguesche Integrationstheorie auf dem $\mathbb{R}^n$. Dazu führen wir zunächst den Begriff einer Nullmenge ein. Dies sind Mengen, die durch „beliebig kleine n-dimensionale Intervalle“ überdeckt werden können. Danach definieren wir das Integral für Treppenfunktionen und setzen es fort auf Funktionen, deren positiver und negativer Teil bis auf eine Nullmenge als Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen dargestellt werden kann.
Diese Definition unterscheidet sich von derjenigen des Riemann-Integrals in Kapitel VI dadurch, dass die gleichmäßige Konvergenz durch punktweise monotone Konvergenz außerhalb einer Nullmenge ersetzt wird. Wir gehen dann auch kurz auf die Gemeinsamkeiten und Unterschiede des Riemann- und Lebesgue-Integrals ein.
Als nächstes untersuchen wir wichtige Eigenschaften des Lebesgue-Integrals: den Satz von Fubini, der die praktische Rechnung erleichtert, und die Konvergenzsätze.
Danach betrachten wir messbare Funktionen und Mengen. Dabei ist eine Menge, vereinfacht gesprochen, messbar, wenn ihre charakteristische Funktion messbar ist. Mit Hilfe dieses Begriffes können wir dann den wichtigen Transformationssatz beweisen.
Zum Abschluss untersuchen wir noch die L^p-Räume.

IX.1. Nullmengen

Zuerst verallgemeinern wir den Begriff des Intervalles.

Definition IX.1.1. (1) Für $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben wir $x \prec y$, wenn eine der Beziehungen $x < y$ oder $x \leq y$ gilt.
(2) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, schreiben wir $x \prec y$, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $x_i \prec y_i$.
(3) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, heißt die Menge (vgl. Abb. IX.1.1)

$$\prec x, y \succ = \{z \in \mathbb{R}^n : x \prec z \prec y\}$$

ein beschränktes (n-dimensionales) Intervall. Gilt $x_i - y_i = x_1 - y_1$ für alle $1 \leq i \leq n$, so nennen wir es auch einen Würfel.
(4) Ist $I = \prec x, y \succ$ ein beschränktes Intervall, so heißen die $2n$ Hyperebenen

$$\{z \in I : z_i = x_i\} \quad , \quad \{z \in I : z_i = y_i\} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

die FLÄCHEN VON I.
(5) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, mit $x \prec y$. Dann ist das (n-DIMENSIONALE) LEBESGUE-MASS oder VOLUMEN von $\prec x, y \succ$ definiert durch

$$\lambda_n(\prec x, y \succ) = \prod_{i=1}^{n} (y_i - x_i).$$

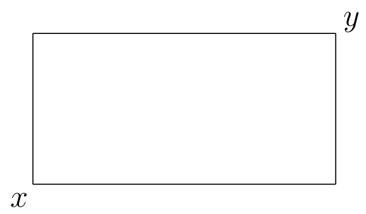

ABBILDUNG IX.1.1. Zweidimensionales Intervall $\prec x, y \succ$

BEMERKUNG IX.1.2. (1) $I = \prec x, y \succ$ ist offen bzw. abgeschlossen genau dann, wenn in Definition IX.1.1 (3) $\prec$ immer für $<$ bzw. $\leq$ steht. Es gilt

$$\overset{\circ}{I} = \{z \in \mathbb{R}^n : x_i < z_i < y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n\}$$
$$\overline{I} = \{z \in \mathbb{R}^n : x_i \leq z_i \leq y_i \quad \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

(2) Sei $I = \prec x, y \succ$ nicht leer. Dann gilt

$$\lambda_n(I) \neq 0 \quad \iff \quad \overset{\circ}{I} \neq \emptyset.$$

BEWEIS. Folgt unmittelbar aus der Definition. □

Der Begriff der Nullmenge ist für das Folgende grundlegend. Anschaulich ist eine Nullmenge dadurch charakterisiert, dass sie durch abzählbar viele Intervalle mit beliebig kleinem Maß überdeckt werden kann.

DEFINITION IX.1.3. $N \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, heißt eine NULLMENGE, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von beschränkten, offenen Intervallen gibt mit

(1) $N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ und
(2) $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(I_k) \leq \varepsilon$.

BEISPIEL IX.1.4. (1) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\{x\}$ eine Nullmenge.
(2) Sei $I = \prec x, y \succ$ nichtleer. Dann sind die Flächen von I Nullmengen.
(3) $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.

Beweis. ad (1): Sei $0 < \varepsilon < 1$ und

$$I_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}\}$$

der Würfel mit Mittelpunkt x und Kantenlänge ε. Dann ist

$$\lambda_n(I_\varepsilon) = \varepsilon^n < \varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
ad (2): Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$\begin{aligned} I_k &= (x_1 - \frac{1}{2k}, x_1 + \frac{1}{2k}) \times (x_2 - \frac{1}{2k}, y_2 + \frac{1}{2k}) \times \\ &\quad \cdots \times (x_n - \frac{1}{2k}, y_n + \frac{1}{2k}) \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n : x_1 - \frac{1}{2k} < z_1 < x_1 + \frac{1}{2k}, \\ &\qquad x_j - \frac{1}{2k} < z_j < y_j + \frac{1}{2k},\ 2 \le j \le n\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\{z \in \mathbb{R}^n : z_1 = x_1, x_j \prec z_j \prec y_j, 2 \le j \le n\} \subset I_k$$

und

$$\lambda_n(I_k) = \frac{1}{k} \prod_{j=2}^{n} (y_j - x_j + \frac{1}{k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
ad (3): Sei $0 < \varepsilon < 1$ und $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Definiere

$$I_k = (q_k - \frac{\varepsilon}{2}, q_k + \frac{\varepsilon}{2}) \times (-\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}, \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}).$$

Da gemäß Satz I.4.11 (S. 21, Analysis I) $\mathbb{Q}$ dicht ist in $\mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{R} \times \{0\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Weiter ist

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_2(I_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon^2 2^{-k-1} = \varepsilon^2 < \varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Teilmengen von Nullmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.

Satz IX.1.5. (1) *Sei $N \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, eine Nullmenge und $M \subset N$. Dann ist M auch eine Nullmenge.*
(2) *Seien $N_k \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$, Nullmengen. Dann ist $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ auch eine Nullmenge.*

Beweis. ad (1): Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Beobachtung, dass jede Überdeckung von N auch eine Überdeckung von M ist.
ad (2): Sei $\varepsilon > 0$ und für $k \in \mathbb{N}$ $(I_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten offenen Intervallen mit

$$N_k \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} I_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{l\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_{kl}) \le \varepsilon 2^{-k-1}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$M \subset \bigcup_{k,l\in\mathbb{N}} I_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{k,l\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_{kl}) \le \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k-1} = \varepsilon.$$

Da $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ abzählbar ist (vgl. Beweis von Satz I.3.2 (S. 17, Analysis I)), folgt die Behauptung. □

Aus Beispiel IX.1.4 (1) und Satz IX.1.5 folgt unmittelbar:

Bemerkung IX.1.6. Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge. Insbesondere ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung von Bemerkung IX.1.6 nicht gilt.

Beispiel IX.1.7 (Cantorsches Diskontinuum). Sei $A_0 = [0,1] \subset \mathbb{R}$. A_{n+1} entstehe aus A_n, $n \in \mathbb{N}$, indem man alle abgeschlossenen Intervalle, deren disjunkte Vereinigung A_n ist, jeweils in drei abgeschlossene Intervalle gleicher Länge zerlegt und das Innere des mittleren Intervalles entfernt; also:

$$A_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$$
$$A_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1] \quad \text{usw.}$$

Definiere

$$C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k.$$

C heißt Cantorsches Diskontinuum. Durch Induktion folgt sofort

$$\lambda_1(A_k) = (\frac{2}{3})^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da gilt $C \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt hieraus, dass C eine Nullmenge ist. Wir wollen zeigen, dass C nicht abzählbar ist. Wie man leicht nachprüft, gilt

$$C = \Big\{x \in \mathbb{R} : x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}, a_n \in \{0,2\}\Big\}.$$

Wir nehmen an, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Abzählung von C. Dann ist

$$c_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} 3^{-n} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definiere

$$\overline{c} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n 3^{-n}$$

durch

$$\overline{a}_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_{nn} = 2 \\ 2 & \text{falls } a_{nn} = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\overline{c} \in C$ und $\overline{c} \neq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist der gewünschte Widerspruch.

Die folgende Definition ist für das Weitere wesentlich.

Definition IX.1.8. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine Menge und $A(x)$, $x \in X$, eine Aussage über jedes $x \in X$. Wir sagen $A(x)$ gilt fast überall (f.ü.) in X, wenn es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $A(x)$ für alle $x \in X \backslash N$ gilt.

Beispiel IX.1.9. Seien $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine Menge und f, f_k, $k \in \mathbb{N}$, Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. (punktweise) gegen f, wenn es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall x \in X \backslash N.$$

IX.2. Das Lebesgue-Integral

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf X. Dann setzen wir f außerhalb von X durch 0 fort. In diesem Sinne sind, sofern nicht anders vermerkt, alle Funktionen in diesem Abschnitt auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert.

Die folgende Definition von Treppenfunktionen verallgemeinert Definition V.4.1 (S. 166, Analysis I):

Definition IX.2.1. (1) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Dann ist die charakteristische Funktion χ_X von X definiert durch

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in X, \\ 0 & \text{falls } x \notin X. \end{cases}$$

(2) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es ein $k \in \mathbb{N}^*$, k beschränkte Intervalle $I_1, \ldots, I_k$ und k reelle Zahlen $d_1, \ldots, d_k$ gibt mit

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{I_i}.$$

(3) Die Menge der Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ oder kurz T.

Bemerkung IX.2.2. (1) Aus der Definition von T folgt unmittelbar, dass T ein Vektorraum ist.
(2) Die Darstellung einer Treppenfunktion als Linearkombination von endlich vielen beschränkten Intervallen ist nicht eindeutig. So ist z.B.

$$\chi_{[0,1]} = \chi_{[0,0.5]} + \chi_{(0.5,1]} = \chi_{[0,0.5]} + \chi_{[0.5,1]} - \chi_{[0.5,0.5]}.$$

Die folgenden beiden Sätze bereiten die Definition des Lebesgue-Integrals für Treppenfunktionen vor.

Satz IX.2.3. *Jede Treppenfunktion kann dargestellt werden als Linearkombination von endlich vielen charakteristischen Funktionen zu disjunkten, beschränkten Intervallen.*

Beweis. Sei

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{I_i}$$

eine beliebige Treppenfunktion. Sei

$$E_j = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}, \quad 1 \le j \le n$$

die j-te Koordinatenhyperebene und n_j die Zahl der verschiedenen Flächen der I_i, die parallel sind zu E_j, $1 \le j \le n$. Diese Flächen zerlegen den $\mathbb{R}^n$ in $\prod_{j=1}^{n}(2n_j + 1)$ disjunkte Intervalle, von denen $\prod_{j=1}^{n}(2n_j - 1)$ beschränkt sind. Jedes I_i, $1 \le i \le k$, ist die Vereinigung von endlich vielen dieser Intervalle, so dass χ_{I_i} die Summe der entsprechenden charakteristischen Funktionen ist. Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz IX.2.4. *Seien*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i} = f = \sum_{j=1}^{l} d_j \chi_{J_j}$$

zwei verschiedene Darstellungen der gleichen Treppenfunktion. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_n(I_i) = \sum_{j=1}^{l} d_j \lambda_n(J_j).$$

Beweis. 1. Schritt: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und I ein beschränktes Intervall. Dann ist offensichtlich

$$(a + b)\chi_I = a\chi_I + b\chi_I$$

und

$$(a + b)\lambda_n(I) = a\lambda_n(I) + b\lambda_n(I).$$

2. Schritt: Sei I ein beschränktes Intervall und $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, eine Hyperebene mit $I \cap H_i \neq \emptyset$. Definiere (vgl. Abb. IX.2.1)

$$\begin{aligned} I_- &= \{x \in I : x_i < \alpha\} \\ I_0 &= I \cap H_i = \{x \in I : x_i = \alpha\} \\ I_+ &= \{x \in I : x_i > \alpha\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\chi_I = \chi_{I_-} + \chi_{I_0} + \chi_{I_+}$$

und wegen $\lambda_n(I_0) = 0$ gilt

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I_-) + \lambda_n(I_+) + \lambda_n(I_0).$$

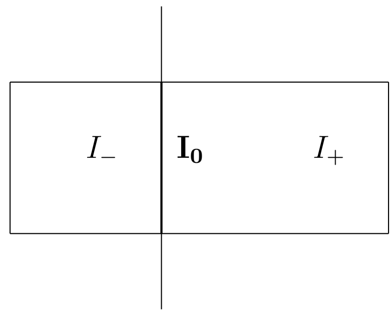

Abbildung IX.2.1. Aufteilung von $I \subset \mathbb{R}^2$ durch eine Hyperfläche H_1

3. Schritt: Seien $I_1, \dots, I_k$, $J_1, \dots, J_l$ wie im Satz. Wie im Beweis von Satz IX.2.3 zerlegen die Flächen von $I_1, \dots, I_k$, $J_1, \dots, J_l$ den $\mathbb{R}^n$ in disjunkte, beschränkte Intervalle, so dass wir eine gemeinsame Verfeinerung

$$f = \sum_{\mu=1}^{m} e_\mu \chi_{K_\mu}$$

von f mit disjunkten Intervallen erhalten. Dieser Verfeinerungsprozess kann durchgeführt werden als eine Folge von Schritten 1 und 2. Da die Behauptung für diese Schritte gezeigt ist, folgt hieraus die behauptete Gleichheit. □

Wegen Satz IX.2.4 ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition IX.2.5. Sei

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{I_i}$$

eine Treppenfunktion. Dann ist das LEBESGUE-INTEGRAL von f definiert durch

$$\int f = \int f dx = \int f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} d_i \lambda_n(I_i).$$

Das Lebesgue-Integral hat folgende wichtige Eigenschaften:

SATZ IX.2.6. (1) *Seien $f, g \in T$ und $\alpha, \beta \in R$. Dann gilt*

(LINEARITÄT) $$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

(2) *Sei $f \in T$ und $f \geq 0$. Dann ist*

(MONOTONIE) $$\int f \geq 0.$$

(3) *Sei $f \in T$. Dann ist $|f| \in T$ und*

$$|\int f| \leq \int |f|.$$

BEWEIS. AD (1): Folgt unmittelbar aus Definition IX.2.5 und Satz IX.2.4.
AD (2): Sei $f \in T$. Dann kann gemäß Satz IX.2.3 f dargestellt werden als

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{I_i}$$

mit disjunkten, beschränkten Intervallen. Aus $f \geq 0$ folgt dann

$$d_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k.$$

Hieraus folgt

$$\int f = \sum_{i=1}^{k} d_i \lambda_n(I_i) \geq 0.$$

AD (3): Sei wieder

$$f = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_{I_i}$$

mit disjunkten beschränkten Intervallen. Dann folgt

$$|f| = \sum_{i=1}^{k} |d_i| \chi_{I_i}.$$

Also ist $|f| \in T$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} |\int f| &= |\sum_{i=1}^{k} d_i \lambda_n(I_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} |d_i| \lambda_n(I_i) \end{aligned}$$

$$= \int |f|.$$

□

Die folgenden Sätze bereiten die Ausweitung des Integralbegriffes auf eine größere Funktionenklasse vor.

Satz IX.2.7. (1) *Sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$ *eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, für die* $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *konvergiert. Dann konvergiert* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *fast überall in* $\mathbb{R}^n$.
(2) *Sei* $N \subset \mathbb{R}^n$ *eine Nullmenge. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge* $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$ *von Treppenfunktionen, derart dass* $(\int g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert und die Folge* $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *für jedes* $x \in N$ *divergiert.*

Beweis. ad (1): O.E. ist $f_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sonst betrachte die Folge $(f_k - f_0)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann gibt es ein $K > 0$ mit

$$0 \leq \int f_k \leq K \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Definiere

$$S_k^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \geq \frac{K}{\varepsilon}\}.$$

Da die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, gilt

$$S_k^\varepsilon \subset S_{k+1}^\varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da f_k eine Treppenfunktion ist, folgt weiter, dass S_k^ε die Vereinigung von endlich vielen, disjunkten, beschränkten Intervallen ist. Daher ist

$$\lambda_n(S_k^\varepsilon) = \int \chi_{S_k^\varepsilon} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wegen $f_k \geq 0$ gilt schließlich

$$\frac{K}{\varepsilon}\chi_{S_k^\varepsilon} \leq f_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt aus Satz IX.2.6

$$\frac{K}{\varepsilon}\lambda_n(S_k^\varepsilon) = \int \frac{K}{\varepsilon}\chi_{S_k^\varepsilon} \leq \int f_k \leq K$$

und somit

$$\lambda_n(S_k^\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definiere

$$S^\varepsilon = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k^\varepsilon \quad , \quad S = \bigcap_{\varepsilon>0} S^\varepsilon.$$

Dann ist S die Menge aller derjenigen $x \in \mathbb{R}^n$, für die die Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ divergiert. Es reicht also zu zeigen, dass S eine Nullmenge ist. Wegen $S_k^\varepsilon \subset S_{k+1}^\varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$S^\varepsilon = S_0^\varepsilon \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} (S_k^\varepsilon \setminus S_{k-1}^\varepsilon).$$

Also ist S^ε die Vereinigung von abzählbar vielen beschränkten Intervallen. Da für $m \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$S_m^\varepsilon = S_0^\varepsilon \cup \bigcup_{1 \le k \le m} (S_k^\varepsilon \backslash S_{k-1}^\varepsilon)$$

folgt

$$\lambda_n(S_0^\varepsilon \cup \bigcup_{1 \le k \le m} (S_k^\varepsilon \backslash S_{k-1}^\varepsilon)) \le \varepsilon \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

und somit

$$\lambda_n(S^\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Also ist S eine Nullmenge.

AD (2): Da N eine Nullmenge ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ eine Folge $(I_{kl})_{l \in \mathbb{N}^*}$ von beschränkten offenen Intervallen mit

$$N \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}^*} I_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \lambda_n(I_{kl}) \le 2^{-k}.$$

Wir ordnen diese Intervalle in einem quadratischen Schema an und zählen sie wie angedeutet ab (vgl. Beweis von Satz I.3.2 (S. 17, Analysis I)):

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 7 \\
I_{11} & & I_{12} & & I_{13} & & \ldots \\
 & & & & & & \\
3 & \swarrow & 5 & \swarrow & 8 & & \ldots \\
I_{21} & & I_{22} & & I_{23} & & \ldots \\
 & \swarrow & & & & & \\
6 & & 9 & & 13 & & \\
I_{31} & & I_{32} & & I_{33} & & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ldots
\end{array}$$

Wir erhalten so eine Folge $(J_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ beschränkter offener Intervalle. Definiere

$$f_m = \sum_{i=1}^m \chi_{J_i} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Dann ist $(f_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Da für jedes $m \in \mathbb{N}^*$ gilt

$$\int f_m = \sum_{i=1}^m \lambda_n(J_i) \le \sum_{i=1}^m 2^{-i} < 1,$$

ist die Folge $(\int f_m)_{m \in N}$ konvergent. Sei nun $x \in N$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ ein $l_k \in \mathbb{N}^*$ mit

$$x \in I_{kl_k}.$$

Sei $K \in \mathbb{N}^*$ beliebig. Dann gibt es ein $m_K \in \mathbb{N}^*$, so dass unter $J_1, \ldots,$ J_{m_K} mindestens K der I_{kl_k} vorkommen. Das bedeutet aber, dass

$$f_{m_K}(x) \ge K$$

ist. Da $K \in \mathbb{N}^*$ beliebig war, folgt, dass $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für $x \in N$ divergiert. Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Satz IX.2.7 legt folgende Definition nahe.

Definition IX.2.8. Mit $L^{\mathrm{inc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ oder kurz L^{inc} bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zu denen es eine monoton wachsende Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$ von Treppenfunktionen gibt, derart dass $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist und $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$ gilt.

Beispiel IX.2.9. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Da $-f$ nicht nach unten beschränkt ist, folgt sofort $-f \notin L^{\mathrm{inc}}$. Um zu sehen, dass $f \in L^{\mathrm{inc}}$ ist, definiere für $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k = \sum_{l=1}^{2^k} \sqrt{\frac{2^k}{l}} \chi_{(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}]}.$$

Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die auf $\mathbb{R}$ punktweise (aber nicht gleichmäßig!) gegen f konvergiert. Weiter gilt für $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\int f_k &= \sum_{l=1}^{2^k} \sqrt{\frac{2^k}{l}} 2^{-k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^k}} \Big\{ 1 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=2^{i-1}+1}^{2^i} \frac{1}{\sqrt{j}} \Big\} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2^k}} \Big\{ 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{2^i - 2^{i-1}}{\sqrt{2^{i-1}+1}} \Big\} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2^k}} \Big\{ 1 + \sum_{l=0}^{k-1} \sqrt{2}^l \Big\} \\
&\le \frac{1}{\sqrt{2^k}} \Big\{ 1 + \frac{\sqrt{2}^k - 1}{\sqrt{2} - 1} \Big\} \\
&\le 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}.
\end{aligned}$$

Satz IX.2.10. (1) *Sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$ *eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen mit*

$$f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ f.ü. in } \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = 0.$$

(2) *Seien* $f, g \in L^{inc}$ *fast überall bestimmt durch die monoton wachsenden Folgen* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *bzw.* $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von Treppenfunktionen. Gilt*

$$f \geq g \ \text{ f.ü. in } \mathbb{R}^n$$

bzw.

$$f = g \ \text{ f.ü. in } \mathbb{R}^n,$$

so gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \geq \lim_{k\to\infty} \int g_k$$

bzw.

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k = \lim_{k\to\infty} \int g_k.$$

Beweis. ad (1): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei I ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall, so dass f_0 außerhalb von I verschwindet. Sei $K > 0$, so dass gilt $f_0 \leq K$. Dann gilt gleiches für alle f_k, $k \in \mathbb{N}$.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_k die Vereinigung von endlich vielen Flächen von beschränkten Intervallen und somit gemäß Beispiel IX.1.4(2) (S. 6) und Satz IX.1.5(2) (S. 7) eine Nullmenge. Sei A die Vereinigung aller Unstetigkeitsstellen aller f_k. Gemäß Satz IX.1.5(2) (S. 7) ist A eine Nullmenge. Sei B die Menge aller Punkte x, für die $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert. Nach Voraussetzung ist B eine Nullmenge. Wegen Satz IX.1.5(2) (S. 7) ist dann $C = A \cup B$ eine Nullmenge und kann daher durch eine Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ offener beschränkter Intervalle, deren Gesamtmaß $\leq \varepsilon$ ist, überdeckt werden.
Sei nun $x \in I\backslash C$. Dann gibt es ein $k_x \in \mathbb{N}$ mit $f_{k_x}(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da x keine Unstetigkeitsstelle von f_{k_x} ist, gibt es ein beschränktes offenes Intervall J_x, so dass gilt

$$f_{k_x}(y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in J_x.$$

Da die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt

$$f_k(y) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_x,\ y \in J_x.$$

Da I kompakt ist, gibt es Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$, Punkte $x_1, \ldots, x_s$ aus $I \backslash C$ und Zahlen $k_1, \ldots, k_r$ aus $\mathbb{N}$ mit

$$I \subset \bigcup_{j=1}^{r} I_{k_j} \cup \bigcup_{j=1}^{s} J_{x_j}.$$

O.E. ist $s \geq 1$. Sei

$$M = \max_{1 \leq j \leq s} k_{x_j}.$$

Dann folgt

$$f_k(x) \leq \varepsilon \quad \forall k \geq M, x \in \bigcup_{j=1}^{s} J_{x_j}.$$

Sei

$$S = I \cap \bigcup_{j=1}^{r} I_{k_j} \quad , \quad T = I \cap \bigcup_{j=1}^{s} J_{x_j}.$$

S und T können als die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen dargestellt werden. Weiter ist

$$\lambda_n(S) \leq \varepsilon \quad , \quad \lambda_n(T) \leq \lambda_n(I) = c.$$

Konstruktionsgemäß gilt

$$f_k \leq K\chi_S + \varepsilon\chi_T \quad \forall k \geq M.$$

Damit folgt

$$\int f_k \leq \varepsilon K + \varepsilon c \quad \forall k \geq M.$$

Da ε beliebig war, folgt hieraus die Behauptung.
AD (2): Der zweite Teil der Behauptung folgt offensichtlich aus dem ersten Teil durch vertauschen von f und g.
Zum Beweis des ersten Teiles der Behauptung sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist $(g_m - f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge von Treppenfunktionen mit

$$g_m - f_k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} g_m - f \quad \text{f.ü.}$$

und

$$g_m - f \leq 0 \quad \text{f.ü.}$$

wegen $f \geq g$ f.ü.. Daher erfüllt

$$((g_m - f_k)_+)_{k \in \mathbb{N}} = (\max\{g_m - f_k, 0\})_{k \in \mathbb{N}}$$

die Voraussetzungen von Teil (1). Also gilt

$$\int g_m - \lim_{k \to \infty} \int f_k = \lim_{k \to \infty} \int (g_m - f_k) \leq \lim_{k \to \infty} \int (g_m - f_k)_+ = 0.$$

Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt die Behauptung durch Grenzübergang $m \to \infty$. $\square$

Wegen Satz IX.2.10 ist die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION IX.2.11. Sei $f \in L^{\text{inc}}$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in T$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. und $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Dann definieren wir das LEBESGUE-INTEGRAL von f durch

$$\int f = \int f dx = \int f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Beispiel IX.2.9 zeigt, dass L^{inc} kein Vektorraum ist. Um einen Vektorraum zu erhalten, müssen wir Funktionen der Form $g-h$ mit $g, h \in L^{\text{inc}}$ betrachten. Damit wir für solche Funktionen das Integral sinnvoll definieren können, benötigen wir folgenden Satz.

SATZ IX.2.12. (1) *Seien $g, h \in L^{inc}$. Dann ist $g + h \in L^{inc}$ und*

$$\int (g+h) = \int g + \int h.$$

(2) *Seien $g_i, h_i \in L^{inc}$, $i = 1, 2$ mit*

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2.$$

Dann gilt

$$\int g_1 - \int h_1 = \int g_2 - \int h_2.$$

BEWEIS. AD (1): Seien $g, h \in L^{\text{inc}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}, (h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit:

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \text{ f.ü. }, \ h_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} h \text{ f.ü.}$$
$$(\int g_k)_{k\in\mathbb{N}} \ , \ (\int h_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ sind beschränkt.}$$

Dann ist $(g_k + h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit:

$$g_k + h_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g + h \text{ f.ü.}$$
$$(\int (g_k + h_k))_{k\in\mathbb{N}} = (\int g_k + \int h_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} \int (g_k + h_k) = \lim_{k\to\infty} \int g_k + \lim_{k\to\infty} \int h_k.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
AD (2): Aus

$$g_1 - h_1 = g_2 - h_2$$

folgt

$$g_1 + h_2 = g_2 + h_1.$$

Aus Teil (1) folgt

$$\begin{aligned}\int g_1 + \int h_2 &= \int (g_1 + h_2)\\ &= \int (g_2 + h_1)\\ &= \int g_2 + \int h_1.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Wegen Satz IX.2.12 ist die folgende Definition sinnvoll. Damit sind wir am Ende unserer Konstruktion.

Definition IX.2.13. (1) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-integrierbar (auf $\mathbb{R}^n$), wenn es zwei Funktionen $g, h \in L^{\mathrm{inc}}$ gibt mit $f = g - h$. In diesem Fall ist das Lebesgue-Integral von f definiert durch

$$\int f = \int f dx = \int f(x)dx = \int g - \int h.$$

Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ oder kurz L^1.
(2) Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-integrierbar auf X, wenn $f \cdot \chi_X \in L^1$ ist. In diesem Fall ist das Lebesgue-Integral von f auf X definiert durch

$$\int_X f = \int (f \cdot \chi_X).$$

Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf X bezeichnen wir mit $L^1(X, \mathbb{R})$.
(3) Eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt Lebesgue-integrierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_k \in L^1$, $1 \le k \le m$, sind. In diesem Fall ist das Lebesgue-Integral von f

$$\int f = (\int f_1, \ldots, \int f_m).$$

Die Menge der Lebesgue integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezeichnen wir mit $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
(4) Ist $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, so identifizieren wir auf kanonische Weise $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^m$ mit $\mathbb{R}^{2m}$ und definieren auf diese Weise die Begriffe „Lebesgue-integrierbar“ und „Lebesgue-Integral“.

Für das Lebesgue-Integral gelten folgende wichtige Eigenschaften (vgl. Satz IX.2.6):

Satz IX.2.14. (1) *Seien* $f_1, f_2 \in L^1$ *und* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. *Dann ist* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in L^1$ *und*

(Linearität) $$\int (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \int f_1 + \alpha_2 \int f_2.$$

(2) *Sei* $f \in L^1$ *und* $f \geq 0$ *f.ü.. Dann ist*

(Monotonie)
$$\int f \geq 0.$$

(3) *Sei* $f \in L^1$. *Dann ist* $|f| \in L^1$ *und*

$$|\int f| \leq \int |f|.$$

Beweis. ad (1): Die Behauptung folgt offensichtlich aus den folgenden drei Hilfsbehauptungen:

(i) $f_1, f_2 \in L^1 \Longrightarrow f_1 + f_2 \in L^1$ und $\int (f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$.
(ii) $f \in L^1, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \alpha f \in L^1$ und $\int (\alpha f) = \alpha \int f$.
(iii) $f \in L^1 \Longrightarrow -f \in L^1$ und $\int (-f) = -\int f$.

Behauptungen (i)–(iii) folgen aber direkt aus Satz IX.2.12 (1) und Definition IX.2.13.
ad (2): Sei $f = g - h \in L^1$ mit $g, h \in L^{\text{inc}}$. Dann folgt aus $f \geq 0$ f.ü. $g \geq h$ f.ü.. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.2.10 (2), Definition IX.2.11 und Definition IX.2.13.
ad (3): Die Behauptung folgt aus Teil (2) und den Ungleichungen

$$|f| - f \geq 0 \text{ f.ü. }, \ |f| + f \geq 0 \text{ f.ü.}.$$

□

Satz IX.2.15. *Sei* $f_1 \in L^1$ *und* $f_2 = f_1$ *f.ü.. Dann ist* $f_2 \in L^1$ *und*

$$\int f_2 = \int f_1.$$

Beweis. Wegen Satz IX.2.10 (2) und Definition IX.2.11 ist die Behauptung für Funktionen aus L^{inc} erfüllt. Sei weiter $f_1 = g_1 - h_1$ mit $g_1, h_1 \in L^{\text{inc}}$. Definiere

$$g_2 = g_1 \ , \ h_2 = h_1 + (f_1 - f_2).$$

Wegen $h_2 = h_1$ f.ü. folgt $g_2, h_2 \in L^{\text{inc}}$. Weiter ist

$$g_2 - h_2 = g_1 - h_1 - f_1 + f_2 = f_2.$$

Also ist $f_2 \in L^1$ und

$$\begin{aligned}
\int f_2 &= \int g_2 - \int h_2 \\
&= \int g_1 - \int h_1 \quad \text{(wegen Satz IX.2.10 (2))} \\
&= \int f_1.
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz gibt eine sehr praktische hinreichende Bedingung für die Lebesgue-Integrierbarkeit einer Funktion.

Satz IX.2.16. (1) *Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Intervall und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf I beschränkt und fast überall stetig. Dann ist $f \in L^1(I, \mathbb{R})$.*
(2) *Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$. Dann ist $f \in L^1(I, \mathbb{R})$.*

Beweis. ad (1): O.E. können wir $f(x) = 0$ für alle $x \notin I$ annehmen. Wegen Satz IX.2.15 ist o.E. I von der Form

$$(*) \qquad I = \{z \in \mathbb{R}^n : x_i \le z_i < y_i \quad \forall 1 \le i \le n\}.$$

Sei $K \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$|f(x)| \le K \quad \forall x \in I.$$

Wir konstruieren Intervalle I_{kl}, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le l \le 2^{nk}$, wie folgt

(1) $I_{01} = I$.
(2) Die Intervalle $I_{k+1,l}$, $1 \le l \le 2^{n(k+1)}$, entstehen, indem man jedes Intervall $I_{k,m}$, $1 \le m \le 2^{nk}$, durch Halbieren der Kanten in 2^n gleich große disjunkte Intervalle der Form $(*)$ aufteilt.

Die Intervalle $I_{k,l}$, $1 \le l \le 2^{nk}$, sind dann für jedes $k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und erfüllen

$$I = \bigcup_{l=1}^{2^{nk}} I_{kl}.$$

Da f beschränkt ist, existiert

$$c_{kl} = \inf_{x \in I_{kl}} f(x) \quad \forall k \in \mathbb{N}, 1 \le l \le 2^{nk}.$$

Definiere

$$f_k = \sum_{l=1}^{2^{nk}} c_{kl} \chi_{I_{kl}} \in T.$$

Dann ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit

$$f_k \le f \le K\chi_I \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Daher ist die Folge $(\int f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch $K\lambda_n(I)$ nach oben beschränkt und damit konvergent. Sei nun $x \in I$, derart, dass f in x stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in I \text{ mit } \|y - x\|_\infty < \delta.$$

Weiter gibt es ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ und ein $l_\varepsilon \in \mathbb{N}^*_{2^{nk_\varepsilon}}$ mit $I_{k_\varepsilon l_\varepsilon} \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \delta)$. Aus der Definition von f_{k_ε} folgt dann

$$f(x) - \varepsilon \le f_{k_\varepsilon}(x) \le f(x).$$

Da $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch $f(x)$ nach oben beschränkt ist, folgt hieraus

$$f(x) - \varepsilon \le f_k(x) \le f(x) \quad \forall k \ge k_\varepsilon.$$

Also konvergiert $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $f(x)$. Da nach Voraussetzung f auf I f.ü. stetig ist, folgt hieraus $f \in L^{\text{inc}} \subset L^1$.

AD (2): Da I gemäß Satz III.4.6 (S. 84, Analysis I) kompakt ist, ist wegen Satz III.4.9 (S. 85, Analysis I) und Satz III.4.3 (S. 82, Analysis I) f beschränkt. Damit folgt die Behauptung aus Teil (1). □

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch kurz auf den Zusammenhang zwischen dem Riemann- und dem Lebesgue-Integral für Funktionen auf $\mathbb{R}$ eingehen.

SATZ IX.2.17. (1) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \in S([a, b], \mathbb{R})$. Dann ist $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ und das Riemann- und das Lebesgue-Integral von f stimmen überein, d.h.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f.$$

(2) *Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zulässig. Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergiere absolut. Dann ist $f \in L^1((a, b), \mathbb{R})$ und das uneigentliche Riemann-Integral und das Lebesgue-Integral stimmen überein, d.h.*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(a,b)} f.$$

BEWEIS. AD (1): Da in jedem Punkt $x \in [a, b]$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(x-0)$ und $f(x+0)$ existieren, gilt für die Menge S der Punkte, in denen f unstetig ist,

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$$

mit

$$S_n = \{x \in [a, b] : |f(x - 0) - f(x + 0)| > \frac{1}{n}\}.$$

Aus dem Beweis von Satz V.4.4 (S. 168, Analysis I) folgt aber, dass S_n für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ endlich, also eine Nullmenge ist. Wegen Satz IX.1.5(2) (S. 7) ist daher S eine Nullmenge, und aus Satz IX.2.16 (1) folgt $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Wir benutzen nun die gleiche Notation wie im Beweis von Satz IX.2.16 (1). Da $f \in S([a, b], \mathbb{R})$ ist, gibt es zu jedem I_{kl} ein $\zeta_{kl} \in I_{kl}$ mit $c_{kl} = f(\zeta_{kl})$. Also ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(**) \qquad \int_{[a,b]} f_k = \sum_{l=1}^{2^k} f(\zeta_{kl})\lambda_1(I_{kl}).$$

Die linke Seite von $(**)$ konvergiert gegen das Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]} f$. Die rechte Seite von $(**)$ konvergiert nach Satz VI.1.11 (S. 11, Analysis II) gegen das Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$. Hieraus folgt die Behauptung.

AD (2): Sei

$$f_+ = \max\{f, 0\} \quad , \quad f_- = \max\{-f, 0\}.$$

Dann ist

$$f = f_+ - f_- \quad , \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Da die Funktion $x \mapsto \max\{x, 0\}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist, sind f_+ und f_- zulässig. Seien $c \in (a, b)$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset (a, c]$ streng monoton fallend und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [c, b)$ streng monoton wachsend mit

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \text{ und } \lim_{k\to\infty} b_k = b.$$

Da $\int_a^b f(x)dx$ absolut konvergiert, existieren die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^c (f_+(x) - f_-(x))dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^c (f_+(x) + f_-(x))dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_c^{b_k} (f_+(x) - f_-(x))dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_c^{b_k} (f_+(x) + f_-(x))dx.$$

Daher existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^c f_+(x)dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^c f_-(x)dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_c^{b_k} f_+(x)dx,$$
$$\lim_{k\to\infty} \int_c^{b_k} f_-(x)dx.$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun unmittelbar aus der folgenden Hilfsbehauptung.

BEH.: Es ist

$$f_+|_{(a,c]}, f_-|_{(a,c]} \in L^1((a, c], \mathbb{R})$$
$$f_+|_{[c,b)}, f_-|_{[c,b)} \in L^1([c, b), \mathbb{R})$$

und

$$\int_{(a,c]} f_\pm = \int_a^c f_\pm(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{a_k}^c f_\pm(x)dx$$
$$\int_{[c,b)} f_\pm = \int_c^b f_\pm(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^{b_k} f_\pm(x)dx.$$

Wir zeigen diese Hilfsbehauptung nur für $f_+|_{(a,c]}$. Die anderen drei Fälle folgen ganz analog.

Seien S und S_k die Menge der Unstetigkeitsstellen von f_+ auf $(a,c]$ bzw. $[a_k,c]$. Dann ist $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, und aus Teil (1) und Satz IX.1.5(2) (S. 7) folgt, dass S eine Nullmenge ist. Also ist

$$f_+|_{(a,c]} \in L^1((a,c],\mathbb{R})$$

und

$$f_+|_{[a_k,c]} \in L^1([a_k,c],\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wegen

$$f_+\chi_{[a_k,c]} \le f_+\chi_{(a,c]}$$

folgt aus Teil (1) und Satz IX.2.14

$$\int_{a_k}^c f_+(x)dx = \int_{[a_k,c]} f_+ \le \int_{(a,c]} f_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Also gilt

$$\int_a^c f_+(x)dx \le \int_{(a,c]} f_+.$$

Andererseits überlegt man sich leicht, dass es Zahlen $r_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, und Intervalle I_{kl}, $1 \le l \le r_k, k \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) I_{kl} ist von der Form $(x,y]$ für alle k,l.
(ii) Für festes k sind die I_{kl} paarweise disjunkt.
(iii) $(a_k,c] = \bigcup_{l=1}^{r_k} I_{kl}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(iv) Jedes $I_{k+1,l}$ ist entweder in $(a_{k+1},a_k]$ oder in einem $I_{k,m}$ enthalten.
(v) $\lambda_1(I_{kl}) \le 2^{-k}$ für alle k,l.

Sei

$$c_{kl} = \inf_{x\in I_{kl}} f_+(x)$$

und

$$f_k = \sum_{l=1}^{r_k} c_{kl}\chi_{I_{kl}} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die fast überall gegen $f_+|_{(a,c]}$ konvergiert. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{(a,c]} f_k &= \int_{(a_k,c]} f_k \\ &= \int_{[a_k,c]} f_k \\ &\le \int_{[a_k,c]} f_+\end{aligned}$$

$$= \int_{a_k}^{c} f_+(x)dx.$$

Also ist

$$\int_{(a,c]} f_+ \leq \int_a^c f_+(x)dx.$$

Damit ist die Hilfsbehauptung für $f_+|_{(a,c]}$ gezeigt. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass es Funktionen gibt, die Lebesgue- aber nicht Riemann-integrierbar sind, und dass es auch umgekehrt Funktionen gibt, die (uneigentlich) Riemann- aber nicht Lebesgue-integrierbar sind.

Beispiel IX.2.18. (1) Es ist $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ und

$$\int \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = 0,$$

da $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Nullmenge ist.
$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ ist nicht Riemann-integrierbar.
Denn sei $\delta > 0$ beliebig und $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$ der Feinheit δ. Sei

$$\zeta_k \in \mathbb{Q} \cap (x_{k-1}, x_k), \eta_k \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (x_{k-1}, x_k),\ 1 \leq k \leq n$$

beliebig. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

(2) Sei f auf $[1,\infty)$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Gemäß Übungsaufgabe (Aufgabe 2, Blatt 4, Analysis II) ist f uneigentlich Riemann-integrierbar, aber das uneigentliche Riemann-Integral konvergiert nicht absolut.
f ist nicht Lebesgue-integrierbar.
Denn wäre $f \in L^1([1,\infty),\mathbb{R})$, so wäre gemäß Satz IX.2.14 auch $|f| \in L^1([1,\infty),\mathbb{R})$. Dann gilt aber für jede Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [1,\infty)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$

$$\int_1^{b_k} |f(x)|dx = \int_{[1,b_k]} |f| < \int_{[1,\infty)} |f| < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch.

IX.3. Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Zunächst wollen wir den Satz von Fubini beweisen. Er führt die Berechnung eines Lebesgue-Integrales über $\mathbb{R}^n$ zurück auf die Berechnung einer Folge geeigneter Lebesgue-Integrale über $\mathbb{R}$. Letztere können wegen Satz IX.2.17 (S. 22) in der Regel mit den Methoden aus Kapitel VI berechnet werden.

Im Folgenden seien $m, n \in \mathbb{N}^*$. Wir identifizieren auf kanonische Weise den $\mathbb{R}^{m+n}$ mit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$; jedes $x \in \mathbb{R}^{m+n}$ zerlegen wir in der Form $x = (x_1, x_2)$ mit $x_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Lemma IX.3.1. *Sei $f \in T(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$. Dann ist für jedes $x_1 \in \mathbb{R}^m$ $f(x_1, .) \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Funktion*

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \text{ mit } x_1 \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2) dx_2$$

ist aus $T(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f = \int_{\mathbb{R}^m} g = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2) dx_2 \Big) dx_1.$$

Beweis. Sei zunächst $f = \chi_I$ mit einem nicht leeren, beschränkten Intervall I. Sei

$$\begin{aligned} I &= \prec a, b \succ, \ a, b \in \mathbb{R}^{m+n}, \\ I_1 &= \{x \in \mathbb{R}^m : a_i \prec x_i \prec b_i, 1 \le i \le m\}, \\ I_2 &= \{y \in \mathbb{R}^n : a_{m+j} \prec y_j \prec b_{m+j}, 1 \le j \le n\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\chi_I(x_1, x_2) = \chi_{I_1}(x_1) \cdot \chi_{I_2}(x_2).$$

Daher ist für jedes $x_1 \in \mathbb{R}^m$ $f(x_1, .) \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und

$$g(x_1) = \chi_{I_1}(x_1) \lambda_n(I_2)$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} g &= \lambda_n(I_2) \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{I_1} \\ &= \lambda_n(I_2) \lambda_m(I_1) \\ &= \prod_{j=1}^{n} (b_{m+j} - a_{m+j}) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \\ &= \lambda_{m+n}(I) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung im allgemeinen Fall zusammen mit Satz IX.2.6 (S. 12). □

Lemma IX.3.2. *Sei $N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ eine Nullmenge. Dann ist für fast alle $x_1 \in \mathbb{R}^m$ die Menge*

$$N_{x_1} = \{x_2 \in \mathbb{R}^n : (x_1, x_2) \in N\}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Gemäß Satz IX.2.7(2) (S. 13) gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ von Treppenfunktionen, derart dass $(\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in N$ divergiert. Gemäß Lemma IX.3.1 wird für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch

$$g_k(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x_1, x_2)dx_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^m$$

eine Treppenfunktion auf $\mathbb{R}^m$ definiert. Wie man sich leicht überzeugt, ist die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ monoton wachsend. Aus Lemma IX.3.1 folgt, dass $(\int_{\mathbb{R}^m} g_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wegen Satz IX.2.7(1) (S. 13) konvergiert daher $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. in $\mathbb{R}^m$. Sei $x_1^* \in \mathbb{R}^m$ so, dass $(g_k(x_1^*))_{k\in\mathbb{N}} = (\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1^*, x_2)dx_2)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Aus Satz IX.2.7(1) (S. 13) folgt, dass $(f_k(x_1^*, .))_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert. Da aber $(f_k(x_1^*, x_2))_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $x_2 \in N_{x_1^*}$ divergiert, folgt hieraus, dass $N_{x_1^*}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist. □

Satz IX.3.3 (Satz von Fubini). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$. Dann ist für fast jedes $x_1 \in \mathbb{R}^m$ und fast jedes $x_2 \in \mathbb{R}^n$ $f(x_1, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $f(\cdot, x_2) \in L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Die Funktionen $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit*

$$g(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)dx_2 \quad \textit{für fast jedes } x_1 \in \mathbb{R}^m$$
$$h(x_2) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)dx_1 \quad \textit{für fast jedes } x_2 \in \mathbb{R}^n$$

sind aus $L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ bzw. $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f &= \int_{\mathbb{R}^m} g \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2)dx_2 \Big) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, x_2)dx_1 \Big) dx_2. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Schritt: Es genügt, die Behauptung für $f(x_1, \cdot)$ und g zu zeigen, da dann der Rest durch Vertauschen der Rollen von $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ folgt.
2. Schritt: Die Aussage gilt gemäß Lemma IX.3.1 für alle Treppenfunktionen.
3. Schritt: Sei nun $f \in L^{\text{inc}}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$

eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, derart dass $(\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. in $\mathbb{R}^{m+n}$ gilt. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$g_k(x_1) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x_1, x_2)dx_2 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}^m.$$

Gemäß Lemma IX.3.1 ist g_k wohldefiniert und aus $T(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$. Außerdem ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und

$$(\int_{\mathbb{R}^m} g_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

konvergent.

Gemäß Satz IX.2.7(1) (S. 13) konvergiert $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. in $\mathbb{R}^m$. Sei N die Menge aller $x \in \mathbb{R}^{m+n}$, für die $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ divergiert. Dann ist N eine Nullmenge. Sei $x_1^* \in \mathbb{R}^m$ ein Punkt, für den $(g_k(x_1^*))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $N_{x_1^*}$ eine Nullmenge ist. Wegen Lemma IX.3.2 gilt dies für fast jedes x_1^* in $\mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$f_k(x_1^*, x_2) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_1^*, x_2) \quad \text{f.ü. in } \mathbb{R}^m$$

und

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x_1^*, x_2)dx_2\Big)_{k\in\mathbb{N}} = (g_k(x_1^*))_{k\in\mathbb{N}}$$

konvergiert. Also existiert $\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1^*, x_2)dx_2$ und ist gleich $\lim_{k\to\infty} g_k(x_1^*)$. Mithin gilt $g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ f.ü. in $\mathbb{R}^m$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k(x_1)dx_1 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f_k = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f.$$

Also ist $g \in L^{\mathrm{inc}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}^m} g = \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f.$$

4. Schritt: Sei nun $f = \varphi - \psi$ mit $\varphi, \psi \in L^{\mathrm{inc}}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R})$. Dann folgt die Behauptung aus dem dritten Schritt zusammen mit der Linearität des Integrals. □

Beispiel IX.3.4. (1) Sei $B_R \subset \mathbb{R}^2$ der abgeschlossene Kreis um Null mit Radius $R > 0$. Da ∂B_R eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist (Übungsaufgabe), ist gemäß Satz IX.2.16(1) (S. 21) $\chi_{B_R} \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_R} &= \int_{-R}^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} 1 dx_2\Big) dx_1 \\
&= 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x_1^2} dx_1 \\
&= 2\int_0^{\pi} \sqrt{R^2 - R^2\cos^2\varphi} R\sin\varphi d\varphi \quad x_1 = R\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$= 2R^2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi$$
$$= \pi R^2.$$

(2) Für $\sigma \in \mathbb{R}$ sei

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma > 0, \\ 0 & \text{falls } \sigma = 0, \\ -1 & \text{falls } \sigma < 0. \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{x_1+x_2} \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) & \text{falls } (x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| \le 1, |x_2| \le 1 \text{ und } x_1 = x_2\}$ eine Nullmenge ist (Übungsaufgabe), ist $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Satz von Fubini liefert

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f &= \int_{-1}^1 \Big(\int_{-1}^1 e^{x_1+x_2} \operatorname{sgn}(x_1 - x_2) dx_2 \Big) dx_1 \\
&= \int_{-1}^1 \Big\{ \int_{-1}^{x_1} e^{x_1+x_2} dx_2 - \int_{x_1}^1 e^{x_1+x_2} dx_2 \Big\} dx_1 \\
&= \int_{-1}^1 \{ e^{2x_1} - e^{x_1-1} - e^{x_1+1} + e^{2x_1} \} dx_1 \\
&= [e^{2x_1} - e^{x_1-1} - e^{x_1+1}]_{x_1=-1}^{x_1=+1} \\
&= e^2 - 1 - e^2 - (e^{-2} - e^{-2} - 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Als nächstes untersuchen wir, wie sich das Lebesgue-Integral bei Grenzprozessen verhält, d.h., wann Grenzprozesse mit der Integration vertauscht werden können.

Lemma IX.3.5. *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{inc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine monoton wachsende Folge, derart dass $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann konvergiert f_k fast überall gegen eine Funktion $f \in L^{inc}$. Es gilt*

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(g_{kl})_{l\in\mathbb{N}} \subset T$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit

$$g_{kl} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} f_k \quad \text{f.ü. und} \quad \Big(\int g_{kl}\Big)_{l\in\mathbb{N}} \quad \text{ist beschränkt.}$$

Dann ist insbesondere

$$\int f_k = \lim_{l\to\infty} \int g_{kl} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sei

$$h_m = \max\{g_{kl} : 0 \le k, l \le m\} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen. Weiter gilt

$$h_m \le f_m \quad \text{f.ü.}$$

und damit

$$\int h_m \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \int f_k = K < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Wegen Satz IX.2.7 (S. 13) konvergiert h_m fast überall gegen eine Funktion $f \in L^{\text{inc}}$ und

$$\int f = \lim_{m\to\infty} \int h_m.$$

Konstruktionsgemäß gilt für $m \in \mathbb{N}$

$$g_{ml} \le h_l \quad \forall l \ge m$$

und somit

$$f_m = \lim_{l\to\infty} g_{ml} \le \lim_{l\to\infty} h_l = f \quad \text{f.ü.},$$

d.h.

$$S_m = \{x \in \mathbb{R}^n : f_m(x) > f(x)\}$$

ist eine Nullmenge. Daher ist

$$S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m$$

auch eine Nullmenge, d.h., es gilt fast überall

$$f_m \le f \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Also gilt fast überall

$$h_m \le f_m \le f \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Wegen $h_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. folgt $f_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü.. Ebenso folgt aus der Monotonie des Integrals

$$\int h_m \le \int f_m \le \int f \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\displaystyle\int f = \lim_{m\to\infty} \int h_m$ folgt hieraus schließlich

$$\int f = \lim_{m\to\infty} \int f_m.$$

□

Lemma IX.3.6. *Sei $f \in L^1$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in L^{inc}$ mit*

(1) *$f = g - h$,*
(2) *$h \ge 0$,*
(3) *$\int h < \varepsilon$.*

Beweis. Konstruktionsgemäß gibt es Funktionen $g_1, h_1 \in L^{\text{inc}}$ mit $f = g_1 - h_1$. Sei $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $\varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} h_1$ f.ü. und $\displaystyle\int \varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int h_1$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$0 \le \int h_1 - \int \varphi_{k_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Dann ist $h_2 = h_1 - \varphi_{k_\varepsilon}$ fast überall nicht negativ und aus L^{inc} und erfüllt $\int h_2 < \varepsilon$. Ebenso ist $g_2 = g_1 - \varphi_{k_\varepsilon}$ aus L^{inc} und $f = g_2 - h_2$. Sei schließlich $h = h_2^+ = \max\{h_2, 0\}$ und $g = f + h$. Wegen $h_2 \ge 0$ f.ü. gilt $g = g_2$ f.ü. und $h = h_2$ f.ü.. Daher erfüllen g und h die Bedingungen (1)–(3). $\square$

Satz IX.3.7 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine monotone Folge, derart dass die Folge der Integrale $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann konvergiert f_k f.ü. gegen eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und*

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Beweis. O.E. ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, sonst betrachte $(-f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. O.E. ist $f_k \ge 0$ f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}^*$, sonst betrachte $(f_k - f_0)_{k\in\mathbb{N}}$. Definiere

$$g_1 = f_1, \quad g_k = f_k - f_{k-1} \quad \forall k \ge 2.$$

Dann gilt

$$g_k \ge 0 \quad \text{f.ü.} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

und

$$f_k = \sum_{l=1}^{k} g_l \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Lemma IX.3.6 angewandt auf g_k, $k \in \mathbb{N}^*$, mit $\varepsilon = 2^{-k}$ liefert die Existenz von Funktionen $\varphi_k, \psi_k \in L^{\text{inc}}$ mit

$$\begin{aligned} g_k &= \varphi_k - \psi_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \psi_k &\ge 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \varphi_k &\ge 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \int \psi_k &< 2^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

(Man beachte, dass $\varphi_k \ge 0$ aus den entsprechenden Ungleichungen für ψ_k und g_k folgt.)
Definiere für $k \in \mathbb{N}^*$.

$$u_k = \sum_{l=1}^{k} \varphi_l \in L^{\text{inc}},$$

$$v_k = \sum_{l=1}^{k} \psi_l \in L^{\mathrm{inc}}.$$

Dann sind die Folgen $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ monoton wachsend und

$$\begin{aligned}\int v_k &\le \sum_{l=1}^{k} 2^{-l} < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \int u_k &= \sum_{l=1}^{k} \int (g_l + \psi_l) \\ &= \int f_k + \int v_k \\ &< 1 + \sup_{l\in\mathbb{N}^*} \int f_l \\ &< \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Gemäß Lemma IX.3.5 gibt es daher Funktionen $u, v \in L^{\mathrm{inc}}$ mit

$$\begin{aligned}u_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \text{ f.ü.}, \\ v_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ f.ü.}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int u_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int u, \\ \int v_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int v.\end{aligned}$$

Sei $f = u - v \in L^1$. Wegen

$$f_k = u_k - v_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

gilt dann

$$f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{f.ü. und} \quad \int f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int f.$$

□

Eine einfache, aber sehr wichtige Anwendung von Satz IX.3.7 ist:

Satz IX.3.8. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $f \ge 0$ f.ü.. Gilt $\int f = 0$, so ist $f = 0$ f.ü..*

Beweis. Setze $f_k = kf$, $k \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1$ monoton wachsend und $\int f_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$. Gemäß Satz IX.3.7 konvergiert f_k fast überall. $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ kann aber nur konvergieren, wenn $f(x) = 0$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Eine weitere wichtige Anwendung von Satz IX.3.7 ist:

Satz IX.3.9. *Sei $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen in $\mathbb{R}^n$ mit $I_k \subset I_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Sei $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Sei $f \in L^1(I_k, \mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(\int_{I_k} |f|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann ist $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ und*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f.$$

Beweis. Sei zunächst $f \geq 0$ f.ü.. Definiere $f_k = f \cdot \chi_{I_k}$. Dann ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ monoton wachsend, konvergiert f.ü. gegen f auf I und $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Aus Satz IX.3.7 folgt $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ und

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int f_k = \lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f.$$

Im allgemeinen Fall zerlegen wir $f = f^+ - f^-$ mit

$$\begin{aligned} f^+ &= \max\{f, 0\}, \\ f^- &= \max\{-f, 0\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{I_k} f^\pm \leq \int_{I_k} |f|$$

gilt dann $f^\pm \in L^1(I, \mathbb{R})$ und

$$\lim_{k\to\infty} \int_{I_k} f_k^\pm = \int_I f^\pm$$

Hieraus folgt die Behauptung zusammen mit der Linearität des Integrals. □

Als weitere Anwendung von Satz IX.3.7 beweisen wir eine Verallgemeinerung der partiellen Integration von Satz VI.3.4 (S. 23, Analysis II).

Satz IX.3.10. *Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f, g \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Dann existieren für alle $x \in [a, b]$*

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{[a,x]} f, \\ G(x) &= \int_{[a,x]} g \end{aligned}$$

und es gilt

$$\int_{[a,b]} Fg + \int_{[a,b]} fG = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Beweis. 1. Schritt: Wenn f, g auf $[a, b]$ konstant sind, folgt die Behauptung aus Satz IX.2.17 (S. 22) und Satz VI.3.4 (S. 23, Analysis II).
2. Schritt: Wenn f, g Treppenfunktionen sind, können wir $[a, b]$ in

endlich viele disjunkte Intervalle, auf denen f und g konstant sind, zerlegen. Die Behauptung folgt dann aus dem 1. Schritt und der Linearität des Integrals.
3. Schritt: Seien f, g positive Funktionen in L^{inc} und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen mit

$$\begin{aligned} f_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ f.ü.}, \\ g_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g \text{ f.ü.}, \\ \int_{[a,b]} f_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f, \\ \int_{[a,b]} g_k &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} g. \end{aligned}$$

O.E. gilt $f_k \geq 0$ f.ü., $g_k \geq 0$ f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}$, sonst gehen wir zu f_k^+, g_k^+ über. Gemäß dem 2. Schritt existieren für alle $x \in [a, b]$ und alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \int_{[a,x]} f_k, \\ G_k(x) &= \int_{[a,x]} g_k. \end{aligned}$$

Die Folgen $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}, (G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind monoton wachsend und erfüllen

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} F_k g_k + \int_{[a,b]} f_k G_k &= F_k(b)G_k(b) - F_k(a)G_k(a) \\ &= (\int_{[a,b]} f_k)(\int_{[a,b]} g_k) \\ &< \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Schritt 2 und Satz IX.3.7.
4. Schritt: Sind $f, g \in L^1$, so können wir sie gemäß Lemma IX.3.6 als Differenz positiver Funktion aus L^{inc} darstellen, und die Behauptung folgt aus Schritt 3 und der Linearität des Integrals. □

Ein anderer wichtiger Grenzwertsatz für Lebesgue-Integrale ist:

Satz IX.3.11 (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz). *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü.. Es gebe ein $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit*

$$|f_k| \leq g \text{ f.ü.} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$l_k(x) = \begin{cases} \inf\limits_{m \geq k} f_m(x) & \text{falls } (f_l(x))_{l\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$u_k(x) = \begin{cases} \sup\limits_{m \geq k} f_m(x) & \text{falls } (f_l(x))_{l\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen zeigen

$$l_k, u_k \in L^1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Seien dazu $\varphi, \psi \in L^1$. Wegen

$$\min\{\varphi,\psi\} = \frac{1}{2}(\varphi+\psi) - \frac{1}{2}|\varphi-\psi|$$
$$\max\{\varphi,\psi\} = \frac{1}{2}(\varphi+\psi) + \frac{1}{2}|\varphi-\psi|$$

folgt aus Satz IX.2.14 (S. 19)

$$\min\{\varphi,\psi\} \in L^1, \quad \max\{\varphi,\psi\} \in L^1.$$

Durch Induktion folgt hieraus, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$l_{km} = \min\{f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+m}\} \in L^1$$
$$u_{km} = \max\{f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+m}\} \in L^1.$$

Für festes k erhalten wir somit zwei monotone Folgen $(l_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ und $(u_{km})_{m\in\mathbb{N}}$ in L^1, die fast überall gegen l_k bzw. u_k konvergieren. Wegen

$$|f_m| \leq g \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ f.ü.}$$

gilt

$$|\int l_{km}| \leq \int g \quad , \quad |\int u_{km}| \leq \int g \quad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt aus Satz IX.3.7

$$l_k, u_k \in L^1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind monoton wachsend bzw. fallend, konvergieren f.ü. gegen f und erfüllen

$$l_k \leq f_k \leq u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und somit

$$(*) \qquad \int l_k \leq \int f_k \leq \int u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Außerdem gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|\int l_k| = \lim_{m\to\infty} |\int l_{km}|$$
$$\leq \int g$$

$$\begin{aligned}|\int u_k| &= \lim_{m\to\infty} |\int u_{km}| \\ &\le \int g.\end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz IX.3.7 $f \in L^1$ und

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int l_k = \lim_{k\to\infty} \int u_k.$$

Wegen $(*)$ folgt hieraus

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int f_k.$$

□

Eine einfache, aber wichtige Konsequenz von Satz IX.3.11 ist:

Satz IX.3.12 (Satz von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz). *Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Intervall und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(I,\mathbb{R})$ eine Folge mit $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. in I. Es gebe ein $K > 0$ mit*

$$|f_k| \le K \text{ f.ü. in } I \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f \in L^1(I,\mathbb{R})$ und

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k.$$

Beweis. Mit $g = K\chi_I$ folgt die Behauptung aus Satz IX.3.11 angewandt auf die Folge $(f_k\chi_I)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Ein anderes wichtiges Konvergenzkriterium ist:

Satz IX.3.13 (Lemma von Fatou). *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ mit $f_k \ge 0$ f.ü. für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü.. Es gebe ein $K > 0$ mit*

$$\int f_k \le K \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ und

$$\int f \le K.$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz IX.3.11 sei für $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} l_{km} &= \min\{f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+m}\} \\ l_k &= \inf_{m\ge k} f_m. \end{aligned}$$

Dann ist für festes $k \in \mathbb{N}$ $(l_{km})_{m\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ eine monoton fallende Folge positiver Funktionen mit

$$0 \le \int l_{km} \le K \quad \forall k, m.$$

Gemäß Satz IX.3.7 ist $l_k \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und

$$0 \leq \int l_k = \lim_{m\to\infty} \int l_{km} \leq K \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da die monoton wachsende Folge $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. gegen f konvergiert, folgt damit die Behauptung aus Satz IX.3.7. $\square$

Als eine Anwendung von Satz IX.3.12 beweisen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz VI.2.12 (S. 18, Analysis II)) unter abgeschwächten Voraussetzungen.

Satz IX.3.14. *Sei $F \in C([a,b], \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, differenzierbar und $f = F'$ beschränkt. Dann ist $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$ und*

$$\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei $K = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)| < \infty$. Definiere $\widetilde{F}$ auf $[a, b+1]$ durch

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{für } a \leq x \leq b, \\ F(b) + (x-b)f(b) & \text{für } b < x \leq b+1. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{F} \in C([a, b+1], \mathbb{R})$ auf $[a, b+1]$ differenzierbar mit

$$|\widetilde{F}'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b+1].$$

Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$f_k(x) = k\{\widetilde{F}(x + \frac{1}{k}) - \widetilde{F}(x)\} \quad \forall x \in [a,b].$$

Dann ist $f_k \in C([a,b], \mathbb{R}) \subset L^1([a,b], \mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Wegen des Mittelwertsatzes gilt mit $\theta \in [0,1]$

$$|f_k(x)| = |\widetilde{F}'(x + \theta\frac{1}{k})| \leq K \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ x \in [a,b].$$

Aus Satz IX.3.12 folgt $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f &= \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} f_k \\ &= \lim_{k\to\infty} k \int_a^b [\widetilde{F}(x + \frac{1}{k}) - \widetilde{F}(x)]dx \\ &= \lim_{k\to\infty} k\Big\{\int_{a+\frac{1}{k}}^{b+\frac{1}{k}} \widetilde{F}(y)dy - \int_a^b \widetilde{F}(x)dx\Big\} \\ &= \lim_{k\to\infty} k\Big\{\int_b^{b+\frac{1}{k}} \widetilde{F}(y)dy - \int_a^{a+\frac{1}{k}} \widetilde{F}(x)dx\Big\} \\ &= F(b) - F(a), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz VI.2.12 (S. 18, Analysis II) auf die stetige Funktion $\widetilde{F}$ angewandt haben. □

Als letzte Anwendung von Satz IX.3.11 beweisen wir den folgenden Satz über das Vertauschen von Differentiation und Integration.

Satz IX.3.15. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$f(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für alle $t \in (a, b)$.*
(2) *$f(\cdot, x)$ ist differenzierbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*
(3) *Es gibt ein $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit*

$$|\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in (a, b),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $\frac{\partial}{\partial t} f(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für alle $t \in (a, b)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) dx.$$

Beweis. Definiere zur Abkürzung $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) dx.$$

Sei $t^* \in (a, b)$ beliebig und $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^*$ eine beliebige Nullfolge. Definiere für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ durch

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_k}[f(t^* + \tau_k, x) - f(t^*, x)] & \text{falls } t^* + \tau_k \in (a, b), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t^*, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Weiter gibt es ein $k^* \in \mathbb{N}$ mit $t^* + \tau_k \in (a, b)$ für alle $k \geq k^*$. Aus dem Mittelwertsatz folgt mit $\theta \in [0, 1]$

$$|f_k(x)| = |\frac{\partial}{\partial t} f(t^* + \theta \tau_k, x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, k \geq k^*.$$

Also ist wegen Satz IX.3.11 $\frac{\partial}{\partial t} f(t^*, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} f(t^*, x) dx &= \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x) dx \\ &= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\tau_k} [F(t^* + \tau_k) - F(t^*)]. \end{aligned}$$

Da τ_k beliebig war, folgt, dass F an der Stelle t^* differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} f(t^*, x) dx &= \frac{d}{dt} F(t^*) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} f(t^*, x) dx. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

IX.4. Messbare Funktionen und Mengen

DEFINITION IX.4.1. (1) Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ zwei Funktionen. Dann ist die Funktion $f|_g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch (vgl. Abb. IX.4.1)

$$\begin{aligned} f|_g &= \max\{-g, \min\{f, g\}\} \\ &= \min\{g, \max\{f, -g\}\} \\ &= \begin{cases} -g(x) & \text{falls } f(x) < -g(x), \\ f(x) & \text{falls } -g(x) \le f(x) \le g(x), \\ g(x) & \text{falls } f(x) > g(x). \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt MESSBAR, wenn die Funktion $f|_g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist für jedes $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$.
(3) Die Menge der messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

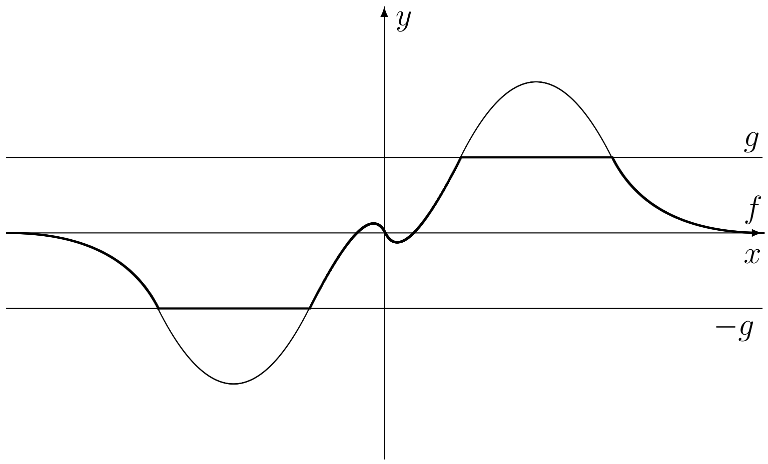

ABBILDUNG IX.4.1. Funktion $f|_g$, $g = 1$

SATZ IX.4.2. $L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus Satz IX.2.14 (S. 19), Definition IX.4.1 und den Darstellungen

$$\begin{aligned} \max\{\varphi, \psi\} &= \frac{1}{2}(\varphi + \psi) + \frac{1}{2}|\varphi - \psi|, \\ \min\{\varphi, \psi\} &= \frac{1}{2}(\varphi + \psi) - \frac{1}{2}|\varphi - \psi| \end{aligned}$$

für beliebige Funktionen φ, ψ. □

Der folgende Satz gibt eine für die Praxis leichter handhabbare Charakterisierung messbarer Funktionen.

Satz IX.4.3. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
(2) $f|_g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \quad \forall g \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$.
(3) $f|_{K\chi_I} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *für alle $K \in \mathbb{R}_+$ und alle beschränkten Intervalle I.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Folgt direkt aus Definition IX.4.1.
(2) $\Longrightarrow$ (3) : Ist offensichtlich.
(3) $\Longrightarrow$ (2) : Sei $g \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{R}_+$ und ein beschränktes Intervall I mit $g \le K\chi_I$. Dann ist nach Voraussetzung $\widetilde{f} = f|_{K\chi_I} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Hieraus folgt

$$f|_g = \widetilde{f}|_g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) : Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$. Dann gibt es eine Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ mit $g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ f.ü.. Definiere für $k \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{f}_k = f|_{g_k} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$
$$f_k = \widetilde{f}_k|_g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f|_g$ f.ü. und

$$|f_k| \le g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.3.11 (S. 34). □

Satz IX.4.4. (1) $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
(2) *Seien $f, g \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\alpha f + \beta g, |f|, f^+, f^-, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

(3) *Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü.. Dann ist $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Beweis. ad (1): Ist $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und I ein beschränktes Intervall, so ist gemäß Satz IX.2.16 (S. 21) $f \cdot \chi_I \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und damit $f|_{K\chi_I} = (f \cdot \chi_I)|_{K\chi_I} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für jedes $K \in \mathbb{R}_+$.
ad (2): Sei $\varphi \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$. Dann ist

$$(|f|)|_\varphi = |(f|_\varphi)| \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+).$$

Also ist $|f| \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$f_k = f|_{(k\varphi)} \quad , \quad g_k = g|_{(k\varphi)}.$$

O.E. ist $\varphi > 0$ f.ü.. Dann gilt $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. und $g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ f.ü. und somit

$$(\alpha f_k + \beta g_k)|_\varphi \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (\alpha f + \beta g)|_\varphi \text{ f.ü..}$$

Wegen

$$|(\alpha f_k + \beta g_k)|_\varphi| \le \varphi \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

folgt hieraus und aus Satz IX.3.11 (S. 34) $\alpha f + \beta g \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die anderen Behauptungen folgen aus dem soeben Bewiesenen und den Beziehungen

$$\begin{aligned} f^+ &= \frac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- &= \frac{1}{2}(|f| - f) \\ \max\{f, g\} &= \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g| \\ \min\{f, g\} &= \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|. \end{aligned}$$

AD (3): Sei $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ und $\widetilde{f_k} = f_k|_g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\widetilde{f_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f|_g \text{ f.ü.}$$

und

$$|\widetilde{f_k}| \le g \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.3.11 (S. 34). □

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen Messbarkeit und Integrierbarkeit einer Funktion her.

SATZ IX.4.5. (1) *Sei $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $g \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ mit $|f| \le g$ f.ü.. Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*
(2) *Sei $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $|f| \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

BEWEIS. AD (1): Wegen $|f| \le g$ f.ü. ist $f|_g = f$ f.ü.. Hieraus folgt die Behauptung.
AD (2): Folgt aus Teil (1) mit $g = |f|$. □

Der folgende Satz ist eine teilweise Umkehrung des Satzes von Fubini und ist für die praktische Rechnung sehr wichtig.

SATZ IX.4.6 (SATZ VON TONELLI). *Seien $k, l \in \mathbb{N}^*$ und $f \in M(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R})$. Weiter existiere mindestens eines der Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^l} |f(x_1, x_2)| dx_2 \Big) dx_1 \tag{1}$$

oder

$$\int_{\mathbb{R}^l} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} |f(x_1, x_2)| dx_1 \Big) dx_2. \tag{2}$$

Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}^{k+l}} f = \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^l} f(x_1, x_2) dx_2 \Big) dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}^l} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, x_2) dx_1 \Big) dx_2.$$

Beweis. Seien $I_n = \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}(0, n)}$ und

$$g_n = (|f|)|_{n\chi_{I_n}}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dann ist g_n eine monoton wachsende Folge in $L^1(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R})$, die fast überall gegen $|f|$ konvergiert. Wegen Satz IX.3.3 (S. 27) ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{k+l}} g_n &= \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\int_{\mathbb{R}^l} g_n(x_1, x_2) dx_2 \Big) dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \Big(\int_{\mathbb{R}^k} g_n(x_1, x_2) dx_1 \Big) dx_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Daher ist $(\int_{\mathbb{R}^{k+l}} g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch eines der Integrale (1) oder (2) beschränkt. Wegen Satz IX.3.7 (S. 31) ist daher $|f| \in L^1(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R})$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.4.5 (2) und Satz IX.3.3. □

Wir kommen nun zum Begriff der messbaren Menge.

Definition IX.4.7. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt messbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_X messbar ist. Ist χ_X sogar integrierbar, so definieren wir das n-dimensionale Lebesgue-Mass von X durch

$$\lambda_n(X) = \int \chi_X.$$

Ist χ_X messbar, aber nicht integrierbar, so definieren wir

$$\lambda_n(X) = +\infty.$$

Die Menge der messbaren Mengen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_n$.

Satz IX.4.8. *Es gelten folgende Eigenschaften messbarer Mengen:*

(1) *Sind $X, Y \in \mathcal{M}_n$, so gilt*

$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X \backslash Y, \quad X \Delta Y \in \mathcal{M}_n.$$

Weiter gilt

(a) $\lambda_n(X) = 0 \iff X$ *ist Nullmenge.*

(b) $X \subset Y \Longrightarrow \lambda_n(X) \le \lambda_n(Y)$. (Monotonie)

(c) $\lambda_n(X \cup Y) + \lambda_n(X \cap Y) = \lambda_n(X) + \lambda_n(Y)$.

(2) *Ist $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n$ mit $X_k \subset X_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$, so ist $X \in \mathcal{M}_n$ und*

$$\lambda_n(X) = \lim_{k \to \infty} \lambda_n(X_k).$$

(3) *Ist $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_n$, so ist $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k \in \mathcal{M}_n$ und*

$$\lambda_n(X) \le \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(X_k).$$

Sind zusätzlich die Mengen X_k paarweise disjunkt, so ist

$$\lambda_n(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n(X_k).$$

Beweis. ad (1): Der erste Teil der Aussage folgt aus Satz IX.4.4 und den Beziehungen

$$\begin{aligned} \chi_{X \cup Y} &= \max\{\chi_X, \chi_Y\}, \\ \chi_{X \cap Y} &= \min\{\chi_X, \chi_Y\}, \\ \chi_{X \setminus Y} &= (\chi_X - \chi_Y)^+, \\ \chi_{X \Delta Y} &= |\chi_X - \chi_Y|. \end{aligned}$$

Aussage (a) folgt aus der Definition von Maß und Integral („$\Longleftarrow$“) bzw. aus Satz IX.3.8 (S. 32) („$\Longrightarrow$“).
Aussage (b) folgt aus der Beziehung

$$\chi_X \leq \chi_Y \iff X \subset Y$$

und der Monotonie des Integrals.
Aussage (c) schließlich folgt aus der Beziehung

$$\chi_{X \cup Y} + \chi_{X \cap Y} = \chi_X + \chi_Y$$

und der Linearität des Integrals.
ad (2): Folgt aus Satz IX.4.4 angewandt auf die monoton wachsende Folge $(\chi_{X_k})_{k \in \mathbb{N}}$.
ad (3): Folgt aus Teil (2) angewandt auf die Mengen

$$Y_k = \bigcup_{l=0}^{k} X_l \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und aus Aussage (c) von Teil (1). □

Bemerkung IX.4.9. Seien $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ eine Funktion. $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra, wenn gilt:

S1: $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
S2: $A \in \mathcal{A} \iff X \setminus A \in \mathcal{A}$,
S3: $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

μ heißt ein Mass, wenn $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und wenn gilt

M1: $\mu(\emptyset) = 0$,
M2: $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$.

Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit diesen Eigenschaften heißt Massraum. Satz IX.4.8 zeigt, dass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ ein Maßraum ist.

Der folgende Satz zeigt, dass eine große Klasse von Mengen messbar sind.

Satz IX.4.10. (1) *Sei $O \subset \mathbb{R}^n$, $O \neq \emptyset$ offen. Dann ist O in $\mathcal{M}_n$.*
(2) *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \neq \emptyset$, abgeschlossen. Dann ist $A \in \mathcal{M}_n$.*
(3) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$, kompakt. Dann ist $K \in \mathcal{M}_n$ und $\lambda_n(K) < +\infty$.*

Beweis. ad (1): Sei $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $O \cap \mathbb{Q}^n$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ sei

$$I_{kl} = B_{\|\cdot\|_\infty}(q_k, 2^{-l}) \in \mathcal{M}_n.$$

Wegen Satz IX.4.8 (3) ist dann für jedes $l \in \mathbb{N}$

$$I_l = \bigcup \{I_{kl} : I_{kl} \subset O\} \in \mathcal{M}_n.$$

Offensichtlich ist $\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} I_l \subset O$. Sei nun $x \in O$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \varepsilon) \subset O.$$

Sei $l \in \mathbb{N}$ mit $2^{-l+1} < \varepsilon$. Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ und damit $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ dicht ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x - q_k\|_\infty < 2^{-l},$$

d.h. $x \in I_{kl}$. Für $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(q_k, 2^{-l})$ gilt weiter

$$\|y - x\|_\infty \leq \|y - q_k\|_\infty + \|q_k - x\|_\infty \leq 2 \cdot 2^{-l} < \varepsilon.$$

Also ist $I_{kl} \subset O$ und damit $x \in I_l$. Dies zeigt $O = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} I_l$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.4.8 (3).
ad (2): Gemäß Teil (1) sind A^c und $\mathbb{R}^n$ messbar. Wegen $A = (A^c)^c = \mathbb{R}^n \backslash A^c$ folgt damit die Behauptung aus Satz IX.4.8.
ad (3): Gemäß Teil (2) ist $K \in \mathcal{M}_n$ Gemäß Satz III.4.3 (S. 82, Analysis I) gibt es ein $R > 0$ mit $\overline{B_{\|\cdot\|_\infty}(0, R)} \supset K$. Aus Satz IX.4.8 folgt

$$\lambda_n(K) \leq \lambda_n(\overline{B_{\|\cdot\|_\infty}(0, R)}) = (2R)^n.$$

□

Beispiel IX.4.11. Wir wollen eine nicht messbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ konstruieren. Dazu definieren wir

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Wie man leicht nachprüft ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Bezeichne mit $[x]$ die zu x gehörige Äquivalenzklasse. Für jedes $x \in (0, 1)$ wähle einen Repräsentanten aus $[x] \cap (0, 1)$ aus. Die Menge aller so ausgewählten Elemente von $(0, 1)$ bezeichne mit M.
Sei $x \in (0, 1)$. Dann gibt es ein $y \in M$ mit $x \sim y$. Also existiert ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x - y = q$ und $|q| < 1$. Daher ist

$$(*) \qquad (0, 1) \subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap(-1,1)} (M + q) \subset (-1, 2)$$

mit

$$M + q = \{x + q : x \in M\}.$$

Seien nun $q, r \in \mathbb{Q}$ und $x \in (M+q) \cap (M+r)$. Dann folgt

$$x = y + q = z + r$$

mit $y, z \in M$. Also ist $y - z = r - q \in \mathbb{Q}$ und damit $y = z$ und daher $r = q$. Also sind die Mengen $M + q$ für verschiedene q disjunkt.
Wir nehmen an, M wäre messbar. Dann ist $\lambda_1(M+q) = \lambda_1(M)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Wäre $\lambda_1(M) \neq 0$, so folgte aus $(*)$ $\lambda_1((-1,2)) = +\infty$. Wäre $\lambda_1(M) = 0$, so folgte dagegen aus $(*)$ $\lambda_1((0,1)) = 0$. Wir erhalten also in jedem Fall einen Widerspruch.
χ_M ist ein Beispiel für eine nicht-messbare Funktion.

Zum Abschluss gehen wir noch auf den Zusammenhang zwischen messbaren Mengen und Funktionen näher ein.

Satz IX.4.12. *Es ist $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ genau dann, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge*

$$A_c = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq c\}$$

messbar ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Definiere für $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k(x) = k[\min\{f(x), c\} - \min\{f(x), c - \frac{1}{k}\}] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $f_k \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $f(x) \geq c$. Dann ist $f_k(x) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$. Ist dagegen $f(x) < c$, so gibt es ein $k_* \in \mathbb{N}$ mit $f(x) \leq c - \frac{1}{k_*}$. Für $k \geq k_*$ folgt $f_k(x) = 0$. Also gilt $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{A_c}$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.4.4 (3).
„$\Longleftarrow$“: Aus Satz IX.4.8 folgt, dass für alle $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ die Menge

$$Z_{c,d} = \{x \in \mathbb{R}^n : c \leq f(x) < d\}$$

messbar ist. Dann ist für $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k = \sum_{l=0}^{2k^2-1} (-k + \frac{l}{k}) \chi_{Z_{-k+\frac{l}{k}, -k+\frac{l+1}{k}}}$$

aus $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Wie man leicht nachprüft, gilt $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{\text{pkt}} f$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.4.4 (3). □

Das folgende Resultat ist für die Praxis besonders wichtig.

Satz IX.4.13. *Seien $f, g \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $h \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Dann ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto h(f(x), g(x))$ messbar. Insbesondere ist $f \cdot g \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz IX.4.12 sei für $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k = \sum_{l=0}^{2k^2-1} (-k + \frac{l}{k}) \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : -k + \frac{l}{k} \leq f(x) < -k + \frac{l+1}{k}\}}$$

$$g_k = \sum_{l=0}^{2k^2-1} (-k + \frac{l}{k})\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n : -k+\frac{l}{k} \le g(x) < -k+\frac{l+1}{k}\}}.$$

Definiere $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$F_k(x) = h(f_k(x), g_k(x)).$$

Dann ist

$$F_k = \sum_{i,j=0}^{2k^2-1} h(-k+\frac{i}{k}, -k+\frac{j}{k})\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n : -k+\frac{i}{k}\le f(x)<-k+\frac{i+1}{k}, -k+\frac{j}{k}\le g(x)<-k+\frac{j+1}{k}\}}$$

wegen Satz IX.4.12 und Satz IX.4.4 messbar für jedes $k \in \mathbb{N}^*$. Wegen $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$, $g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g$ und $h \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ folgt $F_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} F$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.4.4 (3). □

IX.5. Der Transformationssatz

Wir erinnern an die Substitutionsregel Satz VI.3.1 (S. 21, Analysis II). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C(I, \mathbb{R})$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ und $\varphi \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann ist

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

Setzen wir zusätzlich $\varphi'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ voraus, so sind zwei Fälle möglich:
Fall 1: $\varphi'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = \int_{\varphi([a,b])} f dy.$$

Fall 2: $\varphi'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy = -\int_{\varphi([a,b])} f dy.$$

Also können wir die Substitutionsregel unter der Annahme $\varphi'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ in der Form schreiben

$$\int_{[a,b]} f \circ \varphi |\varphi'| dx = \int_{\varphi([a,b])} f dy.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, ein Analogon dieser Formel für C^1-Diffeomorphismen auf $\mathbb{R}^n$ zu beweisen. Dabei wird $|\varphi'|$ durch $|\det D\varphi|$ ersetzt werden.

Im Folgenden versehen wir den $\mathbb{R}^n$ stets mit der kanonischen Basis und identifizieren so lineare Abbildungen mit Matrizen. Wenn wir die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}$ benützen, setzen wir stets voraus, dass $\mathbb{R}^n$ mit der Maximum-Norm versehen ist.

Zur Erinnerung: In diesem Fall gilt

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|.$$

Wir bereiten den Transformationssatz mit einer Reihe von Sätzen vor.

SATZ IX.5.1. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \neq \emptyset$, $\varphi \in C(U,\mathbb{R}^n)$ und $I \subset U$ ein beschränktes Intervall. Dann ist $\varphi(I)$ messbar und $\lambda_n(\varphi(I)) < \infty$.*

BEWEIS. Sei $I = \prec a, b \succ$ mit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Für $1 \le l \le n$ und $k \in \mathbb{N}^*$ sei

$$I_{kl} = \begin{cases} [a_l, b_l] & \text{falls } \prec a_l, b_l \succ = [a_l, b_l] \\ [a_l + \frac{1}{k}, b_l] & \text{falls } \prec a_l, b_l \succ = (a_l, b_l] \\ [a_l, b_l - \frac{1}{k}] & \text{falls } \prec a_l, b_l \succ = [a_h, b_l) \\ [a_l + \frac{1}{k}, b_l - \frac{1}{k}] & \text{falls } \prec a_l, b_l \succ = (a_l, b_l) \end{cases}$$

und $I_k = I_{k1} \times \ldots \times I_{kn}$. Dann ist jedes I_k kompakt und $I_k \subset I_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $I = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} I_k$. Daher ist $\varphi(I_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ kompakt und damit messbar und $\varphi(I_k) \subset \varphi(I_{k+1})$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$ und $\varphi(I) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \varphi(I_k)$. Wegen Satz IX.4.8 (S. 42) ist somit $\varphi(I)$ messbar. Da $\varphi(I) \subset \varphi(\overline{I})$ und $\varphi(\overline{I})$ kompakt ist, ist $\lambda_n(\varphi(I)) < \infty$. □

Im folgenden Satz benützen wir zwei spezielle Arten von Matrizen:

TYP P: Für $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$, geht $P_{(ij)}$ aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen der Zeilen i und j hervor. Die entsprechende lineare Abbildung ist eine Spiegelung an der Hyperebene $x_i = x_j$.

TYP S: Für $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$ und $t \in \mathbb{R}$, geht $S_{(ij)}(t)$ aus der Einheitsmatrix hervor, indem das t-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert wird. Die zugehörige lineare Abbildung ist eine Scherung in der (i, j)-Ebene parallel zur j-Achse.

Die Matrizen der Typen P und S sind invertierbar. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$(P_{(ij)})^{-1} = P_{(ij)},$$
$$(S_{(ij)}(t))^{-1} = S_{(ij)}(-t).$$

Die Multiplikation einer Matrix von links bzw. rechts mit einer Matrix $P_{(ij)}$ oder $S_{(ij)}(t)$ entspricht dem Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile bzw. Spalte oder der Addition des t-fachens der i-ten Zeile bzw. Spalte zur j-ten Zeile bzw. Spalte.

SATZ IX.5.2. *Sei $L \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Diagonalmatrix D mit nicht verschwindenden Diagonalelementen und Matrizen A, B,* *die Produkte von Matrizen der Typen P und S sind, mit*

$$L = ADB.$$

Beweis. Wir führen folgenden Algorithmus aus, der eine Modifikation des Gaußschen Eliminationsverfahrens ist:

(0) Setze $i = 1$, $L^{(0)} = L$.

(1) Bestimme j_i mit $i \le j_i \le n$ und

$$|L^{(i-1)}_{j_i i}| = \max_{i \le k \le n} |L^{(i-1)}_{ki}|.$$

(2) Vertausche die Zeilen i und j_i:

$$P^{(i)} = P_{(i,j_i)},\ \widetilde{L}^{(i-1)} = P^{(i)} L^{(i-1)}.$$

(3) Eliminiere die Elemente unterhalb der Diagonalen in der i-ten Spalte und rechts von der Diagonalen in der i-ten Zeile:

$$\begin{aligned}
A^{(i)} &= S_{(ni)}\Big(-\frac{\widetilde{L}^{(i-1)}_{ni}}{\widetilde{L}^{(i-1)}_{ii}}\Big) \cdot \ldots \cdot S_{(i+1i)}\Big(-\frac{\widetilde{L}^{(i-1)}_{i+1i}}{\widetilde{L}^{(i-1)}_{ii}}\Big)\\
B^{(i)} &= S_{(ii+1)}\Big(-\frac{\widetilde{L}^{(i-1)}_{ii+1}}{\widetilde{L}^{(i-1)}_{ii}}\Big) \cdot \ldots \cdot S_{(in)}\Big(-\frac{\widetilde{L}^{(i-1)}_{in}}{\widetilde{L}^{(i-1)}_{ii}}\Big)\\
L^{(i)} &= A^{(i)} \widetilde{L}^{(i-1)} B^{(i)}.
\end{aligned}$$

(4) Falls $i = n - 1$ ist, stop. Sonst erhöhe i um 1 und gehe nach 1 zurück.

Dann ist

$$D = L^{(n-1)}$$

die gesuchte Diagonalmatrix und

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= A^{(n-1)} P^{(n-1)} A^{(n-2)} P^{(n-2)} \ldots A^{(1)} P^{(1)}\\
B^{-1} &= B^{(1)} B^{(2)} \ldots B^{(n-1)}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass wegen $L \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le i \le n - 1$ gilt

$$\max_{i \le k \le n} |L^{(i-1)}_{ki}| > 0.$$

□

Satz IX.5.3. *Seien $a \in \mathbb{R}^n$, $L \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) = a + Lx$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und I ein beschränktes Intervall. Dann ist*

$$\lambda_n(\varphi(I)) = |\det L| \lambda_n(I).$$

Beweis. Wegen Satz IX.5.2 ist φ die Komposition einer Translation $x \mapsto a + x$, einer linearen Abbildung mit Diagonalmatrix und endlich vieler linearer Abbildungen vom Typ P und S. Da $\det L$ das Produkt der Determinanten der entsprechenden Matrizen ist, reicht es, die Aussage für diese elementaren Abbildungen zu beweisen. Sei dazu $I = \prec u, v \succ$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. Schritt: Betrachte die Translation $\tau : x \mapsto x + a$. Dann ist $\tau(I) = \prec u + a, v + a \succ$ und

$$\begin{aligned}\lambda_n(\tau(I)) &= \prod_{i=1}^{n}(v_i - u_i)\\ &= \lambda_n(I)\\ &= |\det Id|\lambda_n(I).\end{aligned}$$

2. Schritt: Betrachte die lineare Abbildung $\delta : x \mapsto Dx$ mit einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ und $d_i \in \mathbb{R}^*$, $1 \le i \le n$. Dann ist

$$\delta(I) = \prod_{k=1}^{n} \prec \min\{d_k u_k, d_k v_k\}, \max\{d_k u_k, d_k v_k\} \succ$$

und

$$\begin{aligned}\lambda_n(\delta(I)) &= \prod_{k=1}^{n} |d_k v_k - d_k u_k|\\ &= |\prod_{k=1}^{n} d_k|\lambda_n(I)\\ &= |\det D|\lambda_n(I).\end{aligned}$$

3. Schritt: Betrachte die lineare Abbildung $\rho : x \mapsto P_{(ij)}x$ mit $1 \le i, j \le n$ und $i \ne j$. Dann ist O.E. $i < j$ und

$$\begin{aligned}\rho(I) = &\prec u_1, v_1 \succ \times \ldots \times \prec u_{i-1}, v_{i-1} \succ \times \prec u_j, v_j \succ \times\\ &\times \prec u_{i+1}, v_{i+1} \succ \times \ldots \times \prec u_{j-1}, v_{j-1} \succ \times \prec u_i, v_i \succ \times\\ &\times \prec u_{j+1}, v_{j+1} \succ \times \ldots \times \prec u_n, v_n \succ\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\lambda_n(\rho(I)) &= \lambda_n(I)\\ &= |\det P_{ij}|\lambda_n(I).\end{aligned}$$

4. Schritt: Betrachte die lineare Abbildung $\sigma : x \mapsto S_{(ij)}(t)x$ mit $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, $t \in \mathbb{R}$. Aus Satz IX.5.1 und Satz IX.3.3 (S. 27) folgt

$$\begin{aligned}\lambda_n(\sigma(I)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\sigma(I)}\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} \chi_{\sigma(I)} dx_j] dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{\prec u_1, v_1 \succ \times \ldots \times \prec u_{j-1}, v_{j-1} \succ \times \prec u_{j+1}, v_{j+1} \succ \times \ldots \times \prec u_n, v_n \succ}\\ &\qquad [\int_{\mathbb{R}} \chi_{\prec u_j + t x_i, v_j + t x_i \succ} dx_j] dx_1 \ldots dx_{j-1} dx_{j+1} \ldots dx_n\\ &= \lambda_n(I)\end{aligned}$$

$$= |\det S_{(ij)}(t)|\lambda_n(I).$$

□

Satz IX.5.4. *Seien $a \in \mathbb{R}^n$, $L \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) = a + Lx$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann ist $f \circ \varphi^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und*

$$\int f \circ \varphi^{-1} = |\det L| \int f.$$

Beweis. 1. Schritt: Sei I ein beschränktes Intervall und $f = \chi_I$. Dann ist $f \circ \varphi^{-1} = \chi_{\varphi(I)}$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IX.5.3.
2. Schritt: Sei $f \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann folgt die Behauptung aus dem 1. Schritt und der Linearität des Integrals.
3. Schritt: Sei N eine Nullmenge. Wir zeigen, dass $\varphi(N)$ ebenfalls eine Nullmenge ist.
Gemäß Satz IX.2.7(2) (S. 13) gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, derart dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf N divergiert und $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wegen Schritt 2 ist $(f_k \circ \varphi^{-1})_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ monoton wachsend, auf $\varphi(N)$ divergent und $(\int f_k \circ \varphi^{-1})_{k\in\mathbb{N}} = (|\det L| \int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Aus Satz IX.3.7 (S. 31) folgt, dass $(f_k \circ \varphi^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. konvergiert. Daher ist $\varphi(N)$ eine Nullmenge.
4. Schritt: Sei $f \in L^{\text{inc}}$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine monoton wachsende Folge mit $(\int f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, die f.ü. gegen f konvergiert. Wegen Schritt 2 und 3 konvergiert $(f_k \circ \varphi^{-1})_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ f.ü. gegen $f \circ \varphi^{-1}$, ist monoton wachsend und erfüllt, $(\int f_k \circ \varphi^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Aus Satz IX.3.7 (S. 31) folgt die Behauptung für f.
5. Schritt: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann folgt die Behauptung aus dem 4. Schritt und der Linearität des Integrals. □

Satz IX.5.5. *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene, nicht leere Teilmengen, $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf V und $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Intervall mit $\mathring{I} \neq \emptyset$ und $\overline{I} \subset U$. Dann ist*

$$\lambda_n(\varphi(I)) = \int_I |\det D\varphi(x)| dx.$$

Beweis. Sei $I = \prec u, v \succ$ mit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definiere

$$\begin{aligned} K_0 &= \max\{1, \lambda_n(I)\}, \\ L_{\max} &= \max_{1\le k\le n} |v_k - u_k| \\ L_{\min} &= \min_{1\le k\le n} |v_k - u_k| > 0. \end{aligned}$$

Da $\overline{I}$ kompakt ist und $(D\varphi)^{-1}$ und $\det(D\varphi)$ auf $\overline{I}$ stetig sind, existieren

$$\begin{aligned} K_1 &= \max\{1, \max_{x\in\overline{I}} \|(D\varphi(x))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\} \\ K_2 &= \max\{1, \max_{x\in\overline{I}} |\det(D\varphi(x))|\}. \end{aligned}$$

Sei $0 < \varepsilon < 1$ beliebig. Da $D\varphi$ und $\det D\varphi$ auf $\overline{I}$ gleichmäßig stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\det(D\varphi(x)) - \det(D\varphi(y))| < \frac{\varepsilon}{2K_0}$$
$$\|D\varphi(x) - D\varphi(y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} < \varepsilon\frac{L_{\min}}{L_{\max}K_0K_1K_2n2^n}$$

für alle $x, y \in \overline{I}$ mit $\|x-y\|_\infty < \delta$. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass

$$2^{-k}L_{\max} < \delta$$

ist. Durch sukzessives Halbieren der Kanten können wir I in 2^{nk} disjunkte Intervalle I_l, $1 \le l \le 2^{nk}$, mit maximaler Kantenlänge $2^{-k}L_{\max}$ und minimaler Kantenlänge $2^{-k}L_{\min}$ unterteilen. Dann sind die $\varphi(I_l)$ paarweise disjunkt und $\varphi(I) = \bigcup_{l=1}^{2^{nk}} \varphi(I_l)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|\lambda_n(\varphi(I)) - \int_I |\det D\varphi(x)|dx\Big| \\
&= \Big|\sum_{l=1}^{2^{nk}}\{\lambda_n(\varphi(I_l)) - \int_{I_l}|\det D\varphi(x)|dx\}\Big| \qquad (1)\\
&\le \sum_{l=1}^{2^{nk}}\Big|\lambda_n(\varphi(I_l)) - \int_{I_l}|\det D\varphi(x)|dx\Big|.
\end{aligned}$$

Sei $1 \le l \le 2^{nk}$ beliebig. Dann ist $I_l = \prec \tilde{u}, \tilde{v} \succ$. Definiere

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2}(\tilde{u} + \tilde{v}) \\
\psi(x) &= \varphi(z) + D\varphi(z)(x-z) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\
\rho &= \psi^{-1} \circ \varphi.
\end{aligned}$$

Mit Satz IX.5.3 angewandt auf ψ^{-1} und $\varphi(I_l)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\Big|\lambda_n(\varphi(I_l)) - \int_{I_l}|\det D\varphi(x)|dx\Big| \\
&\le \Big|\int_{I_l}\{|\det D\varphi(x)| - |\det D\varphi(z)|\}dx\Big| \\
&\quad + \Big|\lambda_n(I_l)|\det D\varphi(z)| - \lambda_n(\varphi(I_l))\Big| \qquad (2)\\
&\le \int_{I_l}|\det D\varphi(x) - \det D\varphi(z)|dx \\
&\quad + K_2\Big|\lambda_n(I_l) - \underbrace{|\det D\varphi(z)|^{-1}\lambda_n(\varphi(I_l))}_{=\lambda_n(\rho(I_l))}\Big| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2K_0}\lambda_n(I_l) + K_2|\lambda_n(I_l) - \lambda_n(\rho(I_l))|.
\end{aligned}$$

Sei $x \in I_l$. Dann gilt wegen $\rho(z) = z$

$$\begin{aligned}
&\|\rho(x) - x\|_\infty \\
&= \|\rho(x) - \rho(z) - (x - z)\|_\infty \\
&= \| \int_0^1 [D\rho(z + t(x - z)) - I](x - z)dt\|_\infty \\
&\leq \int_0^1 \|(D\varphi(z))^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \|D\varphi(z + t(x - z)) - D\varphi(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad \|x - z\|_\infty dt \qquad (3) \\
&\leq K_1\varepsilon \frac{L_{\min}}{L_{\max}K_0K_1K_2n2^n} L_{\max}2^{-k-1} \\
&= \varepsilon \frac{L_{\min}}{K_0K_2n2^{n+1}} 2^{-k} \\
&=: \eta.
\end{aligned}$$

Da ρ ein Homöomorphismus ist, ist $\rho(I_l)$ zusammenhängend und

$$\rho(\overset{\circ}{I_l}) = \overset{\circ}{\overbrace{\rho(I_l)}} \quad , \quad \rho(\overline{I}_l) = \overline{\rho(I_l)} \quad , \quad \rho(\partial I_l) = \partial(\rho(I_l)).$$

Hieraus folgt mit Gleichung (3)

$$\prec u + \eta e, v - \eta e \succ \subset \rho(I_l) \subset \prec u - \eta e, v + \eta e \succ,$$

wobei $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_n(\rho(I_l)) - \lambda_n(I_l) &\leq \prod_{i=1}^n (v_i - u_i + 2\eta) - \prod_{i=1}^n (v_i - u_i) \\
&= \lambda_n(I_l)\Big\{\prod_{i=1}^n (1 + \frac{2\eta}{v_i - u_i}) - 1\Big\} \\
&\leq \lambda_n(I_l)\Big\{(1 + \frac{2\eta}{L_{\min}2^{-k}})^n - 1\Big\} \\
&= \lambda_n(I_l)\Big\{(1 + \frac{\varepsilon}{K_0K_2n2^n})^n - 1\Big\} \\
&\leq \lambda_n(I_l)\frac{\varepsilon}{K_0K_2n2^n} n2^{n-1} \\
&= \lambda_n(I_l)\frac{\varepsilon}{2K_0K_2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_n(I_l) - \lambda_n(\rho(I_l)) &\leq \prod_{i=1}^n (v_i - u_i) - \prod_{i=1}^n (v_i - u_i - 2\eta) \\
&= \lambda_n(I_l)\Big\{1 - \prod_{i=1}^n (1 - \frac{2\eta}{v_i - u_i})\Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lambda_n(I_l)\Big\{1-(1-\frac{2\eta}{2^{-k}L_{\min}})^n\Big\}\\
&= \lambda_n(I_l)\Big\{1-(1-\frac{\varepsilon}{K_0K_2n2^n})^n\Big\}\\
&\leq \lambda_n(I_l)\frac{\varepsilon}{K_0K_2n2^n}n\\
&\leq \lambda_n(I_l)\frac{\varepsilon}{2K_0K_2}
\end{aligned}$$

also

$$|\lambda_n(\rho(I_l)) - \lambda_n(I_l)| \leq \lambda_n(I_l)\frac{\varepsilon}{2K_0K_2}. \tag{4}$$

Aus den Gleichungen (1), (2) und (4) folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\Big|\lambda_n(\varphi(I)) - \int_I |\det D\varphi(x)|dx\Big| &\leq \frac{\varepsilon}{2K_0}\sum_{l=1}^{2^{nk}}\lambda_n(I_l) + \frac{\varepsilon}{2K_0}\sum_{l=1}^{2^{nk}}\lambda_n(I_l)\\
&= \frac{\varepsilon}{K_0}\lambda_n(I)\\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt hieraus die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den Transformationssatz beweisen. Man beachte, dass Satz IX.5.4 ein Spezialfall hiervon ist.

Satz IX.5.6 (Transformationssatz). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offene, nicht leere Teilmengen und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf V. Dann ist $f \in L^1(V,\mathbb{R})$ genau dann, wenn $f\circ\varphi|\det D\varphi| \in L^1(U,\mathbb{R})$ ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_V f dy = \int_U f(\varphi(x))|\det D\varphi(x)|dx.$$

Beweis. 1. Schritt: Es genügt, die Implikation „$\Longrightarrow$“ zu zeigen. Die Implikation „$\Longleftarrow$“ folgt dann durch Anwenden des Gezeigten auf $\varphi^{-1} : V \to U$.

2. Schritt: Sei $I \subset V$ ein beschränktes, offenes Intervall. Dann ist $\mathcal{O} = \varphi^{-1}(I) \subset U$ offen. Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Z}^n$. Für $k, l \in \mathbb{N}$ sei

$$I_{kl} = \prod_{i=1}^n (2^{-l}z_{k,i} - 2^{-l-1}, 2^{-l}z_{k,i} + 2^{-l-1}]$$

und

$$I_l = \bigcup\{I_{kl} : \overline{I}_{kl} \subset \mathcal{O}\}.$$

Dann sind für festes l die I_{kl} disjunkt und

$$I_l \subset I_{l+1} \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Wie im Beweis von Satz IX.4.10(1) (S. 44) folgt

$$\mathcal{O} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} I_l.$$

Dann ist $I = \varphi(\mathcal{O}) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \varphi(I_l)$, $\varphi(I_l) = \bigcup \{\varphi(I_{kl}) : \overline{I}_{kl} \subset \mathcal{O}\}$ und die $\varphi(I_{kl})$ sind für festes l disjunkt. Damit folgt aus Satz IX.5.5 und Satz IX.4.8 (S. 42) $\varphi(I_l) \in \mathcal{M}_n$ und

$$\begin{aligned}
\lambda_n(I) &\geq \lambda_n(\varphi(I_l)) \\
&= \sum_{\overline{I}_{kl} \subset \mathcal{O}} \lambda_n(\varphi(I_{kl})) \\
&= \sum_{\overline{I}_{kl} \subset \mathcal{O}} \int_{I_{kl}} |\det D\varphi(x)| dx \\
&= \int_{I_l} |\det D\varphi(x)| dx \quad \forall l \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Wiederum mit Satz IX.4.8 (S. 42) und Satz IX.3.7 (S. 31) folgt

$$\begin{aligned}
\int_V \chi_I &= \lambda_n(I) \\
&= \lim_{l \to \infty} \lambda_n(\varphi(I_l)) \\
&= \lim_{l \to \infty} \int_{I_l} |\det D\varphi(x)| dx \\
&= \int_{\mathcal{O}} |\det D\varphi(x)| dx \\
&= \int_U \chi_{\mathcal{O}} |\det D\varphi(x)| dx \\
&= \int_U \chi_I \circ \varphi(x) |\det D\varphi(x)| dx.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $f = \chi_I$ gezeigt.
3. Schritt: Sei $I \subset V$ ein beschränktes Intervall. Da jedes beschränkte Intervall in $\mathbb{R}$ in der Form $A \backslash (B \cup C)$ mit offenen, beschränkten Intervallen A, B, C und $B \cup C \subset A$ dargestellt werden kann, ist χ_I Linearkombination von charakteristischen Funktionen beschränkter, offener Intervalle in V. Damit folgt die Behauptung für $f = \chi_I$ aus dem 2. Schritt und der Linearität des Integrals.
4. Schritt: Aus dem 3. Schritt und der Linearität des Integrals folgt die Behauptung für alle $f \in T(V, \mathbb{R})$.
5. Schritt: Sei $N \subset V$ eine Nullmenge. Wir zeigen, dass $\varphi^{-1}(N) \subset U$ ebenfalls eine Nullmenge ist.
Nach Satz IX.2.7 (S. 13) gibt es eine monoton wachsende Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset T(V, \mathbb{R})$ derart, dass $(\int_V f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auf N

divergiert. Gemäß Schritt 4 ist $f_k \circ \varphi |\det D\varphi| \in L^1(U,\mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\int_U f_k \circ \varphi |\det D\varphi| = \int_V f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k \circ \varphi |\det D\varphi|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und divergiert auf $\varphi^{-1}(N)$. Wegen Satz IX.3.7 (S. 31) ist daher $\varphi^{-1}(N)$ eine Nullmenge.
6. Schritt: Sei nun $f \in L^{\text{inc}}(V,\mathbb{R})$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(V,\mathbb{R})$ eine monoton wachsende Folge, derart dass $f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü. in V und $(\int_V f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wegen der Schritte 4 und 5 ist $(f_k \circ \varphi |\det D\varphi|)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(U,\mathbb{R})$ monoton wachsend, konvergiert f.ü. in U gegen $f \circ \varphi |\det D\varphi|$ und $(\int_U f_k \circ \varphi |\det D\varphi|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Damit folgt die Behauptung für f aus Satz IX.3.7 (S. 31).
7. Schritt: Aus dem 6. Schritt und der Linearität des Integrals folgt schließlich die Behauptung. □

Beispiel IX.5.7. (1) (Volumen von Kugeln in $\mathbb{R}^n$) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ sei

$$\begin{aligned} B_n(x,\mathbb{R}) &= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\|_2 \le R\} \\ B_n &= B_n(0,1) \\ \omega_n &= \lambda_n(B_n). \end{aligned}$$

Mit $\varphi(y) = x + Ry$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ folgt

$$B_n(x,R) = \varphi(B_n).$$

Es ist

$$D\varphi(y) = RId_{\mathbb{R}^n} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \det D\varphi(y) = R^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Satz IX.5.6 folgt

$$\lambda_n(B_n(x,R)) = R^n \omega_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,\ R \in \mathbb{R}_+^*.$$

Aus Satz IX.3.3 (S. 27) und Satz IX.5.6 folgt weiter

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_n} \\ &= \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{B_n} dx_1 \dots dx_{n-1}] dx_n \\ &= \int_{-1}^{1} \lambda_{n-1}(B_{n-1}(x_n, \sqrt{1-x_n^2})) dx_n \\ &= \omega_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{(n-1)}{2}} dt \quad (t = -\cos x) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^n x dx \\ &= 2\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

Gemäß Beispiel VI.3.5(4) (S. 23, Analysis II) gilt für $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\pi}{2} \\ A_1 &= 1 \\ A_{2m} &= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} \\ A_{2m+1} &= \prod_{k=1}^{m} \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$A_{n-1} A_n = \frac{\pi}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

und damit

$$\begin{aligned} \omega_n &= 2\omega_{n-1} A_n \\ &= 4\omega_{n-2} A_{n-1} A_n \\ &= \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2} \quad \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda_n((-1,1)) \\ &= 2 \\ \omega_2 &= 2\omega_1 A_2 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Induktion

$$\begin{aligned} \omega_{2m} &= \frac{\pi^m}{m!} \quad \forall m \geq 1 \\ \omega_{2m+1} &= \frac{2^{m+1}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2m+1)} \pi^m \quad \forall m \geq 0. \end{aligned}$$

Gemäß Satz VI.5.1 (S. 39, Analysis II) und Satz VI.5.7 (S. 44, Analysis II) ist aber

$$\begin{aligned} \Gamma(m+1) &= m! \quad \forall m \geq 1 \\ \Gamma(m+\frac{3}{2}) &= (m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2}) \\ &= \Gamma(\frac{1}{2}) \prod_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2} \\ &= \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2}. \end{aligned}$$

Damit folgt schließlich

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

(2) (EBENE POLARKOORDINATEN) Sei $R \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig. Definiere

$$\begin{aligned} U_R &= (0,R) \times (0,2\pi) \\ V_R &= B_2(0,R) \backslash [\mathbb{R}_+ \times \{0\}] \\ \psi(r,\varphi) &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi &: U_R \to V_R \text{ ist bijektiv} \\ \psi(\overline{U}_R) &= \overline{V}_R \\ &= \overline{B_2(0,R)} \\ D\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ \det D\psi &= r > 0 \quad \forall (r,\varphi) \in U_R. \end{aligned}$$

Also ist ψ ein C^1-Diffeomorphismus von U_R auf V_R. Da $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ eine Nullmenge in $B_2(0,R)$ ist, folgt aus Satz IX.5.6

$$f \in L^1(B_2(0,R),\mathbb{R}) \iff rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in L^1(U_R,\mathbb{R}).$$

Für

$$f(x_1,x_2) = e^{x_1^2+x_2^2}$$

erhalten wir so z.B.

$$\begin{aligned} \int_{B_2(0,R)} f dx &= \int_{U_R} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi) dr d\varphi \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} re^{r^2} d\varphi dr \\ &= 2\pi [\frac{1}{2} e^{r^2}]_0^R \\ &= \pi(e^{R^2} - 1). \end{aligned}$$

(3) (ZYLINDERKOORDINATEN) Seien $R \in \mathbb{R}_+^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig. Definiere

$$\begin{aligned} U &= (0,R) \times (0,2\pi) \times (a,b) \\ Z &= \{x \in \mathbb{R}^3 : a < x_3 < b, x_1^2 + x_2^2 < R\} \\ V &= Z \backslash [\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times (a,b)] \\ \psi(r,\varphi,z) &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi &: U \to V \text{ ist bijektiv} \\ \psi(\overline{U}) &= \overline{V} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{Z} \\
D\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\det D\psi &= r.
\end{aligned}
$$

Also ist ψ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf V. Da $\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times (a,b)$ eine Nullmenge in Z ist, folgt aus Satz IX.5.6

$$f \in L^1(Z,\mathbb{R}) \iff rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in L^1(U,\mathbb{R}).$$

Für

$$f(x) = x_3 e^{x_1^2+x_2^2}$$

erhalten wir z.B.

$$
\begin{aligned}
\int_Z f dx &= \int_U rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) dr d\varphi dz \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_a^b zre^{r^2} dz d\varphi dr \\
&= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\pi(e^{R^2}-1).
\end{aligned}
$$

(4) (Kugelkoordinaten) Sei $R \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig. Definiere

$$
\begin{aligned}
U_R &= (0,R) \times (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\
V_R &= B_3(0,R) \backslash [\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}] \\
\psi(r,\varphi,\theta) &= (r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta).
\end{aligned}
$$

Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\psi : U_R \to V_R \text{ ist bijektiv} \\
&\psi(\overline{U}_R) = \overline{V}_R \\
&\phantom{\psi(\overline{U}_R)} = \overline{B_3(0,R)} \\
&D\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&\det D\psi = \sin\theta[r^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta] \\
&\qquad + r\cos\theta[r\cos^2\varphi\cos^2\theta + r\sin^2\varphi\cos^2\theta] \\
&\qquad = r^2\sin^2\theta\cos\theta + r^2\cos^3\theta \\
&\qquad = r^2\cos\theta \\
&\qquad > 0 \quad \forall (r,\varphi,\theta) \in U_R.
\end{aligned}
$$

Also ist ψ ein C^1-Diffeomorphismus von U_R auf V_R. Da $[\mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}] \cap B_3(0,R)$ eine Nullmenge in $B_3(0,R)$ ist, folgt aus Satz IX.5.6

$$f \in L^1(B_3(0,R),\mathbb{R})$$

$$\iff r^2 \cos\theta f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta) \in L^1(U_R, \mathbb{R}).$$

Für

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\|x\|_2} e^{\|x\|_2^2} \\ &= \frac{e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} \end{aligned}$$

erhalten wir z.B.

$$r^2 \cos\theta f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos\theta e^{r^2} \in L^1(U_R, \mathbb{R})$$

und

$$\begin{aligned} \int_{B_3(0,R)} f dx &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta e^{r^2} d\theta d\varphi dr \\ &= 2\pi[\frac{1}{2} e^{r^2}]_0^R [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi(e^{R^2} - 1). \end{aligned}$$

IX.6. Die L^p-Räume

In diesem Abschnitt ist stets $1 \le p < \infty$. Ist $p > 1$, so ist p' gegeben durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

d.h.

$$p' = \frac{p}{p-1}.$$

Im Folgenden identifizieren wir Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Genauer: Durch

$$f \sim g \iff f - g = 0 \text{ f.ü.}$$

wird auf $M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Äquivalenzrelation definiert. Wenn wir im Folgenden von einer Funktion $f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sprechen, meinen wir dann immer die entsprechende Äquivalenzklasse, ohne diese genauer zu bezeichnen.

Definition IX.6.1. Wir definieren

$$L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = L^p = \{f \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : |f|^p \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\}$$

und setzen für $f \in L^p$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = \left\{ \int |f|^p \right\}^{1/p}.$$

Wir wollen zeigen, dass $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum ist. Dazu benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Satz IX.6.2 (Höldersche Ungleichung). *Seien $p > 1$, $f \in L^p$ und $g \in L^{p'}$. Dann ist $f \cdot g \in L^1$ und*

$$\int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Beweis. Sei $0 < \alpha < 1$ und $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(x) = (1 - \alpha) + \alpha x - x^\alpha.$$

Wie man leicht nachprüft, ist f_α auf $[0, 1]$ monoton fallend, auf $[1, \infty)$ monoton wachsend und $f_\alpha(1) = 0$. Also gilt

$$f_\alpha(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ und $\alpha = \frac{1}{p} \in (0, 1)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_{\frac{1}{p}}(\frac{a^p}{b^{p'}}) \\ &= (1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{p} \frac{a^p}{b^{p'}} - \frac{a}{b^{p'/p}} \\ &= \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} \frac{a^p}{b^{p'}} - \frac{ab}{b^{p'}} \\ (*) \qquad \iff \quad ab &\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $(*)$ gilt offensichtlich auch für $a = 0$ oder $b = 0$.
O.E. sind $f \neq 0$, $g \neq 0$, da sonst die Behauptung trivial ist. Aus $(*)$ folgt mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \\ b &= \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \\ \frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Aus Satz IX.4.5 (S. 41) und Satz IX.4.13 (S. 45) folgt $f \cdot g \in L^1$ und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int |f \cdot g| &\leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \int |f|^p + \frac{1}{p'} \frac{1}{\|g\|_{p'}^{p'}} \int |g|^{p'} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Satz IX.6.3. *$(L^p, \| \cdot \|_p)$ ist ein Banachraum.*

Beweis. 1. Schritt: L^p ist ein Vektorraum. Für $p = 1$ ist dies gerade Satz IX.2.14 (S. 19). Sei also $p > 1$. Die Eigenschaft

$$f \in L^p, \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha f \in L^p$$

ist trivial. Seien also $f, g \in L^p$. Da die Funktion $x \mapsto x^p$ auf $\mathbb{R}_+^*$ konvex ist, folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= 2^p \Big| \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \Big|^p \\ &\le 2^p \Big[\frac{1}{2}|f(x)| + |g(x)| \Big]^p \\ &\le 2^{p-1} \Big[|f(x)|^p + |g(x)|^p \Big]. \end{aligned}$$

Hieraus und aus Satz IX.4.5 (S. 41) folgt $f + g \in L^p$.
2. Schritt: $\| \cdot \|_p$ ist eine Norm. Die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\ge 0 \quad \forall f \in L^p \\ \|f\|_p &= 0 \iff f = 0 \\ \|\alpha f\|_p &= |\alpha| \|f\|_p \quad \forall f \in L^p,\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sind trivial. (Man beachte unsere Vereinbarung bzgl. Funktionen, die f.ü. übereinstimmen.) Die Dreiecksungleichung ist für $p = 1$ trivial. Sei also $p > 1$ und $f, g \in L^p$. O.E. ist $f \ne 0$, $g \ne 0$. Aus Satz IX.6.2 folgt

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p \\ &= \int |f + g|^{p-1} |f + g| \\ &\le \int |f + g|^{p-1} [|f| + |g|] \\ &\le \|f\|_p \Big\{ \int |f + g|^{(p-1)p'} \Big\}^{1/p'} \\ &\quad + \|g\|_p \Big\{ \int |f + g|^{(p-1)p'} \Big\}^{1/p'} \\ &= \Big[\|f\|_p + \|g\|_p \Big] \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Dreiecksungleichung.
3. Schritt: $(L^p, \| \cdot \|_p)$ ist vollständig. Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^p$ eine Cauchyfolge. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ ein $N(k) \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} N(k+1) &> N(k) \\ \|f_m - f_{N(k)}\|_p &< 2^{-k} \quad \forall m \ge N(k). \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned} g_1 &= f_{N(1)} \\ g_k &= f_{N(k)} - f_{N(k-1)} \quad \forall k \ge 2. \end{aligned}$$

und

$$h_k = \sum_{l=1}^{k} |g_l|.$$

Dann ist $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ eine monoton wachsende Folge positiver Funktionen in L^p mit

$$\begin{aligned}\|h_k\|_p &\le \sum_{l=1}^{k} \|g_l\|_p \\ &\le \|f_{N(1)}\|_p + \sum_{l=2}^{k} 2^{-l+1} \\ &< 1 + \|f_{N(1)}\|_p.\end{aligned}$$

Wegen Satz IX.3.7 (S. 31) konvergiert $(h_k^p)_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. gegen eine positive Funktion $\widetilde{h} \in L^1$ mit

$$\int \widetilde{h} = \int |\widetilde{h}| \le [1 + \|f_{N(1)}\|_p]^p.$$

Definiere $h = \widetilde{h}^{1/p}$. Dann gilt $h \in L^p$, $\|h\|_p \le 1 + \|f_{N(1)}\|_p$ und $h_k \underset{h\to\infty}{\longrightarrow} h$ f.ü.. Daher konvergiert $\big(\sum_{l=1}^{k} g_l\big)_{k\in\mathbb{N}}$ f.ü. gegen eine messbare Funktion f mit $|f| \le h$. Also ist $f \in L^p$. Wegen

$$\sum_{l=1}^{k} g_l - f \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ f.ü.}$$

und

$$|\sum_{l=1}^{k} g_l - f| \le h_k + |f| \le 2h$$

folgt aus Satz IX.3.11 (S. 34)

$$\int |\sum_{l=1}^{k} g_l - f|^p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d.h.

$$\|f - f_{N(k)}\|_p = \|f - \sum_{l=1}^{k} g_l\|_p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}^*$ mit

$$2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\|f - f_{N(k)}\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $m \geq N(k)$ folgt

$$\begin{aligned}\|f - f_m\|_p &\leq \|f - f_{N(k)}\|_p + \|f_{N(k)} - f_m\|_p \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-k} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Also konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in L^p gegen f. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Aus Teil (3) des obigen Beweises folgt sofort das folgende Resultat:

SATZ IX.6.4. *Seien $f \in L^p$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p$ mit*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_p = 0.$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_{k_l} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} f$ f.ü..

BEMERKUNG IX.6.5. Sei X ein Vektorraum. Auf X gebe es ein SKALARPRODUKT, d.h. eine symmetrische Bilinearform $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(S1) $(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in X$,
(S2) $(u, u) = 0 \iff u = 0$.

Dann wird durch

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \quad \forall u \in X$$

eine Norm auf X definiert (Beweis!). Ist X mit dieser Norm vollständig, so heißt X ein HILBERTRAUM. Satz IX.6.2 und Satz IX.6.3 zeigen, dass L^2 mit

$$(f, g) = \int f \cdot g \quad \forall f, g \in L^2$$

ein Hilbertraum ist. Andere Beispiele für Hilberträume sind $\mathbb{R}^n$ mit

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

und ℓ^2 mit

$$(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \quad \forall u, v \in \ell^2.$$

Wir wollen zeigen, dass Funktionen in L^p „beliebig gut“ durch „glatte Funktionen“ approximiert werden können. Dazu benötigen wir einige Begriffe und Resultate, die uns im nächsten Kapitel von Nutzen sein werden.

DEFINITION IX.6.6. (1) Seien A, B Teilmengen eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$. Dann schreiben wir $A \Subset B$, wenn $\overline{A}$ kompakt und $\overline{A} \subset B$ ist.
(2) Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $U \subset X$ und $f : U \to Y$ eine Funktion. Dann heißt

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$$

der TRÄGER von f.
(3) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, nicht leer und $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Dann ist

$$C_0^k(U, \mathbb{R}) = \{f \in C^k(U, \mathbb{R}) : \operatorname{supp}(f) \Subset U\}.$$

SATZ IX.6.7. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$, $K \neq \emptyset$, kompakt. Dann existiert eine* ABSCHNEIDEFUNKTION $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *mit*

(1) $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset U$,
(2) $0 \le \varphi(x) \le 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$,
(3) $\varphi(x) = 1$ *für alle* $x \in K$.

BEWEIS. Da K kompakt ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, Punkte $x_0, \ldots, x_m \in K$ und Zahlen $\delta_0, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\overline{B_{|.|_2}(x_i, \delta_i)} \subset U \quad \forall 0 \le i \le m$$
$$K \subset \bigcup_{i=0}^m B_{|.|_2}(x_i, \delta_i),$$

wobei $|.|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Sei $\delta = \min\limits_{0 \le i \le m} \delta_i$ und $0 < \varepsilon \le \frac{\delta}{4}$. Definiere

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \min_{y \in K} |x - y|_2 \le \varepsilon\}$$
$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : \min_{y \in K} |x - y|_2 \le 3\varepsilon\}.$$

Dann sind K_1 und K_2 kompakt und

$$K \subset K_1 \subset K_2 \subset U.$$

Definiere die Funktion $\widetilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \exp\{-\frac{1}{1-|x|_2^2}\} & \text{falls } |x|_2 < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen Beispiel IV.1.21 (S. 120, Analysis I) und Satz VII.4.12 (S. 69, Analysis II) ist $\widetilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\widetilde{\psi}) = \overline{B_{|.|_2}(0,1)}$. Insbesondere ist $\widetilde{\psi} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Definiere

$$\psi = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\psi}\right]^{-1} \cdot \widetilde{\psi}.$$

Aus den Eigenschaften von ψ und Satz IX.3.15 (S. 38) folgt, dass die Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \psi(\frac{y - x}{\varepsilon}) \chi_{K_1}(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

aus $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist. Aus Satz IX.5.6 (S. 53) folgt

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \chi_{K_1}(x + \varepsilon z) dz \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Ist $x \notin K_2$, so ist $\overline{B_{|.|_2}(x,\varepsilon)} \cap K_1 = \emptyset$ und daher $\varphi(x) = 0$. Also ist $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K_2 \subset U$. Ist dagegen $x \in K$, so ist $\overline{B_{|.|_2}(x,\varepsilon)} \subset K_1$ und daher

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)dz = 1.$$

Schließlich gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$0 \le \varphi(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)dz = 1.$$

Damit leistet φ das Gewünschte. □

Bemerkung IX.6.8. Aus Beispiel IV.1.21 (S. 120, Analysis I), Satz VII.4.12 (S. 69, Analysis II) und Satz IX.3.15 (S. 38) folgt, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ ein $C_k \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|D^k\varphi(x)\|_{\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \le c_k\varepsilon^{-k}.$$

Satz IX.6.9. *Seien $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$, kompakt und $U_0, \ldots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$. Dann gibt es offene Mengen $V_0, \ldots, V_m$ mit*

$$V_i \Subset U_i \quad \forall 0 \le i \le m$$
$$K \subset \bigcup_{i=0}^m V_i.$$

Beweis. Zu jedem $x \in K$ gibt es ein $0 \le i \le m$ und ein $\varepsilon_x \in \mathbb{R}_+^*$ mit $x \in U_i$ und $\overline{B_{|.|_2}(x,\varepsilon_x)} \subset U_i$. Da K kompakt ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_0, \ldots, x_k \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=0}^k B_{|.|_2}(x_j, \varepsilon_{x_j}).$$

Für $0 \le i \le m$ sei

$$V_i = \bigcup\{B_{|.|_2}(x_j,\varepsilon_{x_j}) : \overline{B_{|.|_2}(x_j,\varepsilon_{x_j})} \subset U_i\}.$$

Dann ist $V_i \Subset U_i$ für alle $0 \le i \le m$ und $K \subset \bigcup_{i=0}^m V_i$. □

Satz IX.6.10. *Seien $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$, kompakt und $U_0, \ldots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $K \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$. Dann gibt es eine* Partition der Eins *auf K, die der Überdeckung $U_0, \ldots, U_m$ untergeordnet ist, d.h., es existieren Funktionen $\varphi_0, \ldots, \varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit*

(1) $\operatorname{supp}(\varphi_i) \Subset U_i$ *für alle* $0 \le i \le m$,
(2) $0 \le \varphi_i \le 1$ *für alle* $0 \le i \le m$,

(3) $\sum_{i=0}^{m} \varphi_i = 1$ *auf* K.

Beweis. Seien $V_0, \dots, V_m$ wie in Satz IX.6.9. Gemäß Satz IX.6.7 gibt es Funktionen $\psi_0, \dots, \psi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

(a) $\operatorname{supp}(\psi_i) \Subset U_i$ für alle $0 \le i \le m$.
(b) $0 \le \psi_i \le 1$ für alle $0 \le i \le m$,
(c) $\psi_i = 1$ auf $\overline{V}_i$, für alle $0 \le i \le m$.

Definiere

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \psi_0 \\ \varphi_j &= \psi_j \prod_{i=0}^{j-1} (1 - \psi_i) \quad 1 \le j \le m. \end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllen $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ die Bedingungen (1) und (2). Durch Induktion folgt

$$\sum_{j=0}^{m} \varphi_j = 1 - \prod_{i=0}^{m} (1 - \psi_i).$$

Hieraus folgt die Bedingung (3). □

Wir kommen nun zu dem angekündigten Ergebnis über glatte Funktionen in L^p.

Satz IX.6.11. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *ist dicht in* $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Beweis. 1. Schritt: $T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Sei $f \in L^p$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt mit $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$. Wegen $f = f^+ - f^-$ und $f^+, f^- \in L^p$, $f^+ \ge 0$, $f^- \ge 0$ können wir o.E. annehmen, dass $f \ge 0$ ist.
Wegen Lemma IX.3.6 gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ Funktionen $\widetilde{g}_k, \widetilde{h}_k \in L^{\text{inc}}$ mit

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_k &\ge 0, \\ \widetilde{h}_k &\ge 0, \\ f^p &= \widetilde{g}_k - \widetilde{h}_k \\ \int \widetilde{h}_k &< \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\|f^p - \widetilde{g}_k\|_1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge, die wir wieder mit $(\widetilde{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, folgt aus Satz IX.6.4

$$\widetilde{g}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f^p \text{ f.ü..}$$

Sei $g_k = \widetilde{g}_k^{1/p}$. Dann gilt

$$g_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ f.ü.}$$

also

$$|g_k - f|^p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ f.ü.}$$

und

$$\begin{aligned}\int |g_k - f|^p &= \|g_k - f\|_p^p \\ &\leq [\|g_k\|_p + \|f\|_p]^p \\ &= [\|\widetilde{g}_k\|_1^{1/p} + \|f\|_p]^p \\ &\leq [\{\|f\|_p^p + \frac{1}{k}\}^{1/p} + \|f\|_p]^p.\end{aligned}$$

Also ist $(\int |g_k - f|^p)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und aus Satz IX.3.11 (S. 34) folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_p = 0.$$

Wir können also ohne Einschränkung weiter annehmen, dass $f^p \in L^{\text{inc}}$ ist. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(\widetilde{\varphi}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

$$\widetilde{\varphi} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f^p \text{ f.ü.}$$

$$\int \widetilde{\varphi}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int f^p.$$

Indem wir gegebenenfalls zu $\widetilde{\varphi}_k^+$ übergehen, können wir o.E. $\widetilde{\varphi}_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Sei $\varphi_k = \widetilde{\varphi}_k^{1/p} \in T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\varphi_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ f.ü.} \quad \text{und} \quad \int \varphi_k^p \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int f^p.$$

Mit dem gleichen Argument wie oben folgt

$$\lim_{k\to\infty} \|f - \varphi_k\|_p = 0.$$

2. Schritt: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist dicht in $T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Offensichtlich reicht es zu zeigen, dass es zu jedem beschränkten Intervall I und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\|\varphi - \chi_I\|_p < \varepsilon.$$

Sei also I ein beschränktes Intervall und $\varepsilon > 0$. Da ∂I eine Nullmenge ist, gibt es offene Intervalle I_k mit

$$\partial I \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_k) < \varepsilon^p.$$

Sei $U = \overline{I} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Dann ist U offen und

$$\lambda_n(U \setminus \overline{I}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n(I_k) < \varepsilon^p.$$

Gemäß Satz IX.6.7 gibt es ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(\varphi) &\Subset U \\ 0 \leq \varphi &\leq 1 \\ \varphi &= 1 \quad \text{auf } \overline{I}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\|\chi_I - \varphi\|_p \leq \lambda_n(U \setminus \overline{I})^{1/p} < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

KAPITEL X

Analysis auf Mannigfaltigkeiten

Anknüpfend an den Satz über implizite Funktionen VII.5.9 (S. 83, Analysis II) definieren wir eine Mannigfaltigkeit als eine Menge, die lokal als Nullstellenmenge einer glatten Funktion mit surjektiver Funktionalmatrix dargestellt werden kann. Sie ist dann lokal auch darstellbar als Graph einer glatten Funktion. Ausgehend von diesen Eigenschaften definieren wir den Tangentialraum und die Orientierung einer Mannigfaltigkeit.
Anschließend definieren wir das Integral von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten, indem wir es mit Hilfe der lokalen Darstellungen auf ein Lebesgue-Integral im $\mathbb{R}^n$ zurückführen.
Als Anwendung berechnen wir verschiedene Oberflächen und zeigen den Integralsatz von Gauß zusammen mit einigen wichtigen Anwendungen aus der Physik.
Danach wenden wir uns dem Differentialformen-Kalkül zu. Differentialformen sind alternierende Multilinearformen auf den Tangentialräumen von Mannigfaltigkeiten. Als Spezialfall der hier gezeigten allgemeinen Ergebnisse erhalten wir die Resultate aus Kapitel VIII über Kurvenintegrale und Gradientenfelder zurück. Als Hauptresultat der Theorie beweisen wir den Stokesschen Integralsatz in seiner allgemeinen Form und interpretieren ihn danach in der „klassischen Sprache“ der Vektoranalysis. Auf diese Weise erhalten wir einige für die Anwendungen wichtige Ergebnisse.

X.1. Mannigfaltigkeiten

Sofern nicht anders vermerkt, ist im Folgenden stets $1 \le k < n$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer. Wir erinnern an die Ergebnisse aus Abschnitt VII.5, insbesondere an Satz VII.5.9 (S. 83, Analysis II) und Bemerkung VII.5.13 (S. 87, Analysis II).

Definition X.1.1. Eine Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ heißt k-dimensionale (Unter-) Mannigfaltigkeit der Klasse C^α, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ im $\mathbb{R}^n$ und ein $f \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^{n-k})$ gibt mit

(1) $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$,
(2) x_0 ist ein regulärer Punkt von f, d.h., $\operatorname{Rang}(Df(x_0)) = n - k$.

Beispiel X.1.2. (1) Die Sphäre

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^n$.
(2) Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. Das Ellipsoid

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{a_i})^2 = 1\}$$

ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^n$.
(3) Sei $c \in \mathbb{R}_+$. Das Hyperboloid

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = c^2\}$$

ist für $c > 0$ eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Für $c = 0$ ist $\mathcal{H}$ keine Mannigfaltigkeit.
(4) Seien $0 < r < R$. Der Torus

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 = r^2\}$$

ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^3$.

Beweis. ad (1): Beispiel VII.5.10 (S. 85, Analysis II).
ad (2): Es ist $\mathcal{E} = f^{-1}(\{0\})$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (\frac{x_i}{a_i})^2 - 1$$

und

$$Df(x) = (2\frac{x_1}{a_1}, \ldots, 2\frac{x_n}{a_n}) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

ad (3): Es ist $\mathcal{H} = f^{-1}(\{0\})$ mit

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - c^2$$

und

$$Df(x) = (2x_1, 2x_2, -2x_3) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \text{ sofern } c > 0.$$

ad (4): Es ist $\mathcal{T} = f^{-1}(\{0\})$ mit

$$f(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 - r^2 \quad \forall x \neq 0$$

und

$$\begin{aligned} &Df(x) \\ &= \Big(2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 2(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 2x_3\Big) \\ &\neq 0 \quad \forall x \in T. \end{aligned}$$

□

Wenn wir im Folgenden ohne weiteren Zusatz von einer Mannigfaltigkeit (kurz MFGKT) sprechen, so meinen wir stets eine Untermannigfaltigkeit der Klasse C^1. Im Folgenden geben wir verschiedene Charakterisierungen und Darstellungen von Mfgkten an. Dabei werden wir später diejenige wählen, die für den konkreten Fall am geeignetesten ist. Die folgende Charakterisierung ist bereits in Bemerkung VII.5.13 (S. 87, Analysis II) gegeben.

SATZ X.1.3. *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten Umgebungen U_1 von $x_0' = (x_{01}, \ldots, x_{0k})$ in $\mathbb{R}^k$ und U_2 von $x_0'' = (x_{0k+1}, \ldots, x_{0n})$ in $\mathbb{R}^{n-k}$ und eine Funktion $g \in C^\alpha(U_1, \mathbb{R}^{n-k})$ gibt mit*

(1) $g(U_1) = U_2$,
(2) $M \cap (U_1 \times U_2) = \{(x', x'') \in U_1 \times U_2 : x'' = g(x')\}$.

BEWEIS. „$\Longrightarrow$“: Folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, Satz VII.5.9 (S. 83, Analysis II) (vgl. Bemerkung VII.5.13 (S. 87, Analysis II)).
„$\Longleftarrow$“: Folgt mit

$$f(x', x'') = x'' - g(x') \quad \forall (x', x'') \in U_1 \times U_2.$$

$\square$

Mfgkten der Dimension k können also lokal als Graph einer C^α-Funktion von k-Variablen dargestellt werden. Wir erinnern daran (Bemerkung VII.5.13 (S. 87, Analysis II)), dass wir im Spezialfall $k = n-1$ auch von HYPERFLÄCHEN reden. Die folgende Charakterisierung zeigt, dass sich k-dimensionale Mfgkten lokal wie k-dimensionale Ebenen im $\mathbb{R}^n$ verhalten.

SATZ X.1.4. *Es sei*

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

die k-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $M \subset \mathbb{R}^n$ genau dann eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$ und eine Umgebung V von 0 in $\mathbb{R}^n$ und einen C^α-Diffeomorphismus $F : U \to V$ von U auf V gibt mit

$$F(M \cap U) = V \cap E_k.$$

BEWEIS. „$\Longrightarrow$“: Seien $x_0 \in M$ und x_0', x_0'', U_1, U_2 und g wie in Satz X.1.3. Dann leisten $U = U_1 \times U_2$ und $F : U \to \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x', x'') = (x', x'' - g(x')) \quad \forall (x', x'') \in U_1 \times U_2$$

das Gewünschte.
„$\Longleftarrow$“: Definiere $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ durch

$$f(x) = (F_{k+1}(x), \ldots, F_n(x)) \quad \forall x \in U.$$

Dann ist $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und

$$\mathrm{Rang}(Df(x_0)) = n - k,$$

da $\mathrm{Rang}(DF(x_0)) = n$ ist. Hieraus folgt die Behauptung. □

Definition X.1.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen. Eine Abbildung $\varphi \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^n)$ heißt Immersion (der Klasse C^α), wenn jedes $x \in U$ regulärer Punkt von φ ist. Ist $\varphi \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^n)$ eine Immersion und $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ ein Homöomorphismus, so schreiben wir kurz: $\varphi : U \overset{\alpha}{\hookrightarrow} V$.

Satz X.1.6. *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine Umgebung V von x_0 in M, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \overset{\alpha}{\hookrightarrow} V$ gibt.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Seien $x_0, x_0', x_0'', U_1, U_2$ und g wie in Satz X.1.3. Dann leisten $U = U_1, V = M \cap (U_1 \times U_2)$ und

$$\varphi(t) = (t, g(t)) \quad \forall t \in U$$

das Gewünschte.
„$\Longleftarrow$“: Sei $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$. Da t_0 ein regulärer Punkt von φ ist, können wir o.E. annehmen, dass $(D_i\varphi_j(t_0))_{1 \le i,j \le k}$ regulär ist, sonst führen wir eine Koordinatentransformation durch. Gemäß Satz VII.5.4 (S. 80, Analysis II) gibt es Umgebungen $\widetilde{U} \subset U$ von t_0 und $\widetilde{V}$ von $x_0' = (x_{01}, \ldots, x_{0k})$ in $\mathbb{R}^k$, so dass $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ ein C^α-Diffeomorphismus ist. Definiere $F : \widetilde{U} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} F_i(z_1, \ldots, z_n) &= \varphi_i(z_1, \ldots, z_k) && 1 \le i \le k, \\ F_j(z_1, \ldots, z_n) &= z_j + \varphi_j(z_1, \ldots, z_k) && k+1 \le j \le n. \end{aligned}$$

Dann ist $F : \widetilde{U} \times \mathbb{R}^{n-k} \to \widetilde{V} \times \mathbb{R}^{n-k}$ ein C^α-Diffeomorphismus mit $F((\widetilde{U} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap E_k) = (\widetilde{V} \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap M$. Damit folgt die Behauptung aus Satz X.1.4 angewandt auf F^{-1}. □

Definition X.1.7. Seien φ, U und V wie in Satz X.1.6. Dann heißt (U, φ, V) eine lokale Parameterdarstellung oder Karte von M. Eine Menge $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda, V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ von Karten von M mit $M \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ heißt Atlas von M.

Bemerkung X.1.8. Da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}^n$ ist, besitzt jede Mfgkt einen Atlas aus höchstens abzählbar vielen Karten.

Beispiel X.1.9. (1) Definiere $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Dann ist φ eine Immersion und

$$\left\{ \Big((0, \frac{3}{2}\pi), \varphi|_{(0,\frac{3}{2}\pi)}, \varphi((0, \frac{3}{2}\pi)) \Big), \Big((\pi, \frac{5}{2}\pi), \varphi|_{(\pi,\frac{5}{2}\pi)}, \varphi((\pi, \frac{5}{2}\pi)) \Big) \right\}$$

ein Atlas von S^1.
(2) Definiere $\varphi : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\varphi(t,r) = \Big(\cos(2t)(2 - r\sin t), \sin(2t)(2 - r\sin t), r\cos t\Big).$$

$\mathcal{M} = \varphi(\mathbb{R} \times (-1,1))$ heißt MÖBIUSBAND. Wie man leicht nachprüft, ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ $\varphi|_{(t_0 - \frac{\pi}{2}, t_0 + \frac{\pi}{2}) \times (-1,1)}$ ein Homöomorphismus. Weiter gilt für jedes $(t,r) \in \mathbb{R} \times (-1,1)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Rang}(D\varphi(t,r)) \\ &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -2\sin(2t)(2 - r\sin t) - r\cos t\cos(2t) & -\sin t\cos(2t) \\ 2\cos(2t)(2 - r\sin t) - r\cos t\sin(2t) & -\sin t\sin(2t) \\ -r\sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{M}$ eine 2-dimensionale Mfgkt der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^3$.

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten bei Kartenwechseln und ist für spätere Anwendungen wichtig.

SATZ X.1.10. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α und (U_1, φ_1, V_1), (U_2, φ_2, V_2) zwei Karten von M mit $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind $W_1 = \varphi_1^{-1}(V) \subset U_1$ und $W_2 = \varphi_2^{-1}(V) \subset U_2$ offen, und $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ist ein C^α-Diffeomorphismus.*

BEWEIS. Da V in V_j, $j = 1,2$, offen und φ_j stetig ist, ist W_j in U_j, $j = 1,2$, offen. Konstruktionsgemäß ist τ ein Homöomorphismus. Sei $x_1^* \in W_1$ beliebig und

$$y^* = \varphi_1(x_1^*) \quad , \quad x_2^* = \varphi_2^{-1}(y^*) = \tau(x_1^*) \in W_2.$$

Nach Satz X.1.4 existieren eine Umgebung $\widetilde{U}$ von y^* in $\mathbb{R}^n$, eine offene Menge $\widetilde{V}$ in $\mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus $F : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ mit

$$F(M \cap \widetilde{U}) = \widetilde{V} \cap E_k.$$

O.E. können wir $\widetilde{U} \subset V$ annehmen. Sei $\widetilde{W}_j = \varphi_j^{-1}(M \cap \widetilde{U})$, $j = 1,2$. Auf $\widetilde{W}_1$ bzw. $\widetilde{W}_2$ gilt

$$F \circ \varphi_1 = (g_1, \ldots, g_k, 0, \ldots, 0)$$

bzw.

$$F \circ \varphi_2 = (h_1, \ldots, h_k, 0, \ldots, 0).$$

Da $\operatorname{Rang}(D\varphi_j) = k$ und DF invertierbar ist, folgt

$$\operatorname{Rang}(D(F \circ \varphi_j)) = k \quad j = 1,2,$$

so dass

$$g = (g_1, \ldots, g_k) : \widetilde{W}_1 \to E_k \cap \widetilde{V}$$
$$h = (h_1, \ldots, h_k) : \widetilde{W}_2 \to E_k \cap \widetilde{V}$$

C^α-Diffeomorphismen sind. (Dabei betrachten wir $E_k \cap \widetilde{V}$ als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^k$.) Auf $\widetilde{W}_1$ gilt aber

$$\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = (F \circ \varphi_2)^{-1} \circ (F \circ \varphi_1) = h^{-1} \circ g.$$

Also ist $\tau : \widetilde{W}_1 \to \widetilde{W}_2$ ein C^α-Diffeomorphismus. Da $x_1^* \in W_1$ beliebig war, folgt hieraus die Behauptung. □

X.2. Tangentialraum und Orientierung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\varphi \in C^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ ein regulärer Weg. Dann ist $\mathrm{Spur}(\varphi)$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^n$. Durch φ werden auf kanonische Weise Tangentenvektoren und eine Orientierung für diese Mfgkt definiert. Wir wollen in diesem Abschnitt diese Begriffe auf allgemeine Mfgkten übertragen.

Sofern nicht anders bemerkt, ist im Folgenden stets $1 \le k < n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^*$. $(\cdot, \cdot)$ bezeichnet das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Definition X.2.1. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α und $x_0 \in M$.
(1) $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M im Punkte x_0, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ und ein $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ gibt mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma'(0) = v$.
(2) $T_{x_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ ist Tangentialvektor an } M \text{ im Punkte } x_0\}$ heißt der Tangentialraum von M im Punkte x_0.
(3) $u \in \mathbb{R}^n$ heißt Normalenvektor an M im Punkte x_0, wenn gilt

$$(u, v) = 0 \quad \forall v \in T_{x_0}M.$$

(4) $N_{x_0}M = \{u \in \mathbb{R}^n : u \text{ ist Normalenvektor zu } M \text{ im Punkte } x_0\}$ heißt der Normalraum von M im Punkte x_0.

Satz X.2.2. *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α und $x_0 \in M$. Dann gilt:*

(1) *$T_{x_0}M$ ist ein k-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.*
(2) *$N_{x_0}M$ ist ein $n-k$-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.*
(3) *Sei (U, φ, V) eine Karte von M mit $x_0 \in V$ und $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$. Dann ist*

$$D_1\varphi(y_0), \ldots, D_k\varphi(y_0)$$

eine Basis von $T_{x_0}M$.
(4) *Sei U eine Umgebung von x_0 in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ derart, dass x_0 ein regulärer Punkt von f und $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ ist. Dann ist*

$$T_{x_0}M = \{v \in \mathbb{R}^n : (\nabla f_j(x_0), v) = 0 \ \forall 1 \le j \le n-k\}.$$

Beweis. Seien

$$\begin{aligned} T_1 &= \operatorname{span}\{D_1\varphi(y_0), \dots, D_k\varphi(y_0)\} \\ T_2 &= \{v \in \mathbb{R}^n : (\nabla f_j(x_0), v) = 0 \ \forall 1 \le j \le n-k\}. \end{aligned}$$

Dann sind T_1 und T_2 k-dimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen: $T_1 \subset T_{x_0}M \subset T_2$. Hieraus folgen dann sofort die Behauptungen (1), (3) und (4). Wegen (4) ist dann

$$N_{x_0}M = \operatorname{span}\{\nabla f_1(x_0)^t, \dots, \nabla f_{n-k}(x_0)^t\},$$

so dass auch die Behauptung (2) folgt.
„$T_1 \subset T_{x_0}M$:“ Sei

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i\varphi(y_0) \in T_1$$

beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, so dass gilt

$$y_0 + t\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \in U \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^k$ ist. Definiere $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\gamma(t) = \varphi(y_0 + t\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i).$$

Dann ist $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ und

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \varphi(y_0) = x_0 \\ \gamma'(0) &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i D_i\varphi(y_0) = v. \end{aligned}$$

Also ist $v \in T_{x_0}M$.
„$T_{x_0}M \subset T_2$:“ Sei $v \in T_{x_0}M$, d.h., $v = \psi'(0)$ für einen C^1-Weg $\psi \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ mit $\psi(0) = x_0$. Dann gilt

$$f_j(\psi(t)) = 0 \quad \forall 1 \le j \le n-k, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f_j(\psi(t))|_{t=0} \\ &= (\nabla f_j(\psi(0)), \psi'(0)) \\ &= (\nabla f_j(x_0), v) \quad \forall 1 \le j \le n-k. \end{aligned}$$

Also ist $v \in T_2$. □

Wir können uns den Tangentialraum $T_{x_0}M$ im Punkte $x_0 \in M$ „angeheftet“ denken. Variiert x_0, so auch $T_{x_0}M$. Dies führt zu folgender Definition.

Definition X.2.3. Sei M eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α. Dann heißt

$$TM = \{(x,v) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in M, v \in T_x M\}$$

der Tangentialraum von M.

Beispiel X.2.4. (1) Es ist $S^{n-1} = f^{-1}(\{0\})$ mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1.$$

Also ist

$$N_x S^{n-1} = \operatorname{span}\{(x_1, \dots, x_n)^t\}$$

und

$$T_x S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : (x,v) = 0\}.$$

Sei speziell $n = 3$. Wir wählen als Karte eine Polarkoordinatendarstellung

$$x = \psi(\varphi, \theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Dann ist

$$T_x S^2 = \operatorname{span}\{(-\sin\varphi\cos\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0)^t\ ,$$
$$(-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\theta)^t\}.$$

(2) Es sit $\mathcal{T} = f^{-1}(\{0\})$ mit

$$f(x) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)^2 + x_3^2 - r^2.$$

Also ist

$$T_x\mathcal{T} = \{v \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R)\frac{x_1 v_1 + x_2 v_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + x_3 v_3 = 0\}.$$

Als Karte kann man eine „Polarkoordinatendarstellung“ wählen

$$x = \psi(\varphi, \theta) = ((R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta)^t.$$

Dann ist

$$T_x\mathcal{T} = \operatorname{span}\{(-(R + r\cos\theta)\sin\varphi, (R + r\cos\theta)\cos\varphi, 0)^t,$$
$$(-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)^t\}.$$

Wir kommen nun zum Begriff der Orientierbarkeit. Dazu benötigen wir:

Definition X.2.5. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus von U auf V. Dann heißt φ orientierungstreu bzw. orientierungsumkehrend, wenn gilt

$$\det(D\varphi(x)) > 0 \quad \forall x \in U$$

bzw.

$$\det(D\varphi(x)) < 0 \quad \forall x \in U.$$

Bemerkung X.2.6. (1) Ist U zusammenhängend und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, so ist φ entweder orientierungstreu oder orientierungsumkehrend.
(2) Ist $n = 1$, so ist ein C^1-Diffeomorphismus φ genau dann orientierungstreu bzw. orientierungsumkehrend, wenn φ streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend ist.

Definition X.2.7. $M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α.

(1) Zwei Karten (U_i, φ_i, V_i), $i = 1, 2$, von M mit $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ heißen gleichorientiert, wenn der C^α-Diffeomorphismus $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 = \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to W_2 = \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ orientierungstreu ist.
(2) Ein Atlas $\mathcal{A}$ von M heißt orientiert, wenn je zwei Karten von $\mathcal{A}$ gleichorientiert sind.
(3) Eine Orientierung $\mathcal{O}$ von M wird durch einen orientierten Atlas von M gegeben.
(4) M heißt orientierbar, wenn ein orientierter Atlas von M existiert.
(5) Seien $(M, \mathcal{O})$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit einer zugehörigen Orientierung $\mathcal{O}$ und (U, φ, V) eine Karte von M. Die Karte heißt positiv orientiert bzgl. $\mathcal{O}$, wenn sie mit jeder Karte des zu $\mathcal{O}$ gehörenden Atlasses gleichorientiert ist.

Bemerkung X.2.8. (1) Genau genommen ist eine Orientierung $\mathcal{O}$ einer Mfgkt M eine Äquivalenzklasse orientierter Atlanten von M. Dabei sind zwei orientierte Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ von M äquivalent, wenn jede Karte von $\mathcal{A}$ zu jeder Karte von $\mathcal{A}'$ gleichorientiert ist.
(2) Sei $(M, \mathcal{O})$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda, V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ ein zu $\mathcal{O}$ gehöriger Atlas. Definiere $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ durch

$$i(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_k).$$

Dann ist $\widetilde{\mathcal{A}} = \{(i(U_\lambda), \varphi_\lambda \circ i^{-1}, V_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ ein orientierter Atlas von M, dessen Orientierung von $\mathcal{O}$ verschieden ist. Die Orientierung von $\widetilde{\mathcal{A}}$ wird mit $-\mathcal{O}$ bezeichnet und heißt die zu $\mathcal{O}$ entgegengesetzte Orientierung.
(3) Ist $(M, \mathcal{O})$ eine zusammenhängende, orientierbare Mfgkt, kann man zeigen, dass auf M nur die Orientierungen $\mathcal{O}$ und $-\mathcal{O}$ existieren.

Beispiel X.2.9. Definiere $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$\psi(t) = (\sin t, \cos t).$$

Dann sind

$$\mathcal{A} = \Big\{ \Big((0, \frac{3}{2}\pi), \varphi|_{(0,\frac{3}{2}\pi)}, \varphi((0, \frac{3}{2}\pi)) \Big),$$
$$\Big((\pi, \frac{5}{2}\pi), \varphi|_{(\pi,\frac{5}{2}\pi)}, \varphi((\pi, \frac{5}{2}\pi)) \Big) \Big\}$$

und

$$\mathcal{A}' = \Big\{ \Big((0, \frac{3}{2}\pi), \psi|_{(0,\frac{3}{2}\pi)}, \psi((0, \frac{3}{2}\pi)) \Big),$$
$$\Big((\pi, \frac{5}{2}\pi), \psi|_{(\pi,\frac{5}{2}\pi)}, \psi((\pi, \frac{5}{2}\pi)) \Big) \Big\}$$

Zwei entgegengesetzt orientierte Atlanten von S^1.

Eine Orientierung von M induziert auf kanonische Weise für jedes $x \in M$ eine Orientierung von T_xM.

Definition X.2.10. Seien $(M, \mathcal{O})$ eine orientierbare Mfgkt und $x_0 \in M$. Eine Basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ von $T_{x_0}M$ heißt positiv orientiert bzgl. $\mathcal{O}$, wenn für jede bzgl. $\mathcal{O}$ positiv orientierte Karte (U, φ, V) mit $x_0 \in V$ gilt

$$\det(A) > 0,$$

wobei die Matrix A definiert ist durch

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} A_{ij} D_j\varphi(y_0), \quad y_0 = \varphi^{-1}(x_0), \quad 1 \le i \le k.$$

Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, so ist für jedes $x \in M$ der Normalraum N_xM eindimensional, enthält also genau zwei Einheitsvektoren. Wir wollen zeigen, dass eine Hyperfläche M genau dann orientierbar ist, wenn von diesen Vektoren einer ausgewählt werden kann, so dass die entstehende Abbildung $M \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Dies wird präzisiert durch:

Definition X.2.11. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1-Hyperfläche.

(1) Eine Abbildung $\nu \in C(M, \mathbb{R}^n)$ mit den Eigenschaften
$$\nu(x) \in N_xM,$$
$$\|\nu(x)\|_2 = 1$$
für alle $x \in M$ heißt Einheitsnormalenfeld auf M.

(2) Ist M orientierbar und ν ein Einheitsnormalenfeld auf M, so heißt ν bzgl. der Orientierung $\mathcal{O}$ positiv orientiert, wenn für jedes $x \in M$ und jede bzgl. $\mathcal{O}$ positiv orientierte Basis $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ von T_xM gilt
$$\det(\nu, v_1, \dots, v_{n-1}) > 0.$$

Bemerkung X.2.12. Wegen Definition X.2.7 hängen die Definitionen X.2.10 und X.2.11 (2) nicht von der Wahl der Karte bzw. Basis von T_xM ab.

Satz X.2.13. *Eine C^1-Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn auf M ein Einheitsnormalenfeld ν existiert.*

Beweis. „$\Longrightarrow$": Sei $x \in M$ und $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ eine positiv orientierte Basis von T_xM. Da N_xM eindimensional ist, gibt es genau ein $\nu(x) \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} \|\nu(x)\|_2 &= 1, \\ \nu(x) &\in N_xM, \\ \det(\nu(x), v_1, \ldots, v_{n-1}) &> 0. \end{aligned}$$

Wir müssen zeigen, dass die so konstruierte Funktion $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ stetig ist. Sei dazu $x_0 \in M$ beliebig und $U \in \mathcal{U}(x_0)$, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ wie in Definition X.1.1 (S. 69), d.h., $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ und x_0 ist regulärer Punkt von f. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, wird durch

$$\widetilde{\nu}(x) = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|_2} \nabla f(x) \quad \forall x \in U$$

eine stetige Funktion $\widetilde{\nu} : U \to \mathbb{R}^n$ definiert mit

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\nu}(x)\|_2 &= 1, \\ \widetilde{\nu}(x) &\in N_xM \end{aligned}$$

für alle $x \in U$. Indem wir nötigenfalls zu $-f$ übergehen, können wir $\widetilde{\nu}(x_0) = \nu(x_0)$ annehmen. Sei nun $(\widetilde{U}, \varphi, \widetilde{V})$ eine positiv orientierte Karte mit $x_0 \in \widetilde{V}$ und $y_0 = \varphi^{-1}(x_0)$, $\widetilde{W} = \varphi^{-1}(\widetilde{V} \cap U)$. Indem wir gegebenenfalls $\widetilde{U}$ verkleinern, können wir annehmen, dass $\widetilde{W}$ zusammenhängend ist. Durch

$$y \mapsto \Delta(y) = \det\Big(\widetilde{\nu}(\varphi(y)), D_1\varphi(y), \ldots, D_{n-1}\varphi(y)\Big)$$

wird eine stetige Funktion $\Delta : \widetilde{W} \to \mathbb{R}$ mit $\Delta(y_0) > 0$ definiert. Wegen Satz X.2.2 (4), Definition X.1.7 (S. 72) und Definition X.1.5 (S. 72) gilt $\Delta(y) \neq 0$ für alle $y \in \widetilde{W}$. Da $\widetilde{W}$ zusammenhängend ist, gilt $\Delta(y) > 0$ für alle $y \in \widetilde{W}$. Hieraus und der Definition von ν folgt

$$\widetilde{\nu}(\varphi(y)) = \nu(\varphi(y)) \quad \forall y \in \widetilde{W}.$$

Also ist ν in x_0 stetig.
„$\Longleftarrow$": Sei nun ν ein Einheitsnormalenfeld auf M. Sei $x \in M$ und (U, φ, V) eine Karte von M mit $x \in V$. Indem wir U nötigenfalls verkleinern, können wir annehmen, dass U zusammenhängend ist. Dann ist

$$\Delta(y) = \det\Big(\nu(\varphi(y)), D_1\varphi(y), \ldots, D_{n-1}\varphi(y)\Big)$$

eine stetige Funktion auf U, die nirgends verschwindet. Indem wir nötigenfalls die Transformation $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, -y_{n-1})$ vorschalten, können wir

$$\Delta(y) > 0, \quad \forall y \in U$$

annehmen. Sei $\mathcal{A}$ der so konstruierte Atlas von M. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{A}$ orientiert ist. Seien dazu (U_i, φ_i, V_i), $i = 1, 2$, zwei Karten von $\mathcal{A}$ mit $V = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Sei $W_i = \varphi_i^{-1}(V), i = 1, 2$, und $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, d.h.

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ \tau.$$

Für $y \in W_1$ gilt dann

$$D\varphi_1(y) = D\varphi_2(\tau(y)) \cdot D\tau(y)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &< \det\Big(\nu(\varphi_1(y)), D_1\varphi_1(y), \ldots, D_{n-1}\varphi_1(y)\Big) \\ 0 &< \det\Big(\nu(\varphi_2(\tau(y))), D_1\varphi_2(\tau(y)), \ldots, D_{n-1}\varphi_2(\tau(y))\Big). \end{aligned}$$

Also ist

$$\det D\tau(y) > 0,$$

d.h., die Karten (U_1, φ_1, V_1) und (U_2, φ_2, V_2) sind gleich orientiert. $\square$

Beispiel X.2.14. (1) $\nu(x) = x$ ist ein Einheitsnormalenfeld auf S^{n-1}.
(2) Die Funktion

$$\nu(x) = \frac{1}{r}\Big(\big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\big)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \big(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - R\big)\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3\Big)^t$$

ist ein Einheitsnormalenfeld auf dem Torus $\mathcal{T}$.
(3) Das Möbiusband ist nicht orientierbar. Denn: Sei φ wie in Beispiel X.1.9(2) (S. 72). Eine leichte Rechnung liefert

$$\begin{aligned} T_{\varphi(t,0)}\mathcal{M} = \operatorname{span}\{&(-\sin(2t), \cos(2t), 0)^t, \\ &(-\sin t \cos(2t), -\sin t \sin(2t), \cos t)^t\}. \end{aligned}$$

Also ist

$$N_{\varphi(t,0)}M = \operatorname{span}\{(\cos t \cos(2t), \cos t \sin(2t), \sin t)^t\}.$$

Setze zur Abkürzung

$$\mu(t) = (\cos t \cos(2t), \cos t \sin(2t), \sin t)^t.$$

Gäbe es ein Einheitsnormalenfeld ν auf M, so auch eines mit

$$\nu(\varphi(0,0)) = \mu(0) = e_1.$$

Stetige Fortsetzung längs $\varphi(t, 0)$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, liefert dann

$$\nu(\varphi(t,0)) = \mu(t) \quad \forall -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt aber

$$-e_3 = \mu(-\frac{\pi}{2}) = \nu(-2e_1) = \mu(\frac{\pi}{2}) = e_3.$$

Dies ist ein Widerspruch.

X.3. Integration auf Mannigfaltigkeiten

Sofern nicht anders vermerkt, ist im Folgenden stets $1 \le k < n$ und $\alpha \in \mathbb{N}^*$. $(\cdot,\cdot)$ bezeichnet das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Funktionen, die auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind, werden durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Wir wollen Funktionen auf k-dimensionalen Mfgkten im $\mathbb{R}^n$ integrieren. Insbesondere sollte das Integral der Funktion $f = 1$ das k-dimensionale Volumen der Mfgkt liefern. Außerdem sollte das Integral über die Mfgkt mit Hilfe von Karten auf ein Lebesgue-Integral in $\mathbb{R}^k$ zurückgeführt werden.

Zur Motivation betrachten wir folgende Situation. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \overset{\alpha}{\hookrightarrow} M = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ eine Immersion. Sei $x_0 \in U$ und

$$v_0 = \varphi(x_0) \quad , \quad v_i = D_i\varphi(x_0) \quad 1 \le i \le k.$$

Dann wird für $\varepsilon > 0$ die Mfgkt M in der Nähe von v_0 durch die „Tangentialebene“

$$E = \Big\{ y = v_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i v_i : |t_i| \le \frac{\varepsilon}{2}, 1 \le i \le k \Big\}$$

approximiert. Seien $v_{k+1}, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ paarweise orthogonale Einheitsvektoren mit

$$(v_i, v_j) = 0 \quad \forall 1 \le i \le k < j \le n.$$

Sei

$$P = \Big\{ y = v_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i v_i : |t_i| \le \frac{\varepsilon}{2},\ 1 \le i \le k,\ 0 \le t_j \le 1,\ k+1 \le j \le n \Big\}$$

das Parallelepiped der Höhe 1 über E. Dann ist $\lambda_n(P)$ ein Maß für das k-dimensionale Volumen von E. Aus Satz IX.5.6 (S. 53) folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_n(P) &= \varepsilon^k |\det(v_1, \ldots, v_n)| \\
&= \varepsilon^k \sqrt{\det(v_1, \ldots, v_n)^2} \\
&= \varepsilon^k \sqrt{\det((v_1, \ldots, v_n)^t (v_1, \ldots, v_n))} \\
&= \varepsilon^k \sqrt{\det((v_i, v_j)_{1 \le i,j \le k})}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$g_\varphi(x_0) = \det((v_i, v_j)_{1 \le i,j \le k})$$

ein guter Kandidat für das Volumenelement von M und $\int_U \sqrt{g_\varphi(x)}dx$ ein Kandidat für das k-dimensionale Volumen von M. Diese Ideen werden wir nun präzisieren.

DEFINITION X.3.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi \in C^\alpha(U,\mathbb{R}^n)$ eine Immersion. Dann heißen

$$G_\varphi(x) = (\ (D_i\varphi(x), D_j\varphi(x))\ )_{1\le i,j\le k} \in C^{\alpha-1}(U,\mathbb{R}^{k\times k})$$

und

$$g_\varphi(x) = \det G_\varphi(x) \in C^{\alpha-1}(U,\mathbb{R})$$

der MASSTENSOR und die GRAMSCHE DETERMINANTE von φ.

BEMERKUNG X.3.2. Wegen $(\ (D_i\varphi(x), D_j\varphi(x))\ )_{1\le i,j\le k} = D\varphi(x)^t \cdot D\varphi(x)$ ist $G_\varphi(x)$ positiv semi-definit. Da $D\varphi(x)$ den Rang k hat, ist $G_\varphi(x)$ sogar positiv definit und damit $g_\varphi(x) > 0$ für alle $x \in U$.

SATZ X.3.3. (1) *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi \in C^\alpha(U,\mathbb{R}^n)$ eine Immersion, $\tau : V \to U$ ein C^α-Diffeomorphismus und $\psi = \varphi\circ\tau \in C^\alpha(V,\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$g_\psi(x) = g_\varphi(\tau(x))|\det D\tau(x)|^2 \quad \forall x \in V.$$

(2) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i,V_i) : 1 \le i \le m\}$ und $\mathcal{A}' = \{(U'_j,\varphi'_j,V'_j) : 1 \le j \le m'\}$ zwei Atlanten von* $\operatorname{supp}(f)\cap M$ *und $\{\alpha_i : 1 \le i \le m\}$ und $\{\alpha'_j : 1 \le j \le m'\}$ zwei Partitionen der Eins auf* $\operatorname{supp}(f)\cap M$*, die $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ untergeordnet sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\alpha_i\circ\varphi_i\cdot f\circ\varphi_i\cdot\sqrt{g_{\varphi_i}} \in L^1(U_i,\mathbb{R}) \quad \forall 1\le i\le m\\ \Longleftrightarrow\ &\alpha'_j\circ\varphi'_j\cdot f\circ\varphi'_j\cdot\sqrt{g_{\varphi'_j}} \in L^1(U'_j,\mathbb{R}) \quad \forall 1\le j\le m'.\end{aligned}$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{i=1}^m \alpha_i\circ\varphi_i\cdot f\circ\varphi_i\cdot\sqrt{g_{\varphi_i}}\\ =&\int_{\mathbb{R}^k}\sum_{j=1}^{m'} \alpha'_j\circ\varphi'_j\cdot f\circ\varphi'_j\cdot\sqrt{g_{\varphi'_j}}.\end{aligned}$$

BEWEIS. AD (1): Aus der Kettenregel, Satz VII.3.3 (S. 60, Analysis II), folgt

$$\begin{aligned} g_\psi(x) &= \det(D\psi(x)^t D\psi(x))\\ &= \det([D\varphi(\tau(x))\cdot D\tau(x)]^t[D\varphi(\tau(x))\cdot D\tau(x)])\\ &= (\det D\tau(x))^2\det(D\varphi(\tau(x))^t D\varphi(\tau(x)))\\ &= |\det D\tau(x)|^2 g_\varphi(\tau(x)) \quad \forall x\in V.\end{aligned}$$

AD (2): Seien $1\le i\le m$ und $1\le j\le m'$ so, dass $V = V_i\cap V'_j \ne \emptyset$ ist. Sei $W_i = \varphi_i^{-1}(V), W'_j = {\varphi'}_j^{-1}(V)$ und

$$\tau_{ij} = \varphi_i^{-1}\circ\varphi'_j.$$

Aus Teil (1) und Satz IX.5.6 (S. 53) folgt

$$\begin{aligned}
&\alpha_i \circ \varphi_i \cdot f \circ \varphi_i \cdot \sqrt{g_{\varphi_i}} \in L^1(U_i, \mathbb{R}) \\
\Longrightarrow\ &\alpha_i \circ \varphi_i \cdot f \circ \varphi_i \cdot \alpha'_j \circ \varphi_i \cdot \sqrt{g_{\varphi_i}} \in L^1(W_i, \mathbb{R}) \\
\Longrightarrow\ &\alpha_i \circ \varphi_i \circ \tau_{ij} \cdot f \circ \varphi_i \circ \tau_{ij} \cdot \alpha'_j \circ \varphi_i \circ \tau_{ij} \cdot \\
&\quad \cdot \sqrt{g_{\varphi_i} \circ \tau_{ij}} \cdot |\det D\tau_{ij}| \in L^1(W_j, \mathbb{R}) \\
\Longrightarrow\ &\alpha_i \circ \varphi'_j \cdot \alpha'_j \circ \varphi'_j \cdot f \circ \varphi'_j \cdot \sqrt{g_{\varphi'_j}} \in L^1(W_j, \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Summation über i liefert

$$\alpha'_j \circ \varphi'_j \cdot f \circ \varphi'_j \cdot \sqrt{g_{\varphi'_j}} \in L^1(U'_j, \mathbb{R}),$$

da $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \circ \varphi'_j = 1$ auf U'_j ist. Durch Vertauschen der Rollen von $\mathcal{A}$, $\{\alpha_i\}$ und $\mathcal{A}'$, $\{\alpha'_j\}$ folgt die behauptete Äquivalenz und die Gleichheit der Integrale, da

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \circ \varphi'_j \cdot \alpha_j \circ \varphi'_j) = \alpha_j \circ \varphi'_j \quad \forall 1 \le j \le m'$$

und

$$\sum_{j=1}^{m'} (\alpha_j \circ \varphi_i \cdot \alpha_i \circ \varphi_i) = \alpha_i \circ \varphi_i \quad \forall 1 \le i \le m$$

ist. □

Wegen Satz X.3.3 ist folgende Definition sinnvoll.

Definition X.3.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α.

(1) Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger heißt integrierbar auf M, wenn es einen Atlas $\{(U_i, \varphi_i, V_i) : 1 \le i \le m\}$ von $\operatorname{supp}(f) \cap M$ und eine dem Atlas untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\alpha_i : 1 \le i \le m\}$ auf $\operatorname{supp}(f) \cap M$ gibt mit

$$\alpha_i \circ \varphi_i \cdot f \circ \varphi_i \cdot \sqrt{g_{\varphi_i}} \in L^1(U_i, \mathbb{R}) \quad \forall 1 \le i \le m.$$

In diesem Fall heißt

$$\begin{aligned}
\int_M f = \int_M f dS = \int_M f(x) dS(x) \\
= \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^k} \alpha_i \circ \varphi_i \cdot f \circ \varphi_i \cdot \sqrt{g_{\varphi_i}}
\end{aligned}$$

das Integral von f auf M. Die Menge aller auf M integrierbaren Funktionen wird mit $L^1(M, \mathbb{R})$ bezeichnet.

(2) Eine beschränkte Teilmenge $A \subset M$ heißt INTEGRIERBAR, wenn $\chi_A \in L^1(M,\mathbb{R})$ ist. In diesem Fall heißt

$$\sigma_k(A) = \int_M \chi_A$$

das k-DIMENSIONALE VOLUMEN von A. Ist $\sigma_k(A) = 0$, so heißt A eine k-DIMENSIONALE NULLMENGE in M.

BEMERKUNG X.3.5. (1) Die Einschränkung „supp(f) kompakt" ist rein technischer Natur und kann wesentlich abgeschwächt werden. Insbesondere ist sie hinfällig, wenn M bis auf eine k-dimensionale Nullmenge durch eine Karte überdeckt werden kann.
(2) Ist $A \subset M$ integrierbar und als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ messbar, so muss man deutlich zwischen $\sigma_k(A)$ und $\lambda_n(A)$ unterscheiden. In der Regel ist

$$\lambda_n(A) = 0 \quad \text{aber} \quad \sigma_k(A) > 0.$$

(3) Ist $I \subset \mathbb{R}$ offen und beschränkt und $\varphi \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ ein regulärer Weg, so ist

$$g_\varphi = \|\varphi'\|_2^2,$$

und die Länge des Weges stimmt mit dem eindimensionalen Volumen von Spur(φ) überein.

Man kann die Ergebnisse aus Kapitel IX direkt auf das Integral auf Mfgkten übertragen. Wir geben hier einen Teil an.

SATZ X.3.6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α.*

(1) *$L^1(M,\mathbb{R})$ ist ein Vektorraum. Sind $f,g \in L^1$ und $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, so gilt*
   (a) $\int_M(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_M f + \beta \int_M g$,
   (b) $f \geq 0 \Longrightarrow \int_M f \geq 0$,
   (c) $|f| \in L^1(M,\mathbb{R})$ *und* $|\int_M f| \leq \int_M |f|$.

(2) *Seien $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset L^1(M,\mathbb{R})$ und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f_l \xrightarrow[l\to\infty]{} f$ f.ü. auf M (f.ü. bzgl. σ_k!). Es gebe ein $g \in L^1(M,\mathbb{R}_+)$ mit*

$$|f_l| \leq g \quad \forall l \in \mathbb{N} \text{ f.ü. in } M \text{ (f.ü. bzgl. } \sigma_k!).$$

Dann ist $f \in L^1(M,\mathbb{R})$ und

$$\int_M f = \lim_{l\to\infty} \int_M f_l.$$

BEWEIS. Folgt direkt aus Definition X.3.4, Satz IX.2.14 (S. 19) und Satz IX.3.11 (S. 34). □

BEISPIEL X.3.7. (1) Definiere $\psi : (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\psi(\varphi,\theta) = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} D_1\psi &= (-\sin\varphi\cos\theta, \cos\varphi\cos\theta, 0) \\ D_2\psi &= (-\cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi\sin\theta, \cos\theta) \\ ((D_i\psi, D_j\psi))_{1\le i,j\le 2} &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$g_\psi = \cos^2\theta.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $S^2\backslash\psi((0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$ eine 2-dimensionale Nullmenge. Daher gilt für jedes $f \in L^1(S^2,\mathbb{R})$

$$\int_{S^2} f = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\circ\psi(\varphi,\theta)\cos\theta d\theta\Big)d\varphi.$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \sigma_2(S^2) &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta\Big)d\varphi \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

(2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, offenes Intervall und $f \in C^1(I,\mathbb{R}_+^*)$. Die Rotationsfläche

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in I, \sqrt{x_1^2+x_2^2} = f(x_3)\}$$

ist eine zweidimensionale Mfgkt. Bis auf eine zweidimensionale Nullmenge wird sie durch die Karte (U,φ,V) mit

$$\begin{aligned} U &= I\times(0,2\pi) \\ \varphi(r,t) &= (f(r)\cos t, f(r)\sin t, r) \\ V &= \varphi(U) \end{aligned}$$

dargestellt. Es ist

$$\begin{aligned} D_1\varphi &= (f'\cos t, f'\sin t, 1) \\ D_2\varphi &= (-f\sin t, f\cos t, 0) \\ ((D_i\varphi, D_j\varphi))_{1\le i,j\le 2} &= \begin{pmatrix} 1+f'^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\sqrt{g_\varphi(r,t)} = f(r)\sqrt{1+f'(r)^2}.$$

Daher ist

$$\sigma_2(M) = \int_0^{2\pi}\Big(\int_I f(r)\sqrt{1+f'(r)^2}dr\Big)dt$$

$$= 2\pi \int_I f(r)\sqrt{1+f'(r)^2}dr,$$

sofern das letzte Integral endlich ist (z.B., wenn $f \in C^1(\overline{I}, \mathbb{R}_+^*)$ ist).
(3) Sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $F \in C^1(U, \mathbb{R})$. Der Graph von F

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U, x_n = F(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$. M wird durch die Karte (U, φ, M) mit

$$\varphi(t) = (t_1, \dots, t_{n-1}, F(t_1, \dots, t_{n-1})) \quad \forall t \in U$$

dargestellt. Es ist

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_{n-1} \\ \nabla F \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{E}_{n-1}$ die $(n-1)$-reihige Einheitsmatrix ist. Damit folgt

$$g_\varphi = 1 + \|\nabla F\|_2^2.$$

Also ist

$$\sigma_{n-1}(M) = \int_U \sqrt{1 + \|\nabla F\|_2^2},$$

sofern das letzte Integral endlich ist.
(4) Sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r, x_n > 0\}$$

die obere Halbsphäre mit Radius $r > 0$. Sie ist Graph der Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ mit

$$U = \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : \|t\|_2 < r\} = B_{n-1}(0, r)$$

$$F(t) = \sqrt{r^2 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2}.$$

Wegen

$$D_i F(t) = -\frac{t_i}{F(t)} \quad \forall t \in U$$

folgt für die Immersion φ aus Teil (3)

$$\sqrt{g_\varphi(t)} = \sqrt{1 + \frac{\|t\|_2^2}{F(t)^2}} = \frac{r}{F(t)} \quad \forall t \in U.$$

Daher gilt für jedes $f \in L^1(M, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_M f &= \int_U f(t, \sqrt{r^2 - \|t\|_2^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - \|t\|_2^2}}\, dt \\ &= \int_{B_{n-1}(0,1)} f(rz, r\sqrt{1 - \|z\|_2^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|z\|_2^2}}\, dz, \end{aligned}$$

wobei wir die Transformation $t = rz$ auf $\mathbb{R}^{n-1}$ angewandt haben.

Seien $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to V$ ein C^α-Diffeomorphismus und $M \subset U$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α. Dann ist $F(M)$ ebenfalls eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α (Übungsaufgabe). Einen Transformationssatz analog zu Satz IX.5.6 (S. 53) kann man für die Integrale auf M und $F(M)$ nicht in der dortigen einfachen Form und Allgemeinheit angeben. Ist allerdings F die Komposition von Translationen, Rotationen oder Homothetien, so gibt es ein einfaches Analogon zu Satz IX.5.6 (S. 53).

SATZ X.3.8. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt der Klasse C^α. Die Diffeomorphismen $\tau_a, \rho, \Theta_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seien definiert durch*

(TRANSLATION) $\quad \tau_a(x) = a + x \quad (a \in \mathbb{R}^n$ *fest*$)$

(ROTATION) $\quad \rho(x) = Qx \quad (Q \in \mathcal{O}(n)$ *fest*$)$

(HOMOTHETIE) $\quad \Theta_r(x) = rx \quad (r \in \mathbb{R}_+^*$ *fest*$)$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} f \in L^1(M, \mathbb{R}) &\iff f \circ \tau_a^{-1} \in L^1(\tau_a(M), \mathbb{R}) \\ &\iff f \circ \rho^{-1} \in L^1(\rho(M), \mathbb{R}) \\ &\iff f \circ \Theta_r^{-1} \in L^1(\Theta_r(M), \mathbb{R}). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \int_{\tau_a(M)} f \circ \tau_a^{-1} &= \int_M f, \\ \int_{\rho(M)} f \circ \rho^{-1} &= \int_M f, \\ \int_{\Theta_r(M)} f \circ \Theta_r^{-1} &= r^k \int_M f. \end{aligned}$$

BEWEIS. Sei (U, φ, V) eine Karte von M. Dann sind $(U, \tau_a \circ \varphi, \tau_a(V))$, $(U, \rho \circ \varphi, \rho(V))$ und $(U, \Theta_r \circ \varphi, \Theta_r(V))$ Karten von $\tau_a(M)$, $\rho(M)$ und $\Theta_r(M)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} g_{\tau_a \circ \varphi} &= g_\varphi \\ g_{\rho \circ \varphi} &= \det(D(\rho \circ \varphi)^t D(\rho \circ \varphi)) \\ &= \det(D\varphi^t Q^t Q D\varphi) \\ &= g_\varphi \\ g_{\Theta_r \circ \varphi} &= \det(D(\Theta_r \circ \varphi)^t D(\Theta_r \circ \varphi)) \\ &= \det(r^2 D\varphi^t D\varphi) \\ &= r^{2k} g_\varphi. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Definition X.3.4 und Satz IX.5.6 (S. 53). □

Der folgende Satz ist eine interessante Variante des Satzes von Fubini, Satz IX.3.3.

Satz X.3.9. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dann ist für λ_1 fast alle $r \in \mathbb{R}_+^*$ die Funktion f auf der Sphäre $\partial B(0,r)$ integrierbar und es gilt*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \int_0^\infty \Big\{ \int_{\partial B(0,r)} f(y)ds(y) \Big\} dr \\ &= \int_0^\infty \Big\{ \int_{\partial B(0,1)} f(ry)ds(y) \Big\} r^{n-1} dr.\end{aligned}$$

Beweis. Seien

$$H^\pm = \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$$

der obere bzw. untere Halbraum. Da $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist, reicht es, die Behauptung für $f\chi_{H^\pm}$ zu beweisen. Wir betrachten nur $g = f\chi_{H^+}$. Der andere Fall ist völlig analog.
Sei $U = B_{n-1}(0,1) = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : \|u\|_2 < 1\}$. Wie man leicht nachrechnet, ist $\Phi : U \times \mathbb{R}_+^* \to H^+$ mit

$$\Phi(u,r) = (ru_1, \ldots, ru_{n-1}, r\sqrt{1 - \|u\|_2^2})$$

ein C^∞-Diffeomorphismus mit

$$D\Phi(u,r) = \begin{pmatrix} r\mathbb{E}_{n-1} & u \\ \frac{ru}{\sqrt{1-\|u\|_2^2}} & \sqrt{1-\|u\|_2^2} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\det D\Phi(u,r) &= r^{n-1}\sqrt{1-\|u\|_2^2} + r^{n-1}\frac{\|u\|_2^2}{\sqrt{1-\|u\|_2^2}} \\ &= \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|u\|_2^2}}.\end{aligned}$$

Aus Satz IX.3.3, Satz IX.5.6 (S. 53), Satz X.3.8 und Beispiel X.3.7 (4) folgt daher

$$\begin{aligned}\int_{H^+} g &= \int_0^\infty \Big\{ \int_U g(ru, r\sqrt{1-\|u\|_2^2}) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|u\|_2^2}} du \Big\} dr \\ &= \int_0^\infty \Big\{ \int_{\partial B(0,r)\cap H^+} g(y)ds(y) \Big\} dr \\ &= \int_0^\infty \Big\{ \int_{\partial B(0,1)\cap H^+} g(rz)ds(z) \Big\} r^{n-1} dr.\end{aligned}$$

□

Beispiel X.3.10. (1) Aus Satz X.3.8 folgt für $x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}_+^*$

$$\sigma_{n-1}(\partial B(x,r)) = r^{n-1}\sigma_{n-1}(S^{n-1}).$$

Sei $\tau_n = \sigma_{n-1}(S^{n-1})$ und $\omega_n = \lambda_n(B_n(0,1))$. Aus Beispiel IX.5.7(1) (S. 55) und Satz X.3.9 folgt

$$\begin{aligned}\omega_n &= \int_0^1 \sigma_{n-1}(S^{n-1}) r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{n}\tau_n\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\tau_n &= n\omega_n \\ &= n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.\end{aligned}$$

(2) Sei $F \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ROTATIONSSYMMETRISCH, d.h.

$$F(x) = f(\|x\|_2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

mit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Aus Satz X.3.9 folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F &= \int_0^\infty \tau_n f(r) r^{n-1} dr \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{\mathbb{R}} f(r) r^{n-1} dr.\end{aligned}$$

Im zweiten Teil dieses Abschnittes wollen wir den GAUSSSCHEN INTEGRALSATZ beweisen. Er verbindet das Integral über eine beschränkte Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ mit einem Integral über dem Rand ∂M von M. Für seine genaue Formulierung und den Beweis benötigen wir einige Notationen und Hilfsresultate.

DEFINITION X.3.11. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Es gebe zwei disjunkte Teilmengen $\partial_R K$ und $\partial_S K$ von ∂K mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\partial_R K$ ist relativ offen in ∂K.
(2) Zu jedem $x_0 \in \partial_R K$ existiert eine Umgebung U von x_0 in $\mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\psi \in C^1(U, \mathbb{R})$, derart dass jedes $x \in U$ regulärer Punkt von ψ ist und dass gilt

$$K \cap U = \{x \in U : \psi(x) \le 0\}.$$

(3) $\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-1} \lambda_n(\bigcup_{x \in \partial_S K} B(x;\varepsilon)) = 0.$
(4) $\partial K = \partial_R K \cup \partial_S K$.

Dann heißt K STÜCKWEISE GLATT BERANDET. Ist $\partial_S K = \emptyset$, so heißt K GLATT BERANDET. $\partial_R K$ und $\partial_S K$ heißen der REGULÄRE bzw. SINGULÄRE RAND von K.

Beispiel X.3.12. (1) Die Kugel $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ ist glatt berandet; die Funktion

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$$

leistet das Gewünschte.
(2) Der Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1\}$ ist stückweise glatt berandet mit

$$\begin{aligned}\partial_R Z = \{x \in \mathbb{R}^3 &: x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 < x_3 < 1\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 1\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_S Z = \{x \in \mathbb{R}^3 &: x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\} \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 1\}.\end{aligned}$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ \psi_2(x) &= -x_3 \\ \psi_3(x) &= x_3 - 1\end{aligned}$$

leisten das in Bedingung (2) Gewünschte. Für $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}\lambda_3\Big(\bigcup_{x\in\partial_S Z} B(x,\varepsilon)\Big) &= 2\lambda_3(\{x \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 1)^2 + x_3^2 \le \varepsilon^2\}) \\ &= 2\int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 + r\cos\theta) d\theta d\varphi dr \\ &= 2 \cdot (2\pi)^2 \int_0^\varepsilon r dr \\ &= 4\pi^2\varepsilon^2\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\lambda_3\Big(\bigcup_{x\in\partial_S z} B(x,\varepsilon)\Big) &= 4\pi^2\varepsilon \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Satz X.3.13. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und stückweise glatt berandet. Dann ist $\partial_R K$ eine Hyperfläche.*

Beweis. Seien $x_0 \in \partial_R K$ beliebig und U, ψ wie in Definition X.3.11. O.E. können wir $U \cap \partial_S K = \emptyset$ voraussetzen, da $\partial_R K$ relativ offen in ∂K ist. Wir zeigen, dass $\partial_R K \cap U = \psi^{-1}\backslash(\{0\})$ ist. Hieraus folgt dann die Behauptung.
Sei zunächst $x \in U$ mit $\psi(x) < 0$. Dann gibt es eine Umgebung V von

x mit $V \subset U$ und $\psi(y) < 0$ für alle $y \in V$. Also ist $V \subset K$ und damit x innerer Punkt von K. Dies zeigt $\partial_R K \cap U \subset \psi^{-1}(\{0\})$. Sei nun $x \in U$ mit $\psi(x) = 0$ und $v = \operatorname{grad} \psi(x) \neq 0$. Für hinreichend kleines t gilt dann

$$\begin{aligned} \psi(x + tv) &= \psi(x) + tD\psi(x)v + r(tv) \\ &= t\|v\|_2^2 + r(tv) \end{aligned}$$

mit $\lim\limits_{t\to 0} t^{-1} r(tv) = 0$. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned} \psi(x + tv) &> 0 \quad \forall 0 < t < \varepsilon \\ \psi(x + tv) &< 0 \quad \forall -\varepsilon < t < 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} x + tv &\notin K \quad \forall 0 < t < \varepsilon \\ x + tv &\in K \quad \forall -\varepsilon < t < 0. \end{aligned}$$

Also ist $x \in \partial K$ und wegen $U \cap \partial_S K = \emptyset$ aus $\partial_R K$. Mithin ist $\psi^{-1}(\{0\}) \subset \partial_R K \cap U$. □

Satz X.3.14. *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und stückweise glatt berandet. Zu jedem $x_0 \in \partial_R K$ existiert genau ein Vektor $\nu(x_0) \in \mathbb{R}^n$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $\nu(x_0) \in N_{x_0} \partial_R K$.
(2) $\|\nu(x_0)\|_2 = 1$.
(3) *Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit*

$$x_0 + t\nu(x_0) \notin K \quad \forall 0 < t < \varepsilon.$$

Der Vektor $\nu(x_0)$ heißt Äusserer Normalen-Einheitsvektor *von K im Punkt x_0.*

Beweis. Existenz: Seien $x_0 \in \partial_R K$ beliebig und U und ψ wie in Bedingung (2) von Definition X.3.11 mit $U \cap \partial_S K = \emptyset$. Aus dem Beweis von Satz X.3.13 folgt, dass $\nu(x_0) = \frac{\nabla\psi(x_0)}{\|\nabla\psi(x_0)\|_2}$ das Gewünschte leistet.
Eindeutigkeit: Da nach Satz X.2.2 (S. 74)

$$N_{x_0} \partial_R K = \operatorname{span}\{\nabla\psi(x_0)\}$$

ist, folgt

$$\nu(x_0) = \lambda \nabla\psi(x_0) \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wegen (2) ist $|\lambda| = \|\nabla\psi(x_0)\|_2^{-1}$. Wegen (3) folgt $\lambda > 0$. Also ist $\nu(x_0)$ eindeutig bestimmt. □

Bemerkung X.3.15. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und stückweise glatt berandet. Aus dem Beweis von Satz X.3.14 folgt, dass die Zuordnung $x \mapsto \nu(x)$ auf $\partial_R K$ stetig ist. Insbesondere ist $\partial_R K$ orientierbar.

Satz X.3.16. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \neq \emptyset$, und $f \in C_0^1(U, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $1 \le i \le n$*

$$\int_U \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx = 0.$$

Beweis. Sei $R > 0$ so, dass $\operatorname{supp}(f) \subset B_{\|\cdot\|_\infty}(0, R)$ ist. Indem wir f außerhalb U durch 0 fortsetzen, erhalten wir eine Funktion aus $C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit gleichem Träger. Für $1 \le i \le n$ folgt dann aus Satz X.3.3

$$\begin{aligned}
&\int_U \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx \\
&= \int_{B_{\|\cdot\|_\infty}(0,R)} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx \\
&= \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \Big\{ \int_{-R}^{R} \frac{\partial}{x_i} f(x) dx_i \Big\} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Satz X.3.17. *Seien $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (\alpha, \beta)$, $\alpha < \beta$, $g \in C^1(U', \mathbb{R})$ mit $g(U') \subset I$ und*

$$\begin{aligned}
A &= \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\} \\
M &= \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $f \in C_0^1(U' \times I, \mathbb{R})$ und alle $1 \le i \le n$

$$\int_A \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) dx = \int_M f(x) \nu_i(x) dS(x),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\nu_i(x) &= -(1 + \|\nabla g(x')\|_2^2)^{-1/2} \frac{\partial g(x')}{\partial x_i}, \quad 1 \le i \le n-1 \\
\nu_n(x) &= (1 + \|\nabla g(x')\|_2^2)^{-1/2}
\end{aligned}$$

ist.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass gemäß Beispiel X.3.7 (3) M eine Hyperfläche und die Gramsche Determinante gleich $1 + \|\nabla g(x')\|_2^2$ ist.
Fall $1 \le i \le n-1$: Definiere $F : U' \times I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x', z) = \int_\alpha^z f(x', x_n) dx_n.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f(x', z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x', z) = \int_\alpha^z \frac{\partial}{\partial x_i} f(x', z) dx_n$$

und daher

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} F(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') \\
&= \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x', x_n) dx_n \\
&\quad + f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x').
\end{aligned}$$

Da die Funktion $x' \mapsto F(x', g(x'))$ kompakten Träger in U' hat, folgt aus Satz X.3.16

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) dx' = 0.$$

Damit folgt aus Satz X.3.3

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx &= \int_{U'} \Big\{ \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x', x_n) dx_n \Big\} dx' \\
&= \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_i} F(x', g(x')) dx' \\
&\quad - \int_{U'} f(x', g(x')) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x') dx' \\
&= \int_M f(x) \nu_i(x) dS(x).
\end{aligned}$$

Fall $i = n$: Es ist wegen Satz X.3.3 und $\mathrm{supp}(f) \Subset U' \times I$

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) dx &= \int_{U'} \Big\{ \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', x_n) dx_n \Big\} dx' \\
&= \int_{U'} \Big\{ f(x', g(x')) - \underbrace{f(x', \alpha)}_{=0} \Big\} dx' \\
&= \int_{U'} f(x', g(x')) dx' \\
&= \int_M f(x) \nu_n(x) dS(x).
\end{aligned}$$

$\square$

DEFINITION X.3.18. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist die DIVERGENZ von f definiert durch

$$\nabla \cdot f = \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

SATZ X.3.19 (GAUSSSCHER INTEGRALSATZ). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und stückweise glatt berandet mit $\sigma_{n-1}(\partial_R K) < \infty$. Dann gilt für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $K \subset U$ und jedes $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$*

$$\int_K \operatorname{div} f dx = \int_{\partial_R K} (f, \nu) dS(x),$$

wobei ν das äußere Einheits-Normalenfeld an $\partial_R K$ ist.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da K kompakt ist, gibt es Zahlen $1 < m_0 < m_R < m_S$ und offene Mengen $U_i, 1 \le i \le m_S$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $K \subset \bigcup_{i=1}^{m_S} U_i$.
(2) $U_i \subset \overset{\circ}{K}$ für alle $1 \le i \le m_0$.
(3) $U_i \cap \partial_S K = \emptyset$ für alle $m_0 < i \le m_R$ und nach einer eventuellen Koordinatentransformation hat U_i die Gestalt $U_i = U' \times I$ mit $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ und
$$U_i \cap K = \{(x', x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\}$$
für ein $g \in C^1(U', \mathbb{R})$ mit $g(U') \subset I$.
(4) $U_i = B(x_i, \varepsilon)$ mit $x_i \in \partial_S K$ für alle $m_R < i \le m_S$.

Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_S}$ eine Partition der Eins auf K, die $U_1, \ldots, U_{m_S}$ untergeordnet ist. Definiere

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=m_R+1}^{m_S} \alpha_i.$$

Für $1 \le j \le m_0$ folgt aus Satz X.3.16 angewandt auf die Komponenten von $\alpha_j f$

$$\int_K \operatorname{div}(\alpha_j f) dx = 0 = \int_{\partial_R K} (\alpha_j f, \nu) dS.$$

Für $m_0 < j \le m_R$ folgt aus Satz X.3.17 angewandt auf die Komponenten von $\alpha_j f$

$$\int_K \operatorname{div}(\alpha_j f) dx = \int_{\partial_R K} (\alpha_j f, \nu) dS.$$

Summation über $j = 1, \ldots, m_R$ liefert wegen

$$\sum_{j=1}^{m_R} \alpha_j = 1 - \varphi_\varepsilon \text{ auf } K$$

die Identität

$$(*) \qquad \int_K \operatorname{div}((1-\varphi_\varepsilon)f)dx = \int_{\partial_R K} ((1-\varphi_\varepsilon)f, \nu)dS.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $((1-\varphi_\varepsilon)f, \nu)$ punktweise auf $\partial_R K$ gegen (f, ν) und ist für jedes $\varepsilon > 0$ beschränkt durch die integrierbare Funktion $\|f\|_{C^0(K,\mathbb{R}^n)}\chi_{\partial_R K}$. Damit folgt aus Satz X.3.6

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial_R K} ((1-\varphi_\varepsilon)f, \nu)dS = \int_{\partial_R K} (f, \nu)dS.$$

Aus Bemerkung IX.6.8 (S. 65) und Eigenschaft (3) von Definition X.3.11 folgt andererseits

$$\begin{aligned} &|\int_K \operatorname{div} f dx - \int_K \operatorname{div}((1-\varphi_\varepsilon)f)dx| \\ &= |\int_K \varphi_\varepsilon \operatorname{div} f dx + \int_K (f, \nabla\varphi_\varepsilon)dx| \\ &\le \|\operatorname{div} f\|_{C^0(K,\mathbb{R})}\lambda_n(\bigcup_{x\in\partial_S K} B(x,\varepsilon)) \\ &\quad + c_1\|f\|_{C^0(K,\mathbb{R}^n)}\varepsilon^{-1}\lambda_n(\bigcup_{x\in\partial_S K} B(x,\varepsilon)) \\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ in $(*)$. □

Bemerkung X.3.20. (1) Die Voraussetzungen an K und f in Satz X.3.19 können wesentlich abgeschwächt werden.
(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in U$. Aus Satz X.3.19 folgt

$$\operatorname{div} f(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\lambda_n(B(x_0,\varepsilon))} \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} (f, \nu)dS.$$

Die Divergenz von f in x_0 ist also physikalisch der Fluss pro Volumeneinheit durch die Oberfläche einer beliebig kleinen Kugel um x_0.

Beispiel X.3.21. (1) Sei $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1\}$ und

$$f(x) = (x_2x_3, x_1x_3, x_1^2 + x_2^2).$$

Dann ist

$$\operatorname{div} f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

und

$$\int_Z \operatorname{div} f = 0.$$

Auf dem Mantel von Z ist $\nu(x) = (x_1, x_2, 0)$ und

$$\begin{aligned}\int_{\text{Mantel}} (f,\nu) dS &= \int_{\text{Mantel}} 2x_1x_2x_3 dS \\ &= \int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} 2z \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \Big\} dz \\ &= 0.\end{aligned}$$

Auf dem Boden von Z ist $\nu(x) = (0, 0, -1)$ und

$$\begin{aligned}\int_{\text{Boden}} (f,\nu) &= -\int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi \Big\} dr \\ &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Auf dem Deckel von Z ist schließlich $\nu(x) = (0, 0, 1)$ und

$$\begin{aligned}\int_{\text{Deckel}} (f,\nu) &= \int_0^1 \Big\{ \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi \Big\} dr \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(2) Für $K = \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$ und $f(x) = x$ ergibt sich

$$\begin{aligned}n\lambda_n(\overline{B(0,1)}) &= \int_{\overline{B(0,1)}} \operatorname{div} f dx \\ &= \int_{\partial B(0,1)} (f,\nu) dS \\ &= \sigma_{n-1}(S^{n-1}).\end{aligned}$$

Damit haben wir die Formel aus Beispiel X.3.10 (1) auf andere Weise bewiesen.

(3) Der Körper K sei ganz in eine Flüssigkeit der konstanten Dichte $\rho > 0$, deren Oberfläche mit der Ebene $x_3 = 0$ zusammenfalle, eingetaucht. K erfülle die Voraussetzungen von Satz X.3.19. Die Flüssigkeit übt im Punkt $x \in \partial_R K$ auf K den Druck $\rho x_3 \nu(x)$ aus, wobei $\nu(x)$ der äußere Normalen-Einheitsvektor ist (der Druck ist also nach innen gerichtet!). Die Kraft $F = (F_1, F_2, F_3)$, die auf K wirkt, ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}F_i &= \int_{\partial_R K} \rho x_3 \nu_i(x) dS(x) \\ &= \int_K \rho \frac{\partial x_3}{\partial x_i} dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 1, 2 \\ \rho\lambda_3(K) & \text{falls } i = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Der Körper erfährt also einen Auftrieb in x_3-Richtung, dessen Betrag gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist (Archimedisches Prinzip).

Definition X.3.22. (1) Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $a \times b$ definiert durch

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

(2) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt mit stückweise glattem Rand und $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann heißt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(x) = (\nabla \varphi(x), \nu(x)) \quad \forall x \in \partial_R K$$

die Normalenableitung von φ auf $\partial_R K$ und

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

der Laplace von f.
(3) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann heißt

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$$

die Rotation von f.

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes kann man verschiedene Formeln für die Ableitungen von Funktionen herleiten, von denen wir einige im folgenden Satz angeben.

Satz X.3.23. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt mit stückweise glattem Rand und $\sigma_{n-1}(\partial_R K) < \infty$.*

(1) *Für $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(U, \mathbb{R})$ gilt*

$$\int_K \Delta f g = -\int_K (\nabla f, \nabla g) + \int_{\partial_R K} \frac{\partial f}{\partial \nu} g.$$

(2) *Für $f, g \in C^2(U, \mathbb{R})$ gilt die* Greensche Formel

$$\int_K \{\Delta f g - f \Delta g\} = \int_{\partial_R K} \{\frac{\partial f}{\partial \nu} g - \frac{\partial g}{\partial \nu} f\}.$$

(3) *Für $n = 3$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ gilt*

$$\int_K \operatorname{rot} f = -\int_{\partial_R K} f \times \nu.$$

Beweis. ad (1): Aus Satz X.3.19 folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial_R K} \frac{\partial f}{\partial \nu} g &= \int_{\partial_R K} (g \nabla f, \nu) \\ &= \int_K \operatorname{div}(g \nabla f) \\ &= \int_K (\nabla f, \nabla g) + \int_K \Delta f g.\end{aligned}$$

AD (2): Vertausche f und g in (1) und subtrahiere die beiden Gleichungen.
AD (3): Aus Satz X.3.19 folgt

$$\begin{aligned}\int_K (\operatorname{rot} f)_1 &= \int_K \partial_2 f_3 - \int_K \partial_3 f_2 \\ &= \int_K \operatorname{div}(f_3 e_2) - \int_K \operatorname{div}(f_2 e_3) \\ &= \int_{\partial_R K} f_3 \nu_2 - \int_{\partial_R K} f_2 \nu_3 \\ &= -\int_{\partial_R K} (f \times \nu)_1.\end{aligned}$$

Analog für die anderen Komponenten. □

X.4. Multilineare Algebra

Im Folgenden seien V, W stets $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir knüpfen an die Abschnitte VII.1 und VII.4 an, in denen wir stetige, lineare bzw. multilineare Abbildungen betrachtet haben. Zur Abkürzung definieren wir

$$V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R}),$$

den DUALRAUM von V, und bezeichnen mit

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : &V^* \times V \to \mathbb{R} \\ &(\varphi, r) \mapsto \langle \varphi, r \rangle = \varphi(r)\end{aligned}$$

die DUALE PAARUNG zwischen V und V^*. Ist $n = \dim V < \infty$, so folgt aus Satz VII.1.10 (S. 49, Analysis II)

$$V^* \cong \mathbb{R}^n.$$

Ist insbesondere $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so ist $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in V^*$ mit

$$\langle \varepsilon_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \rangle = \alpha_i \qquad \forall v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in V$$

eine Basis von V^*. Wir nennen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die DUALBASIS zu $e_1, \ldots, e_n$. Insbesondere ist

$$\langle \varepsilon_i, e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Schließlich erinnern wir an die Definition VII.4.5 (S. 66, Analysis II) des Raumes $\mathcal{L}^r(V, \mathbb{R})$ der stetigen, r-linearen Abbildungen von V in $\mathbb{R}$.

DEFINITION X.4.1. (1) Sei $r \geq 2$. Eine stetige, r-lineare Abbildung $\alpha \in \mathcal{L}^r(V, \mathbb{R})$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad \alpha(v_1, \ldots, v_r) = 0 \quad \text{falls } v_i = v_j \text{ für ein Paar } (i, j) \text{ mit } i \neq j$$

heißt ALTERNIERENDE r-FORM.
(2) Definiere

$$\Lambda^0(V) = \mathbb{R},$$
$$\Lambda^1(V) = V^*,$$
$$\Lambda^r(V) = \{\alpha \in \mathcal{L}^r(V, \mathbb{R}) : \alpha \text{ ist alternierende } r - \text{Form}\},\ r \geq 2.$$

(3) σ_r bezeichnet die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, r\}$.

BEISPIEL X.4.2. Durch

$$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n \mapsto \det(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}$$

wird eine alternierende n-Form auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

BEMERKUNG X.4.3. (1) Für $r \geq 2$ und $\alpha \in \mathcal{L}^r(V, \mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\alpha \in \Lambda^r(V, \mathbb{R})$.

(ii) $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_r)$
$\forall v_1, \dots, v_r \in V, \sigma \in \sigma_r$.

(iii) $\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_r) = -\alpha(v_1, \dots, v_k, \dots, v_i, \dots, v_r)$
$\forall v_1, \dots, v_r \in V, i \neq k$.

(2) Ist $\alpha \in \Lambda^r(V, \mathbb{R})$ und sind $v_1, \dots, v_r \in V$ linear abhängig, $r \geq 2$, so ist

$$\alpha(v_1, \dots, v_r) = 0.$$

Insbesondere ist $\Lambda^r(V) = \{0\}$, falls $r > \dim V$ ist.
(3) $\Lambda^r(V)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^r(V, \mathbb{R})$.

BEWEIS. AD (1): „(i) $\Longrightarrow$ (iii)“: Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ und $1 \leq i < k \leq r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + v_k, v_{i+1}, \dots, v_{k-1}, v_i + v_k, v_{k+1}, \dots, v_r) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_r) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_r) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_k, \dots, v_i, \dots, v_r) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_k, \dots, v_k, \dots, v_r) \\ &= \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k, \dots, v_r) \\ &\quad + \alpha(v_1, \dots, v_k, \dots, v_i, \dots, v_r). \end{aligned}$$

„(iii) $\Longrightarrow$ (i)“: Ist offensichtlich.
„(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)“: Ist offensichtlich, da jede Permutation Komposition von endlich vielen Vertauschungen ist.
AD (2): Folgt direkt aus der Linearität von α und der Eigenschaft $(*)$.
AD (3): Ist offensichtlich. $\square$

DEFINITION X.4.4. Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in V^*, r \geq 2$. Dann wird durch

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r(v_1, \dots, v_r) = \det\Big((\langle \varphi_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq r} \Big) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in V$$

eine alternierende r-Form definiert. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r$ heißt das ÄUSSERE PRODUKT von $\varphi_1, \dots, \varphi_r$.

SATZ X.4.5. *Sei $n = \dim V < \infty$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V. Sei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die Dualbasis zu $e_1, \dots, e_n$ und $1 \leq r \leq n$. Dann ist*

$$\{\varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_r} : 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n\}$$

eine Basis von $\Lambda^r(V)$. Insbesondere ist

$$\dim \Lambda^r(V) = \binom{n}{r}.$$

BEWEIS. Definiere zur Abkürzung

$$I_r = \{(j) = (j_1, \dots, j_r) : 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n\}$$
$$\varepsilon_{(j)} = \varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_r} \qquad \forall (j) \in I_r.$$

1. SCHRITT: Seien $\alpha \in \Lambda^r(V)$ und $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann ist

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \langle \varepsilon_j, v_i \rangle e_j \quad \forall 1 \leq i \leq r.$$

Wegen der Multilinearität von α und Bemerkung X.4.3 (1) folgt

$$\begin{aligned}
&\alpha(v_1, \dots, v_r) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_r=1}^{n} \Big\{ \langle \varepsilon_{k_1}, v_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \varepsilon_{k_r}, v_r \rangle \cdot \alpha(e_{k_1}, \dots, e_{k_r}) \Big\} \\
&= \sum_{(j) \in I_r} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \sum_{\sigma \in \sigma_r} \operatorname{sgn}(\sigma) \langle \varepsilon_{i_{\sigma(1)}}, v_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle \varepsilon_{j_{\sigma(r)}}, v_r \rangle \\
&= \sum_{(j) \in I_r} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \det\Big((\langle \varepsilon_{j_\rho}, v_\tau \rangle)_{1 \leq \rho, \tau \leq r} \Big) \\
&= \sum_{(j) \in I_r} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) \varepsilon_{(j)}(v_1, \dots, v_r).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\alpha = \sum_{(j) \in I_r} \alpha_{(j)} \varepsilon_{(j)}$$

mit

$$\alpha_{(j)} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}).$$

2. SCHRITT: Sei $\alpha = \sum_{(j) \in I_r} b_{(j)} \varepsilon_{(j)}$ mit $b_{(j)} \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen:

$$b_{(j)} = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}).$$

Sei dazu $(k) \in I_r$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\alpha(e_{k_1}, \ldots, e_{k_r}) \\
&= \sum_{(j)\in I_r} b_{(j)}\varepsilon_{(j)}(e_{k_1}, \ldots, e_{k_r}) \\
&= \sum_{(j)\in I_r} b_{(j)} \det\Big((\langle \varepsilon_{j_\rho}, e_{k_\tau}\rangle)_{1\le\rho,\tau\le r}\Big) \\
&= \sum_{(j)\in I_r} b_{(j)} \det\Big((\delta_{j_\rho k_\tau})_{1\le\rho,\tau\le r}\Big) \\
&= b_{(k)}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung. □

Satz X.4.6. *Sei $n = \dim V < \infty$ und $r, s, t \in \mathbb{N}^*$.*

(1) *Es gibt genau eine Abbildung*

$$\begin{aligned}
\wedge : \Lambda^r(V) \times \Lambda^s(V) &\to \Lambda^{r+s}(V) \\
(\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \wedge \beta,
\end{aligned}$$

genannt Äusseres Produkt, *mit folgenden Eigenschaften:*
  (a) $\wedge$ *ist bilinear.*
  (b) *Für $\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s \in V^*$ ist*

$$\begin{aligned}
&(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_s) \\
&= \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_s.
\end{aligned}$$

(2) *Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ die zugehörige Dualbasis, so gilt für $\alpha = \sum_{(j)\in I_r} \alpha_{(j)}\varepsilon_{(j)} \in \Lambda^r(V)$ und $\beta = \sum_{(k)\in I_s} \beta_{(k)}\varepsilon_{(k)} \in \Lambda^s(V)$:*

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{(j)\in I_r \\ (k)\in I_s}} \alpha_{(j)}\beta_{(k)}\varepsilon_{(j)} \wedge \varepsilon_{(k)}.$$

(3) *Für $\alpha \in \Lambda^r(V), \beta \in \Lambda^s(V)$ ist*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs}\beta \wedge \alpha.$$

(4) *Für $\alpha \in \Lambda^r(V)$, $\beta \in \Lambda^s(V)$, $\gamma \in \Lambda^t(V)$ ist*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

Beweis. ad (1): Wegen Satz X.4.5 wird $\wedge$ durch die Eigenschaften (a) und (b) eindeutig bestimmt.
ad (2): Folgt direkt aus (a) und (b).
ad (3): Folgt aus Bemerkung X.4.3 (2), da die Permutation $\sigma \in \sigma_{r+s}$ mit

$$(1, \ldots, r, r+1, \ldots, r+s) \mapsto (r+1, \ldots, r+s, 1, \ldots, r)$$

das Signum $(-1)^{rs}$ hat.
AD (4): Folgt direkt aus (a) und (b). □

BEMERKUNG X.4.7. (1) Es ist nützlich, das äußere Produkt auch im Fall $r = 0$ oder $s = 0$ zu definieren. Dazu setzt man für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \Lambda^k(V)$

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \alpha\beta.$$

(2) $\Lambda(V) = \bigoplus_{r \geq 0} \Lambda^r(V)$ heißt ÄUSSERE oder GRASSMANNSCHE ALGEBRA von V. $\wedge$ wird auf kanonische Weise auf $\Lambda(V)$ fortgesetzt. $\Lambda(V)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 2^n mit $n = \dim V$. $(\Lambda(V), \wedge)$ ist eine Algebra mit Eins.

DEFINITION X.4.8. Seien $h \in \mathcal{L}(V, W)$, $\alpha \in \Lambda^r(W)$ und $r \geq 0$.

(1) Für $r = 0$ definieren wir $h * \alpha \in \Lambda^0(V)$ durch

$$h * \alpha = \alpha.$$

(2) Für $r > 0$ definieren wir $h * \alpha \in \Lambda^r(V)$ durch

$$h * \alpha(v_1, \ldots, v_r) = \alpha(h(v_1), \ldots, h(v_r)) \; \forall v_1, \ldots, v_r \in V.$$

$h * \alpha$ heißt der PULL-BACK oder RÜCKTRANSPORT von α mittels h.

BEMERKUNG X.4.9. (1) Es ist $h* \in \mathcal{L}(\Lambda^r(W), \Lambda^r(V))$ und es gilt

$$V \xrightarrow{h} W$$
$$\Lambda^r(V) \xleftarrow{h*} \Lambda^r(W).$$

Im Fall $r = 1$ ist $h*$ die zu h adjungierte Abbildung:

$$h * \alpha(v) = \langle \alpha, h(v) \rangle = \langle h * \alpha, v \rangle \quad \forall v \in V, \alpha \in W^*.$$

(2) Es gilt

$$\begin{aligned} id* &= id, \\ (k \circ h)* &= (h*) \circ (k*), \\ h \in \operatorname{Isom}(V, W) &\Longrightarrow h* \in \operatorname{Isom}(\Lambda^r(W), \Lambda^r(V)), \\ (h*)^{-1} &= (h^{-1}) * . \end{aligned}$$

(3) Es gilt

$$h * (\alpha \wedge \beta) = (h * \alpha) \wedge (h * \beta)$$
$$\forall h \in \mathcal{L}(V, W), \alpha \in \Lambda^r(W), \beta \in \Lambda^s(W).$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt direkt aus der Definition des pullbacks. □

SATZ X.4.10. *Seien* $n = \dim(V) < \infty$, $h \in \mathcal{L}(V, V)$ *und* $\alpha \in \Lambda^n(V)$. *Dann gilt*

$$h * \alpha = \det(h)\alpha.$$

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V und $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die zugehörige Dualbasis. Sei $(h_{jk})_{1 \le j,k \le n}$ die Matrix von h bzgl. $e_1, \dots, e_n$, d.h.,

$$h(e_k) = \sum_{j=1}^{n} h_{jk} e_j \quad \forall 1 \le k \le n.$$

Dann folgt mit Bemerkung X.4.3 (1)

$$\begin{aligned} & h * \alpha(e_1, \dots, e_n) \\ &= \alpha(h(e_1), \dots, h(e_n)) \\ &= \sum_{j_1=1}^{n} \dots \sum_{j_n=1}^{n} h_{j_1 1} \dots h_{j_n n} \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \sigma_n} h_{\sigma(1)1} \dots h_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(e_1, \dots, e_n) \\ &= \det(h) \alpha(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung wegen $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$. □

X.5. Differentialformen

Im Folgenden ist stets $n \in \mathbb{N}^*$, $r, s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Wir bezeichnen mit $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ und mit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ die zugehörige Dualbasis.

Definition X.5.1. (1) Eine Abbildung $\alpha \in C^k(U, \Lambda^r(\mathbb{R}^n))$ heißt Differentialform vom Grade r auf U der Klasse C^k, kurz r-Form.
(2) Wir setzen

$$\begin{aligned} \Omega_k^r(U) &= \{\alpha : \alpha \text{ ist } r\text{-Form der Klasse } C^k \text{ auf } U\}, \\ \Omega^r(U) &= \Omega_0^r(U). \end{aligned}$$

(3) $\wedge : \Omega_k^r(U) \times \Omega_k^s(U) \to \Omega_k^{r+s}(U)$ mit $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$ und $(\alpha \wedge \beta)(z) = \alpha(z) \wedge \beta(z)$ für alle $z \in U$ heißt Äussere Multiplikation oder Äusseres Produkt.

Bemerkung X.5.2. (1) Definition X.5.1 ist sinnvoll, da gemäß Abschnitt X.4 $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ ein normierter Vektorraum ist.
(2) Es ist $\Omega_k^0(U) = C^k(U)$ und $\Omega_k^r(U) = \{0\}$ für alle $r > n$.
(3) $\Omega_k^r(U)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ein $C^k(U)$ Modul bzgl. der Multiplikation $(f, \alpha) \mapsto f\alpha = f \wedge \alpha$.
(4) Es ist $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$ für alle $\alpha \in \Omega^r(U)$, $\beta \in \Omega^s(U)$.
(5) $\Omega_k(U) = \bigoplus\limits_{r \ge 0} \Omega_k^r(U)$ heißt die Algebra der C^k-Differentialformen, wobei $\wedge$ die Algebra-Multiplikation ist.
(6) Ist $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R})$, so ist $Df \in C^k(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) \cong C^k(U, \mathbb{R}^{n*}) = C^k(U, \Lambda^1(\mathbb{R}^n))$. Daher kann Df als 1-Form aufgefasst werden. In diesem Fall schreiben wir zur Unterscheidung df und nennen dies das totale

Differential von f. Ist insbesondere $f = pr_j$ die Projektion auf die j-te Variable, d.h.,

$$f(z) = z_j \quad \forall z \in U, 1 \le j \le n,$$

so schreiben wir

$$dx_j = dpr_j, \quad 1 \le j \le n.$$

Wegen

$$Dpr_j(z) = v_j \quad \forall z \in U, v \in \mathbb{R}^n, 1 \le j \le n$$

ist

$$dx_j(z) = \varepsilon_j \quad \forall z \in U, 1 \le j \le n,$$

so dass wegen Satz X.4.5 (S. 100) $dx_1, \dots, dx_n$ eine Basis von $\Omega^1(U)$ bilden. Für $f \in C^{k+1}(U)$ ist dann

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Physikalisch beschreibt df das totale Inkrement der Funktion f. Man vergleiche hierzu Bemerkung VI.3.2 (S. 21, Analysis II).

Satz X.5.3. *Sei $1 \le r \le n$. $\{dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r} : 1 \le j_1 < \dots < j_r \le n\}$ ist eine Basis von $\Omega^r(U)$, d.h. jedes $\alpha \in \Omega^r(U)$ besitzt eine eindeutige Darstellung*

$$\alpha = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_r \le n} a_{j_1 \dots j_r} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_r}$$

mit $a_{j_1 \dots j_r} \in C(U, \mathbb{R})$. Insbesondere gilt

$$\alpha \in \Omega_k^r(U) \iff a_{j_1 \dots j_r} \in C^k(U, \mathbb{R}) \quad \forall 1 \le j_1 < \dots < j_r \le n.$$

Beweis. Folgt wegen

$$dx_j(z) = \varepsilon_j \quad \forall z \in U, 1 \le j \le n$$

aus Satz X.4.5 (S. 100). □

Beispiel X.5.4. (1) Sei $n = 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha \in \Omega^1(U) &\iff \alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2, \quad a_1, a_2 \in C(U, \mathbb{R}), \\ \alpha \in \Omega^2(U) &\iff \alpha = a_{12} dx_1 \wedge dx_2, \quad a_{12} \in C(U, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(2) Sei $n = 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha \in \Omega^1(U) &\iff \alpha = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3, \\ &\qquad a_1, a_2, a_3 \in C(U, \mathbb{R}), \\ \alpha \in \Omega^2(U) &\iff \alpha = a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2, \\ &\qquad a_1, a_2, a_3 \in C(U, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

$$\alpha \in \Omega^3(U) \iff \alpha = a dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \quad a \in C(U, \mathbb{R}).$$

(3) Sei $n \geq 2$. Dann gilt

$$\alpha \in \Omega^1(U) \iff \alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i, \quad a_i \in C(U, \mathbb{R}),$$
$$\alpha \in \Omega^{n-1}(U) \iff \alpha = \sum_{i=1}^n a_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$
$$a_i \in C(U, \mathbb{R}),$$

wobei $dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$ bedeutet, dass der Term dx_i fehlt. Wir verwenden im Folgenden stets $\{(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n : 1 \leq i \leq n\}$ als Basis von $\Omega^{n-1}(U)$.
(4) Sei $n \geq 2$ und $f \in C(U, \mathbb{R})$, $u \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Dann entsprechen f die 0- und die n-Form

$$\alpha_{0,f} = f,$$
$$\alpha_{n,f} = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

und u die 1- und die $(n-1)$-Form

$$\alpha_{1,u} = \sum_{i=1}^n u_i dx_i,$$
$$\alpha_{n-1,u} = \sum_{i=1}^n u_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Definition X.5.5. Seien $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $h \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^m)$ mit $h(U) \subset V$ und $\alpha \in \Omega_k^r(V)$. Dann definieren wir den pull-back oder Rücktransport $h * \alpha \in \Omega_k^r(U)$ von α mittels h durch

$$\begin{aligned} &(h * \alpha)(z)(v_1, \ldots, v_r) \\ &= [Dh(z)] * \alpha(h(z))(v_1, \ldots, v_r) \\ &= \alpha(h(z))(Dh(z)v_1, \ldots, Dh(z)v_r) \quad \forall z \in U, v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Aus Definition X.5.5, Definition X.4.8 (S. 102), Bemerkung X.4.9 (S. 102) und Satz X.4.10 (S. 102) folgt unmittelbar:

Bemerkung X.5.6. (1) $h * (\alpha \wedge \beta) = (h * \alpha) \wedge (h * \beta)$.
(2) Es gilt

$$h * dx_j = dh_j \quad , 1 \leq j \leq n,$$
$$h * f = f \circ h.$$

(3) Es gilt

$$\begin{aligned} &h * (dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}) \\ &= dh_{j_1} \wedge \ldots \wedge dh_{j_r} \quad , 1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq m, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h*(&\sum_{1\le j_1<\ldots j_r\le m} a_{j_1\ldots j_r}dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_r}) \\ =&\sum_{1\le j_1<\ldots j_r\le m} a_{j_1\ldots j_r}\circ h\;\, dh_{j_1}\wedge\ldots\wedge dh_{j_r}. \end{aligned}$$

(4) Falls $n=m$ ist, gilt

$$\begin{aligned} h*(dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n) &= dh_1\wedge\ldots\wedge dh_n \\ &= \det(Dh)dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n. \end{aligned}$$

(5) Es gilt

$$\begin{aligned} &h\in C^{k+1}(U,\mathbb{R}^m), h(U)\subset V \\ \Longrightarrow &h*\in\mathcal{L}(\Omega_k^r(V),\Omega_k^r(U)) \;\text{ falls } r\ge 1, \\ &h*\in\mathcal{L}(C^{k+1}(V),C^{k+1}(U)) \;\text{ falls } r=0. \end{aligned}$$

(6) Es ist $(k\circ h)*=(h*)\circ(k*)$ und $id_{\mathbb{R}^n}*=id_{\Omega(U)}$.

Beispiel X.5.7. Sei $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definiert durch

$$h(r,\varphi)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} dh_1 &= \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi \\ dh_2 &= \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Seien $V\subset\mathbb{R}^2$ offen, $U=h^{-1}(V)$ und

$$\begin{aligned} \alpha &= fdx_1+gdx_2\in\Omega_k^1(V) \\ \beta &= Fdx_1\wedge dx_2 \quad \in\Omega_k^2(V). \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} h*\alpha &= [\cos\varphi\cdot f\circ h+\sin\varphi\cdot g\circ h]dr \\ &\qquad +[r\cos\varphi\cdot g\circ h - r\sin\varphi\cdot f\circ h]d\varphi, \\ h*\beta &= r\cdot F\circ h\;\, dr\wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Definition X.5.8. Seien $r\ge 1$ und

$$\alpha=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_r\le n} a_{j_1\ldots j_r}dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_r}\in\Omega_{k+1}^r(U).$$

Dann heißt

$$d\alpha=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_r\le n} da_{j_1\ldots j_r}\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_r}\in\Omega_k^{r+1}(U)$$

die Äussere Ableitung oder das Differential von α.

Beispiel X.5.9. Wir verwenden die Bezeichnungen von Beispiel X.5.4. Seien $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ und $u \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} df &= d\alpha_{0,f} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\ &= \alpha_{1,\operatorname{grad} f} \\ d\alpha_{n-1,u} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} du_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \Big\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \Big\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big\} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ &= \alpha_{n,\operatorname{div} u}. \end{aligned}$$

Ist speziell $n = 3$, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} d\alpha_{1,u} &= d(u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3) \\ &= du_1 \wedge dx_1 + du_2 \wedge dx_2 + du_3 \wedge dx_3 \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \Big(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{x_3} \Big) dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + \Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \Big) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \Big(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \alpha_{2,\operatorname{rot} u}. \end{aligned}$$

Satz X.5.10. *Die Abbildung $d : \Omega^r_{k+1}(U) \to \Omega^{r+1}_k(U)$ hat folgende Eigenschaften:*

(1) $d \in \mathcal{L}(\Omega^r_{k+1}(U), \Omega^{r+1}_k(U))$.
(2) $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (d\beta)$ *für alle* $\alpha \in \Omega^r_1(U)$, $\beta \in \Omega^s_1(U)$ (Produktregel).
(3) $d^2 = d \circ d = 0$.

(4) *Ist* $h \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$, *so ist*

$$(h*) \circ d = d \circ (h*).$$

Beweis. ad (1): Ist offensichtlich.
ad (2): Seien $(j) = (j_1, \ldots, j_r)$ mit $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ und $(k) = (k_1, \ldots, k_s)$ mit $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$ und

$$\alpha = adx_{(j)} = adx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}$$
$$\beta = bdx_{(k)} = bdx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_s}.$$

Fall 1: (j) und (k) haben einen Index gemeinsam. Aus Satz X.4.6 (S. 101) folgt

$$\alpha \wedge \beta = abdx_{(j)} \wedge dx_{(k)} = 0$$

und

$$\begin{aligned} (d\alpha) \wedge \beta &= bda \wedge dx_{(j)} \wedge dx_{(k)} \\ &= 0 \\ \alpha \wedge (d\beta) &= adx_{(j)} \wedge db \wedge dx_{(k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fall 2: (j) und (k) sind disjunkt.
Aus Bemerkung X.5.2 und Satz X.5.3 folgt dann

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(abdx_{(j)} \wedge dx_{(k)}) \\ &= d(ab) \wedge dx_{(j)} \wedge dx_{(k)} \\ &= [b(da) + a(db)] \wedge dx_{(j)} \wedge dx_{(k)} \\ &= bda \wedge dx_{(j)} \wedge dx_{(k)} \\ &\quad + (-1)^r adx_{(j)} \wedge db \wedge dx_{(k)} \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (d\beta). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung zusammen mit der Linearität von d.
ad (3): Sei $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Aus Satz VII.4.18(2) (S. 71, Analysis II) folgt

$$\begin{aligned} d^2 f &= d\Big(\sum_{i=1}^n D_i f dx_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n d(D_i f) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_j D_i f dx_j \wedge dx_i \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (D_i D_j f - D_j D_i f) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei nun $1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n$ und $a \in C^2(U, \mathbb{R})$. Aus Obigem und Teil (2) folgt

$$\begin{aligned}
&d^2(adx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}) \\
&= d(da \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r}) \\
&= d^2 a \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r} \\
&\quad - da \wedge (d1) \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_r} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mit der Linearität von d.
AD (4): Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Grad r der Differentialformen.
„$r = 0$:“ Seien $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $h \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$ mit $h(U) \subset V$. Dann ist nach Satz VII.3.3 (S. 60, Analysis II)

$$\begin{aligned}
d(h * f) &= d(f \circ h) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D_i(f \circ h) dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (D_j f) \circ h \cdot D_i h_j dx_i \\
&= \sum_{j=1}^{m} (D_j f) \circ h dh_j \\
&= h * (df).
\end{aligned}$$

„$r \to r+1$:“ Wegen der Linearität von d brauchen wir nur den Fall $\alpha = \beta \wedge dx_j$ mit $\beta \in \Omega_1^r(V)$, $1 \le j \le m$, und $h \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$ mit $h(U) \subset V$ zu betrachten. Aus den Teilen (2) und (3) und der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned}
h * (d(\beta \wedge dx_j)) &= h * (d\beta \wedge dx_j + (-1)^r \beta \wedge d^2 x_j) \\
&= h * (d\beta \wedge dx_j) \\
&= (h * d\beta) \wedge h * dx_j \\
&= d(h * \beta) \wedge dh_j \\
&= d(h * \beta) \wedge dh_j + (-1)^r (h * \beta) \wedge d^2 h_j \\
&= d((h * \beta) \wedge dh_j) \\
&= d(h * (\beta \wedge dx_j)).
\end{aligned}$$

□

BEMERKUNG X.5.11. (1) $d \circ (h*) = (h*) \circ d$ bedeutet, dass d von der speziellen Koordinatendarstellung unabhängig ist.
(2) Für $\alpha \in \Omega_{k+1}(U)$ kann auch $d\alpha \in \Omega_{k+1}(U)$ gelten.

DEFINITION X.5.12. $\alpha \in \Omega^r(U)$ heißt GESCHLOSSEN, wenn $d\alpha = 0$ ist. $\alpha \in \Omega^r(U)$ heißt EXAKT, wenn es ein $\beta \in \Omega^{r-1}(U)$ gibt mit $\alpha = d\beta$.

BEMERKUNG X.5.13. (1) Sei $u \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist u genau dann ein Gradientenfeld, wenn $\alpha_{1,u}$ exakt ist.
(2) Sei $u \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Dann ist $\alpha_{1,u}$ genau dann geschlossen, wenn Du symmetrisch ist.
(3) Jede n-Form ist wegen $\Omega^{n+1}(U) = \{0\}$ geschlossen.
(4) Jede exakte Form ist wegen $d^2 = 0$ geschlossen.
(5) Die Differentialform

$$\alpha = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1_\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$$

ist geschlossen, aber nicht exakt. Denn andernfalls wäre

$$f(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}) \in C^\infty(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}, \mathbb{R}^2)$$

ein Gradientenfeld im Widerspruch zu Beispiel VIII.3.4 (S. 105, Analysis II).

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen geschlossenen und exakten Differentialformen herstellen. Dazu benötigen wir folgenden Begriff.

DEFINITION X.5.14. U heißt STERNFÖRMIG, wenn es ein $x_0 \in U$ gibt, derart dass für jedes $x \in U$ die Strecke $x_0 t + (1-t)x$, $t \in [0,1]$, ganz in U verläuft.

BEMERKUNG X.5.15. (1) Ist U konvex, so ist U sternförmig.
(2) $U = [-1,1]^2\backslash[0,1]^2$ ist sternförmig, aber nicht konvex (vgl. Abb. X.5.1).
(3) Ist U sternförmig, so ist U einfach zusammenhängend.
(4) $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ ist einfach zusammenhängend, aber nicht sternförmig.

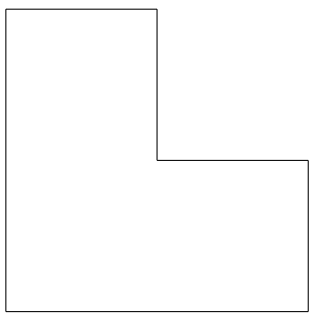

ABBILDUNG X.5.1. Beispiel für ein sternförmiges, nicht konvexes Gebiet

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung von Satz VIII.3.16 (S. 115, Analysis II).

Satz X.5.16 (Satz von Poincaré). *Ist U sternförmig, so ist jede geschlossene Differentialform auf U exakt.*

Beweis. O.E. können wir annehmen, dass der Punkt x_0 aus Definition X.5.14 der Nullpunkt ist. Andernfalls führen wir die Koordinatentransformation $x \mapsto x - x_0$ aus. Sei $\alpha \in \Omega^r(U)$ geschlossen. Definiere $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ durch

$$\varphi(t, x) = tx.$$

Dann ist

$$[0,1] \times U \subset V = \varphi^{-1}(U).$$

Definiere

$$\beta = \varphi * \alpha \in \Omega^r(V).$$

Wegen Satz X.5.10 ist β geschlossen. Definiere $\psi_0, \psi_1 \in C^\infty(U, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ durch

$$\psi_0(x) = (0, x) \quad , \quad \psi_1(x) = (1, x) \quad \forall x \in U.$$

Dann ist $\psi_0(U) \subset V$, $\psi_1(U) \subset V$. Daher ist

$$\gamma = \psi_1 * \beta - \psi_0 * \beta \in \Omega^r(U).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} I_s &= \{(j_1, \ldots, j_s) = 1 \leq j_1 < \ldots < j_s \leq n\}, 1 \leq s \leq n, \\ dx_{(j)} &= dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}, (j) \in I_s \end{aligned}$$

und stellen β in der Form

$$\beta = \sum_{(j) \in I_r} f_{(j)} dx_{(j)} + \sum_{(k) \in I_{r-1}} g_{(k)} dt \wedge dx_{(k)}$$

dar mit Funktion $f_{(j)}, g_{(k)} \in C^1(V, \mathbb{R})$. Es folgt

$$\begin{aligned} \psi_1 * \beta &= \sum_{(j) \in I_r} f_{(j)}(1, x) dx_{(j)} \\ \psi_0 * \beta &= \sum_{(j) \in I_r} f_{(j)}(0, x) dx_{(j)} \\ d\beta &= \sum_{(j) \in I_r} D_t f_{(j)} dt \wedge dx_{(j)} \\ &\quad + \sum_{(j) \in I_r} \sum_{i=1}^{n} D_i f_{(j)} dx_i \wedge dx_{(j)} \\ &\quad - \sum_{(k) \in I_{r-1}} \sum_{i=1}^{n} D_i g_{(k)} dt \wedge dx_i \wedge dx_{(k)}. \end{aligned}$$

Da $d\beta = 0$ ist, folgt

$$(*) \qquad \sum_{(j)\in I_r} D_t f_{(j)} dx_{(j)} = \sum_{(k)\in I_{r-1}} \sum_{i=1}^{n} D_i g_{(k)} dx_i \wedge dx_{(k)}.$$

Indem wir beide Seiten von $(*)$ bzgl. t von 0 bis 1 integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma &= \psi_1 * \beta - \psi_0 * \beta \\
&= \sum_{(j)\in I_r} [f_{(j)}(1,x) - f_{(j)}(0,x)] dx_{(j)} \\
&= \sum_{(j)\in I_r} \Big\{ \int_0^1 D_t f_{(j)}(t,x) dt \Big\} dx_{(j)} \\
&= \sum_{(k)\in I_{r-1}} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \int_0^1 D_i g_{(k)}(t,x) dt \Big\} dx_i \wedge dx_{(k)} \\
&= \sum_{(k)\in I_{r-1}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big\{ \int_0^1 g_{(k)}(t,x) dt \Big\} dx_i \wedge dx_{(k)} \\
&= d\eta
\end{aligned}$$

mit

$$\eta = \sum_{(k)\in I_{r-1}} \Big\{ \int_0^1 g_{(k)}(t,x) dt \Big\} dx_{(k)}.$$

Andererseits ist

$$\varphi \circ \psi_1 = id_U \quad , \quad \varphi \circ \psi_0 = 0$$

und somit gemäß Bemerkung X.5.6

$$\begin{aligned}
\psi_1 * \beta &= \psi_1 * (\varphi * \alpha) \\
&= (\varphi \circ \psi_1) * \alpha \\
&= \alpha \\
\psi_0 * \beta &= \psi_0 * (\varphi * \alpha) \\
&= (\varphi \circ \psi_0) * \alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\alpha = d\eta.$$

□

Zum Abschluss interpretieren wir Satz X.5.16 in der Sprache der klassischen Vektoranalysis.

Satz X.5.17. (1) *Seien* $U \subset \mathbb{R}^3$ *und* $f \in C^2(U,\mathbb{R})$, $u \in C^2(U,\mathbb{R}^3)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0, \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} u) &= 0. \end{aligned}$$

(2) *Sei* $U \subset \mathbb{R}^3$ *sternförmig und* $u \in C^1(U,\mathbb{R}^3)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u = 0 &\iff u = \operatorname{grad} f && \textit{für ein } f \in C^2(U,\mathbb{R}), \\ \operatorname{div} u = 0 &\iff u = \operatorname{rot} v && \textit{für ein } v \in C^2(U,\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Beweis. ad (1): Folgt aus Beispiel X.5.9 und $d^2 = 0$.
ad (2): Folgt aus Beispiel X.5.4, Beispiel X.5.9 und Satz X.5.16. □

X.6. Integration von Differentialformen

Im Folgenden sei stets $n \geq 2$ und $1 \leq k < n$. Zunächst definieren wir das Integral von n-Formen auf offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$. Wegen $\Omega^n(\mathbb{R}^n) \cong C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ können wir dabei auf die Integration von Funktionen im $\mathbb{R}^n$ zurückgreifen.

Definition X.6.1. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ und $\alpha = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$. α heißt integrierbar über M, wenn $f \in L^1(M,\mathbb{R})$ ist. In diesem Fall definieren wir

$$\int_M \alpha = \int_M f dx.$$

Der folgende Satz ist eine Übertragung des Transformationssatzes IX.5.6 (S. 53). Wir erinnern für die Bezeichnungen an Definition X.2.5 (S. 76).

Satz X.6.2 (Transformationssatz). *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\varphi : U \to V$ *ein* C^1 *-Diffeomorphismus,* $M \subset U$ *und* $\alpha \in \Omega^n(V)$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(M)} \alpha &= \int_M \varphi * \alpha && \textit{, falls } \varphi \textit{ orientierungstreu,} \\ \int_{\varphi(M)} \alpha &= -\int_M \varphi * \alpha && \textit{, falls } \varphi \textit{ orientierungsumkehrend.} \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\alpha = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Aus Bemerkung X.5.6(4) (S. 105) folgt

$$\varphi * \alpha = f \circ \varphi \det D\varphi dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Damit ergibt sich die Behauptung direkt aus Satz IX.5.6 (S. 53). □

Wir wollen als nächstes das Integral von k-Formen über k-dimensionale Mgfkten definieren. Analog zum Vorgehen in Paragraph X.3 soll dies mit Hilfe von Karten und Partitionen der Eins auf die Integration von k-Formen im $\mathbb{R}^k$ zurückgeführt werden. Dazu benötigen wir das folgende Analogon zu Satz X.3.3 (S. 82).

Satz X.6.3. (1) *Seien* $U, V \subset \mathbb{R}^k$ *offen,* $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ *eine Immersion,* $\tau : V \to U$ *ein orientierungstreuer* C^1*-Diffeomorphismus,* $\psi = \varphi \circ \tau$ *und* $\alpha \in \Omega^k(\varphi(U))$. *Dann ist* $\varphi * \alpha \in \Omega^k(U)$ *genau dann integrierbar, wenn* $\psi * \alpha \in \Omega^k(V)$ *integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_U \varphi * \alpha = \int_V \psi * \alpha.$$

(2) *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $M \subset U$ *eine orientierbare* k*-dimensionale Mfgkt,* $\alpha \in \Omega^k(U)$ *mit* $\operatorname{supp}(\alpha) \Subset U$, $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i) : 1 \le i \le m\}$ *und* $\mathcal{A}' = \{(U_j', \varphi_j', V_j') : 1 \le j \le m'\}$ *zwei positiv orientierte Atlanten von* $M \cap \operatorname{supp}(\alpha)$ *und* $\{\psi_i : 1 \le i \le m\}$, $\{\psi_j' : 1 \le j \le m'\}$ *zwei Partitionen der Eins auf* $M \cap \operatorname{supp}(\alpha)$, *die* $\mathcal{A}$ *bzw.* $\mathcal{A}'$ *untergeordnet sind. Dann ist für jedes* $1 \le i \le m$ *die Differentialform* $\varphi_i * (\psi_i \alpha) \in \Omega^k(U_i)$ *integrierbar, genau dann, wenn für jedes* $1 \le j \le m'$ *die Differentialform* $\varphi_j' * (\psi_j' \alpha) \in \Omega^k(U_j')$ *integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{U_i} \varphi_i * (\psi_i \alpha) = \sum_{j=1}^{m'} \int_{U_j'} \varphi_j' * (\psi_j \alpha).$$

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz X.6.2 und $\psi * \alpha = \tau * (\varphi * \alpha)$.
ad (2): Folgt aus Teil (1) mit den gleichen Argumenten wir im Beweis von Teil (2) des Satzes X.3.3 (S. 82). □

Wegen Satz X.6.3 ist folgende Definition sinnvoll.

Definition X.6.4. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ eine orientierbare k-dimensionale Mfgkt und $\alpha \in \Omega^k(U)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha) \Subset U$. Dann heißt α auf M integrierbar, wenn es einen positiv orientierten Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i, V_i) : 1 \le i \le m\}$ von $\operatorname{supp}(\alpha) \cap M$ und eine $\mathcal{A}$ untergeordnete Partition der Eins $\{\psi_i : 1 \le i \le m\}$ auf M gibt, derart dass für jedes $1 \le i \le m$ die Differentialform $\varphi_i * (\psi_i \alpha)$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M \alpha = \sum_{i=1}^{m} \int_{U_i} \varphi_i * (\psi_i \alpha)$$

das Integral von α über M.

Bemerkung X.6.5. (1) Streng genommen müsste man bei $\int_M \alpha$ zusätzlich die gewählte Orientierung angeben. Ist $-\mathcal{O}$ die gemäß Bemerkung X.2.8 (S. 77) zur Orientierung von M entgegengesetzte Orientierung, so gilt wegen Satz X.6.2

$$\int_{(M,-\mathcal{O})} \alpha = -\int_{(M,\mathcal{O})} \alpha.$$

(2) Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ ein regulärer C^1-Weg sowie

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i \in \Omega^1(U)$$

mit $\gamma([a,b]) \subset U$. Dann ist $M = \gamma([a,b])$ eine eindimensionale Mfgkt und

$$\begin{aligned}\int_M \alpha &= \int_{[a,b]} \gamma * \alpha \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i \circ \gamma \gamma_i' dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma, \gamma') dt \\ &= \int_\gamma f.\end{aligned}$$

D.h., die Kurvenintegrale aus Kapitel VIII sind ein Spezialfall von Definition X.6.4.

Beispiel X.6.6. Sei $M = \{x \in S^2 : x_i > 0, 1 \le i \le 3\}$ und

$$\alpha = x_1 dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3).$$

M wird durch die Karte (U, ψ, M) dargestellt mit

$$\begin{aligned}U &= (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \\ \psi(\varphi, \theta) &= (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, \sin\theta).\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\psi * \alpha &= \cos\varphi\cos\theta[-\sin\varphi\cos\theta d\varphi - \cos\varphi\sin\theta d\theta] \\ &\quad \wedge [\cos\varphi\cos\theta d\varphi - \sin\varphi\sin\theta d\theta] \\ &= \cos\varphi\cos\theta[\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta + \cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta] d\varphi \wedge d\theta \\ &= \cos\varphi\cos^2\theta\sin\theta d\varphi \wedge d\theta\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_M \alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\cos^2\theta\sin\theta d\varphi d\theta \\ &= [\sin\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} [-\frac{1}{3}\cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang her zwischen der Integration von Funktionen und von Differentialformen auf Mfgkten.

Satz X.6.7. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ eine Hyperfläche, die durch das Einheitsnormalenfeld ν orientiert sei, und $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jede kompakte Menge $K \subset M$*

$$\int_K \alpha_{n-1,f} = \int_K \sum_{i=1}^n f_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$= \int_K (f, \nu) dS.$$

Beweis. Indem wir $\alpha_{n-1,f}$ gegebenenfalls mit einer hinreichend feinen Partition der Eins multiplizieren, können wir o.E. annehmen, dass $K \cap \operatorname{supp}(\alpha_{n-1,f})$ in einer offenen Menge enthalten ist, in der M Graph einer Funktion von $n-1$ Variablen ist. Indem wir evtl. noch eine Koordinatentransformation durchführen, können wir o.E. annehmen, dass gilt:

$$U = U' \times I \quad \text{mit } U' \subset \mathbb{R}^{n-1} \text{ Gebiet, } I \text{ offenes Intervall,}$$
$$M = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = g(x')\} \text{ mit } g \in C^1(U', \mathbb{R}).$$

Dann wird M durch die Karte (U', φ, M) mit

$$\varphi(x') = (x', g(x'))$$

dargestellt. Wie man nicht nachrechnet, ist

$$\tilde{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|^2}} (-\nabla g(x'), 1) \quad \forall x = (x', x_n) \in M$$

ein Einheitsnormalenfeld von M. Also gilt

$$\nu = \varepsilon \tilde{\nu} \quad \text{mit } \varepsilon = \pm 1.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
&\det(\nu, D_1\varphi, \ldots, D_{n-1}\varphi) \\
&= \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|^2}} \det \begin{pmatrix} -\nabla g(x')^t & \mathbb{I}_{n-1} \\ 1 & \nabla g(x') \end{pmatrix} \\
&= \varepsilon (-1)^{n-1} \sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|^2}.
\end{aligned}$$

Also ist die Karte (U', φ, M) positiv bzw. negativ orientiert, je nachdem ob $\varepsilon(-1)^{n-1}$ positiv oder negativ ist. Daher ist

$$\int_K \alpha_{n-1,f} = \varepsilon(-1)^{n-1} \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi * \alpha_{n-1,f}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\varphi * \alpha_{n-1,f} &= \sum_{i=1}^{n} f_i \circ \varphi (-1)^{i-1} \varphi * (dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} f_i \circ \varphi (-1)^{i-1} dx'_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx'_i} \wedge \ldots \wedge dg(x') \\
&\quad + f_n \circ \varphi (-1)^{n-1} dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_{n-1} \\
&= (-1)^{n-1} \Big\{ -\sum_{i=1}^{n-1} f_i \circ \varphi D_i g + f_n \circ \varphi \Big\} dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_{n-1}
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_K \alpha_{n-1,f} = \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(K)} F(x')dx'$$

mit

$$F = -\sum_{i=1}^{n-1} f_i \circ \varphi D_i g + f_n \circ \varphi.$$

Andererseits folgt aus Beispiel X.3.7(3) (S. 84)

$$\begin{aligned}\int_K (f,\nu)dS &= \int_{\varphi^{-1}(K)} (f\circ\varphi, \nu\circ\varphi)\sqrt{1+\|\nabla g\|^2}dx' \\ &= \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(K)} (f\circ\varphi, \tilde{\nu}\circ\varphi)\sqrt{1+\|\nabla g\|^2}dx' \\ &= \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(K)} F(x')dx'.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Als nächstes formulieren wir den Gaußschen Integralsatz in der Sprache der Differentialformen.

Satz X.6.8 (Gaussscher Integralsatz). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset U$ kompakt mit glattem Rand und $\alpha \in \Omega_1^{n-1}(U)$. Dann ist*

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha,$$

wobei ∂K durch das äußere Normalenfeld orientiert ist.

Beweis. Da K kompakt und $\partial_S K = \emptyset$ ist, ist $\partial_R K = \partial K$ kompakt und damit $\sigma_{n-1}(\partial_R K) < \infty$. Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ derart, dass $\alpha = \alpha_{n-1,f}$ ist. Dann folgt aus Satz X.3.19 (S. 94) und Satz X.6.7

$$\begin{aligned}\int_K d\alpha &= \int_K \operatorname{div} f dx \\ &= \int_{\partial K} (f,\nu)dS(x) \\ &= \int_{\partial K} \alpha.\end{aligned}$$

□

Beispiel X.6.9. (1) Sei

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Wegen

$$d\alpha = n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

folgt für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand

$$\lambda_n(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_1} \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Speziell ergibt sich in $\mathbb{R}^2$ die Leibnizsche Sektorformel

$$\lambda_2(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} \{xdy - ydx\}.$$

Zur geometrischen Interpretation betrachte man das Dreieck Δ mit den Eckpunkten $(0,0), (x,y), (x+\delta x, y+\delta y)$, wobei δx, δy klein seien. Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Delta) &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x & x+\delta x \\ y & y+\delta y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(x\delta y - y\delta x). \end{aligned}$$

Die Fläche K kann man sich approximativ durch solche Dreiecke zusammengesetzt denken.
(2) Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $K \subset U$ kompakt mit glattem Rand. Dann folgt aus Satz X.6.8 die Green-Riemannsche Formel

$$\int_{\partial K} \{fdx + gdy\} = \int_K \{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\} dxdy.$$

Satz X.6.8 hat folgende praktische Konsequenz:

Satz X.6.10. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^* \in U$ und $\alpha \in \Omega_1^{n-1}(U \backslash \{x^*\})$ geschlossen. Weiter seien $K_1, K_2 \subset U$ zwei Kompakta mit glattem Rand und $x^* \in \mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2$. Dann ist*

$$\int_{\partial K_1} \alpha = \int_{\partial K_2} \alpha,$$

wobei $\partial K_1, \partial K_2$ bzgl. der äußeren Normalen orientiert sind.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass

$$B_\varepsilon = \overline{B(x^*, \varepsilon)} \subset \mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2$$

ist. Setze

$$K_{i,\varepsilon} = K_i \backslash \mathring{B}_\varepsilon \quad , i = 1, 2.$$

Dann sind $K_{1,\varepsilon}, K_{2,\varepsilon}$ Kompakta mit glattem Rand, die in $U \backslash \{x^*\}$ enthalten sind. Wegen $d\alpha = 0$ folgt aus Satz X.6.8

$$\int_{\partial K_{1,\varepsilon}} \alpha = 0 = \int_{\partial K_{2,\varepsilon}} \alpha.$$

Da der Rand von $K_{i,\varepsilon}$, $i = 1, 2$, aus dem positiv orientierten Rand von K_i und dem negativ orientierten Rand von B_ε besteht, gilt

$$\int_{\partial K_{i,\varepsilon}} \alpha = \int_{\partial K_i} \alpha - \int_{\partial B_\varepsilon} \alpha \quad , i = 1, 2.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Im Folgenden wollen wir den Integralsatz von Stokes beweisen. Er ist eine Verallgemeinerung von Satz X.6.8, indem U durch eine Mfgkt M ersetzt wird. Zu seiner Formulierung und seinem Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen. Wir bezeichnen mit

$$H_k = \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$$

den STANDARD-HALBRAUM in $\mathbb{R}^k$. Das äußere Einheitsnormalenfeld zu ∂H_k ist

$$\nu = e_1 = (1, 0, \ldots, 0).$$

∂H_k besitzt die globale Karte $(\mathbb{R}^{k-1}, \beta, \partial H_k)$ mit

$$\beta(t_1, \ldots, t_{k-1}) = (0, t_1, \ldots, t_{k-1}).$$

∂H_k ist durch diese Karte orientiert. Dann ist das äußere Einheitsnormalenfeld $\nu = e_1$ positiv orientiert.

SATZ X.6.11. *Sei $\alpha \in \Omega_1^{k-1}(\mathbb{R}^k)$ mit kompaktem Träger. Dann ist*

$$\int_{H_k} d\alpha = \int_{\partial H_k} \alpha.$$

BEWEIS. Im Fall $k = 1$ ist $H_1 = \mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$ und $\partial H_1 = \{0\}$. Die Aussage des Satzes besagt dann

$$\int_{-\infty}^{0} df = f(0) \quad \forall f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und folgt somit aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
Sei also $k \geq 2$ und

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} f_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k$$

mit

$$f_i \in C_0^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Mit der oben definierten globalen Karte β von ∂H_k folgt

$$\begin{aligned}\int_{\partial H_k} \alpha &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \beta * \alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \sum_{i=1}^{k} f_i(0, t_1, \ldots, t_{k-1})(-1)^{i-1} \\ &\qquad\qquad \beta * (dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, t_1 \ldots t_{k-1}) dt_1 \ldots dt_{k-1}.\end{aligned}$$

Andererseits folgt aus $f_i \in C_0^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und Satz IX.3.3 (S. 27)

$$\begin{aligned}
\int_{H_k} d\alpha &= \int_{H_k} \sum_{i=1}^{n} D_i f_i \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}_-} D_1 f_1(x_1, \dots, x_k) dx_1\Big)}_{=f_1(0,x_2,\dots,x_k)} dx_2 \dots dx_k \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{k-2}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}} D_i f_i(x_1, \dots, x_k) dx_i\Big)}_{=0} dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_k \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_1(0, x_2, \dots, x_k) dx_2 \dots dx_k.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Lemma X.6.12. *Seien $U, U' \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \to U'$ ein orientierungstreuer C^1-Diffeomorphismus mit $\varphi(H_k \cap U) = H_k \cap U'$. Dann gilt*

$$\det\Big((D_i \varphi_j(x))_{2 \le i,j \le k}\Big) > 0 \quad \forall x \in \partial H_k \cap U.$$

Beweis. Da φ und φ^{-1} stetig sind, ist

$$\varphi(\partial H_k \cap U) = \partial H_k \cap U'.$$

Also gilt für alle $x = (0, x') \in \partial H_k \cap U$, $x' \in \mathbb{R}^{k-1}$,

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(0, x') = 0$$

und daher

$$D_j \varphi_1(x) = 0 \quad \forall 2 \le j \le k, x \in \partial H_k \cap U.$$

Wegen $\varphi(H_k \cap U) = H_k \cap U'$ gilt weiter für alle $x' \in \mathbb{R}^{k-1}$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $(h, x') \in U$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(h, x') &\le 0 \quad \text{falls } h \le 0 \\
\varphi_1(h, x') &> 0 \quad \text{falls } h > 0.
\end{aligned}$$

Also ist

$$(*) \qquad \begin{aligned}
D_1 \varphi_1(0, x') &= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_1(h, x') - \varphi_1(0, x')}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_1(h, x')}{h} \\
&\ge 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt für jedes $x \in \partial H_k \cap U$

$$0 < \det\Big((D_i \varphi_j(x))_{1 \le i,j \le k}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} D_1\varphi_1(x) & 0 \\ * & (D_i\varphi_j(x))_{2\le i,j\le k} \end{pmatrix} \\
&= D_1\varphi_1(x) \det((D_i\varphi_j(x))_{2\le i,j\le k}).
\end{aligned}
$$

Zusammen mit $(*)$ folgt hieraus die Behauptung. □

Definition X.6.13. (1) Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $K \subset M$. Dann heißt

$$\partial_M K = \{x \in M : \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap K \neq \emptyset, U \cap K^c \neq \emptyset\}$$

der Rand von K relativ zu M.
(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt und $K \subset M$ kompakt. K hat glatten Rand (relativ zu M), wenn es zu jedem $x \in \partial_M K$ eine Karte (U, φ, V) von M mit $x \in V$ und

(a) $\varphi(H_k \cap U) = K \cap V$,
(b) $\varphi(\partial H_k \cap U) = \partial_M K \cap V$

gibt.

Bemerkung X.6.14. (1) Wenn wir uns darauf verständigen, unter einer n-dimensionalen Mfgkt in $\mathbb{R}^n$ eine offene Menge zu verstehen, ist Definition X.6.13 eine Verallgemeinerung von Definition X.3.11 (S. 89) für Kompakta mit glattem Rand.
(2) Man kann auch den Begriff eines Kompaktums mit stückweise glattem Rand übertragen. Dazu muss man $\partial_M K$ in der Form $\partial_M K = \partial_{M,R} K \cup \partial_{M,S} K$ mit $\partial_{M,R} K \cap \partial_{M,S} K = \emptyset$ schreiben und fordern, dass $\partial_{M,R} K$ relativ offen in $\partial_M K$ ist und die Bedingungen (a) und (b) erfüllt und dass es zu jedem $x \in \partial_{M,S} K$ eine Karte (U, φ, V) von M mit $x \in V$ und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \lambda_k \Big(\bigcup_{u \in \varphi^{-1}(V \cap \partial_{M,S} K)} B(u, \varepsilon) \Big) = 0$$

gibt.
(3) Es ist stets $\partial_M K \subset \partial K$; i. a. gilt jedoch $\partial_M K \neq \partial K$.

Beispiel X.6.15. (1) Sei $M = S^2$ und

$$K = \{x \in S^2 : x_3 \geq 0\}.$$

Dann ist $\partial_M K$ der Äquator, und K hat glatten Rand relativ zu M.
(2) Sei $M = S^2$ und

$$K = \{x \in S^2 : x_i \geq 0 \ \ , \ \ 1 \leq i \leq 3\}.$$

Dann ist

$$\partial_M K = \bigcup_{i=1}^{3} \{x \in S^2 : x_i = 0, x_j \geq 0 \ j \neq i\}$$

und

$$\partial_{M,S} K = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

Satz X.6.16. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Mfgkt und $K \subset M$ kompakt mit glattem Rand relativ zu M. Dann ist $\partial_M K$ eine $(k-1)$-dimensionale Mfgkt. Jede Orientierung von M induziert eine Orientierung von $\partial_M K$.*

Beweis. Der Fall $k = 1$ ist trivial (eine 0-dimensionale Mfgkt ist eine endliche Punktmenge). Sei also $k \geq 2$ und $\mathcal{A} = \{(U, \varphi, V)\}$ ein Atlas von M. O.E. können wir annehmen, dass $\mathcal{A}$ rand-adaptiert ist bzgl. K, d.h., jede Karte von $\mathcal{A}$ erfüllt die Bedingungen (a) und (b) von Definition X.6.13. Insbesondere ist dann $U \cap \partial H_k = \emptyset$, wenn $V \cap \partial_M K = \emptyset$ ist.
Sei nun (U, φ, V) eine Karte von $\mathcal{A}$ mit $V \cap \partial_M K \neq \emptyset$. Sei β die globale Karte von ∂H_k. Definiere

$$\begin{aligned} U_0 &= \beta^{-1}(\partial H_k \cap U), \\ V_0 &= \partial_M K \cap V, \\ \psi &= \varphi \circ \beta. \end{aligned}$$

Da φ ein Homöomorphismus mit $\varphi(\partial H_k \cap U) = \partial_M K \cap V$ ist, ist $\psi : U_0 \to V_0$ ein Homöomorphismus. Weiter ist

$$D\psi(u) = (D_i \varphi_j(0, u))_{\substack{2 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \forall u \in U_0.$$

Da $D\varphi$ den Rang k hat, hat somit $D\psi$ den Rang $k-1$.
Sei $\mathcal{A}_0$ die Menge aller Karten, die sich so aus den Karten von $\mathcal{A}$ ergeben. Aus Satz X.1.6 (S. 72) folgt, dass $\partial_M K$ eine $(k-1)$-dimensionale Mfgkt ist.
Sei nun $\mathcal{A}$ wie oben zusätzlich orientiert. Wir wollen zeigen, dass der wie oben konstruierte Atlas $\mathcal{A}_0$ orientiert ist. Seien dazu (U_i, φ_i, V_i), $i = 1, 2$, zwei Karten von $\mathcal{A}$ mit $V_1 \cap V_2 \cap \partial_M K \neq \emptyset$. Dann ist $\tau = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$ ein orientierungstreuer C^1-Diffeomorphismus. Sei $\tilde{\tau} = (\varphi_2 \circ \beta)^{-1} \circ (\varphi_1 \circ \beta) : U_{10} \to U_{20}$ die Transformation zwischen den abgeleiteten Karten von $\partial_M K$. Dann ist

$$\tilde{\tau}(u) = (\tau_2(0, u), \ldots, \tau_k(0, u)) \quad \forall u \in U_{10}.$$

Damit folgt aus Lemma X.6.12, dass $\tilde{\tau}$ orientierungstreu ist. Also ist $\mathcal{A}_0$ orientiert. □

Beispiel X.6.17. Seien M und K wie in Beispiel X.6.15 (1). M sei durch die äußere Normale orientiert. Dann ist die induzierte Orientierung von $\partial_M K$ so, dass die Kurve $\partial_M K$ im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird, d.h., die obere Halbkugel liegt beim Durchlaufen von $\partial_M K$ links.

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz X.6.18 (Stokesscher Integralsatz). *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ eine orientierbare k-dimensionale Mfgkt, $k \geq 2$, $K \subset M$*

kompakt mit glattem Rand relativ zu M und $\alpha \in \Omega_1^{k-1}(U)$. Dann ist

$$\int_K d\alpha = \int_{\partial_M K} \alpha,$$

wobei $\partial_M K$ die durch M induzierte Orientierung hat.

Beweis. Da K kompakt ist, gibt es ein $m \in \mathbb{N}^*$ und positiv orientierte Karten (U_i, φ_i, V_i), $1 \leq i \leq m$, von M mit

(1) $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$,
(2) $\varphi_i(H_k \cap U_i) = K \cap V_i$,
(3) $\varphi_i(\partial H_k \cap U_i) = \partial_M K \cap V_i$.

Sei $\{\psi_i : 1 \leq i \leq m\}$ eine $\{V_i : 1 \leq i \leq m\}$ untergeordnete Partition der Eins auf K. Wegen

$$\begin{aligned}\int_K d\alpha &= \int_K d\Big(\sum_{i=1}^{m} \psi_i \alpha\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\int_K d(\psi_i\alpha)\Big)\\ \int_{\partial_M K} \alpha &= \int_{\partial_M K} \sum_{i=1}^{m} \psi_i\alpha\\ &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\int_{\partial_M K} \psi_i\alpha\Big)\end{aligned}$$

reicht es, die Behauptung für die $(k-1)$-Formen $\psi_i\alpha$ zu zeigen.
Wegen $\operatorname{supp}(\varphi_i * (\psi_i\alpha)) \Subset U_i$ kann $\varphi_i * (\psi_i\alpha)$ zu einer stetig differenzierbaren $(k-1)$ Form $\tilde{\alpha}_i$ auf $\mathbb{R}^k$ mit kompaktem Träger fortgesetzt werden. Damit folgt aus Satz X.5.10(4) (S. 107) und Satz X.6.11

$$\begin{aligned}\int_K d(\psi_i\alpha) &= \int_{K\cap V_i} d(\psi_i\alpha)\\ &= \int_{H_k\cap U_i} \varphi_i * d(\psi_i\alpha)\\ &= \int_{H_k\cap U_i} d(\varphi_i * (\psi_i\alpha))\\ &= \int_{H_k} d\tilde{\alpha}_i\\ &= \int_{\partial H_k} \tilde{\alpha}_i\\ &= \int_{\partial H_k\cap U_i} \varphi_i * (\psi_i\alpha)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial_M K\cap V_i} \psi_i \alpha \\
&= \int_{\partial_M K} \psi_i \alpha.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung X.6.19. (1) Wenn wir offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ als n-dimensionale Mfgkten bezeichnen, ist Satz X.6.8 der Spezialfall $k = n$ von Satz X.6.18.
(2) Wenn wir eine endliche Punktmenge als 0-dimensionale Mfgkt bezeichnen, ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung der Spezialfall $k = 1$ von Satz X.6.18, d.h.

$$
\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))
$$

für jeden C^1-Weg $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ und jedes $f \in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $\gamma([a,b]) \subset U$.
(3) Mit einigem technischem Mehraufwand kann man Satz X.6.18 auch für Kompakta mit stückweise glattem Rand beweisen.

Falls die Mfgkt M selber kompakt ist, kann man $K = M$ in Satz X.6.18 wählen. Da dann $\partial_M K = \emptyset$ ist, folgt sofort:

Satz X.6.20. *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ eine kompakte orientierbare k-dimensionale Mfgkt und $\alpha \in \Omega_1^{k-1}(U)$. Dann ist*

$$
\int_M d\alpha = 0.
$$

Beispiel X.6.21. Sei $n \geq 2$ und

$$
\alpha = \sum_{i=1}^n \|x\|_2^{-n} x_i (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega_\infty^{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}).
$$

Wegen

$$
\operatorname{div}(\|x\|_2^{-n} x) = 0
$$

ist α geschlossen. α ist nicht exakt. Dann wäre $\alpha = d\beta$ mit $\beta \in \Omega_1^{n-2}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$, so folgte aus Satz X.6.7 und Satz X.6.20

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{S^{n-1}} d\beta \\
&= \int_{S^{n-1}} \alpha \\
&= \int_{S^{n-1}} (\|x\|_2^{-n} x, \nu) dS \\
&= \sigma_{n-1}(S^{n-1}).
\end{aligned}
$$

Im Fall $n = 3$ ist daher

$$u = \|x\|_2^{-3} x = \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} (x_1, x_2, x_3)$$

ein Beispiel für ein divergenzfreies Vektorfeld, das nicht Rotation eines Vektorfeldes ist.

Als eine Konsequenz von Satz X.6.18 erhalten wir den klassischen Stokesschen Satz.

SATZ X.6.22 (STOKESSCHER INTEGRALSATZ IM $\mathbb{R}^3$). *Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M \subset U$ eine durch das Einheitsnormalenfeld ν orientierte Hyperfläche, $K \subset M$ kompakt mit glattem Rand relativ zu M und $u \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann ist*

$$\int_K (\operatorname{rot} u, \nu) dS = \int_{\partial_M K} (u, \tau) ds,$$

wobei ds die Bogenlänge von $\partial_M K$ und τ das durch die induzierte Orientierung von $\partial_M K$ definierte Einheitstangentenfeld ist.

BEWEIS. Wende Satz X.6.18 auf

$$\alpha_{1,u} = \sum_{i=1}^{3} u_i dx_i$$

an. Dann folgt die Behauptung aus Satz X.6.7, Beispiel X.5.9 (S. 107), Bemerkung X.6.5 (2) und Bemerkung VIII.2.7 (S. 100, Analysis II), Definition VIII.2.4 (S. 99, Analysis II) und Definition VIII.3.1 (S. 104, Analysis II). □

BEISPIEL X.6.23. (1) Seien M, K wie in Beispiel X.6.15 (1) und

$$f(x) = (-x_2, x_1, 0).$$

Dann ist

$$\operatorname{rot} f(x) = 2e_3 = (0, 0, 2)$$

und wegen Satz X.6.7 und Beispiel X.3.7 (S. 84)

$$\begin{aligned}\int_K (\operatorname{rot} f, \nu) dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial_M K} (f, \tau) ds &= \int_{S^1} (-x_2, x_1) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t dt \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

(2) Seien $x^* \in \mathbb{R}^3$ und $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\|_2 = 1$. Sei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - x^*, v) = 0\}$ die Ebene durch x^* senkrecht zu v. Wir orientieren M so, dass v ein positiv orientierter Normalenvektor ist. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$K_\varepsilon = \{x \in M : \|x - x^*\|_2 \leq \varepsilon\}.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine Umgebung von x^* und $u \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$. Dann folgt aus Satz X.6.22

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} u(x^*), v) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{K_\varepsilon} (\operatorname{rot} u, v) dS \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon} (u, \tau) ds.\end{aligned}$$

Physikalisch beschreibt also die Rotation $\operatorname{rot} u(x^*)$ den Fluss pro Flächeneinheit durch einen beliebig kleinen Kreis mit Mittelpunkt x^*.
(3) Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Das elektrische und das magnetische Feld sind zeitabhängige Vektorfelder $E, B \in C^1(I \times U, \mathbb{R}^3)$. Sie genügen u.a. der Differentialgleichung

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{D}$$

Seien M eine durch das Einheitsnormalenfeld ν orientierte Hyperfläche in U und $K \subset M$ kompakt mit glattem Rand relativ zu M. Dann ist

$$\int_K (B(t, x), \nu(x)) dS(x)$$

der magnetische Fluss durch K zur Zeit t. Aus (D) und Satz X.6.22 folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_K (B(t, x), \nu(x)) dS(x) &= \int_K (\frac{\partial}{\partial t} B(t, x), \nu(x)) dS(x) \\ &= -\int_K (\operatorname{rot} E(t, x), \nu(x)) dS(x) \\ &= -\int_{\partial_M K} (E(t, x), \tau(x)) ds(x).\end{aligned} \tag{I}$$

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch K ist also gleich dem negativen elektrischen Strom durch $\partial_M K$.
Mit Hilfe von Teil (2) kann man umgekehrt aus (I) die Differentialgleichung (D) herleiten.

X.7. Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Satz X.7.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $\overline{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C(\overline{B}_n, \mathbb{R}^n)$ mit $f(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt x^* in $\overline{B}_n$, d.h.*

$$f(x^*) = x^*.$$

Beweis. Für $n = 1$ besagt Satz X.7.1, dass jedes $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ mit $f([-1,1]) \subset [-1,1]$ einen Fixpunkt besitzt und ist damit eine Konsequenz des Zwischenwertsatzes angewandt auf $x - f(x)$.
Sei also $n \geq 2$.
1. Schritt: Es gebe ein $g \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ mit $g|_{\overline{B}_n} = f$.
Ann.: f besitzt keinen Fixpunkt.
Dann gibt es wegen der Stetigkeit von g ein $r > 1$ mit

$$x - g(x) \neq 0 \quad \forall x \in B(0,r) \subset \mathbb{R}^n.$$

Sei $\varphi_1 = x - g(x)$ und $\alpha \in \Omega_\infty^{n-1}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ wie in Beispiel X.6.21 (S. 124). Dann ist $\varphi_1 * \alpha$ in $B(0,r)$ geschlossen und damit wegen Satz X.5.16 (S. 111) exakt. Also gilt nach Satz X.6.20 (S. 124)

$$\int_{S^{n-1}} \varphi_1 * \alpha = 0. \tag{1}$$

Definiere $\Phi : \mathbb{R} \times B(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$\Phi(t,x) = x - tg(x).$$

Für $t \in [0,1]$ und $x \in S^{n-1}$ gilt dann $\Phi(t,x) \neq 0$. Also ist $V = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ offen und $[0,1] \times S^{n-1} \subset V$. Dann gibt es auch eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset U \subset B(0,r)$ und $[0,1] \times U \subset V$. Definiere $\psi_0, \psi_1 : U \to V$ durch

$$\psi_0(x) = (0,x),$$
$$\psi_1(x) = (1,x).$$

Da $\Phi * \alpha$ geschlossen ist, folgt wie im Beweis von Satz X.5.16 (S. 111), dass es ein $\eta \in \Omega_1^{n-2}(U)$ gibt mit

$$\psi_1 * \Phi * \alpha - \psi_0 * \Phi * \alpha = d\eta.$$

Für $x \in U$ ist aber

$$\Phi \circ \psi_1(x) = \Phi(1,x) = x - g(x) = \varphi_1(x)$$
$$\Phi \circ \psi_0(x) = \Phi(0,x) = x$$

und daher

$$d\eta = \varphi_1 * \alpha - \alpha.$$

Damit folgt aus Satz X.6.20 (S. 124) und Gleichung (1)

$$\begin{aligned}\sigma_{n-1}(S^{n-1}) &= \int_{S^{n-1}} \alpha \\ &= \int_{S^{n-1}} (\varphi_1 * \alpha - d\eta) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Also besitzt f doch einen Fixpunkt.
2. Schritt: Sei nun $f \in C(\overline{B}_n,\mathbb{R}^n)$ mit $f(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$ beliebig.

ANN.: f besitzt keinen Fixpunkt.
Da $\overline{B}_n$ kompakt ist, gilt

$$\varepsilon = \inf_{x \in \overline{B}_n} \|x - f(x)\|_2 > 0.$$

Definiere $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \overline{B}_n, \\ f(\frac{x}{\|x\|_2}) & \text{falls } x \notin \overline{B}_n. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f} \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{B}_n$. Sei $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} &0 \le \psi(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\operatorname{supp} \psi \subset \overline{B}_n \\ &\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1 \end{aligned}$$

wie im Beweis von Satz IX.6.7 (S. 64). Da $\overline{B(0,2)}$ kompakt und $\tilde{f}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)\|_2 \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x, y \in \overline{B(0,2)} \text{ mit } \|x - y\|_2 \le \delta.$$

Definiere $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta^{-n} \psi(\frac{y-x}{\delta}) \tilde{f}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \tilde{f}(x + \delta z) dz \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dann ist $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und

$$\begin{aligned} \|g(x)\|_2 &\le \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) \|\tilde{f}(x + \delta z)\|_2 dz \\ &\le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $g(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$.
Weiter ist für $x \in \overline{B}_n$

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\|_2 &= \| \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) [f(x) - \tilde{f}(x + \delta z)] dz \|_2 \\ &= \| \int_{\overline{B}_n} \psi(z) [\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x + \delta z)] dz \|_2 \\ &\le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Daher gilt für alle $x \in \overline{B}_n$

$$\begin{aligned} \|x - g(x)\|_2 &\ge \|x - f(x)\|_2 - \|f(x) - g(x)\|_2 \\ &\ge \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

im Widerspruch zum 1. Schritt. Also besitzt f doch einen Fixpunkt. $\square$

BEMERKUNG X.7.2. (1) Das Beispiel $n = 1$, $f(x) = x^2$ zeigt, dass der Fixpunkt aus Satz X.7.1 im allgemeinen nicht eindeutig ist.
(2) Sei $v \in S^{n-1}$. Definiere $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(v + x).$$

Dann ist $f(B_n) \subset B_n$ und f besitzt keinen Fixpunkt in B_n. Dieses Beispiel zeigt, dass man in Satz X.7.1 $\overline{B}_n$ nicht durch B_n ersetzen kann.

Satz X.7.1 hat eine einfache, aber sehr praktische Konsequenz.

SATZ X.7.3. *Sei $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Es gebe ein $r > 0$ mit*

$$(f(x), x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_2 = r. \tag{2}$$

Dann besitzt f eine Nullstelle x in $B(0, r)$.

BEWEIS. ANN.: f besitzt keine Nullstelle in $\overline{B(0, r)}$. Definiere $g : \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$g(x) = -\|f(rx)\|_2^{-1} f(rx).$$

Dann ist g stetig und $g(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$. Wegen Satz X.7.1 gibt es ein $x^* \in \overline{B}_n$ mit

$$g(x^*) = x^*.$$

Wegen $g(\overline{B}_n) \subset S^{n-1}$ ist $\|x^*\|_2 = 1$. Also gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \|x^*\|_2^2 \\
&= \frac{1}{r}(rx^*, x^*) \\
&= \frac{1}{r}(rx^*, g(x^*)) \\
&= -(r\|f(rx^*)\|_2)^{-1}(rx^*, f(rx^*)) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Also besitzt f eine Nullstelle in $\overline{B(0, r)}$. Wegen Gleichung (2) kann diese aber nicht auf $\partial B(0, r)$ liegen. $\square$

Satz X.7.3 hat eine interessante Konsequenz.

SATZ X.7.4. *S^{n-1} und $\overline{B}_{n-1}$ sind nicht homöomorph.*

BEWEIS. ANN.: Es gibt einen Homöomorphismus φ von S^{n-1} auf $\overline{B}_{n-1}$.
Definiere $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ \|x\|_2 \varphi(\frac{x}{\|x\|_2}) & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Dann ist ψ stetig und damit auch $f : \overline{B}_n \to S^{n-1}$ mit $f = \varphi^{-1} \circ \psi$. Für $x \in S^{n-1}$ gilt

$$f(x) = x$$

und somit

$$(f(x), x) = 1 > 0 \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

Wegen Satz X.7.3 gibt es ein $x^* \in B_n$ mit $f(x^*) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $f(\overline{B}_n) \subset S^{n-1}$. □

Wir wollen den Brouwerschen Fixpunktsatz verallgemeinern. Dazu benötigen wir ein approximationstheoretisches Ergebnis, das von eigenständigem Interesse ist.

SATZ X.7.5. *Seien H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$ und $M \subset H$ abgeschlossen und konvex. Dann besitzt jedes $x \in H$ eine eindeutige beste Approximation $P_M x \in M$ in M, d.h.*

$$\|x - P_M x\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Weiter gilt

$$\|P_M x - P_M y\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

BEWEIS. VORBEMERKUNG: Da $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt ist, gilt die Parallelogrammregel

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]. \tag{3}$$

EINDEUTIGKEIT: Seien $x \in H$ beliebig und $y, z \in M$ zwei beste Approximationen an x. Dann folgt aus Gleichung (3)

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= 2\|x - y\|^2 + 2\|x - z\|^2 - \|2x - y - z\|^2 \\ &= 2\{\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 - 2\|x - \underbrace{\tfrac{1}{2}(y + z)}_{\in M}\|^2\} \\ &\le 0. \end{aligned}$$

Also ist $y = z$.
EXISTENZ: Sei $x \in H$ beliebig und $d = \inf_{y \in H} \|x - y\|$. O.E. ist $d > 0$, sonst ist die Behauptung trivial. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d.$$

Dann folgt aus Gleichung (3) für $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\{\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2 - 2\|x - \underbrace{\tfrac{1}{2}(y_n + y_m)}_{\in M}\|^2\} \\ &\le 2\{\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2 - 2d\}. \end{aligned}$$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert damit gegen ein $y^* \in M$. Konstruktionsgemäß gilt $\|x - y^*\| = d$.

Stetigkeit von P_M: Seien $x, y \in H$ und $t \in (0,1)$ beliebig. Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &\le \|x - \underbrace{(1-t)P_M x - tP_M y}_{\in M}\|^2 - \|x - P_M x\|^2 \\
&\quad + \|y - \underbrace{(1-t)P_M y - tP_M x}_{\in M}\|^2 - \|y - P_M y\|^2 \\
&= \|x - P_M x + t[P_M x - P_M y]\|^2 - \|x - P_M x\|^2 \\
&\quad + \|y - P_M y - t[P_M x - P_M y]\|^2 - \|y - P_M y\|^2 \\
&= 2t(x - P_M x, P_M x - P_M y) \\
&\quad - 2t(y - P_M y, P_M x - P_M y) \\
&\quad + 2t^2\|P_M x - P_M y\|^2 \\
&= 2t(x - y, P_M x - P_M y) - 2t(1-t)\|P_M x - P_M y\|^2
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\|P_M x - P_M y\|^2 &\le \frac{1}{1-t}(x - y, P_M x - P_M y) \\
&\le \frac{1}{1-t}\|x - y\|\|P_M x - P_M y\| \quad \forall 0 < t < 1.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung durch Grenzübergang $t \to 0$. □

Satz X.7.6. *Seien X ein endlich dimensionaler Banachraum, $M \subset X$ konvex und kompakt und $f \in C(M, M)$. Dann besitzt f einen Fixpunkt in M.*

Beweis. Sei $n = \dim X$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \to X$ ein Isomorphismus. Dann ist $N = \Phi^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ konvex und kompakt. Insbesondere gibt es ein $R > 0$ mit $N \subset B(0, R)$. Sei $P_N : \mathbb{R}^n \to N$ der Operator, der gemäß Satz X.7.5 jedem $x \in \mathbb{R}^n$ seine beste Approximation in N zuordnet. Definiere $\psi_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\psi_R(x) = Rx$$

und $g : \overline{B}_n \to \mathbb{R}^n$ durch (vgl. Abb. X.7.1)

$$g = \psi_R^{-1} \circ \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi \circ P_N \circ \psi_R.$$

Die Funktion g ist stetig, und wegen $f(M) \subset M$ gilt $g(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$. Also besitzt gemäß Satz X.7.1 g einen Fixpunkt $z^* \in \overline{B}_n$. Sei $y^* = \psi_R(z^*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi \circ P_N(y^*) &= \psi_R(g(z^*)) \\
&= y^*.
\end{aligned}$$

Also ist $y^* \in N$ und damit $P_N y^* = y^*$. Sei $x^* = \Phi(y^*) \in M$. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \Phi(\Phi^{-1} \circ f \circ \Phi \circ P_N(y^*)) \\ &= x^*. \end{aligned}$$

□

$$\begin{tikzcd}
X \supset M \arrow[r, "f"] & M \subset X \arrow[d, "\Phi^{-1}"] \\
\mathbb{R}^n \supset N \arrow[u, "\Phi"] & N \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "id"] \\
B(0,R) \supset N \arrow[u, "P_N"] & N \subset B(0,R) \arrow[d, "\psi_R^{-1}"] \\
B_n \arrow[u, "\psi_R"] \arrow[r, "g"] & B_n
\end{tikzcd}$$

Abbildung X.7.1. Definition der Funktion g

Bemerkung X.7.7. Satz X.7.6 folgt gemäß obigem aus Satz X.7.1. Umgekehrt ist offensichtlich Satz X.7.1 ein Spezialfall von Satz X.7.6. Also sind die beiden Sätze in Wahrheit äquivalente Formulierungen eines Sachverhaltes.

Definition X.7.8. Seien X ein Vektorraum und $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dann heißt

$$\operatorname{conv}[x_1, \ldots, x_n] = \Big\{ x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i \le 1 \Big\}$$

die konvexe Hülle von $x_1, \ldots, x_n$.

Satz X.7.9. *Seien X ein normierter Vektorraum und $x_1, \ldots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist* $\operatorname{conv}[x_1, \ldots, x_n]$ *kompakt und konvex.*

Beweis. Die Konvexität folgt aus der Konstruktion. Die Kompaktheit folgt aus $\operatorname{conv}[x_1, \ldots, x_n] = \Phi(S)$ mit

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\to X \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \end{aligned}$$

und

$$S = \Big\{ \alpha \in \mathbb{R}^n : 0 \le \alpha_i \le 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i \le 1 \Big\}.$$

$\square$

Satz X.7.10 (Erster Schauderscher Fixpunktsatz). *Seien X ein normierter Vektorraum, $K \subset X$ konvex, $C \subset K$ kompakt und $f \in C(K, C)$. Dann besitzt f einen Fixpunkt in C.*

Beweis. 1. Schritt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_\varepsilon \in K$ mit $\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| \le \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da C kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Punkte $x_1, \ldots, x_n \in C$ mit $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Sei

$$K_0 = \operatorname{conv}[x_1, \ldots, x_n] \subset K$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= [\varepsilon - \|x - x_i\|]_+ \\ &= \max\{\varepsilon - \|x - x_i\|, 0\} \quad \forall x \in X, 1 \le i \le n.\end{aligned}$$

Dann sind die φ_i stetig und

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) > 0 \quad \forall x \in C.$$

Daher ist $\psi_i : C \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$, mit

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi(x)} \quad \forall x \in C$$

stetig und erfüllt

$$\begin{aligned}0 \le \psi_i(x) \le 1 \quad &\forall x \in C, 1 \le i \le n \\ \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) = 1 \quad &\forall x \in C.\end{aligned}$$

Definiere $g : C \to K_0$ durch

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) x_i.$$

g ist stetig, und für jedes $x \in C$ gilt

$$\begin{aligned}\|g(x) - x\| &= \|\sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)[x_i - x]\| \\ &= \|\sum_{\substack{1 \le j \le n \\ x \in B(x_j, \varepsilon)}} \psi_j(x)[x_j - x]\| \\ &\le \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ x \in B(x_j, \varepsilon)}} \psi_j(x)\|x_j - x\| \\ &\le \varepsilon.\end{aligned}$$

Definiere schließlich $h \in C(K, K_0)$ durch $h = g \circ f$. Aus Satz X.7.6 angewandt auf h und $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ (Man beachte: endlich dimensionale normierte Vektorräume sind vollständig!) folgt, dass es ein $x_\varepsilon \in K_0$ gibt mit

$$h(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Hieraus folgt aber

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|f(x_\varepsilon) - g(f(x_\varepsilon))\| \leq \varepsilon.$$

2. Schritt: Gemäß dem 1. Schritt gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in K$ mit

$$\|f(x_n) - x_n\| \leq \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Da $f(K) \subset C$ und C kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x^* \in C$ mit

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*.$$

Aus Gleichung (4) folgt

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*.$$

Aus der Stetigkeit von f ergibt sich schließlich

$$f(x^*) = x^*.$$

□

Wir wollen eine andere, äquivalente Formulierung des ersten Schauderschen Fixpunktsatzes angeben. Dazu benötigen wir:

Definition X.7.11. Seien X ein normierter Vektorraum und $K \subset X$. K heißt relativ kompakt, wenn $\overline{K}$ kompakt ist.

Bemerkung X.7.12. (1) Definition X.7.11 gilt auch für allgemeine topologische Räume.
(2) Eine relativ kompakte Menge ist notwendig beschränkt.
(3) Da in normierten Räumen Kompaktheit und Folgen-Kompaktheit übereinstimmen, ist K genau dann relativ kompakt, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz X.7.13 (Zweiter Schauderscher Fixpunktsatz). *Seien X ein normierter Vektorraum, $K \subset X$ konvex und $f \in C(K, K)$. f besitzt sicher dann einen Fixpunkt in K, wenn eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:*

(1) *K ist kompakt*

oder

(2) *K ist abgeschlossen und $f(K)$ ist relativ kompakt.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz X.7.10 mit $C = K$ im Fall (1) und $C = \overline{f(K)} \subset K$ im Fall (2). □

Wir wollen Satz X.7.13 benutzen, um die lokale Existenz von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu beweisen. Dazu benötigen wir ein Hilfsergebnis das von eigenständigem Interesse ist.

Satz X.7.14 (Satz von Arzela-Ascoli). *Seien* $(X, \|\cdot\|_X)$ *ein Banachraum und* $K \subset X$ *kompakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $A \subset C(K, \mathbb{R}^n)$ *ist relativ kompakt.*
(2) A *ist beschränkt und* gleichgradig stetig, *d.h.*
   (a) $\sup_{f \in A} \|f\|_{C(K,\mathbb{R}^n)} \le C$ *und*
   (b) $\sup_{f \in A} \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^n} \to 0$ *für* $\|x - y\|_X \to 0$.

Beweis. „(1) $\Longrightarrow$ (2)“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ und $f_{1,\varepsilon}, \ldots, f_{n_\varepsilon,\varepsilon} \in A$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(f_{i,\varepsilon}, \varepsilon)$, wobei $B(f, \varepsilon)$ die offene Kugel um f mit Radius ε bzgl. $\|\cdot\|_{C(K,\mathbb{R}^n)}$ ist. Für $f \in A$ gibt es dann ein $i_0 \in \mathbb{N}^*_{n_\varepsilon}$ mit $f \in B(f_{i_0,\varepsilon}, \varepsilon)$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(K,\mathbb{R}^n)} &\le \varepsilon + \|f_{i_0,\varepsilon}\|_{C(K,\mathbb{R}^n)} \\ &\le \varepsilon + \max_{1 \le i \le n_\varepsilon} \|f_{i,\varepsilon}\|_{C(K,\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (a). Weiter gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\max_{1 \le i \le n_\varepsilon} \|f_{i,\varepsilon}(x) - f_{i,\varepsilon}(y)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon$$

für alle $x, y \in K$ mit $\|x - y\|_X < \delta$ (Man beachte: die $f_{i,\varepsilon}$ sind gleichmäßig stetig!). Hieraus folgt für $f \in A$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^n} &\le 2\varepsilon + \|f_{i_0,\varepsilon}(x) - f_{i_0,\varepsilon}(y)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\le 3\varepsilon \quad \forall x, y \in K, \|x - y\|_X < \delta. \end{aligned}$$

Dies zeigt (b).
„(2) $\Longrightarrow$ (1)“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $k, m \in \mathbb{N}^*$ und $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$\mathbb{R}^n \supset B(0, C) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\eta_i, \varepsilon)$$

und

$$X \supset K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon).$$

Für jede Abbildung $\pi : \mathbb{N}^*_m \to \mathbb{N}^*_k$ sei

$$A_\pi = \{f \in A : \max_{1 \le j \le m} \|f(x_j) - \eta_{\pi(j)}\|_{\mathbb{R}^n} \le \varepsilon\}.$$

Falls $A_\pi \neq \emptyset$ ist, wähle ein $f_\pi \in A_\pi$.
Zu jedem $f \in A$ gibt es dann ein π mit $f \in A_\pi$. Sei nun $x \in K$. Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}^*_m$ mit $x \in B(x_j, \varepsilon)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_\pi(x)\|_{\mathbb{R}^n} \le{}& \|f(x) - f(x_j)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f(x_j) - \eta_{\pi(j)}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &+ \|\eta_{\pi(j)} - f_\pi(x_j)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f_\pi(x_j) - f_\pi(x)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le 2\sup_{f\in A}\sup_{\substack{x,y\in K\\ \|z-y\|\le\varepsilon}}\|f(z)-f(y)\|_{\mathbb{R}^n}+2\varepsilon\\ &= r_\varepsilon.\end{aligned}$$

Da A gleichgradig stetig ist, gilt $r_\varepsilon \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.
Aus obiger Abschätzung folgt

$$A \subset \bigcup_\pi B(f_\pi, 2r_\varepsilon),$$

wobei die (endliche) Anzahl von Kugeln, deren Vereinigung gebildet wird, von ε abhängt. Wie in Beweis von Satz III.4.4 (S. 82, Analysis I) folgt hieraus, dass $\overline{A}$ kompakt ist. □

Satz X.7.15 (Existenzssatz von Peano). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C(I \times U, \mathbb{R})$. Dann gibt es zu jedem $\tau \in I$ und jedem $\eta \in U$ ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass das* Anfangswertproblem

$$(5)\qquad \begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= f(t,x(t)) \quad \forall \tau-\varepsilon_0 < t < \tau+\varepsilon_0\\ x(\tau) &= \eta\end{aligned}$$

eine Lösung hat.

Beweis. Offensichtlich ist $x \in C^1((\tau-\varepsilon_0, \tau+\varepsilon_0), \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von Gleichung (5), genau dann wenn $x \in C((\tau-\varepsilon_0,\tau+\varepsilon_0),\mathbb{R}^n)$ ist und die Beziehung

$$(6)\qquad x(t) = \eta + \int_\tau^t f(s,x(s))ds \quad \forall t-\varepsilon_0 < t < \tau+\varepsilon_0$$

erfüllt.
Seien nun $\tau \in I$ und $\eta \in U$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$Q = [\tau-\varepsilon_1, \tau+\varepsilon_1] \times \overline{B_{\mathbb{R}^n}(\eta,\varepsilon_1)} \subset I \times U.$$

Sei

$$M = \max\{1, \sup_{(t,y)\in Q}\|f(t,y)\|_{\mathbb{R}^n}\}$$

und

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{M}.$$

Definiere

$$\begin{aligned}X &= C([\tau-\varepsilon_0,\tau+\varepsilon_0],\mathbb{R}^n)\\ \|\cdot\|_X &= \|\cdot\|_{C([\tau-\varepsilon_0,\tau+\varepsilon_0],\mathbb{R}^n)}\\ K &= \{x \in X : \|x-\widetilde{\eta}\|_X \le \varepsilon_1\},\end{aligned}$$

wobei $\widetilde{\eta}$ die konstante Funktion mit Wert η bezeichnet.
X ist ein Banachraum und $K \subset X$ ist konvex und abgeschlossen.

Definiere $L : K \to X$ durch

$$Lx(t) = \eta + \int_\tau^t f(s, x(s))ds.$$

Für $x \in K$ folgt

$$\begin{aligned}\|Lx - \widetilde{\eta}\|_X &= \sup_{|t-\tau|\le\varepsilon_0} \|\int_\tau^t f(s, x(s))ds\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\le \varepsilon_0 M \\ &\le \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Also ist $L(K) \subset K$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f auf der kompakten Menge Q gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(s, u) - f(t, v)\|_{\mathbb{R}^n} \le \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad \forall (s, u), (t, v) \in Q$$
$$\text{mit } \max\{|s - t|, \|u - v\|_{\mathbb{R}^n}\} \le \delta.$$

Für $x, y \in K$ mit $\|x - y\|_X \le \delta$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|Lx - Ly\|_X &= \sup_{|t-\tau|\le\varepsilon_0} \|\int_\tau^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]ds\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\le \varepsilon_0 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist $L \in C(K, K)$.
Für $t_1, t_2 \in [\tau - \varepsilon_0, \tau + \varepsilon_0]$ gilt schließlich

$$\begin{aligned}\|Lx(t_1) - Lx(t_2)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|\int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\le M|t_2 - t_1|\end{aligned}$$

und somit

$$\sup_{x\in K} \|Lx(t_1) - Lx(t_2)\|_{\mathbb{R}^n} \le M|t_1 - t_2|.$$

Damit folgt aus Satz X.7.14, dass $L(K)$ relativ kompakt ist und dass X, K, L die Voraussetzungen von Satz X.7.13 erfüllen. Mithin hat Gleichung (6) und damit auch Gleichung (5) eine Lösung. □

Bemerkung X.7.16. (1) Seien $I = U = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, x) = \sqrt{|x|} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}.$$

Für $a \in \mathbb{R}_+$ sei

$$\begin{aligned}u_a(t) &= \frac{1}{4}[(t - a)_+]^2 \\ &= \frac{1}{4}\max\{(t - a), 0\}^2.\end{aligned}$$

Dann ist u_a Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_a(t) &= f(t, u_a(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}\\ u_a(0) &= 0.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass man unter den Voraussetzungen von Satz X.7.15 i. a. keine Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems erwarten kann.

(2) Seien $I = U = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, x) = x^2 \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $u : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ mit

$$u(t) = \frac{1}{1-t}$$

die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t) &= f(t, u(t)) \quad \forall t \in (-\infty, 1)\\ u(0) &= 1.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass man unter den Voraussetzungen von Satz X.7.15 i. a. nur die lokale Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems erwarten kann.

(3) Erfüllt f aus Satz X.7.15 zusätzlich eine Lipschitz Bedingung bzgl. des zweiten Argumentes, d.h., gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathbb{R}^n} \le \lambda \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall t \in I, x, y \in U,$$

so kann man zeigen, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt (Satz von Picard-Lindelöf) (s. Satz XI.1.7). Der Beweis beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz angewandt auf den Operator L aus dem Beweis von Satz X.7.15.

KAPITEL XI

Gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Einblick in die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Zunächst beweisen wir einige einfache Existenz-, Eindeutigkeits- und Fortsetzbarkeitssätze. Dann stellen wir an Hand von Beispielen die wichtigsten elementaren Lösungsmethoden vor. Anschließend zeigen wir die stetige bzw. differenzierbare Abhängigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems von den Anfangswerten. Zum Abschluss geben wir einen kurzen Einblick in die Stabilitätstheorie, d.h. über das Langzeitverhalten von Lösungen von Differentialgleichungen unter dem Einfluss kleiner Störungen.

XI.1. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Im Folgenden bezeichnen stets $I \subset \mathbb{R}$ ein nicht leeres offenes Intervall und $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, eine nicht leere offene Menge. $\|\cdot\|$ ist eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Definition XI.1.1. (1) Seien $k \in \mathbb{N}^*$, $V \subset \mathbb{R}^{kn}$ eine nicht leere offene Menge und $f : I \times V \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Dann heißt das Problem

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} &\text{Finde } y \in C^k(I, \mathbb{R}^n) \text{ mit} \\ &y^{(k)}(t) = f\Big(t, y(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)\Big), \quad t \in I \end{aligned}$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung k-ter Ordnung auf I. Ist speziell $k = 1$, so sprechen wir einfach von einer gewöhnlichen Differentialgleichung (gDgl).
(2) Seien $t_0 \in I$ und $v_0 = (v_{0,0}, \ldots, v_{0,k-1}) \in V$. Dann heißt (D) zusammen mit den Bedingungen

$$\text{(A)} \qquad y(t_0) = v_{0,0}, \quad \ldots \quad , y^{(k-1)}(t_0) = v_{0,k-1}$$

ein Anfangswertproblem (AWP).
(3) Eine gDgl bzw. ein AWP heißen autonom, wenn die Funktion f nicht von der Variablen t abhängt.

Bemerkung XI.1.2. (1) Eine gDgl k-ter Ordnung, $k \geq 2$, kann stets in eine äquivalente gDgl erster Ordnung auf $\mathbb{R}^{nk}$ umformuliert werden. Um dies einzusehen, setze

$$z(t) = \Big(z_0(t), \ldots, z_{k-1}(t)\Big) = \Big(y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t)\Big) \in \mathbb{R}^{nk}$$

und

$$F(t, z(t)) = \Big(z_1(t), \dots, z_{k-1}(t), f(t, z_0(t), \dots, z_{k-1}(t))\Big) \in \mathbb{R}^{nk}.$$

Dann ist offensichtlich y genau dann eine Lösung von (D), wenn z eine Lösung von

$$z'(t) = F(t, z(t)) \quad , t \in I$$

ist. Aus diesem Grunde betrachten wir im Folgenden nur gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.
(2) Eine gDgl kann stets in eine äquivalente autonome gDgl umformuliert werden. Um dies anzusehen, setze

$$z(s) = (y(s), s) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

und

$$F(z) = F\Big((y(s), s)\Big) = \Big(f(s, y(s)), 1\Big) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dann ist y genau dann eine Lösung von (D), wenn z eine Lösung von

$$z'(s) = F(z(s)), \quad s \in I$$

ist.

Beispiel XI.1.3. (1) (Populationsdynamik) $y(t)$ beschreibe die Größe einer Population zur Zeit $t > 0$. Die relative zeitliche Änderung der Populationsgröße sei eine bekannte Funktion r der Zeit und der aktuellen Populationsgröße. Diese Annahmen führen auf die gDgl

$$y'(t) = r(t, y(t))y(t) \quad , t > 0.$$

Wichtige Spezialfälle sind die des unbeschränkten Wachstums

$$r(t, y(t)) = \alpha > 0 \quad \forall t > 0$$

und des beschränkten Wachstums

$$r(t, y(t)) = \alpha(y^* - y(t)) \quad \forall t > 0$$

mit $\alpha > 0, y^* > 0$. y^* spielt die Rolle einer Grenzpopulation, deren Überschreiten zum Absterben der Population führt (vgl. Beispiel XI.2.5 (S. 154)).
(2) (Räuber-Beute-Modell) $x(t)$ und $y(t)$ beschreiben die Größe einer Räuber- bzw. Beutepopulation zur Zeit $t > 0$. Die Räuberpopulation lebe ausschließlich von der Beutepopulation, ihre Reproduktionsrate sei proportional zur Größe der Beutepopulation und bei fehlender Beute sei ihre relative Sterberate konstant. Die Beutepopulation habe bei fehlenden Räubern eine konstante relative Wachstumsrate und ihre Sterberate sei proportional zur aktuellen Größe der Räuberpopulation. Diese Annahmen führen zu der gDgl

$$x' = -\alpha_1 x + \beta_1 xy$$
$$y' = \alpha_2 y - \beta_2 xy$$

mit $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ (vgl. Beispiel XI.2.2 (S. 150)).
(3) (Chemische Reaktionskinetik) Zwei Ausgangsstoffe A und B mögen zu einem Endprodukt C reagieren, $u(t)$ beschreibe die Konzentration von C zur Zeit $t > 0$. Die Änderung dieser Konzentration sei proportional zu der aktuellen Konzentration von A und B. Wenn a und b die Anfangskonzentrationen von A und B bezeichnen, führen diese Annahmen auf das AWP

$$\begin{aligned} u'(t) &= r(a - u(t))(b - u(t)) \quad , t > 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

mit $r > 0$ (vgl. Beispiel XI.2.4 (S. 153)).
(4) (Federschwingung) Die vertikale Schwingung $z(t)$ einer Feder mit Masse $m > 0$ wird nach den Newtonschen Kraftgesetzen durch die gDgl 2. Ordnung

$$mz''(t) = -kz(t) - rz'(t) \quad , t > 0$$

beschrieben. Dabei ist $-kz(t), k > 0$, die Rückstellkraft der Feder und $-rz'(t), r \geq 0$, die Reibungskraft. Die äquivalente gDgl 1. Ordnung lautet

$$\begin{aligned} z'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -\frac{k}{m} z(t) - \frac{r}{m} v(t). \end{aligned}$$

Dabei ist $v(t)$ die Geschwindigkeit der Auslenkung.
(5) (Einfluss des Luftwiderstandes) Ein Fahrzeug der Masse $m > 0$ werde durch die konstante Kraft $K > 0$ beschleunigt. Der Luftwiderstand sei proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Dann führen die Newtonschen Kraftgesetze auf die gDgl 2. Ordnung

$$mx''(t) = K - rx'(t)^2$$

mit $r > 0$. Bezeichnet $v(t)$ die Geschwindigkeit, lautet die äquivalente gDgl 1. Ordnung

$$\begin{aligned} x'(t) &= v(t) \\ mv'(t) &= K - rv(t)^2 \end{aligned}$$

(vgl. Beispiel XI.2.6 (S. 154)).

Wir wollen einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von AWPen beweisen. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition XI.1.4. Die Funktion $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ heißt gleichmässig Lipschitz-stetig auf $I \times U$ bzgl. U, wenn es ein $L \in \mathbb{R}_+$, die sog. Lipschitz-Konstante, gibt mit

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall t \in I, x, y \in U.$$

f heißt Lipschitz-stetig auf $I \times U$ bzgl. U, wenn es zu jedem $(t_0, x_0) \in I \times U$ eine Umgebung $J \times V \in \mathcal{U}\Big((t_0, x_0)\Big)$ gibt, derart dass f auf $J \times V$ gleichmäßig Lipschitz-stetig ist bzgl. V.

Bemerkung XI.1.5. (1) Ist $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ bzgl. der Variablen x differenzierbar und $D_x f \in C(I \times U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, so ist f auf $I \times U$ bzgl. U Lipschitz-stetig.
(2) Ist $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig auf $I \times U$ bzgl. U und $J \times K \subset I \times U$ kompakt, so ist f auf $J \times K$ gleichmäßig Lipschitz-stetig bzgl. K.
(3) Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, so ist f Lipschitz-stetig (auf U bzgl. U). Ist $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig und $K \subset U$ kompakt, so ist f gleichmäßig Lipschitz-stetig auf K.

Beweis. ad (1): Sei $(t_0, x_0) \in I \times U$ beliebig und $\varepsilon > 0$ so, dass $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset I \times U$ ist. Da $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ kompakt und $D_x f \in C(I \times U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$ ist, existiert

$$M = \max_{|t - t_0| \le \varepsilon} \max_{x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)}} \|D_x f(t, x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}.$$

Für alle $t \in |t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon|$ und alle $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ folgt dann mit Satz VII.3.7(1) (S. 62, Analysis II)

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \le M \|x - y\|.$$

ad (2): Ist offensichtlich.
ad (3): Ist offensichtlich. □

Satz XI.1.6 (Lemma von Gronwall). *Seien $\alpha, \beta, u \in C(I, \mathbb{R}_+)$ und $t_0 \in I$ mit*

$$u(t) \le \alpha(t) + \Big| \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) ds \Big| \quad \forall t \in I.$$

Dann gilt

$$u(t) \le \alpha(t) + \Big| \int_{t_0}^t \alpha(s) \beta(s) e^{| \int_s^t \beta(\sigma) d\sigma |} ds \Big| \quad \forall t \in I.$$

Beweis. Sei

$$v(t) = \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) ds \quad \forall t \in I.$$

Aus den Voraussetzungen folgt, dass v stetig differenzierbar ist und die Ungleichung

$$\begin{aligned} v'(t) &= \beta(t) u(t) \\ &\le \beta(t) \alpha(t) + \beta(t) \Big| \int_{t_0}^t \beta(s) u(s) ds \Big| \\ &= \beta(t) \alpha(t) + \operatorname{sgn}(t - t_0) \beta(t) v(t) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

erfüllt. Multiplikation dieser Ungleichung mit

$$\gamma(t) = e^{-|\int_{t_0}^t \beta(s)ds|} = e^{-\int_{t_0}^t \operatorname{sgn}(s-t_0)\beta(s)ds}$$

liefert

$$\begin{aligned}\gamma(t)v'(t) &\leq \alpha(t)\beta(t)\gamma(t) + \operatorname{sgn}(t-t_0)\beta(t)\gamma(t)v(t)\\ &= \alpha(t)\beta(t)\gamma(t) - \gamma'(t)v(t) \quad \forall t \in I\end{aligned}$$

und somit

$$(\gamma v)' \leq \alpha\beta\gamma \quad \text{auf } I.$$

Integration von t_0 bis $t \in I$ liefert wegen $v(t_0) = 0$

$$\operatorname{sgn}(t-t_0)\gamma(t)v(t) \leq \operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\gamma(s)ds$$

und somit

$$\begin{aligned}\Big|\int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds\Big| &= \operatorname{sgn}(t-t_0)v(t)\\ &\leq \operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\gamma(s)\gamma(t)^{-1}ds\\ &= \Big|\int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)e^{|\int_s^t \beta(\sigma)d\sigma|}ds\Big| \quad \forall t \in I.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz XI.1.7 (Satz von Picard-Lindelöf). *Sei $f \in C(I\times U, \mathbb{R}^n)$ auf $I\times U$ bzgl. U Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem $(t_0, x_0) \in I\times U$ ein $\varepsilon > 0$, so dass das AWP*

$$\begin{aligned}x' &= f(t,x) \quad \textit{auf } (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $x \in C^1((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon), \mathbb{R}^n)$ hat.

Beweis. 1. Variante: Aus dem Existenzsatz von Peano, Satz X.7.15 (S. 136), folgt, dass das AWP mindestens eine Lösung hat. Seien $x, y \in C^1((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon), \mathbb{R}^n)$ zwei Lösungen des AWP. Indem wir ε nötigenfalls verkleinern, folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit von f

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\| &= \Big\|\int_{t_0}^t f(s,x(s)) - f(s,y(s))ds\Big\|\\ &\leq \Big|\int_{t_0}^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds\Big|\\ &\leq \Big|\int_{t_0}^t L\|x(s)-y(s)\|ds\Big| \quad \forall |t-t_0| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Diese Abschätzung und Satz XI.1.6 mit $\alpha = 0$ und $\beta = L$ beweisen die behauptete Eindeutigkeit.

2. VARIANTE: Seien $\varepsilon_0 > 0$ und $R > 0$, so dass $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \overline{B(x_0, R)} \subset I \times U$ ist und f auf $[t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0] \times \overline{B(x_0, R)}$ gleichmäßig Lipschitz-stetig ist bzgl. $\overline{B(x_0, R)}$. Sei L die Lipschitz-Konstante von f und

$$M = \max_{|t-t_0| \le \varepsilon_0} \max_{x \in \overline{B(x_0,R)}} \|f(t,x)\|.$$

Setze

$$\varepsilon = \min\Big\{\varepsilon_0, \frac{R}{M}\Big\}.$$

Sei $X = C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ und $K = B_{\|\cdot\|_\infty}(\overline{x}_0, R)$. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm auf X und $\overline{x}_0$ die konstante Funktion mit Wert x_0. Durch

$$\|x\|_L = \max_{|t-t_0| \le \varepsilon} \left\| e^{-L|t-t_0|} x(t) \right\|$$

wird dann eine Norm auf X definiert, bzgl. derer X vollständig und K abgeschlossen ist (Beweis Übungsaufgabe!). Definiere die Abbildung $\Phi : X \to X$ wie im Beweis von Satz X.7.15 (S. 136) durch

$$\Phi x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \quad \forall |t - t_0| \le \varepsilon.$$

Offensichtlich ist x ein Fixpunkt von Φ genau dann, wenn x das AWP löst. Für $x, y \in X$ folgt

$$\begin{aligned}
\|\Phi x(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \right\| \\
&\le M|t - t_0| \\
&\le M\varepsilon \\
&\le R
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\left\| e^{-L|t-t_0|}[\Phi x(t) - \Phi y(t)] \right\| &= \left\| e^{-L|t-t_0|} \int_{t_0}^t f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds \right\| \\
&\le e^{-L|t-t_0|} \operatorname{sgn}(t - t_0) \\
&\quad \cdot \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|ds \\
&\le e^{-L|t-t_0|} \operatorname{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^t L\|x(s) - y(s)\|ds \\
&\le \operatorname{sgn}(t - t_0) \int_{t_0}^t e^{-L|t-t_0|} L e^{L|s-t_0|} \|x - y\|_L ds \\
&= (1 - e^{-L|t-t_0|})\|x - y\|_L \\
&\le (1 - e^{-L\varepsilon})\|x - y\|_L.
\end{aligned}$$

Also ist Φ eine Kontraktion auf K mit Kontraktionsrate $\kappa = 1 - e^{-L\varepsilon}$. Damit folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz, Satz IV.4.3 (S. 137, Analysis I). □

Bemerkung XI.1.8. Bemerkung X.7.16(1) (S. 137) zeigt, dass man ohne die vorausgesetzte Lipschitz-Stetigkeit i. a. nicht die Eindeutigkeit der Lösung des AWP erwarten kann. Bemerkung X.7.16(2) (S. 137) zeigt, dass man unter den Voraussetzungen von Satz XI.1.7 i. a. nur die lokale Existenz der Lösung des AWP erwarten kann. Satz XI.1.7 zeigt, dass es nicht immer ratsam ist, eine nicht autonome gDgl in die äquivalente autonome gDgl umzuformen. Für die nicht autonome gDgl benötigen wir nämlich nur Lipschitz-Stetigkeit bzgl. x, für die äquivalente autonome gDgl dagegen Lipschitz-Stetigkeit bzgl x und t.

Satz XI.1.9 (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz). *Sei $f \in C(I \times U, \mathbb{R}^n)$ auf $I \times U$ bzgl. U Lipschitz-stetig. Dann existiert für jedes $(t_0, x_0) \in I \times U$ genau eine nicht fortsetzbare Lösung $u(\cdot; t_0, x_0) \in C^1(I(t_0, x_0), U)$ des AWP*

$$(*) \qquad \begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Das maximale Existenzintervall $I(t_0, x_0)$ ist offen, d.h.

$$I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0)),$$

und es gilt entweder

$$t^- = t^-(t_0, x_0) = \inf I \quad \textit{bzw.} \quad t^+ = t^+(t_0, x_0) = \sup I$$

oder

$$\lim_{t \to t^\pm \mp 0} \min\{\operatorname{dist}(u(t; t_0, x_0), \partial U), \|u(t; t_0, x_0)\|^{-1}\} = 0.$$

Dabei ist

$$\operatorname{dist}(z, \emptyset) = +\infty$$

und für eine nicht leere abgeschlossene Menge A

$$\operatorname{dist}(z, A) = \inf\{\|z - y\| : y \in A\}.$$

Beweis. 1. Schritt: Sei $(t_0, x_0) \in I \times U$ beliebig und im Folgenden fest. Wegen Satz XI.1.7 existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass das AWP $(*)$ eine eindeutige Lösung u auf $I_1 = [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]$ hat. Wegen Satz XI.1.7 existiert weiter ein $\varepsilon_2 > 0$, so dass das AWP

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0 + \varepsilon_1) &= u(t_0 + \varepsilon_1) \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung v auf $I_{1,2} = [t_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2]$ besitzt. Aus dem Beweis von Satz XI.1.7 folgt, dass auf $I_1 \cap I_{1,2}$ gilt $u = v$.

Folglich ist die durch

$$u_1 = \begin{cases} u & \text{auf } I_1, \\ v & \text{auf } I_{1,2}, \end{cases}$$

auf $I_1 \cup I_{1,2}$ definierte Funktion eine Lösung des AWP $(*)$, die u echt fortsetzt. Da wir ganz analog für $t_0 - \varepsilon_1$ argumentieren können, zeigt dies, dass u echt nach links und rechts fortgesetzt werden kann.

2. SCHRITT: Wegen des 1. Schrittes ist folgende Definition sinnvoll

$$t^+ = t^+(t_0, x_0) = \sup\{\beta \in I : (*) \text{ hat eine Lösung auf } [t_0, \beta]\},$$
$$t^- = t^-(t_0, x_0) = \inf\{\beta \in I : (*) \text{ hat eine Lösung auf } [\beta, t_0]\}.$$

Dann existiert genau eine Lösung $u = u(\cdot; t_0, x_0) \in C^1((t^-, t^+), U)$ von $(*)$ und u kann nicht fortgesetzt werden. Das maximale Existenzintervall $I(t_0, x_0) = (t^-, t^+)$ ist offen, da wir sonst das Fortsetzungsargument aus Schritt 1 auf $(t^+, u(t^+; t_0, x_0))$ bzw. $(t^-, u(t^-; t_0, x_0))$ anwenden könnten.

3. SCHRITT: Wir nehmen an, dass $t^+ < \sup I$ ist, und wollen zeigen, dass

$$(**) \qquad \lim_{t \to t^+ - 0} \min\{\operatorname{dist}(u(t), \partial U), \|u(t)\|^{-1}\} = 0$$

ist. Wir nehmen dazu an, dass $(**)$ falsch ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n < t^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t^+$ und

$$\|u(t_n)\| \le \frac{1}{2\varepsilon} \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(u(t_n); \partial U) \ge 2\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dabei ist o.E. $\varepsilon^2 \le \frac{1}{2}$. Sei

$$M = \max\{\|f(t, x)\| : t_0 \le t \le t^+, \|x - x_0\| \le \frac{1}{\varepsilon}, \operatorname{dist}(x, \partial U) \ge \varepsilon\}$$

und $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$.

BEH.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $s \in [0, \min\{\delta, t^+ - t_n\}]$ gilt

$$\|u(t_n + s)\| < \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(u(t_n + s), \partial U) > \varepsilon.$$

BEW. DER BEH.: Angenommen, die BEH. ist falsch. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}^*$ und ein $\beta \in (0, \min\{\delta, t^+ - t_k\}]$ mit $\|u(t_k + s)\| \le \frac{1}{\varepsilon}$ und $\operatorname{dist}(u(t_k + s), \partial U) \ge \varepsilon$ für alle $0 \le s \le \beta$ und

$$\|u(t_k + \beta)\| = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \operatorname{dist}(u(t_k + \beta), \partial U) = \varepsilon.$$

Dann folgt

$$\|f(t_k + s, u(t_k + s))\| \le M \quad \forall 0 \le s \le \beta$$

und somit

$$\begin{aligned} \|u(t_k + \beta) - u(t_k)\| &= \left\| \int_{t_k}^{t_k + \beta} f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\le M\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \delta M \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\|u(t_k+\beta)\| \leq \varepsilon + \|u(t_k)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon}$$

wegen $\varepsilon^2 \leq \frac{1}{2}$ und

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(u(t_k+\beta), \partial U) &\geq \operatorname{dist}(u(t_k), \partial U) - \|u(t_k+\beta) - u(t_k)\| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von ε.
Wegen der Beh. gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $t^+ - t_k \leq \delta$ und alle $s, t \in [t_k, t^+)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &= \left\| \int_s^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq M|t-s|. \end{aligned}$$

Ist also $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $t'_n < t^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} t'_n = t^+$, so zeigt dies, dass $(u(t'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und somit gegen ein $y \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Da $\operatorname{dist}(u(t), \partial U) \geq \varepsilon$ ist für alle t hinreichend nahe bei t^+, folgt $y \in U$. Ebenso folgt aus obiger Abschätzung, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t'_n} f(s, u(s)) ds$$

existiert. Sei nun $(t''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere Folge mit $t''_n < t^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} t''_n = t^+$. Dann folgt mit den gleichen Argumenten

$$u(t''_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z \in U.$$

Aus obiger Abschätzung folgt

$$\begin{aligned} \|y - z\| &= \lim_{n\to\infty} \|u(t'_n) - u(t''_n)\| \\ &\leq M \lim_{n\to\infty} |t'_n - t''_n| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$y = \lim_{t\to t^+ - 0} u(t).$$

Ganz analog folgt, dass

$$\lim_{t\to t^+ - 0} \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds = \int_{t_0}^{t^+} f(s, u(s)) ds$$

gilt, d.h. dass rechts stehende uneigentliche Integral existiert. Definiere

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & \text{für } t^- < t < t^+, \\ y & \text{für } t = t^+. \end{cases}$$

Dann folgt $v \in C((t^-, t^+], U)$ und

$$v(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds \quad \forall t^- < t \leq t^+.$$

Also ist v eine Lösung des AWP $(*)$, die u fortsetzt. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt $t^+ = \sup I$ oder

$$\lim_{t \to t^+ - 0} \min\{\operatorname{dist}(u(t), \partial U), \|u(t)\|^{-1}\} = 0.$$

Ganz analog verfahren wir für t^-. □

Bemerkung XI.1.10. Die Bezeichnungen und Voraussetzungen seien wie in Satz XI.1.9. Definiere

$$\gamma^+(t_0, x_0) = \{u(t; t_0, x_0) : t \in [t_0, t^+(t_0, x_0))\},$$
$$\gamma^-(t_0, x_0) = \{u(t; t_0, x_0) : t \in (t^-(t_0, x_0), t_0]\}.$$

Dann gilt:

(1) Ist $\gamma^\pm$ beschränkt, so ist $t^+ = \sup I$ bzw. $t^- = \inf I$ oder es gilt $\operatorname{dist}(u(t; t_0, x_0), \partial U) \to 0$ für $t \to t^\pm \mp 0$. D.h., die Lösung existiert entweder für alle Zeiten oder sie läuft gegen den Rand von U.

(2) Ist $\gamma^\pm$ in einer kompakten Menge enthalten, so ist $t^+ = \sup I$ bzw. $t^- = \inf I$.

Bemerkung XI.1.11. Die Funktion f sei linear beschränkt, d.h. es gebe $\alpha, \beta \in C(I, \mathbb{R}_+)$ mit

$$\|f(t, x)\| \leq \alpha(t)\|x\| + \beta(t) \quad \forall (t, x) \in I \times U.$$

Dann folgt aus dem Lemma von Gronwall, Satz XI.1.6, dass jede Lösung von $x' = f(t, x)$ beschränkt ist auf beschränkten Intervallen. Ist insbesondere $U = \mathbb{R}^n$, so besitzt das AWP $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ für alle $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige globale Lösung.

XI.2. Elementare Lösungsmethoden

Beispiel XI.2.1 (Exakte gDgl, integrierender Faktor). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, nicht leer, $P, Q \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $(x_0, y_0) \in U$ mit $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Wir betrachten das AWP

$$(1) \qquad \begin{aligned} y'(x) &= -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))} \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} Q(x,y(x))y'(x) + P(x,y(x)) &= 0 \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Sei

$$\alpha = P dx + Q dy.$$

Wir nehmen zunächst an, α sei geschlossen, d.h.

$$d\alpha = 0 \iff \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Dann gibt es in einer Umgebung V von (x_0, y_0) in U eine Funktion $F \in C^2(V, \mathbb{R}^2)$ mit

$$\alpha = dF \iff P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

O.E. können wir F so wählen, dass $F(x_0, y_0) = 0$ ist (F ist eindeutig bis auf eine additive Konstante!). Wegen $Q(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, Satz VII.5.9 (S. 83, Analysis II), dass die Menge

$$N_0 = \{(x,y) \in V : F(x,y) = 0\}$$

in einer Umgebung von (x_0, y_0) als Graph einer Funktion y von x dargestellt werden kann. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $y \in C^1((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \mathbb{R})$ mit

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall |x - x_0| < \varepsilon \text{ und } y(x_0) = y_0.$$

Aus der Kettenregel folgt, dass y das AWP (1) löst. Andererseits erfüllt Problem (1) die Voraussetzungen von Satz XI.1.7 (S. 143), so dass y die eindeutige Lösung ist. Die Lösung von Problem (1) ist also durch die Niveaulinie einer Stammfunktion F von α bestimmt. Da $\alpha = dF$, d.h. α exakt ist, nennt man Problem (1) eine EXAKTE GDGL.

Wir betrachten nun den Fall $d\alpha \neq 0$. Wir nehmen an, dass es eine Funktion $M \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt, so dass αM geschlossen ist. M heißt dann ein INTEGRIERENDER FAKTOR. M muss die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}(MP) = \frac{\partial}{\partial x}(MQ) \\ \iff\ &Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y} = M\Big\{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\Big\} \end{aligned}$$

erfüllen. Da αM geschlossen ist, gibt es wieder eine Umgebung V von (x_0, y_0) in U und eine Stammfunktion $\widetilde{F}$ von αM, d.h.

$$\alpha M = d\widetilde{F} \iff MP = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}, MQ = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}.$$

Wie oben folgt daher, dass die Lösung von Problem (1) durch die Niveaulinie von $\widetilde{F}$, auf der (x_0, y_0) liegt, gegeben ist.

Beispiel XI.2.2 (Räuber-Beute-Modell). Wir betrachten das AWP aus Beispiel XI.1.3(2) (S. 140)

$$
\begin{aligned}
x' &= -\alpha_1 x + \beta_1 xy \\
y' &= \alpha_2 y - \beta_2 xy \\
x(0) &= x_0 \\
y(0) &= y_0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_0, y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (-\alpha_1 x + \beta_1 xy, \alpha_2 y - \beta_2 xy)$ ist offensichtlich C^∞ und erfüllt wegen Bemerkung XI.1.5 (S. 142) die Voraussetzungen von Satz XI.1.7 (S. 143). Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass Gleichung (2) eine eindeutige Lösung $(x,y) \in C^1((0,\varepsilon), \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$ besitzt. Multiplizieren wir die erste Gleichung von Gleichung (2) mit $\alpha_2 y - \beta_2 xy$ und die zweite mit $\alpha_1 x - \beta_1 xy$ und addieren beide Gleichungen, so folgt

$$y(\alpha_2 - \beta_2 x)x' + x(\alpha_1 - \beta_1 y)y' = 0.$$

Die Differentialform $\alpha = y(\alpha_2 - \beta_2 x)dx + x(\alpha_1 - \beta_1 y)dy$ ist nicht geschlossen. Wie man leicht nachprüft, ist aber $\frac{1}{xy}$ ein integrierender Faktor und

$$(xy)^{-1}\alpha = (\alpha_2 x^{-1} - \beta_2)dx + (\alpha_1 y^{-1} - \beta_1)dy = df$$

mit

$$f(x,y) = \alpha_2 \ln x - \beta_2 x + \alpha_1 \ln y - \beta_1 y.$$

Aus Beispiel XI.2.1 folgt daher, dass die Lösung von Gleichung (2) auf einer geeigneten Niveaulinie von f liegt. Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ ein Homöomorphismus ist, können wir äquivalent die Niveaulinien von

$$F = \exp \circ f = \frac{x^{\alpha_2}}{e^{\beta_2 x}} \cdot \frac{y^{\alpha_1}}{e^{\beta_1 y}} = \varphi(x) \cdot \psi(y)$$

betrachten. Sei also $c \in \mathbb{R}_+^*$ und

$$N_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = c\}.$$

Offensichtlich haben die Funktionen φ und ψ folgende Eigenschaften:

(1) $\varphi(0) = \psi(0) = 0$,
(2) $\lim\limits_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \psi(z) = 0$,
(3) $M_\varphi = \sup\limits_{z\in\mathbb{R}_+} \varphi(z) = \varphi(\dfrac{\alpha_2}{\beta_2})$,
(4) $M_\psi = \sup\limits_{z\in\mathbb{R}_+} \psi(z) = \psi(\dfrac{\alpha_1}{\beta_1})$,
(5) zu jedem $\mu \in (0, M_\varphi)$ bzw. $\mu \in (0, M_\psi)$ gibt es genau zwei Zahlen $z_{\varphi,\mu}^- < \frac{\alpha_2}{\beta_2} < z_{\varphi,\mu}^+$ bzw. $z_{\psi,\mu}^- < \frac{\alpha_1}{\beta_1} < z_{\psi,\mu}^+$ mit $\varphi(z_{\varphi,\mu}^\pm) = \mu$ bzw. $\psi(z_{\psi,\mu}^\pm) = \mu$.

Hieraus folgt unmittelbar:

(1) Ist $c > M_\varphi M_\psi$, so ist $N_c = \emptyset$.

(2) Ist $c = M_\varphi M_\psi$, so ist $N_c = \{(\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})\}$.
(3) Ist $c < M_\varphi M_\psi$, so ist N_c eine geschlossene ellipsenförmige Kurve, die in dem Rechteck

$$\left[z^-_{\varphi,cM_\psi^{-1}}, z^+_{\varphi,cM_\psi^{-1}}\right] \times \left[z^-_{\psi,cM_\varphi^{-1}}, z^+_{\psi,cM_\varphi^{-1}}\right]$$

liegt.

Für die Lösung von Gleichung (2) bedeutet dies wegen Bemerkung XI.1.10(2) (S. 148):

(1) Ist $(x_0, y_0) = (\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$, so ist $(x(t), y(t))$ für alle $t \geq 0$ konstant.
(2) Ist $(x_0, y_0) \neq (\frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_1}{\beta_1})$, so existiert die Lösung von Gleichung (2) für alle $t \geq 0$ und liegt auf der Niveaulinie $N_{F(x_0,y_0)}$.

Wir wollen zeigen, dass im Fall (2) die Lösung des AWP (2) periodisch ist, d.h., dass es ein $T > 0$ gibt mit

$$(*) \qquad (x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dazu setzen wir $C = F(x_0, y_0)$ und bezeichnen mit

$$\gamma_0 = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

die Trajektorie der Lösung von Gleichung (2) zum Anfangswert (x_0, y_0). Dann ist gemäß obigem $\gamma_0 \subset N_C$. Aus Satz XI.1.7 (S. 143) folgt, dass γ_0 relativ offen ist in N_C. Sei nun $(x_1, y_1) \in N_C \backslash \gamma_0$. Dann besitzt das AWP (2) eine eindeutige Lösung zum Anfangswert (x_1, y_1). Für die zugehörige Trajektorie γ_1 gilt wegen Satz XI.1.7 (S. 143) $\gamma_1 \cap \gamma_0 = \emptyset$ und γ_1 ist relativ offen in N_C. Also ist γ_0 auch relativ abgeschlossen in N_C. Da N_C zusammenhängend ist, folgt $\gamma_0 = N_C$. Also gibt es ein $T > 0$ mit

$$(x(T), y(T)) = (x_0, y_0) = (x(0), y(0)).$$

Hieraus und aus Satz XI.1.7 (S. 143) folgt dann die Beziehung $(*)$.
Mit Hilfe der Periode T können wir den Mittelwert der Räuber- bzw. Beutepopulation durch

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad , \quad \overline{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

definieren. Dividieren wir die erste bzw. zweite Gleichung von Problem (2) durch x bzw. y und integrieren wir beide Gleichungen von 0 bis T, so erhalten wir wegen der Periodizität

$$\begin{aligned}
0 &= \ln x(T) - \ln x(0) \\
&= \int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)} dt \\
&= \int_0^T (-\alpha_1 + \beta_1 y(t)) dt \\
&= -\alpha_1 T + \beta_1 T \overline{y}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}0 &= \ln y(T) - \ln y(0)\\ &= \int_0^T \frac{y'(t)}{y(t)} dt\\ &= \int_0^T (\alpha_2 - \beta_2 x(t)) dt\\ &= \alpha_2 T - \beta_2 T \overline{x}.\end{aligned}$$

Also gilt für die Mittelwerte der Populationen

$$\overline{x} = \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \overline{y} = \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

d.h., die mittlere Populationsdichte der Räuberspezies (Beutespezies) hängt nur von dem Verhältnis der relativen Geburts- und Sterberaten der Beutespezies (Räuberspezies) ab. Dies hat eine interessante Konsequenz: Nehmen wir an, wir wollen die Beutespezies künstlich durch ein Gift reduzieren, das - als Nebenwirkung - auch die Räuberspezies angreift. Dann müssen wir in Gleichung (2) α_1 und α_2 durch $\alpha_1 + \varepsilon_1$ bzw. $\alpha_2 - \varepsilon_2$ mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ersetzen. Falls das Gift so schwach ist, dass $\alpha_2 - \varepsilon_2 > 0$ ist, können wir unsere bisherigen Überlegungen anwenden und erhalten die neuen Mittelwerte

$$\overline{x} = \frac{\alpha_2 - \varepsilon_2}{\beta_2} \quad , \quad \overline{y} = \frac{\alpha_1 + \varepsilon_1}{\beta_1}.$$

D.h., unser Eingriff ist kontraproduktiv und die Beutespezies nimmt im Mittel sogar zu.

Beispiel XI.2.3 (Trennung der Variablen). Seien $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ offene, nicht leere Intervalle, $f \in C(I, \mathbb{R})$, $g \in C(J, \mathbb{R})$ und $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ mit $g(y_0) \neq 0$. Dann betrachten wir das AWP

$$\begin{aligned}y' &= f(x)g(y) \quad \text{auf } I\\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned} \tag{3}$$

Dies ist ein Spezialfall von Beispiel XI.2.1 mit $U = I \times J$ und

$$P(x, y) = f(x) \quad , \quad Q(x, y) = -\frac{1}{g(y)}.$$

Offensichtlich ist die zugehörige Differentialform

$$\alpha = f(x)dx - \frac{1}{g(y)} dy$$

geschlossen und hat die Stammfunktion

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(u)du - \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(v)} dv$$

mit $F(x_0, y_0) = 0$. Daher ist die Lösung von Gleichung (3) in einer Umgebung von x_0 gegeben durch die Niveaulinie

$$N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Wegen Satz VII.5.9 (S. 83, Analysis II) und Satz IV.2.11 (S. 124, Analysis I) können wir die Lösung in einer Umgebung von x_0 darstellen als

$$y(x) = \varphi^{-1} \circ \psi(x)$$

mit

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{x_0}^{x} f(u)du, \\ \varphi(y) &= \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(v)}dv. \end{aligned}$$

Beispiel XI.2.4 (Chemische Reaktionskinetik). Wir betrachten das AWP

$$(4) \qquad \begin{aligned} u' &= r(a-u)(b-u) \quad ,t > 0 \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

aus Beispiel XI.1.3(3) (S. 140) mit $r, a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Dies ist eine Gleichung mit getrennten Veränderlichen wie in Beispiel XI.2.3 mit

$$f(x) = r \quad , \quad g(y) = (a-y)(b-y).$$

Wir betrachten zunächst den Fall $a \neq b$. Durch elementare Integration bzw. Partialbruchzerlegung folgt

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^x r du \\ &= rx \\ \varphi(y) &= \int_0^y \frac{1}{(a-v)(b-v)}dv \\ &= \frac{1}{a-b}\int_0^y \Big[\frac{1}{b-v} - \frac{1}{a-v}\Big]dv \\ &= \frac{1}{a-b}\Big[\ln\Big(\frac{a-y}{b-y}\Big) - \ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Also lautet die Lösung von Gleichung (4)

$$u(t) = ab\frac{1-e^{r(a-b)t}}{b-ae^{r(a-b)t}}.$$

Insbesondere folgt durch elementare Rechnung

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \min\{a, b\}.$$

Betrachte nun den Fall $a = b$. Dann folgt

$$\psi(x) = rx$$

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \int_0^y \frac{1}{(a-v)^2}dv \\ &= \frac{1}{a-v} - \frac{1}{a}.\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung von Gleichung (4)

$$u(t) = a - \frac{1}{\frac{1}{a} + rt},$$

und es gilt wieder

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = a.$$

Beispiel XI.2.5 (Populationsdynamik). Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned}y' &= \alpha y(y^* - y) \quad ,t > 0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned} \tag{5}$$

aus Beispiel XI.1.3(1) (S. 140) mit $\alpha, y^*, y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Beispiel XI.2.3 liefert mit $f(u) = \alpha$ und $g(v) = v(y^* - v)$:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_0^x \alpha du \\ &= \alpha x \\ \varphi(y) &= \int_{y_0}^y \frac{1}{v(y^*-v)}dv \\ &= \frac{1}{y^*}\int_{y_0}^y \Big[\frac{1}{y^*-v} + \frac{1}{v}\Big]dv \\ &= \frac{1}{y^*}\Big[\ln\Big|\frac{y}{y^*-y}\Big| - \ln\Big|\frac{y_0}{y^*-y_0}\Big|\Big].\end{aligned}$$

Also lautet die Lösung von Gleichung (5)

$$y(t) = y^* \frac{y_0 e^{\alpha y^* t}}{y^* - y_0 + y_0 e^{\alpha y^* t}}.$$

Insbesondere konvergiert $y(t)$ für $t \to \infty$ gegen die Grenzpopulation y^*, und zwar monoton wachsend, wenn $y_0 < y^*$ ist, und monoton fallend, wenn $y_0 > y^*$ ist.

Beispiel XI.2.6 (Einfluss des Luftwiderstandes). Das AWP

$$\begin{aligned}v' &= \frac{K}{m} - \frac{r}{m}v^2 \\ v(0) &= 0\end{aligned} \tag{6}$$

aus Beispiel XI.1.3(5) (S. 140) kann wegen

$$\frac{K}{m} - \frac{r}{m}v^2 = \Big(\sqrt{\frac{K}{m}} - \sqrt{\frac{r}{m}}v\Big)\Big(\sqrt{\frac{K}{m}} + \sqrt{\frac{r}{m}}v\Big)$$

$$= -\frac{r}{m}\Big(\sqrt{\frac{K}{r}} - v\Big)\Big(-\sqrt{\frac{K}{r}} - v\Big)$$

mit den gleichen Methoden gelöst werden wie Beispiel XI.2.4. Wir erhalten die Lösung

$$v(t) = \sqrt{\frac{K}{r}}\frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{Kr}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{Kr}{m}}t}}$$

und

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{K}{r}},$$

d.h., um eine Verdoppelung der Grenzgeschwindigkeit zu erhalten, muss man die Antriebskraft vervierfachen oder den Luftwiderstand vierteln.

Beispiel XI.2.7 (Variation der Konstanten). Seien $a, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Wegen Satz XI.1.7 (S. 143) und Bemerkung XI.1.11 (S. 148) besitzt dieses AWP eine eindeutige Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Zur Konstruktion dieser Lösung betrachten wir zunächst den Fall $b = 0$. Da wegen Satz XI.1.7 (S. 143) das AWP

$$\begin{aligned} y' &= a(t)y \\ y(t_1) &= 0 \end{aligned}$$

für beliebiges t_1 stets die eindeutige Lösung $y = 0$ besitzt, folgt für die Lösung von Gleichung (7) mit $b = 0$:

(1) $x_0 < 0 \iff x(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$,
(2) $x_0 = 0 \iff x(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$,
(3) $x_0 > 0 \iff x(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Sei o.E. $x_0 > 0$. Dann können wir Gleichung (7) mit $b = 0$ durch $x(t)$ dividieren und erhalten

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{x'(t)}{x(t)} \\ &= \frac{d}{dt}\ln x(t) \end{aligned}$$

und somit

$$\ln x(t) - \ln x_0 = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

also

$$x(t) = x_0 \exp\Big\{\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big\}.$$

Offensichtlich ist dies auch die eindeutige Lösung in Fällen $x_0 = 0$ und $x_0 < 0$.
Wir betrachten nun den Fall $b \neq 0$. Motiviert durch das Ergebnis im Fall $b = 0$ machen wir den folgenden Ansatz, genannt VARIATION DER KONSTANTEN:

$$x(t) = c(t) \exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} a(s) ds \Big\}$$

mit $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Einsetzen in Gleichung (7) liefert

$$x_0 = x(t_0) = c(t_0)$$

und

$$\begin{aligned} b(t) &= x' - a(t)x \\ &= c' \exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} a(s) ds \Big\}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} c' &= b(t) \exp\Big\{ - \int_{t_0}^{t} a(s) ds \Big\} \\ c(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

und daher

$$c(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\Big\{ - \int_{t_0}^{s} a(\tau) d\tau \Big\} ds.$$

Also lautet die Lösung von Gleichung (7)

$$x(t) = x_0 \exp\Big\{ \int_{t_0}^{t} a(s) ds \Big\} + \int_{t_0}^{t} b(s) \exp\Big\{ \int_{s}^{t} a(\tau) d\tau \Big\} ds.$$

BEISPIEL XI.2.8 (AUTONOME LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN). Seien $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Aus Satz XI.1.7 (S. 143) und Bemerkung XI.1.11 (S. 148) folgt, dass es eine eindeutige globale Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ besitzt.
Zur Konstruktion dieser Lösung überlegen wir uns zunächst, dass wir o.E. eine komplexe Lösung von Gleichung (8) betrachten können. Sei nämlich $z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ eine Lösung von Gleichung (8). Dann folgt für $u = \operatorname{Re} z$ und $v = \operatorname{Im} z$:

$$\begin{aligned} u, v &\in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \\ u' &= Au, \\ u(0) &= x_0, \\ v' &= Av, \end{aligned}$$

$$v(0) = 0.$$

Aus Satz XI.1.7 (S. 143) und Bemerkung XI.1.11 (S. 148) folgt $v(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und u ist die eindeutige reelle Lösung von Gleichung (8). Sei also $z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ die eindeutige Lösung von Gleichung (8). Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass wir A auf Jordansche Normalform transformieren können. D.h., es gibt natürliche Zahlen $k, n_1, \ldots,$ $n_k \in \mathbb{N}^*$ mit $n_1 + \ldots + n_k = n$ und komplexe Zahlen $\lambda_1, \ldots \lambda_k \in \mathbb{C}$ und eine reguläre Matrix $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ mit

$$UAU^{-1} = J = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_k))$$

und

$$J(\lambda_i) = \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } n_i = 1, \\ \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{n_i,n_i}(\mathbb{C}), & \text{falls } n_i > 1. \end{cases}$$

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sind die Eigenwerte von A. Es ist $n_i > 1$ genau dann, wenn die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ_i größer ist als seine geometrische Vielfachheit. Setze

$$\widetilde{z} = Uz \;,\; \widetilde{z}_0 = Uz_0.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{z}' &= Uz' = UAz \\ &= J\widetilde{z} \\ \widetilde{z}(0) &= \widetilde{z}_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Da J Block-diagonal ist, zerfällt das AWP (9) in k voneinander unabhängige (entkoppelte) AWPe in $\mathbb{R}^m$ der Form

$$\begin{aligned} w' &= J(\lambda)w \\ w(0) &= w_0 \end{aligned} \tag{10}$$

mit $\lambda = \lambda_i$, $m = n_i$ für ein $i \in \mathbb{N}_k^*$.
Sei zunächst $m = 1$. Dann folgt für die Lösung von Gleichung (10)

$$w(t) = w_0 e^{\lambda t}.$$

Insbesondere gilt:

(1) $\operatorname{Re}\lambda < 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} w(t) = 0$,
(2) $\operatorname{Re}\lambda = 0 \Longrightarrow |w(t)|$ ist konstant für alle $t \in \mathbb{R}$,
(3) $\operatorname{Re}\lambda > 0 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} |w(t)| = \infty$ (sofern $w_0 \neq 0$).

Sei nun $m > 1$. Dann gilt für die Komponenten $w_1, \ldots, w_m$ der Lösung von Gleichung (10):

$$w_m' = \lambda w_m,$$

$$\begin{aligned} w_m'(0) &= w_{0,m}, \\ w_l' &= \lambda w_l + w_{l+1}, \\ w_l(0) &= w_{0,l}, \quad l = m-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Aus Beispiel XI.2.7 folgt daher rekursiv:

$$\begin{aligned} w_m(t) &= w_{0,m} e^{\lambda t}, \\ w_l(t) &= w_{0,l} e^{\lambda t} + \int_0^t w_{l+1}(s) e^{\lambda(t-s)} ds \quad , l = m-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Induktion für $l \in \mathbb{N}_m^*$

$$w_l(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{m-l} w_{0,l+j} \frac{1}{j!} t^j.$$

Also gilt:

(4) $\operatorname{Re}\lambda < 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} w_l(t) = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}_m^*$,

(5) $\operatorname{Re}\lambda \geq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \left\{ \sum\limits_{l=1}^{m} |w_l(t)|^2 \right\}^{1/2} = \infty$ (sofern $w_0 \neq 0$).

Setzen wir die Lösungen der AWPe (10) geeignet zusammen und transformieren zurück, erhalten wir die Lösung $x = U^{-1}\widetilde{z}$ von Gleichung (8). Aus den Eigenschaften (1) – (5) folgt für das asymptotische Verhalten von x unabhängig vom Anfangswert x_0:

- $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben,
- $\|x(t)\|$ ist beschränkt, falls alle Eigenwerte von A nicht-positiven Realteil haben und bei den Eigenwerten mit Realteil 0 die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Insbesondere gilt stets $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, falls A symmetrisch und negativ definit ist.

XI.3. Stetigkeits- und Differenzierbarkeitssätze

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, nicht leeres Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$, eine offene, nicht leere Menge und $f \in C(I\times U, \mathbb{R}^n)$ auf $I\times U$ Lipschitz-stetig bzgl. U. Aufgrund Satz XI.1.7 (S. 143) besitzt das AWP

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

für jedes $(t_0, x_0) \in I \times U$ in einer Umgebung von t_0 eine eindeutige Lösung $x = x(t; t_0, x_0)$. Wir wollen zeigen, dass $x(\cdot; t_0, x_0)$ stetig und – unter zusätzlichen Annahmen an f – differenzierbar von x_0 abhängt. Dazu benutzen wir zunächst, dass aus dem Beweis von Satz XI.1.7 (S. 143) folgt, dass es zu jedem $(t_0, x_0) \in I \times U$ zwei Umgebungen $J =$

$J(t_0) \in \mathcal{U}(t_0)$ und $V = V(x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(1) f ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf $J \times V$.

(2) Zu jedem $x_1 \in V$ besitzt das AWP

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_1 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $x(\cdot; t_0, x_1) \in C^1(J, V)$ auf J.

Daher können wir durch $\varphi(z) = x(\cdot; t_0, z)$ eine Abbildung $\varphi : V \to C^1(J, V)$ definieren. Dann können wir unser Ziel wie folgt formulieren: $\varphi \in C(V, C(J, V))$ bzw. – unter zusätzlichen Bedingungen an f – $\varphi \in C^1(V, C(J, V))$. Dazu nehmen wir zur Vereinfachung an, dass J beschränkt ist.

Satz XI.3.1 (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten). *Die Funktion φ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf V:*

$$\|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)\|_{C(J,V)} \le e^{Ld} \|z_1 - z_2\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall z_1, z_2 \in V.$$

Dabei ist $d = \sup\{|s - t| : s, t \in J\}$ die Länge von J und L die Lipschitz-Konstante von f.

Beweis. Seien $z_1, z_2 \in V$ und $t \in J$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x(t; t_0, z_1) - x(t; t_0, z_2) &= z_1 - z_2 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} \Big[f(s, x(s; t_0, z_1)) - f(s, x(s; t_0, z_2)) \Big] ds, \end{aligned}$$

und aus der Lipschitz-Stetigkeit von f folgt

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, z_1) - x(t; t_0, z_2)\| &\le \|z_1 - z_2\| \\ &\quad + \Big| \int_{t_0}^{t} L \|x(t; t_0, z_1) - x(t; t_0, z_2)\| ds \Big|. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Lemma von Gronwall, Satz XI.1.6 (S. 142), liefert dies

$$\begin{aligned} \|x(t; t_0, z_1) - x(t; t_0, z_2)\| &\le \|z_1 - z_2\| \\ &\quad + \Big| \int_{t_0}^{t} \|z_1 - z_2\| L e^{L|t-s|} ds \Big| \\ &= \|z_1 - z_2\| e^{L|t-t_0|} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)\|_{C(J,V)} &= \sup_{t \in J} \|x(t; t_0, z_1) - x(t; t_0, z_2)\| \\ &\le e^{Ld} \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

□

Satz XI.3.2 (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten). *Die Funktion $f(t,x)$ sei zusätzlich auf $J \times V$ stetig differenzierbar bzgl. der Variablen x und $D_x f$ Lipschitz-stetig bzgl. V. Dann ist φ stetig differenzierbar:*

$$(D\varphi(z)w)(t) = Z(t;t_0,z)w \quad \forall t \in J, z \in V, w \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei ist $Z(\cdot;t_0,z) \in C^1(J, M_{n,n}(\mathbb{R}))$ die eindeutige Lösung des linearen AWP

$$(*) \qquad \begin{aligned} Z' &= D_x f(t, x(t;t_0,z))Z \\ Z(t_0) &= Id_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen an f und aus Satz XI.1.7 (S. 143) folgt, dass das AWP $(*)$ eine eindeutige Lösung hat. Durch Verkleinern von J und V können wir erreichen, dass gilt:

(1) f ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf $J \times V$ mit Lipschitz-Konstanter L,
(2) $D_x f$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf $J \times V$ mit Lipschitz-Konstanter K,
(3) $\sup\limits_{t\in J} \sup\limits_{v \in V} \|D_x f(t,v)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \le M$.

Seien $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass gilt

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset J \quad \text{und} \quad \overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset V.$$

Für jedes $z_1, z_2 \in \overline{B(x_0,\varepsilon)}$ und jedes $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ folgt dann aus Satz XI.3.1

$$\|x(t;t_0,z_1) - x(t;t_0,z_2)\| \le e^{L\delta}\|z_1 - z_2\|.$$

Indem wir δ hinreichend klein wählen, können wir somit erreichen, dass gilt

$$x(t;t_0,z_i) \in V \quad \forall |t-t_0| \le \delta, i = 1,2.$$

Hieraus und aus $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} &\|Z(t;t_0,z_1)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \\ &\le 1 + \left|\int_{t_0}^t \|D_x f(s, x(s;t_0,z_1))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \|Z(s;t_0,z_1)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} ds\right| \\ &\le 1 + \left|\int_{t_0}^t M \|Z(s;t_0,z_1))\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} ds\right|. \end{aligned}$$

Das Lemma von Gronwall, Satz XI.1.6 (S. 142), liefert daher die Schranke

$$\|Z(t;t_0,z_1)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \le Me^{M\delta} \quad \forall |t-t_0| \le \delta.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &x(t;t_0,z_2) - x(t;t_0,z_1) - Z(t;t_0,z_1)(z_2 - z_1) \\ &= z_2 + \int_{t_0}^t f(s, x(s;t_0,z_2)) ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- z_1 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s;t_0,z_1))ds \\
&- (z_2 - z_1) - \int_{t_0}^{t} D_x f(s, x(s;t_0,z_1)) Z(s;t_0,z_1)(z_2 - z_1)ds \\
= &\int_{t_0}^{t}\int_0^1 \Big[D_x f(s, x(s;t_0,z_1) + \theta(x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1)))\Big] \\
&\qquad \Big[x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1) - Z(s;t_0,z_1)(z_2 - z_1)\Big] d\theta ds \\
&+ \int_{t_0}^{t}\int_0^1 \Big[D_x f(s, x(s;t_0,z_1) + \theta(x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1))) \\
&\qquad - D_x f(s, x(s;t_0,z_1))\Big] Z(s;t_0,z_1)(z_2 - z_1) d\theta ds.
\end{aligned}
$$

Hieraus und den schon bewiesenen Abschätzungen folgt

$$
\begin{aligned}
&\|x(t;t_0,z_2) - x(t;t_0,z_1) - Z(t;t_0,z_1)(z_2 - z_1)\| \\
\le &\Big|\int_{t_0}^{t}\int_0^1 M\|x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1) - Z(s;t_0,z_1)(z_2 - z_1)\| d\theta ds\Big| \\
&+ \Big|\int_{t_0}^{t}\int_0^1 \theta K\|x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1)\| \|Z(s;t_0,z_1)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)} \cdot \\
&\qquad \cdot \|z_2 - z_1\| d\theta ds\Big| \\
\le &\Big|\int_{t_0}^{t} M\|x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1) - Z(s;t_0,z_1)(z_2 - z_1) ds\Big| \\
&+ \Big|\int_{t_0}^{t} Ke^{L\delta} Me^{M\delta} \|z_2 - z_1\|^2 ds\Big| \\
\le &\delta K M e^{(L+M)\delta} \|z_2 - z_1\|^2 \\
&+ \Big|\int_{t_0}^{t} M\|x(s;t_0,z_2) - x(s;t_0,z_1) - Z(s;t_0,z_1)(z_2 - z_1)\| ds\Big|.
\end{aligned}
$$

Das Lemma von Gronwall, Satz XI.1.6 (S. 142), liefert daher die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&\sup_{|t-t_0|\le\delta} \|x(t;t_0,z_2) - x(t;t_0,z_1) - Z(t;t_0,z_1)(z_2 - z_1)\| \\
&\le Me^{M\delta}\delta K M e^{(L+M)\delta} \|z_2 - z_1\|^2,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
\lim_{\|z_2 - z_1\|\to 0} \frac{1}{\|z_2 - z_1\|} \|\varphi(z_2) - \varphi(z_1) - Z(\cdot;t_0,z_1)(z_2 - z_1)\|_{C(J,V)} = 0.
$$

Hieraus und aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt die Behauptung. □

Bemerkung XI.3.3. Die Ergebnisse der Sätze XI.3.1 und XI.3.2 erlauben die Lösung von Randwertproblemen, d.h. von Dglen

$$x' = f(t,x) \quad \text{auf } [a,b] \tag{1}$$

unter der Randbedingung

$$r(x(a), x(b)) = 0 \tag{2}$$

mit $r \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Mit der Notation dieses Paragraphen ist nämlich die Lösung von Gleichungen (1), (2) äquivalent dazu, einen Anfangswert $z \in U$ mit

$$r(z, x(b; a, z)) = 0 \tag{3}$$

zu finden. Diese Gleichung kann mit einer Fixpunktiteration gelöst werden. Falls sogar r differenzierbar ist und f die Voraussetzungen von Satz XI.3.2 erfüllt, kann Problem (3) mit dem Newtonverfahren gelöst werden. In jedem Newtonschritt ist dann ein lineares AWP der Form $(*)$ zu lösen.
Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Randwertproblems (1), (2) kann nicht so einfach beantwortet werden wie bei AWPen. Um dies einzusehen, betrachte das Beispiel

$$\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -\omega^2 u \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 1 \end{aligned}$$

mit $\omega \in \mathbb{R}^*$. (Die äquivalente gDgl 2. Ordnung lautet offensichtlich $u'' = -\omega^2 u$.) Für einen beliebigen Anfangswert $z = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ erhalten wir mit Beispiel XI.2.8 (S. 156) die Lösung

$$x(t; 0, z) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\beta}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Also ergibt Problem (3) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \alpha \cos\omega + \frac{\beta}{\omega} \sin\omega &= 1, \end{aligned}$$

woraus die Bedingung

$$\beta \sin\omega = \omega$$

folgt. Falls $\omega \in \pi\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist, besitzt diese Gleichung offensichtlich keine Lösung. Ist dagegen $\omega \notin \pi\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, so besitzt sie die eindeutige Lösung $\beta = \frac{\omega}{\sin\omega}$.
Betrachtet man die gleiche gDgl mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0,$$

so folgt mit den gleichen Argumenten, dass das Randwertproblem unendlich viele Lösungen hat, falls $\omega \in \pi\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist, und nur die triviale Lösung $u = 0$ hat, falls $\omega \notin \pi\mathbb{Z}$ ist.

XI.4. Stabilität

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, eine offene, nicht leere Menge und $f \in C(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{R} \times U$ Lipschitz-stetig bzgl. U. Für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$ betrachten wir in diesem Abschnitt das AWP

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir bezeichnen die gemäß Satz XI.1.9 (S. 145) existierende eindeutige globale Lösung von Gleichung (1) mit $x(\cdot; t_0, x_0)$ und setzen voraus, dass sie für alle Zeiten existiert, d.h., dass gilt $t^+(t_0, x_0) = +\infty$ für alle $t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in U$. Ist speziell $t_0 = 0$, so lassen wir im Folgenden das Argument t_0 weg. Gemäß Satz XI.3.1 (S. 159) hängt $x(\cdot; t_0, x_0)$ stetig von x_0 ab, genauer: Für alle $x_1, x_2 \in U$, $t_0, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)\| \le e^{c|t-t_0|}\|x_1 - x_2\|$$

mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}_+^*$. Diese Ungleichung sagt aber nur über die kurzzeitige Abhängigkeit etwas Sinnvolles aus, da der Vorfaktor exponentiell mit $|t - t_0|$ wächst. Andererseits zeigt Beispiel XI.2.8 (S. 156), dass u. U. stets gilt

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_2)\| = 0.$$

Dieses Langzeitverhalten wollen wir nun genauer untersuchen.

Definition XI.4.1. Die Lösung $x(\cdot; t_0, x_0)$ von Gleichung (1) heißt Ljapunov-stabil, kurz stabil, wenn es ein $R > 0$ und $C > 0$ gibt, so dass für alle $x_1 \in \overline{B(x_0, R)}$ und alle $t \ge t_0$ gilt

$$\|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| \le C\|x_0 - x_1\|.$$

Andernfalls heißt die Lösung $x(\cdot; t_0, x_0)$ instabil. Die Lösung $x(\cdot; t_0, x_0)$ heißt asymptotisch stabil, wenn es ein $R > 0$ und eine Funktion $\gamma \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$ gibt, so dass für alle $x_1 \in \overline{B(x_0, R)}$ und alle $t \ge t_0$ gilt

$$\|x(t; t_0, x_1) - x(t; t_0, x_0)\| \le \gamma(t)\|x_0 - x_1\|.$$

Der folgende Satz ist eine Umformulierung und teilweise Verschärfung der Ergebnisse von Beispiel XI.2.8 (S. 156).

Satz XI.4.2. *Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $x(\cdot; x_0)$ die Lösung des linearen autonomen AWP*

$$\begin{aligned} x' &= Ax \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dann gilt:

(1) *Die Realteile der Eigenwerte von A seien alle nicht positiv. Zusätzlich sei für alle Eigenwerte mit verschwindendem Realteil die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit. Dann ist jede Lösung von Gleichung* (2) *stabil.*
(2) *Die Realteile der Eigenwerte A seien alle negativ. Dann ist jede Lösung von Gleichung* (2) *asymptotisch stabil.*
(3) *A habe einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann ist jede Lösung von Gleichung* (2) *instabil.*

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und

$$y = x(\cdot; x_2) - x(\cdot; x_1).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} y' &= Ay \\ y(0) &= x_2 - x_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Also reicht es in allen drei Fällen, die Stabilität bzw. die Instabilität der Nulllösung zu untersuchen.
ad (1): Wegen obiger Vorbemerkung ist die Behauptung eine Umformulierung des Ergebnisses von Beispiel XI.2.8 (S. 156).
ad (2): Wie wir uns bereits in Beispiel XI.2.8 (S. 156) überlegt haben, können wir o. E. komplexe Lösung von Gleichung (3) betrachten. Außerdem seien U und J wie in Beispiel XI.2.8 (S. 156), d.h. $UAU^{-1} = J$ ist die Jordansche Normalform von A. Sei

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\Big\{-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\lambda_i : 1 \le i \le k\Big\} \\ &= -\frac{1}{2}\max\Big\{\operatorname{Re}\lambda_i : 1 \le i \le k\Big\} \\ &= -\frac{1}{2}\max\Big\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\Big\}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha > 0$, und für jeden Eigenwert λ von A gilt

$$\operatorname{Re}\lambda \le -2\alpha.$$

Setze

$$D_\alpha = \operatorname{diag}(D_1, \ldots, D_k)$$

mit

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } n_i = 1, \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha^{n_i-1} \end{pmatrix} \in M_{n_i,n_i}(\mathbb{R}) & \text{falls } n_i > 1, \end{cases}$$

und

$$V = D_\alpha^{-1} U.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} VAV^{-1} &= D_\alpha^{-1} J D_\alpha \\ &= J_\alpha \\ &= \operatorname{diag}(J_\alpha(\lambda_1), \ldots, J_\alpha(\lambda_k)) \end{aligned}$$

mit

$$J_\alpha(\lambda_i) = \begin{cases} \lambda_i & \text{falls } n_i = 1, \\ \begin{pmatrix} \lambda_i & \alpha & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} & \text{falls } n_i > 1. \end{cases}$$

Für jedes $i \in \mathbb{N}_k^*$ und jedes $w \in \mathbb{C}^{n_i}$ folgt dann mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} & w^H J_\alpha(\lambda_i) w + w^H J_\alpha(\lambda_i)^H w \\ &= \sum_{k=1}^{n_i} \overline{w}_k w_k (\lambda_i + \overline{\lambda}_i) + \alpha \sum_{k=1}^{n_i - 1} (\overline{w}_k w_{k+1} + \overline{w}_{k+1} w_k) \\ &= 2 \operatorname{Re} \lambda_i \|w\|^2 + \alpha \sum_{k=1}^{n_i - 1} (\overline{w}_k w_{k+1} + \overline{w}_{k+1} w_k) \\ &\le 2 \operatorname{Re} \lambda_i \|w\|^2 + 2\alpha \|w\|^2 \\ &\le -2\alpha \|w\|^2. \end{aligned}$$

Also gilt für jedes $z \in \mathbb{C}^n$

$$z^H J_\alpha z + z^H J_\alpha^H z \le -2\alpha \|z\|^2. \tag{4}$$

Durch

$$\|z\|_V = \|Vz\|$$

wird eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ definiert. Da auf $\mathbb{C}^n$ alle Normen äquivalent sind, Satz III.1.11 (S. 64, Analysis I), gibt es ein $c \ge 1$ mit

$$\frac{1}{c} \|z\| \le \|z\|_V \le c \|z\| \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Setze

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \|y(t)\|_V^2 = \|Vy(t)\|^2 \\ &= y(t)^H V^H V y(t). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi' &= y^H V^H V y' + y'^H V^H V y \\ &= y^H V^H V y' + (V y')^H V y\end{aligned} \tag{5}$$

und

$$Vy' = VAy = VAV^{-1}Vy = J_\alpha Vy.$$

Zusammen mit Gleichung (4) liefert dies

$$\begin{aligned}\varphi' &= y^H V^H J_\alpha V y + y^H V^H J_\alpha^H V y \\ &\le -2\alpha \|Vy\|^2 \\ &= -2\alpha\varphi.\end{aligned}$$

Division durch φ und Integration von 0 bis t liefert

$$\ln\varphi(t) - \ln\varphi(0) = \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds \le -2\alpha t$$

und somit

$$\begin{aligned}\|y(t)\|^2 &\le c^2 \|y(t)\|_V^2 \\ &= c^2 \varphi(t) \\ &\le c^2 e^{-2\alpha t} \varphi(0) \\ &= c^2 e^{-2\alpha t} \|y(0)\|_V^2 \\ &\le c^4 e^{-2\alpha t} \|y(0)\|^2 \\ &= c^4 e^{-2\alpha t} \|x_1 - x_2\|^2.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\|x(t;x_2) - x(t;x_1)\| \le c^2 e^{-\alpha t} \|x_2 - x_1\|.$$

Dies ist die behauptete asymptotische Stabilität mit $\gamma(t) = c^2 e^{-\alpha t}$.
AD (3): O.E. ist $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$. Sei w ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1. Dann folgt

$$x(t;w) = e^{\lambda_1 t} w$$

und somit

$$\|x(t;w)\| = e^{\operatorname{Re}\lambda_1 t} \|w\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Wegen unserer Vorüberlegung beweist dies die behauptete Instabilität der Lösungen von Gleichung (2). □

Die folgenden beiden Sätze sagen etwas aus über das Stabilitätsverhalten der Lösungen von Gleichung (1), wenn Problem (1) eine „kleine Störung“ einer linearen autonomen gDgl ist.

SATZ XI.4.3. *Seien $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $g \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in \mathbb{R}$. Es gelte:*

(1) *Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.*

(2) *Es gibt eine Funktion* $k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ *mit* $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = 0$ *und*

$$\|g(t,u) - g(t,v)\| \le k(t)\|u - v\| \quad \forall t \ge t_0, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist jede Lösung des AWP (1) *mit*

$$f(t,x) = Ax + g(t,x)$$

asymptotisch stabil.

Beweis. Durch eine Translation der Zeitvariablen können wir erreichen, dass o.E. $t_0 = 0$ ist. Entsprechend lassen wir im Folgenden stets das Argument t_0 fort. Weiter können wir g durch

$$g(t,z) = g(t, \operatorname{Re} z) \in \mathbb{C}^n$$

zu einer Funktion aus $C(\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ fortsetzen. Mit dem gleichen Argument wie in Beispiel XI.2.8 (S. 156) können wir daher o.E. komplexe Lösungen von Gleichung (1) betrachten.
Seien nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und

$$y = x(t;x_2) - x(t;x_1).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} y' &= Ay + g(t, x(t;x_2)) - g(t, x(t;x_1)) \\ y(0) &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Wir benutzen die gleichen Notationen wie im Beweis von Satz XI.4.2. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\|\{V[g(t,x(t;x_2)) - g(t,x(t;x_1))]\}^H\| \\ &= \|V[g(t,x(t;x_2)) - g(t,x(t;x_1))]\| \\ &\le \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)}\|g(t,x(t;x_2)) - g(t,x(t;x_1))\| \\ &\le \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} k(t)\|x(t;x_2) - x(t;x_1)\| \\ &= \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} k(t)\|y\|. \end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichungen (4) und (5) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \varphi' &= y^H V^H V y' + (Vy')^H V y \\ &= y^H V^H J_\alpha V y + y^H V^H V[g(t,x(t;x_2)) - g(t,x(t;x_1))] \\ &\quad + y^H V^H J_\alpha^H V y + \{V[g(t,x(t;x_2)) - g(t,x(t;x_1))]\}^H V y \\ &\le -2\alpha\varphi + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} k(t)\|y\|^2 \\ &\le [-2\alpha + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} k(t)c^2]\varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen der Voraussetzung (2) gibt es ein $t_1 > 0$, derart dass für alle $t \ge t_1$ gilt

$$-2\alpha + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} k(t)c^2 \le -\alpha.$$

Daher folgt aus Gleichung (6) durch Division durch φ und Integration von t_1 bis $t > t_1$

$$\varphi(t) \le \varphi(t_1) \cdot e^{-\alpha(t-t_1)} \quad \forall t \ge t_1.$$

Wegen Satz XI.3.1 (S. 159) gibt es andererseits ein $\beta \geq 0$ mit

$$\varphi(t) \leq e^{\beta t}\varphi(0) \quad \forall t \leq t_1.$$

Also gilt für $t \geq t_1$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq e^{-\alpha(t-t_1)}\varphi(t_1) \\ &\leq e^{-\alpha t}e^{\alpha t_1}e^{\beta t_1}\varphi(0)\end{aligned}$$

und für $t \leq t_1$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\leq e^{-\beta t}\varphi(0) \\ &= e^{-\alpha t}e^{(\beta+\alpha)t}\varphi(0) \\ &\leq e^{-\alpha t}e^{(\alpha+\beta)t_1}\varphi(0).\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz XI.4.2 (2) folgt hieraus die behauptete asymptotische Stabilität mit

$$\gamma(t) = c^2 e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)t_1}e^{-\frac{1}{2}\alpha t}.$$

$\square$

Satz XI.4.4. *Seien $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ und $g \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Es gelte:*

(1) *Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.*
(2) *Es gibt eine monoton wachsende Funktion $k \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ mit $k(0) = 0$ und*

$$\|g(t,x)\| \leq k(\|x\|)\|x\| \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist die Lösung des AWP (1) mit

$$f(t,x) = Ax + g(t,x)$$

und $x_0 = 0$ asymptotisch stabil.

Beweis. Wegen der Voraussetzung (2) gilt

$$g(t,0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daher ist

$$x(t;0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $x_1 \in \mathbb{R}^n$ zunächst beliebig und

$$y = x(t;x_1).$$

Mit den Bezeichnungen der vorigen Beweise gilt

$$\begin{aligned}\|[Vg(t,y(t))]^H\| &= \|Vg(t,y(t))\| \\ &\leq \|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)}k(\|y(t)\|)\|y(t)\|.\end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichungen (4) und (5) folgt hieraus

$$
\begin{aligned}
\varphi' &= y^H V^H V y' + (Vy')^H V y \\
&= y^H V^H J_\alpha V y + y^H V^H V g(t, y(t)) \\
&\quad + y^H V^H J_\alpha^H V y + [V g(t, y(t))]^H V y \\
&\le -2\alpha\varphi + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} k(\|y(t)\|)\|y\|^2 \\
&\le [-2\alpha + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} c^2 k(\|y(t)\|)]\varphi \\
&\le [-2\alpha + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} c^2 k(c\|y(t)\|_V)]\varphi \\
&= [-2\alpha + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} c^2 \widetilde{k}(\varphi(t))]\varphi
\end{aligned} \tag{7}
$$

mit

$$\widetilde{k}(u) = k(cu) \quad \forall u \in \mathbb{R}_+.$$

Wegen der Voraussetzung (2) ist $\widetilde{k}$ stetig, monoton wachsend und $\widetilde{k}(0) = 0$. Insbesondere gibt es ein $R > 0$ mit

$$2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} c^2 \widetilde{k}(u) \le \alpha \quad \forall 0 \le u \le R.$$

Sei nun x_1 so gewählt, dass gilt

$$\varphi(0) = \|x_1\|_V^2 \le \frac{1}{2}R.$$

Wegen Satz XI.3.1 (S. 159) gibt es ein $T > 0$, so dass gilt

$$\|x(t;z)\|_V^2 \le R \quad \forall 0 \le t \le T, \|z\|_V^2 \le \frac{1}{2}R.$$

Für alle $0 \le t \le T$ ist dann

$$-2\alpha + 2\|V\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n)} c^2 \widetilde{k}(\varphi(t)) \le -\alpha,$$

so dass aus Gleichung (7) folgt

$$\varphi(t) \le e^{-\alpha t}\varphi(0) \quad \forall 0 \le t \le T. \tag{8}$$

Insbesondere ist

$$\varphi(T) \le e^{-\alpha T}\varphi(0) \le \varphi(0) \le \frac{1}{2}R.$$

Daher können wir obiges Argument mit $y(T)$ an Stelle von x_1 wiederholen. Wegen

$$y(T+t) = x(T+t; x_1) = x(t; y(T)) \quad \forall t \ge 0$$

erhalten wir die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\varphi(T+t) &= \|y(T+t)\|_V^2 \\
&\le e^{-\alpha t}\varphi(T) \\
&\le e^{-\alpha(T+t)}\varphi(0) \quad \forall 0 \le t \le T,
\end{aligned}
$$

d.h., die Abschätzung (8) gilt für alle $0 \le t \le 2T$. Durch Induktion folgt dann, dass Gleichung (8) für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt. Hieraus folgt wie in den vorigen Beweisen die behauptete asymptotische Stabilität mit $\gamma(t) = c^2 e^{-\frac{1}{2}\alpha t}$. □

Bemerkung XI.4.5. Mit etwas zusätzlichem Aufwand kann man folgende teilweise Umkehrung der Sätze XI.4.3 und XI.4.4 beweisen: Besitzt A einen Eigenwert mit positivem Realteil und ist die Bedingung (2) aus Satz XI.4.3 bzw. XI.4.4 erfüllt, so ist für $f(t,x) = Ax + g(t,x)$ jede Lösung von Problem (1) bzw. die Lösung von Problem (1) zum Anfangswert $x_0 = 0$ instabil.

Zum Abschluss betrachten wir das autonome AWP

$$\begin{aligned} x' &= F(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{9}$$

mit $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ist x_0 eine Nullstelle von F, d.h. $F(x_0) = 0$, so folgt sofort, dass die Lösung von Gleichung (9) konstant ist:

$$x(t; x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ist umgekehrt $x(t; x_0)$ eine stationäre Lösung von Gleichung (9), d.h., gibt es ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $x'(t_0; x_0) = 0$, so gilt

$$F(x(t_0; x_0)) = 0,$$

und aus dem Eindeutigkeitssatz folgt

$$x(t; x_0) = x(t_0; x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Stationäre Lösungen von Gleichung (9) sind also genau diejenigen Lösungen, die zu einem Anfangswert x_0 mit $F(x_0) = 0$ gehören. Daher heißen die Nullstellen von F auch Ruhepunkte des AWP (9). Der folgende Satz charakterisiert die Stabilität solcher Ruhepunkte.

Satz XI.4.6. *Sei x_0 ein Ruhepunkt von Gleichung (9). Die Jacobi Matrix $DF(x_0)$ habe lauter Eigenwerte mit negativem Realteil. Dann ist die stationäre Lösung $x(t; x_0) = x_0$ von Gleichung (9) asymptotisch stabil.*

Beweis. Sei $x_1 \in \mathbb{R}^n$ beliebig und

$$y(t) = x(t; x_1) - x(t; x_0) = x(t; x_1) - x_0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} y' &= x'(t; x_1) \\ &= F(x(t; x_1)) \\ &= F(x(t; x_1)) - F(x_0) \\ &= DF(x_0)(x(t; x_1) - x_0) \\ &\quad + F(x(t; x_1)) - F(x_0) - DF(x_0)(x(t; x_1) - x_0) \\ &= DF(x_0)y + g(y) \end{aligned}$$

mit

$$g(u) = F(x_0 + u) - F(x_0) - DF(x_0)u.$$

Offensichtlich erfüllt g die Voraussetzung (2) von Satz XI.4.4. Weiter erfüllt $A = DF(x_0)$ die Voraussetzung (1) von Satz XI.4.4. Damit folgt die Behauptung aus Satz XI.4.4. □

Bemerkung XI.4.7. (1) Besitzt $DF(x_0)$ einen Eigenwert mit positivem Realteil, so folgt aus obigem Beweis und Bemerkung XI.4.5, dass die stationäre Lösung $x(t; x_0) = x_0$ von Gleichung (9) instabil ist.
(2) Besitzt $DF(x_0)$ einen rein imaginären Eigenwert, so ist keine allgemein gültige Aussage möglich.
Betrachte z.B. Gleichung (9) mit

$$F(x) = (-x_2 + x_1^3, x_1 + x_2^3).$$

Offensichtlich ist $x_0 = 0$ die einzige Nullstelle, und

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\pm i$. Sei $x(t)$ eine Lösung von Gleichung (9) zu einem Anfangswert $\widetilde{x}_0 \neq 0$. Für

$$r(t)^2 = \|x(t)\|^2 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$$

folgt dann

$$\begin{aligned} rr' &= x_1 x_1' + x_2 x_2' \\ &= x_1(-x_2 + x_1^3) + x_2(x_1 + x_2^3) \\ &= x_1^4 + x_2^4 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also ist $r'(t) > 0$ und die Lösung „läuft von $x_0 = 0$ weg“, d.h., x_0 ist instabil.
Betrachte nun Gleichung (9) mit

$$F(x) = (-x_2 - x_1^3, x_1 - x_2^3).$$

Wieder ist $x_0 = 0$ die einzige Nullstelle, und

$$DF(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat wieder die Eigenwerte $\pm i$. Für $x(t)$ und $r(t)$ wie oben folgt jetzt

$$\begin{aligned} rr' &= x_1 x_1' + x_2 x_2' \\ &= x_1(-x_2 - x_1^3) + x_2(x_1 - x_2^3) \\ &= -x_1^4 - x_2^4 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also ist $r'(t) < 0$ und die Lösung „läuft in x_0 hinein“, d.h., x_0 ist stabil.

Beispiel XI.4.8. (1) Betrachte das gedämpfte mathematische Pendel

$$x'' + 2\alpha x' + \lambda \sin x = 0$$

mit $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Die zugehörige gDgl 1. Ordnung ist

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= -2\alpha v - \lambda \sin x. \end{aligned}$$

Dies ist von der Form von Gleichung (9) mit

$$F(x, v) = (v, -\lambda \sin x - 2\alpha v).$$

Die Nullstellen sind offensichtlich genau die Punkte

$$(x_k, v_k) = (k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Jacobi Matrix ist

$$DF(x_k, v_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda \cos x_k & -2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^k \lambda & -2\alpha \end{pmatrix}$$

und hat die Eigenwerte $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda(-1)^k}$. Mithin sind die Ruhepunkte zu geradem k asymptotisch stabil und die zu ungeradem k instabil.

(2) Betrachte Problem (9) mit $n = 2$ und

$$F(x) = \begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2 \\ -x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Aus $F(x) = 0$ folgt

$$x_1 = x_2^2$$

und

$$0 = -x_2^4 - x_2 = -x_2(x_2^3 + 1).$$

Also sind die Nullstellen

$$(0, 0) \text{ und } (1, -1).$$

Für die Jacobi Matrix ergibt sich

$$DF(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 & -1 \\ -1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} DF(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit den Eigenwerten } \pm 1, \\ DF(1, -1) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit den Eigenwerten } -3, -1. \end{aligned}$$

Also ist $(0, 0)$ instabil und $(1, -1)$ asymptotisch stabil.

(3) Betrachte Problem (9) mit $n = 2$ und

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist 0 die einzige Nullstelle und $DF(0) = 0$. Also erlauben Satz XI.4.6 und Bemerkung XI.4.7 keine Aussage über die Stabilität oder Instabilität der Nulllösung.
Setze $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$. Dann gilt

$$z' = x_1' + ix_2' = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2i = z^2.$$

Also lautet die Lösung von Gleichung 9 zum Anfangswert (x_0, y_0)

$$z(t) = \frac{1}{z_0 - t}$$

mit

$$z_0 = (x_0 + iy_0)^{-1}.$$

Hieraus folgt sofort:

(1) Ist $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, so konvergiert $z(t)$ für $t \to \infty$ gegen Null.
(2) Ist $z_0 \in \mathbb{R}_+$, so explodiert die Lösung in endlicher Zeit. Insbesondere ist die Nulllösung instabil.

Zusammenfassung

IX. Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

1. Nullmengen

   Lebesgue-Maß mehrdimensionaler Intervalle; Nullmengen; Beispiele; Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen; Cantorsches Diskontinuum; punktweise Konvergenz fast überall

2. Das Lebesgue-Integral

   Treppenfunktionen und ihre Darstellung; Lebesgue-Integral von Treppenfunktionen; Eigenschaften des Integrals; monotone Folgen von Treppenfunktionen und deren Integrale; Definition des Lebesgue-Integrals; Eigenschaften des Lebesgue-Integrals; Integrierbarkeitskriterien; Zusammenhang mit eigentlichem und uneigentlichem Riemann-Integral

3. Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

   Satz von Fubini; Anwendungen; Satz von der monotonen Konvergenz; Anwendungen; Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz; Satz von Lebesgue über die beschränkte Konvergenz; Lemma von Fatou; Vertauschen von Differentiation und Integration

4. Messbare Funktionen und Mengen

   messbare Funktionen; Charakterisierungen; Eigenschaften; Zusammenhang mit Integrierbarkeit; Satz von Tonelli; messbare Mengen und ihr Lebesgue-Maß; Eigenschaften; offene und abgeschlossene Mengen sind messbar; Beispiel einer nicht messbaren Menge; Zusammenhang zwischen Messbarkeit von Mengen und Funktionen; Verknüpfung messbarer Funktionen

5. Der Transformationssatz

   Messbarkeit transformierter Mengen; Transformationssatz für lineare Transformationen; Approximation durch lineare Transformationen; Transformationssatz; Anwendung auf Koordinatentransformationen

6. Die L^p-Räume

   Definition von L^p, $1 \leq p < \infty$; Höldersche Ungleichung; Banachraum-Struktur; Abschneidefunktionen; Schrumpfungslemma; Partitionen der Eins; C_0^∞ ist dicht in L^p

X. Analysis auf Mannigfaltigkeiten

1. Mannigfaltigkeiten

   Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten als lokale Nullstellenmengen, lokale Graphen, lokale Urbilder von Ebenen, lokale Bilder offener Mengen in $\mathbb{R}^k$; Karten und Atlanten; Kartenwechsel; Beispiele

2. Tangentialraum und Orientierung
Definition von Tangential- und Normalraum; orientierungserhaltende Diffeomorphismen; orientierte Atlanten; Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit; Einheitsnormalenfeld; Orientierbarkeit von Hyperflächen; Beispiele
3. Integration auf Mannigfaltigkeiten
Maßtensor und Gramsche Determinante; Definition des Integrals auf Mannigfaltigkeiten; Eigenschaften des Integrals; Beispiele; Verhalten unter Transformationen; Zerlegung eines n-dimensionalen Integrals in Radial- und Winkelanteil; Integral rotationssymmetrischer Funktionen; Kompakta mit stückweise glattem Rand; Eigenschaften des glatten Randteils; Integralsatz von Gauß; Interpretation der Divergenz; Greensche Formeln
4. Multilineare Algebra
Definition und Charakterisierung alternierender r-Formen; äußeres Produkt; Eigenschaften; pull-back; Eigenschaften
5. Differentialformen
Definition und Eigenschaften von r-Formen; totales Differential; äußeres Produkt; pull-back; äußere Ableitung; Eigenschaften; geschlossene und exakte Formen; Satz von Poincaré für Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$
6. Integration von Differentialformen
Integration von n-Formen in $\mathbb{R}^n$; Transformationssatz; Integration von k-Formen auf k-dimensionalen Mannigfaltigkeiten; Beispiele; Zusammenhang mit Integration von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten; Integralsatz von Gauß; Leibnizsche Sektorformel; Green-Riemannsche Formel; Integration über Halbräume; Kompakta mit glattem Rand relativ zu einer Mannigfaltigkeit; Eigenschaften; Integralsatz von Stokes; klassische Form im Spezialfall $\mathbb{R}^3$; Beispiele
7. Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder
Brouwerscher Fixpunktsatz; Nullstellen von Funktionen in $\mathbb{R}^n$; B_n und S^n nicht homöomorph; beste Approximation durch konvexe Teilmengen eines Hilbertraumes; Brouwerscher Fixpunktsatz in endlich dimensionalen Vektorräumen; konvexe Hülle; 1. Schauderscher Fixpunktsatz; relativ kompakt; 2. Schauderscher Fixpunktsatz; Satz von Arzela-Ascoli; Existenzsatz von Peano für Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

XI. Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Existenz- und Eindeutigkeitssätze
gewöhnliche Differentialgleichungen; Anfangswertprobleme; autonome Differentialgleichungen; Beispiele; Lipschitz-Stetigkeit; Lemma von Gronwall; Satz von Picard-Lindelöf; globale Existenz und Eindeutigkeit; maximale Existenzintervalle
2. Elementare Lösungsmethoden
Exakte Differentialgleichungen; integrierende Faktoren; Räuber-Beute Modell; Trennung der Variablen; Chemische Reaktionskinetik; Populationsdynamik; Luftwiderstand; Variation der Konstanten; autonome lineare Differentialgleichungen und asymptotisches Verhalten

3. Stetigkeits- und Differenzierbarkeitssätze

Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten; differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten; Randwertprobleme

4. Stabilität

(Lyapunov-) stabil, instabil, asymptotisch stabil; Stabilität der Lösungen linearer Differentialgleichungen; Störungen linearer Differentialgleichungen; Stabilität von Ruhepunkten autonomer Systeme; Beispiele

Index