Analysis II

Vorlesungsskriptum SS 2006

R. Verfürth

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL VI

Integralrechnung einer Variablen

In diesem Kapitel führen wir das (Riemann-) Integral für Funktionen einer (reellen) Variablen ein. Dies geschieht zunächst für Treppenfunktionen und danach mit Hilfe eines allgemeinen Satzes über die Fortsetzung linearer Operatoren für sprungstetige Funktionen. Danach leiten wir einige Eigenschaften des Integrals und wichtige Integrationsregeln her und erweiterten diese Ergebnisse auf sog. uneigentliche Integrale, d.h., Integrale mit unbeschränktem Integrationsbereich und/oder singulären Integranden. Als wichtiges Beispiel für uneigentliche Integrale untersuchen wir abschließend eingehend die Eulersche Gammafunktion.

VI.1. Das (Riemann-) Integral

Im Folgenden sei stets $(X, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes perfektes Intervall, d.h., $\alpha < \beta$.

Als erstes definieren wir das Integral einer Treppenfunktion.

Definition VI.1.1. Seien $f \in T(I, X)$ eine Treppenfunktion und $Z = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ eine zugehörige Zerlegung. Dann ist das Integral von f bzgl. Z definiert durch

$$\int_{(Z)} f = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot f|_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)}.$$

Lemma VI.1.2. *Sei $f \in T(I, X)$. Dann ist $\int_{(Z)} f$ unabhängig von der speziellen Zerlegung Z.*

Beweis. Seien $f \in T(I, X)$ und $Z = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ eine zugehörige Zerlegung.

1. Schritt: Sei Z' eine Verfeinerung von Z. O.E. ist

$$Z' = (\alpha_0, \ldots, \alpha_k, \gamma, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_{(Z)} f = &\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) f|_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)} \\ &+ (\alpha_{k+1} - \gamma + \gamma - \alpha_k) f|_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})} \\ &+ \sum_{i=k+2}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) f|_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) f|_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)} \\
&\quad + (\gamma - \alpha_k) f|_{(\alpha_k,\gamma)} + (\alpha_{k+1} - \gamma) f|_{(\gamma,\alpha_{k+1})} \\
&\quad + \sum_{i=k+2}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) f|_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)} \\
&= \int_{(Z')} f.
\end{aligned}$$

2. SCHRITT: Sei nun Z' eine beliebige, für f zulässige Zerlegung. Dann ist $Z'' = Z \cup Z'$ mit der natürlichen Anordnung eine Verfeinerung von Z und von Z'. Mit Schritt 1 folgt

$$\int_{(Z)} f = \int_{(Z'')} f = \int_{(Z')} f.$$

□

Wegen Lemma VI.1.2 ist die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION VI.1.3. Sei $f \in T(I, X)$. Dann ist das (RIEMANN-)INTEGRAL von f definiert durch

$$\int_I f = \int_\alpha^\beta f = \int_{(Z)} f,$$

wobei Z eine beliebige, für f zulässige Zerlegung von I ist.

Eine erste, für das Folgende wichtige Eigenschaft des Integrals liefert:

LEMMA VI.1.4. *Die Abbildung* $\int_\alpha^\beta : T(I,X) \to X$ *mit* $f \mapsto \int_\alpha^\beta f$ *ist linear. Weiter gilt*

$$\| \int_\alpha^\beta f \| \le (\beta - \alpha) \|f\|_\infty \quad \forall f \in T(I,X).$$

BEWEIS. Die Linearität des Integrals folgt unmittelbar aus seiner Definition.
Sei $f \in T(I, X)$ und $Z = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ eine zugehörige Zerlegung von I. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\| \int_\alpha^\beta f \| &= \| \int_{(Z)} f \| \\
&= \| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) f|_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)} \| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \| f|_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)} \|
\end{aligned}$$

$$\leq (\beta - \alpha)\|f\|_\infty.$$

□

Als nächstes wollen wir das Integral für sprungstetige Funktionen definieren. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

Definition VI.1.5. Seien $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(1) Eine lineare Abbildung $A : Y \to Z$ heißt beschränkt, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$\|Ax\|_Z \leq \alpha \|x\|_Y \quad \forall x \in Y.$$

(2) $\mathcal{L}(Y, Z) = \{A : Y \to Z : A \text{ ist beschränkt}\}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(3) Durch

$$\begin{aligned} \|A\| &= \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \\ &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \|Ax\|_Z \leq \alpha\|x\|_Y \ \forall x \in Y\} \end{aligned}$$

wird eine Norm auf $\mathcal{L}(Y, Z)$ definiert.

Bemerkung VI.1.6. Es gilt:

(1) Sei $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} &= \sup_{x \in Y \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_Z}{\|x\|_Y} \\ &= \sup_{\substack{x \in Y \\ \|x\|_Y \leq 1}} \|Ax\|_Z \\ &= \sup_{\substack{x \in Y \\ \|x\|_Y = 1}} \|Ax\|_Z. \end{aligned}$$

(2) Sei $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Dann gilt

$$\|Ax\|_Z \leq \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|x\|_Y \quad \forall x \in Y.$$

(3) Sei $A : Y \to Z$ linear. Dann gilt

$$\begin{aligned} & A \text{ ist gleichmäßig stetig} \\ \iff & A \text{ ist stetig} \\ \iff & A \text{ ist in } 0 \in Y \text{ stetig} \\ \iff & A \in \mathcal{L}(Y, Z) \end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \in \mathcal{L}(T(I, X), X)$ und

$$\Big\| \int_\alpha^\beta \Big\|_{\mathcal{L}(T(I,X),X)} \leq \beta - \alpha.$$

Beweis. ad(1):

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \|Ax\|_Z \le \alpha \|x\|_Y \ \forall x \in Y\} \\
&= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \frac{\|Ax\|_Z}{\|x\|_Y} \le \alpha \ \forall x \in Y\backslash\{0\}\} \\
&= \sup_{x \in Y\backslash\{0\}} \frac{\|Ax\|_Z}{\|x\|_Y} \\
&= \sup_{x \in Y\backslash\{0\}} \|A(\frac{x}{\|x\|_Y})\|_Z \\
&= \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y = 1}} \|Ay\|_Z \\
&\le \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y \le 1}} \|Ay\|_Z.
\end{aligned}$$

Sei andererseits $x \in Y$ mit $0 < \|x\|_Y < 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Z &\le \frac{1}{\|x\|_Y} \|Ax\|_Z \\
&= \|A(\frac{x}{\|x\|_Y})\|_Z \\
&\le \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y = 1}} \|Ay\|_Z
\end{aligned}$$

also

$$\sup_{\substack{x \in Y \\ \|x\|_Y \le 1}} \|Ax\|_Z \le \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y = 1}} \|Ay\|_Z.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
ad(2): Folgt direkt aus Teil (1).
ad(3):

$$\begin{aligned}
&A \text{ gleichmäßig stetig} \\
\Longrightarrow &A \text{ stetig} \\
\Longrightarrow &A \text{ stetig in } 0 \\
\Longrightarrow &\exists \delta > 0 \quad \forall x \in Y \quad \|x\|_Y \le \delta : \|Ax\|_Z \le 1 \\
\Longrightarrow &\exists \delta > 0 \quad \forall x \in Y \quad \|x\|_Y = 1 : \|Ax\|_Z \le \frac{1}{\delta} \\
\Longrightarrow &A \in \mathcal{L}(Y,Z) \text{ und } \|A\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \le \frac{1}{\delta} \\
\Longrightarrow &\|Ax - Ay\|_Z = \|A(x-y)\|_Z \le \|A\|_{\mathcal{L}(X,Z)} \|x-y\|_Y \\
\Longrightarrow &A \text{ gleichmäßig stetig.}
\end{aligned}$$

ad(4): Folgt aus der Definition VI.1.5 und Hilfssatz VI.1.4. □

LEMMA VI.1.7. *Sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset Y$ ein Untervektorraum. Dann ist $\overline{U}$ auch ein Untervektorraum.*

BEWEIS. Seien $u, v \in \overline{U}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gibt es Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in U mit

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n, \quad v = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} u + v &= \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) \in \overline{U} \\ \alpha u &= \alpha \lim_{n\to\infty} u_n \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha u_n) \in \overline{U}. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{U}$ ein Untervektorraum von Y. □

SATZ VI.1.8 (ÜBER DIE FORTSETZUNG STETIGER LINEARER OPERATOREN). *Seien $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subset Y$ ein Untervektorraum, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $A \in \mathcal{L}(U, Z)$. Dann gibt es genau ein $\overline{A} \in \mathcal{L}(\overline{U}, Z)$ mit*

(1) *$\overline{A}y = Ay$ für alle $y \in U$,*
(2) *$\|\overline{A}\|_{\mathcal{L}(\overline{U},Z)} = \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)}$,*
(3) *$\overline{A}y = \lim_{n\to\infty} Ay_n$ für alle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.*

$\overline{A}$ heißt FORSETZUNG *von A.*

BEWEIS. EINDEUTIGKEIT: Seien $B, C \in \mathcal{L}(\overline{U}, Z)$ zwei lineare Operatoren, die (1) erfüllen. Dann folgt aus ihrer Stetigkeit für jedes $y \in \overline{U}$ mit $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$:

$$\begin{aligned} By &= B(\lim_{n\to\infty} y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} By_n \\ &= \lim_{n\to\infty} Ay_n \\ &= \lim_{n\to\infty} Cy_n \\ &= C(\lim_{n\to\infty} y_n) \\ &= Cy. \end{aligned}$$

Also ist $B = C$.
EXISTENZ: Sei $y \in \overline{U}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und

$$\|Ay_n - Ay_m\|_Z \le \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)} \|y_n - y_m\|_Y.$$

Also ist $(Ay_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Z. Mithin existiert ein $z \in Z$ mit

$$z = \lim_{n\to\infty} Ay_n.$$

Definiere

$$\overline{A}y = z.$$

Sei nun $(\widehat{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ eine weitere Folge mit $y = \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{y}_n$. Sei

$$\widehat{z} = \lim_{n\to\infty} A\widehat{y}_n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|z - \widehat{z}\|_Z &\le \|z - Ay_n\|_Z + \|Ay_n - A\widehat{y}_n\|_Z + \|\widehat{z} - A\widehat{y}_n\|_Z \\
&\le \|z - Ay_n\|_Z + \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)}\|y_n - \widehat{y}_n\|_Z \\
&\quad + \|\widehat{z} - A\widehat{y}_n\|_Z \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Mithin ist $\overline{A}$ wohldefiniert.
Seien nun $u, v \in \overline{U}, \alpha \in \mathbb{K}$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n \quad , \quad v = \lim_{n\to\infty} v_n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\overline{A}(u+v) &= \overline{A}(\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} A(u_n + v_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} [Au_n + Av_n] \\
&= \lim_{n\to\infty} Au_n + \lim_{n\to\infty} Av_n \\
&= \overline{A}u + \overline{A}v \\
\alpha\overline{A}u &= \alpha \lim_{n\to\infty} Au_n \\
&= \lim_{n\to\infty} A(\alpha u_n) \\
&= \overline{A}(\alpha u).
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{A}$ linear.
Sei $u \in U$. Dann ist $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ mit $u_n = u$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\overline{A}u = Au \quad \forall u \in U.$$

Sei schließlich $y \in \overline{U}$ mit $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|\overline{A}y\|_Z &= \|\lim_{n\to\infty} Ay_n\|_Z \\
&= \lim_{n\to\infty} \|Ay_n\|_Z \\
&\le \lim_{n\to\infty} \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)}\|y_n\|_Z \\
&= \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)}\|y\|_Y
\end{aligned}$$

Also ist

$$\|\overline{A}\|_{\mathcal{L}(U,Z)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)}.$$

Wegen (1) gilt aber andererseits

$$\|\overline{A}\|_{\mathcal{L}(\overline{U},Z)} \geq \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|_Y = 1}} \|\overline{A}u\|_Z = \|A\|_{\mathcal{L}(U,Z)}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Gemäß Satz V.4.8 (S. 169, Analysis I) ist $S(I,X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $B(I,X)$ und $S(I,X) = \overline{T(I,X)}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Wir können daher Satz VI.1.8 auf $Y = B(I,X)$, $U = T(I,X)$, $\overline{U} = S(I,X)$, $Z = X$ und $A = \int_\alpha^\beta$ anwenden. Dies liefert:

Definition VI.1.9. Das (Riemann-) Integral ist die eindeutig definierte Fortsetzung von $\int_\alpha^\beta$ von $\mathcal{L}(T(I,X),X)$ auf $\mathcal{L}(S(I,X),X)$ und wird wieder mit $\int_\alpha^\beta$ bezeichnet. Für $f \in S(I,X)$ verwenden wir simultan die folgenden Bezeichnungen

$$\int_\alpha^\beta f = \int_I f = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f dx.$$

Aus Bemerkung VI.1.6 und Satz VI.1.8 folgt unmittelbar:

Bemerkung VI.1.10. (1) $\|\int_\alpha^\beta f\| \leq (\beta - \alpha)\|f\|_\infty$ für alle $f \in S(I,X)$.

(2) $\int_\alpha^\beta f = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n$, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I,X)$ eine beliebige Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ ist.

Der folgende Satz ist für die folgenden Untersuchungen des Riemann-Integrals und für die praktische Berechnung des Integrals wesentlich.

Satz VI.1.11. *Sei $f \in S(I,X)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$, so dass für jede Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von I der Feinheit $\Delta_Z = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1}) < \delta$ und je n Zwischenpunkte $\zeta_j \in [x_{j-1}, x_j], 1 \leq j \leq n$, gilt*

$$\|\int_\alpha^\beta f - \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(x_j - x_{j-1})\| < \varepsilon.$$

Beweis. 1. Schritt: Sei $f \in T(I,X)$, $\widehat{Z} = (\widehat{x}_0, \ldots, \widehat{x}_{\widehat{n}})$ eine beliebige, aber im Folgenden feste, zu f gehörige Zerlegung von I, $\varepsilon > 0$ beliebig und

$$\delta = \delta(\varepsilon, f) = \frac{\varepsilon}{4\widehat{n}\|f\|_\infty}.$$

Seien $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine beliebige Zerlegung von I und $\zeta_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le n$, beliebige Zwischenpunkte mit

$$\Delta_Z = \max_{1 \le j \le n} (x_j - x_{j-1}) < \delta.$$

Sei

$$Z' = \widehat{Z} \cup Z = (y_0, \ldots, y_m).$$

Definiere

$$\begin{aligned} e'_j &= f|_{(y_{j-1}, y_j)} \quad 1 \le j \le m \\ e''_j &= f(\zeta_k) \quad \text{falls } [y_{j-1}, y_j] \subset [x_{k-1}, x_k]\ 1 \le j \le m, 1 \le k \le n. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $e'_j \neq e''_j$ für ein $j \in \mathbb{N}^*_m$ höchstens dann, wenn für das entsprechende ζ_k gilt $\zeta_k = \widehat{x}_l$ für ein $l \in \mathbb{N}_{\widehat{n}}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\int_\alpha^\beta f - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) f|_{(y_{j-1}, y_j)} - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{j=1}^m e'_j (y_j - y_{j-1}) - \sum_{j=1}^m e''_j (y_j - y_{j-1}) \\ (*) \qquad &= \sum_{j=1}^m (e'_j - e''_j)(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Wegen obiger Beobachtung sind in $(*)$ höchstens $2\widehat{n}$ Summanden von 0 verschieden. Außerdem gilt für jeden Summanden

$$\begin{aligned} \|(y_j - y_{j-1})(e'_j - e''_j)\| &\le |y_j - y_{j-1}| \{\|e'_j\| + \|e''_j\|\} \\ &< \delta 2 \|f\|_\infty \\ &\le \frac{\varepsilon}{2\widehat{n}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\| \int_\alpha^\beta f - \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) \| < \varepsilon.$$

2. Schritt: Sei nun $f \in S(I,X)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $g \in T(I,X)$ mit

$$\|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)}.$$

Gemäß Schritt 1 gibt es ein $\delta = \delta(\frac{\varepsilon}{3}, g)$, so dass für g und $\frac{\varepsilon}{3}$ die Behauptung gilt. Seien nun $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von I mit Feinheit $\Delta_Z < \delta$ und $\zeta_j \in [x_{j-1}, x_j], 1 \leq j \leq n$, beliebige Zwischenpunkte. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\| \int_\alpha^\beta f - \sum_{j=1}^n f(\zeta_j)(x_j - x_{j-1}) \| \\
\leq &\| \int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta g \| + \| \sum_{j=1}^n g(\zeta_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_\alpha^\beta g \| \\
&+ \| \sum_{j=1}^n [g(\zeta_j) - f(\zeta_j)](x_j - x_{j-1}) \| \\
\leq &(\beta - \alpha) \| f - g \|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^n \| f(\zeta_j) - g(\zeta_j) \| (x_j - x_{j-1}) \\
< &(\beta - \alpha) \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(\beta - \alpha)} (\beta - \alpha) \\
= &\varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung VI.1.12. Sei $f : I \to X$ eine Funktion. Sie heißt Riemann-integrierbar, wenn es ein $x^* \in X$ gibt, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ der Feinheit $\Delta_Z < \delta$ und je n Zwischenpunkte $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, gilt

$$\| x^* - \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) \| < \varepsilon.$$

Die Größe x^* ist, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt und heißt Riemann-Integral von f. Die „approximierenden Summen“

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$$

heißen auch Riemann-Summen, und man schreibt häufig symbolisch

$$\int_\alpha^\beta f = \lim_{\Delta_Z \to 0} \sum_{i=1}^n f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Satz VI.1.11 zeigt, dass jede sprungstetige Funktion Riemann-integrierbar ist und dass der in diesem Paragraphen eingeführte Integralbegriff mit dem oben definierten für sprungstetige Funktionen übereinstimmt.

Es gibt jedoch Riemann-integrierbare Funktionen, die nicht sprungstetig sind. Ein Beispiel ist $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ -1 & \text{falls } x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

VI.2. Eigenschaften des Integrals

Im Folgenden bezeichnet wieder $(X, \|\cdot\|)$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum und $I = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ ein kompaktes perfektes Intervall.

Wir beginnen mit einem Satz über die gliedweise Integration gleichmäßig konvergenter Folgen und Reihen.

SATZ VI.2.1. (1) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(I, X)$ gleichmäßig konvergent gegen f. Dann ist $f \in S(I, X)$ und*

$$\int_\alpha^\beta f = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n.$$

(2) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(I, X)$ und $\sum f_n$ gleichmäßig konvergent. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \in S(I, X)$ und*

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_\alpha^\beta f_n\Big).$$

BEWEIS. AD(1): Wegen Bemerkung V.1.5 (S. 149, Analysis I) gilt $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ und wegen Satz V.1.6 (S. 149, Analysis I) ist $f \in B(I, X)$. Da nach Satz V.4.8 (S. 169, Analysis I) $S(I, X)$ ein abgeschlossener Unterraum von $B(I, X)$ ist, folgt $f \in S(I, X)$. Aus Bemerkung VI.1.10 (S. 11) folgt

$$\Big\| \int_\alpha^\beta f - \int_\alpha^\beta f_n \Big\| \le (\beta - \alpha)\|f - f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dies beweist die Behauptung.
AD(2): Folgt aus Teil (1) angewandt auf

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \quad \text{und} \quad s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k.$$

□

BEMERKUNG VI.2.2. Satz VI.2.1 gilt nicht bei punktweiser Konvergenz. Betrachte z. B. $I = [0, 1]$, $X = \mathbb{R}$ und $f_n \in T(I, X)$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ n & \text{für } 0 < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N}^*.$$

Dann konvergiert f_n punktweise gegen 0, aber es ist

$$\int_0^1 f_n = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

SATZ VI.2.3. *Sei $f \in S(I,X)$. Dann ist $\|f\| \in S(I,\mathbb{R})$ und*

$$\| \int_\alpha^\beta f \| \le \int_\alpha^\beta \|f\| \le (\beta - \alpha)\|f\|_\infty.$$

BEWEIS. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I,X)$ eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist $\|f_n\| \in T(I,\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in I$ gilt

$$\begin{aligned}\Big| \|f_n\|(x) - \|f\|(x) \Big| &= \Big| \|f_n(x)\| - \|f(x)\| \Big| \\ &\le \|f_n(x) - f(x)\| \\ &\le \|f_n - f\|_\infty.\end{aligned}$$

Also konvergiert $\|f_n\|$ gleichmäßig gegen $\|f\|$. Mithin ist $\|f\| \in S(I,\mathbb{R})$. Sei $Z_n = (x_{0,n}, \ldots, x_{m,n})$ eine zulässige Zerlegung von I für f_n. Dann folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\| \int_\alpha^\beta f_n \| &= \| \sum_{k=1}^m f_n|_{(x_{k-1,n},x_{k,n})}(x_{k,n} - x_{k-1,n}) \| \\ &\le \sum_{k=1}^m \|f_n|_{(x_{k-1,n},x_{k,n})}\|(x_{k,n} - x_{k-1,n}) \\ &= \int_\alpha^\beta \|f_n\| \\ &\le (\beta - \alpha)\|f_n\|_\infty. \qquad (*)\end{aligned}$$

Wegen $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$, $\|f_n\| \xrightarrow{\text{glm}} \|f\|$ und $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ folgt die Behauptung mit Satz VI.2.1 aus $(*)$ durch Grenzübergang $n \to \infty$. □

Als nächstes definieren wir das orientierte Integral und zeigen seine Additivität bzgl. der disjunkten Vereinigung von Intervallen.

DEFINITION VI.2.4. Sei $f \in S(I,X)$. Dann definieren wir

$$\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f \qquad \text{und} \qquad \int_\alpha^\alpha f = 0.$$

SATZ VI.2.5. *Seien $f \in S(I,X)$ und $a,b,c \in I$. Dann ist*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

BEWEIS. O.E. sei $a \le b \le c$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I,X)$ mit $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$. Dann gilt für jedes kompakte Teilintervall J von I

$$T(J,X) \ni f_n|_J \xrightarrow{\text{glm}} f|_J \in S(J,X).$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^c f_n = \int_a^b f_n + \int_b^c f_n.$$

Mit Satz VI.2.1 folgt hieraus

$$\begin{aligned} \int_a^c f &= \int_a^b f + \int_b^c f \\ \Longrightarrow \int_a^b f &= \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f. \end{aligned}$$

□

Als nächstes untersuchen wir Monotonie-Eigenschaften des Integrals.

Satz VI.2.6. (1) *Sei $f \in S(I, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Dann ist*

$$\int_\alpha^\beta f \geq 0.$$

(2) *Seien $f, g \in S(I, \mathbb{R})$ mit $f \geq g$. Dann ist*

$$\int_\alpha^\beta f \geq \int_\alpha^\beta g.$$

(3) *Sei $f \in S(I, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Weiter gebe es ein $a \in I$ mit: $f(a) > 0$ und f ist stetig in a. Dann gilt*

$$\int_\alpha^\beta f > 0.$$

Beweis. ad(1): Gemäß Bemerkung V.4.5 (S. 169, Analysis I) gibt es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T(I, \mathbb{R})$ mit $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$ und $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich ist

$$\int_\alpha^\beta f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt die Behauptung durch Grenzübergang $n \to \infty$.
ad(2): Folgt aus Teil (1) angewandt auf $f - g$.
ad(3): Wegen der Stetigkeit von f in a und wegen $f(a) > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(a) > 0 \quad \forall x \in I \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Damit folgt aus Satz VI.2.5 und den Teilen (1) und (2)

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f &= \int_\alpha^{a-\delta} f + \int_{a-\delta}^{a+\delta} f + \int_{a+\delta}^\beta f \\ &\geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{1}{2} f(a) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta f(a) \\
&> 0
\end{aligned}
$$

mit den offensichtlichen Modifikationen für $a \in \{\alpha, \beta\}$. □

Als nächstes betrachten wir die Integration komplex- und vektorwertiger Funktionen.

SATZ VI.2.7. (1) *Sei $f : I \to \mathbb{K}^n$. Dann ist $f \in S(I, \mathbb{K}^n)$ genau dann, wenn für jede Komponente f_i, $1 \leq i \leq n$, gilt $f_i \in S(I, \mathbb{K})$. Weiter ist*

$$\int_\alpha^\beta f = (\int_\alpha^\beta f_1, \ldots, \int_\alpha^\beta f_n).$$

(2) *Sei $f = g + ih : I \to \mathbb{C}$ mit $g, h : I \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in S(I, \mathbb{C})$ genau dann, wenn gilt $g, h \in S(I, \mathbb{R})$. Weiter ist*

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\beta g + i \int_\alpha^\beta h.$$

BEWEIS. AD(1): Es gilt

$$
\begin{aligned}
& f \in S(I, \mathbb{K}^n) \\
\iff & \exists (f_m) \subset T(I, \mathbb{K}^n) : f_m \underset{m\to\infty}{\overset{\text{glm}}{\longrightarrow}} f \\
\iff & \exists (f_m) \subset T(I, \mathbb{K}^n) : f_{i,m} \underset{m\to\infty}{\overset{\text{glm}}{\longrightarrow}} f_i, 1 \leq i \leq n \\
\iff & f_i \in S(I, \mathbb{K}) \quad \forall 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}
$$

Die Aussage über die Integrale ist für Treppenfunktionen offensichtlich. Für sprungstetige Funktionen folgt sie durch Grenzübergang.
AD(2): Folgt aus Teil (1) mit $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. □

Als Vorbereitung auf den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung betrachten wir nun die stetige und differenzierbare Abhängigkeit des Integrals von den Integrationsgrenzen.

SATZ VI.2.8 (STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON DEN INTEGRATIONSGRENZEN). *Sei $f \in S(I, X)$ und $c \in I$. Dann ist die Funktion*

$$F(x) = \int_c^x f \qquad , \forall x \in I,$$

aus $C(I, X)$, und es gilt

$$\|F(x) - F(y)\| \leq |x - y| \|f\|_\infty \quad \forall x, y \in I.$$

BEWEIS. Aus Satz VI.2.5 folgt für $x, y \in I$

$$
\begin{aligned}
F(x) - F(y) &= \int_c^x f - \int_c^y f \\
&= \int_y^x f
\end{aligned}
$$

und damit aus Bemerkung VI.1.10 (S. 11)

$$\|F(x) - F(y)\| \leq |x - y| \|f\|_\infty.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von F. □

Satz VI.2.9 (Differenzierbare Abhängigkeit von den Integrationsgrenzen). *Sei $f \in S(I, X)$ in $a \in I$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$F(x) = \int_\alpha^x f \qquad , \forall x \in I,$$

in a differenzierbar, und es gilt

$$F'(a) = f(a).$$

Beweis. Gemäß Satz VI.2.8 ist F stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(\zeta) - f(a)\| < \varepsilon \quad \forall \zeta \in I, |\zeta - a| < \delta.$$

Sei $h \in \mathbb{R}^*$ mit $a + h \in I$ und $|h| < \delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|\frac{F(a+h) - F(a)}{h} - f(a)\| &= \|\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(\zeta) d\zeta - f(a)\| \\
&= \|\frac{1}{h} \int_a^{a+h} [f(\zeta) - f(a)] d\zeta\| \\
&\leq \frac{1}{|h|} |h| \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Definition VI.2.10. Seien $f, F : I \to X$ zwei Funktionen. F heißt Stammfunktion von f, wenn F in jedem Punkt von I differenzierbar ist und wenn gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit $\int f$ oder $\int f dx$ bezeichnet und heißt unbestimmtes Integral von f.

Aus Satz IV.2.6 folgt:

Bemerkung VI.2.11. Seien F, G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ auf I konstant.

Satz VI.2.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Jedes $f \in C(I, X)$ besitzt eine Stammfunktion und für jede Stammfunktion F von f gilt*

$$F(x) = F(\alpha) + \int_\alpha^x f \quad \forall x \in I.$$

Insbesondere gilt für jede Stammfunktion F von f

$$\int_\alpha^\beta f = F(\beta) - F(\alpha) =: F|_\alpha^\beta.$$

BEWEIS. Sei

$$G(x) = \int_\alpha^x f.$$

Gemäß Satz VI.2.9 ist G eine Stammfunktion von f. Aus Bemerkung VI.2.11 folgt für jede Stammfunktion F von f:

$$\begin{aligned} &F(x) = G(x) + c \quad , \text{ mit } c \in X, \quad \forall x \in I \\ \Longrightarrow &F(\alpha) = G(\alpha) + c = c \\ \Longrightarrow &F(x) = F(\alpha) + G(x) = F(\alpha) + \int_\alpha^x f \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

□

TABELLE 1. Stammfunktionen einiger wichtiger Funktionen

f	$\int f$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a}a^x + c$
e^{ax}, $a \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$	$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1}a_k(x-x_0)^{k+1} + c$

Beispiel VI.2.13. (1) Tabelle 1 gibt die Stammfunktionen für einige wichtige Funktionen an.
(2) $f \in C^1(I, \mathbb{R})$, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{f'}{f} = \ln|f| + c$.

Beweis. ad(1): Folgt durch Differentiation der rechten Seite.
ad(2): Wegen des Zwischenwertsatzes III.5.5 (S. 90, Analysis I) gilt für alle $x \in I$ entweder

$$(a)\ f(x) > 0 \quad \text{oder} \quad (b)\ f(x) < 0.$$

In Fall (a) folgt

$$(\ln|f|)' = (\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

und in Fall (b)

$$(\ln|f|)' = (\ln(-f))' = \frac{-f'}{-f} = \frac{f'}{f}.$$

□

Zum Abschluss beweisen wir ein Analogon des Mittelwertsatzes IV.2.5 (S. 122, Analysis I).

Satz VI.2.14 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f, \varphi \in C(I, \mathbb{R})$ und $\varphi \geq 0$ auf I. Dann gibt es ein $\zeta \in I$ mit*

$$\int_\alpha^\beta (f \cdot \varphi) = f(\zeta) \int_\alpha^\beta \varphi.$$

Insbesondere gibt es ein $\eta \in I$ mit

$$\int_\alpha^\beta f = f(\eta)(\beta - \alpha).$$

Beweis. Sei

$$\int_\alpha^\beta \varphi = 0.$$

Aus Satz VI.2.6 folgt $\varphi = 0$. Also ist die Behauptung richtig.
Sei nun

$$\int_\alpha^\beta \varphi > 0.$$

Definiere

$$m = \inf_{x \in I} f(x) \quad , \quad M = \sup_{x \in I} f(x).$$

Dann folgt

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x) \quad \forall x \in I$$

und wegen Satz VI.2.6

$$m \int_\alpha^\beta \varphi \leq \int_\alpha^\beta (f \cdot \varphi) \leq M \int_\alpha^\beta \varphi$$

$$\Longrightarrow m \le \frac{\int_\alpha^\beta f\cdot\varphi}{\int_\alpha^\beta \varphi} \le M.$$

Wegen des Zwischenwertsatzes III.5.5 (S. 90, Analysis I) gibt es daher ein $\zeta \in I$ mit

$$f(\zeta) = \frac{\int_\alpha^\beta f\cdot\varphi}{\int_\alpha^\beta \varphi}.$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen.
Die zweite Behauptung folgt aus der ersten mit der speziellen Wahl $\varphi = 1$. □

VI.3. Integrationstechniken

In diesem Paragraphen betrachten wir einige, für praktische Anwendungen wichtige Integrationstechniken. Dabei bezeichnet wieder $(X, \|\cdot\|)$ einen $\mathbb{K}$-Banachraum und $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes, perfektes Intervall.

Wir beginnen mit der Substitutionsregel.

Satz VI.3.1 (Substitutionsregel). *Seien $f \in C(I, X)$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, und $\varphi \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ mit $\varphi([a,b]) \subset I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

Beweis. Gemäß Satz VI.2.12 (S. 18) besitzt f eine Stammfunktion $F \in C^1(I, X)$. Dann ist $F \circ \varphi \in C^1([a,b], X)$ mit

$$\begin{aligned}(F\circ\varphi)' &= F'\circ\varphi\cdot\varphi' \\ &= f\circ\varphi\cdot\varphi'.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.\end{aligned}$$

□

Bemerkung VI.3.2. Sei $M \subset \mathbb{R}$ perfekt und $\varphi : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann heißt

$$d\varphi = \varphi' dx$$

das Differential von φ (vgl. Abbildung VI.3.1). Speziell ist dx das Differential der Funktion $x \mapsto x$. Anschaulich ist das Differential der inkrementelle Zuwachs von φ.

In der Sprache der Differentiale können wir die Substitutionsregel auch so schreiben:

$$\int_a^b f \circ \varphi d\varphi = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy.$$

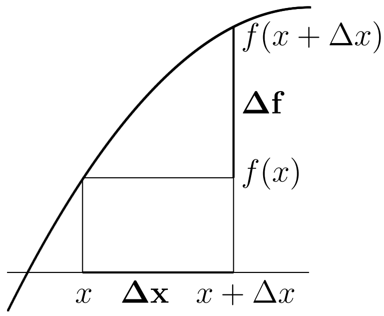

Abbildung VI.3.1. Differential $df = f'(x)dx \approx \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$

Beispiel VI.3.3. (1) Sei $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \sin(ax+b)dx &= \frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \sin(ax+b)adx \quad y = ax+b, dy = adx \\
&= \frac{1}{a}\int_{a\alpha+b}^{a\beta+b} \sin(y)dy \\
&= \frac{1}{a}(-\cos(y))|_{a\alpha+b}^{a\beta+b} \\
&= \frac{1}{a}[\cos(a\alpha+\beta) - \cos(a\beta+b)]
\end{aligned}$$

(2) Sei $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n-1}\sin(x^n)dx &= \frac{1}{n}\int_0^1 nx^{n-1}\sin(x^n)dx \quad y = x^n, dy = nx^{n-1}dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 \sin(y)dy \\
&= \frac{1}{n}(-\cos(y))|_0^1 \\
&= \frac{1-\cos(1)}{n}.
\end{aligned}$$

(3) Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $d = b - \frac{a^2}{4} > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+ax+b}dx &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{(x+\frac{a}{2})^2+d}dx \quad y = \frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}, dy = \frac{1}{\sqrt{d}}dx \\
&= \sqrt{d}\int_\alpha^\beta \frac{1}{d(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}})^2+d}\frac{1}{\sqrt{d}}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{d}\int_{\frac{\alpha+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}}^{\frac{\beta+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}} \frac{1}{d(y^2+1)}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{d}}\arctan(y)\Big|_{\frac{\alpha+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}}^{\frac{\beta+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{d}}[\arctan(\frac{\beta+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}) - \arctan(\frac{\alpha+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}})].
\end{aligned}
$$

Insbesondere folgt

$$\int \frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{\sqrt{d}}\arctan(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{d}}) + c.$$

Als nächstes betrachten wir die partielle Integration.

Satz VI.3.4 (Partielle Integration). *Seien $u, v \in C^1(I, \mathbb{K})$. Dann ist*

$$\int_\alpha^\beta uv'dx = (u\cdot v)|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u'vdx$$

oder in Differentialschreibweise

$$\int_\alpha^\beta udv = (uv)|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta vdu.$$

Beweis. Aus der Produktregel folgt

$$
\begin{aligned}
(uv)|_\alpha^\beta &= \int_\alpha^\beta (uv)'dx \\
&= \int_\alpha^\beta (u'v+uv')dx.
\end{aligned}
$$

□

Beispiel VI.3.5. (1)

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta x\sin x dx &= -x\cos x|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \cos x dx \quad u=x,\ v=-\cos x \\
&= (-x\cos x + \sin x)|_\alpha^\beta \\
&= \sin\beta - \beta\cos\beta - \sin\alpha + \alpha\cos\alpha.
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist

$$\int x\sin x = \sin x - x\cos x + c.$$

(2) Sei F_R der Flächeninhalt eines Kreises um 0 mit Radius $R > 0$ und H_R der Flächeninhalt des entsprechenden Halbkreises. Dann ist

$$F_R = 2H_R$$

und

$$H_R = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad \alpha = -R, \beta = R$$

$$x = R\cos t, t \in [-\pi, 0]$$

$$dx = -R\sin t dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{0} \sqrt{R^2(1-\cos^2 t)}(-R\sin t)dt \\
&= \int_{-\pi}^{0} (-R\sin t)(-R\sin t)dt \\
&= R^2 \int_{-\pi}^{0} \sin^2 t dt \qquad u = \sin t, v = -\cos t \\
&= R^2(-\cos t \sin t)|_{-\pi}^{0} + R^2 \int_{-\pi}^{0} \cos^2 t dt \\
&= R^2 \int_{-\pi}^{0} 1 - \sin^2 t dt \\
&= \pi R^2 - H_R.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$H_R = \frac{1}{2}\pi R^2$$

und

$$F_R = \pi R^2.$$

(3)

$$\begin{aligned}
&I_n = \int \sin^n x \ , n \in \mathbb{N} \\
\Longrightarrow \ &I_0 = x + c \\
&I_1 = -\cos x + c.
\end{aligned}$$

Sei $n \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x \sin x \qquad u = \sin^{n-1} x,\ v = -\cos x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

(4) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

Aus (3) folgt

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{\pi}{2} \\
A_1 &= 1 \\
A_n &= \frac{n-1}{n}A_{n-2} \quad n \geq 2. \\
\Longrightarrow A_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}A_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}A_{2n-4} \\
&= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\
A_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}A_{2n-1} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}A_{2n-3} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\cdot 1.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sin^{2n+2}x \leq \sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

folgt

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}.$$

Wegen

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} &= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{\pi} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k)^2-1}\cdot\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1}\\ &= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots .\end{aligned}$$

Diese Darstellung von $\frac{\pi}{2}$ heißt das Wallissche Produkt.

Als nächstes betrachten wir die Methode der Partialbruchzerlegung, die geeignet ist, Integrale rationaler Funktionen zu berechnen. Wir erklären das Prinzip an Hand eines Beispiels.

Beispiel VI.3.6 (Partialbruchzerlegung). Gesucht

$$\begin{aligned}\int \frac{p}{q} &= \int \frac{x^5-2x^4+x^3-2x^2+5x-8}{x^4-x^2-2x+2}\\ p &= x^5-2x^4+x^3-2x^2+5x-8\\ q &= x^4-x^2-2x+2.\end{aligned}$$

1. Schritt: Bestimme mit dem Euklidischen Algorithmus Polynome r und s mit $p = r + sq$ und $\partial r < \partial q$.

$$\begin{array}{rrrrrrl} (x^5 & -2x^4 & +x^3 & -2x^2 & +5x & -8) & : (x^4-x^2 \quad -2x+2)\\ x^5 & & -x^3 & -2x^2 & +2x & & \qquad\qquad = x-2\\ \hline & -2x^4 & +2x^3 & & +3x & -8 & \\ & -2x^4 & & +2x^2 & +4x & -4 & \\ \hline & & 2x^3 & -2x^2 & -x & -4 & \end{array}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ s &= x-2,\\ r &= 2x^3-2x^2-x-4\end{aligned}$$

$$\int \frac{p}{q} = \int s + \int \frac{r}{q}.$$

2. Schritt: Zerlege das Nennerpolynom q in der Form

$$q = \prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{\alpha_i}\cdot\prod_{j=1}^{n}(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$$

$$\begin{aligned}&\text{mit } a_i, b_j, c_j \in \mathbb{R},\ c_j - \frac{b_j^2}{4} > 0,\\ &\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}^*,\\ &\sum_{i=1}^{m}\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} 2\beta_j = \partial q.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} q(a_i) &= 0, \\ q(z_j) &= q(\bar{z}_j) \\ &= 0 \\ &\quad \text{mit } b_j = -2\operatorname{Re} z_j,\ c_j = |z_j|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Es ist $q(1) = 0$. Daher ist q durch $x - 1$ teilbar. Der Euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{array}{cccccl} (x^4 & & -x^2 & -2x & +2) & : (x-1) = x^3 + x^2 - 2. \\ x^4 & -x^3 & & & & \\ \hline & x^3 & -x^2 & & & \\ & x^3 & -x^2 & & & \\ \hline & & & -2x & +2 & \\ & & & -2x & +2 & \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Das Polynom $x^3 + x^2 - 2$ hat eine Nullstelle bei $x = 1$ und ist daher durch $x - 1$ teilbar. Der Euklidische Algorithmus liefert

$$\begin{array}{ccccl} (x^3 & +x^2 & & -2) & : (x-1) = x^2 + 2x + 2. \\ x^3 & -x^2 & & & \\ \hline & 2x^2 & & & \\ & 2x^2 & -2x & & \\ \hline & & 2x & -2 & \\ & & 2x & -2 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Also ist

$$q = (x-1)^2(x^2 + 2x + 2).$$

3. Schritt: Zerlege $\frac{r}{q}$ in der Form

$$\frac{r}{q} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{\alpha_i} \frac{\gamma_{i,\mu}}{(x - a_i)^\mu} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\beta_j} \frac{\delta_{j,\nu} x + \varepsilon_{j,\nu}}{(x^2 + b_j x + c_j)^\nu}.$$

Dies liefert die Bedingung

$$\frac{2x^3 - 2x^2 - x - 4}{x^4 - x^2 - 2x + 2} \stackrel{!}{=} \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx + d}{x^2 + 2x + 2}.$$

Multiplikation beider Seiten mit q ergibt die Bedingung

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 - x - 4 &\stackrel{!}{=} a(x-1)(x^2 + 2x + 2) \\ &\quad + b(x^2 + 2x + 2) \\ &\quad + (cx + d)(x-1)^2 \\ &= a(x^3 + x^2 - 2) \\ &\quad + b(x^2 + 2x + 2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (cx+d)(x^2-2x+1) \\
&= x^3(a+c) \\
&\quad + x^2(a+b-2c+d) \\
&\quad + x(2b+c-2d) \\
&\quad + (-2a+2b+d)
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
a+c &= 2 & && a+c &= 2 \\
a+b-2c+d &= -2 & &\Longrightarrow & b-3c+d &= -4 \\
2b+c-2d &= -1 & && 2b+c-2d &= -1 \\
-2a+2b+d &= -4 & && 2b+2c+d &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{aligned}
a+c &= 2 \\
b-3c+d &= -4 \\
7c-4d &= 7 \\
8c-d &= 8
\end{aligned}
\Longrightarrow \begin{aligned}
a+c &= 2 \\
b-3c+d &= -4 \\
7c-4d &= 7 \\
\tfrac{25}{7}d &= 0
\end{aligned}
$$

Also ist

$$d=0,\ c=1,\ b=-1,\ a=1$$

und

$$\frac{p}{q} = x-2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+2x+2}.$$

4. Schritt: Integration der einzelnen Terme liefert schließlich

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x^5-2x^4+x^3-2x^2+5x-8}{x^4-x^2-2x+2} \\
=&\int \{x-2+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x+1}{x^2+2x+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}\} \\
=&\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| \\
&-\arctan(x+1)+c.
\end{aligned}
$$

Zum Abschluss gehen wir noch kurz auf die numerische Integration ein. In vielen Fällen ist nämlich die Stammfunktion nicht geschlossen darstellbar oder von einer praktisch kaum auswertbaren Form, so dass numerische Methoden benützt werden. Wir beschränken uns hier auf eines der einfachsten, aber auch vielfältigsten Verfahren, die sog. Trapezregel.

Definition VI.3.7. Seien $f \in C(I,X)$ und $n \in \mathbb{N}^*$, sowie $h = \frac{\beta-\alpha}{n}$. Dann ist die zusammengesetzte Trapezregel angewandt auf f

gegeben durch

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\{f(\alpha) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(\alpha + ih) + f(\beta)\}.$$

Wir wollen eine Fehlerabschätzung für $T_n(f) - \int_\alpha^\beta f$ herleiten. Dazu benötigen wir:

LEMMA VI.3.8. *Sei $\varphi \in C^2([0,1], \mathbb{R})$. Dann gibt es ein $\zeta \in [0,1]$ mit*

$$\int_0^1 \varphi = \frac{1}{2}(\varphi(0) + \varphi(1)) - \frac{1}{12}\varphi''(\zeta).$$

BEWEIS. Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir mit Satz VI.2.14 (S. 20):

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \varphi(x)dx \qquad u = \varphi(x), v = (x - \frac{1}{2}) \\
=&(x - \frac{1}{2})\varphi(x)|_0^1 - \int_0^1 (x - \frac{1}{2})\varphi'(x)dx \\
&\qquad\qquad u = \varphi'(x), v = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} \\
=&\frac{1}{2}[\varphi(1) + \varphi(0)] - [\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}]\varphi'(x)|_0^1 \\
&\qquad + \int_0^1 [\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}]\varphi''(x)dx \\
=&\frac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(1)] + \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\varphi''(x)dx \\
=&\frac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(1)] + \frac{1}{2}\varphi''(\zeta)\int_0^1 x(x-1)dx \\
=&\frac{1}{2}[\varphi(0) + \varphi(1)] - \frac{1}{12}\varphi''(\zeta).
\end{aligned}$$

□

SATZ VI.3.9. *Sei $f \in C^2(I, \mathbb{R})$. Dann gilt*

$$|\int_\alpha^\beta f - T_n(f)| \leq \frac{\beta - \alpha}{12} h^2 \|f''\|_\infty.$$

BEWEIS. Aus Definition VI.3.7 und Lemma VI.3.8 folgt:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^1 f(x)dx - T_n(f)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \Big\{ &\int_{\alpha+(i-1)h}^{\alpha+ih} f(x)dx \\
&- \frac{h}{2}[f(\alpha + (i-1)h) + f(\alpha + ih)]\Big\}\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big\{\int_0^1 \underbrace{hf(\alpha+(i-1)h+th)}_{=:\varphi(t)}\,dt \\
&\qquad - \frac{1}{2}[hf(\alpha+(i-1)h)+hf(\alpha+ih)]\Big\}\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=1}^{n}\Big\{-\frac{1}{12}h^3 f''(\alpha+(i-1)h+\zeta_i h)\Big\}\Big| \\
&\le \frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}|f''(\alpha+(i-1)h+\zeta_i h)| \\
&\le \frac{h^3}{12}n\|f''\|_\infty \\
&= \frac{h^2}{12}(\beta-\alpha)\|f''\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Dies beweist die Behauptung. □

Als Anwendung beweisen wir die Stirlingsche Formel.

Satz VI.3.10 (Stirlingsche Formel). *Es ist*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n} e^{R_n}$$

mit $0 < R_n \le \frac{1}{12(n-1)}$.

Beweis. Mit Lemma VI.3.8 folgt

$$
\begin{aligned}
n\ln(n) - n + 1 &= (x\ln x - x)\big|_1^n \\
&= \int_1^n \ln(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \ln(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{1}{2}[\ln(k+1)+\ln(k)] + r_k\} \\
&\quad \text{mit } r_k = -\frac{1}{12}\ln''(\zeta_k) = \frac{1}{12}\zeta_k^{-2}, k \le \zeta_k \le k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k) + \frac{1}{2}\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \frac{1}{2}\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} r_k \\
&= \ln(n!) - \frac{1}{2}\ln(n) + \sum_{k=1}^{n-1} r_k.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} r_k \\
&= (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + c + \sum_{k=n}^{\infty} r_k \\
&= (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n + c + R_n
\end{aligned}$$

mit

$$c = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} r_k$$

und

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} r_k.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
0 < R_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{12}\zeta_k^{-2} \\
&\le \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
&\le \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= \frac{1}{12(n-1)}.
\end{aligned}$$

Mit $\gamma = e^c$ folgt

$$n! = \gamma\sqrt{n}\; n^n e^{-n} e^{R_n}$$

mit $0 < R_n \le \frac{1}{12(n-1)}$.
Also müssen wir noch zeigen, dass $\gamma = \sqrt{2\pi}$ ist.
Gemäß Beispiel VI.3.5 (4) ist

$$2\pi = 4 \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k)^2 - 1}.$$

Aus Obigem folgt aber

$$\begin{aligned}
4\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} &= 4\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)^2}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} \\
&= 4\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)^4}{\prod_{k=1}^{2n}k\prod_{k=1}^{2n+1}k} \\
&= 4\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \\
&= \frac{4\;2^{4n}\gamma^4 n^2 n^{4n}e^{-4n}e^{4R_n-R_{2n}-R_{2n+1}}}{\gamma^2\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n+1}(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}} \\
&= \gamma^2\frac{ee^{4R_n-R_{2n}-R_{2n+1}}}{(1+\frac{1}{2n})^{2n}(1+\frac{1}{2n})\sqrt{1+\frac{1}{2n}}} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\gamma^2.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

VI.4. Uneigentliche Integrale

Bisher können wir nur sprungstetige Funktionen auf kompakten Intervallen integrieren. In diesem Paragraphen untersuchen wir die Grenzfälle, bei denen der Integrand an den Integrationsgrenzen eventuell nicht sprungstetig und/oder der Integrationsbereich unbeschränkt ist. Im Folgenden ist stets $(X, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{K}$-Banachraum und $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Definition VI.4.1. Die Funktion $f : (a, b) \to X$ heißt zulässig, wenn für alle $a < \alpha < \beta < b$ gilt

$$f|_{[\alpha,\beta]} \in S([\alpha, \beta], X).$$

Bemerkung VI.4.2. Es gilt:

(1) $f \in C((a, b), X) \Longrightarrow f$ zulässig.
(2) $-\infty < a < b < +\infty$ und $f \in S([a, b], X) \Longrightarrow f$ zulässig.

Definition VI.4.3. Sei $f : (a, b) \to X$ zulässig. Falls die Grenzwerte

$$\lim_{\alpha\to a+0}\int_\alpha^c f \quad\text{und}\quad \lim_{\beta\to b-0}\int_c^\beta f$$

für ein $c \in (a, b)$ existieren, heißt f UNEIGENTLICH AUF (a, b) INTEGRIERBAR und

$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f$$

das UNEIGENTLICHE INTEGRAL von f.

SATZ VI.4.4. (1) *Die Definition von* $\int_a^b f$ *ist unabhängig von* c.
(2) *Ist* $-\infty < a < b < +\infty$ *und* $f \in S([a, b], X)$, *so stimmt das uneigentliche Integral von* f *mit dem gewöhnlichen Integral überein.*

BEWEIS. AD (1): Seien $c, c' \in (a, b)$ und $a < \alpha < \min\{c, c'\} \leq \max\{c, c'\} < \beta < b$. Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^c f + \int_c^\beta f$$
$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^{c'} f + \int_{c'}^\beta f.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
AD (2): Gemäß Satz VI.2.8 (S. 17) sind die Funktionen

$$\alpha \mapsto \int_\alpha^c f \quad \text{und} \quad \beta \mapsto \int_c^\beta f$$

stetig. Hieraus folgt die Behauptung. □

BEISPIEL VI.4.5. Es gilt:

(1) $$\int_a^\infty x^{-s} dx = \frac{a^{1-s}}{s-1} \quad \forall a > 0, s > 1.$$

(2) $$\int_0^b x^{-s} dx = \frac{b^{1-s}}{1-s} \quad \forall b > 0, s < 1.$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx \text{ existiert nicht, aber } \int_{-\gamma}^\gamma x dx = 0 \quad \forall \gamma > 0.$$

(4) $$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(5) $$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi.$$

BEWEIS. AD (1): Sei $s \neq 1$. Dann ist

$$\int_a^\beta x^{-s} dx = \frac{1}{1-s}(\beta^{1-s} - a^{1-s}).$$

Der Grenzwert existiert für $\beta \to +\infty$ genau dann, wenn $s > 1$ ist.
Sei $s = 1$. Dann ist

$$\int_a^\beta \frac{1}{x} dx = \ln(\beta) - \ln(a).$$

Der Grenzwert existiert nicht.
AD (2): Folgt wie Teil (1).
AD (3): Ist offensichtlich.
AD (4): Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\beta \frac{1}{1+x^2}dx &= \arctan(\beta) - \arctan(0)\\ &= \arctan(\beta)\\ &\xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

AD (5): Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\alpha^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \arcsin(0) - \arcsin(\alpha)\\ &= -\arcsin(\alpha)\\ &\xrightarrow[\alpha\to-1+]{} \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

Aus der Definition des uneigentlichen Integrals folgt ein Konvergenzkriterium für Reihen.

SATZ VI.4.6 (INTEGRATIONSKRITERIUM FÜR REIHEN). *Sei $f \in S([1,+\infty),\mathbb{R}_+)$ monoton fallend. Dann existiert $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f$ existiert.*

BEWEIS. Für alle $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) \quad \forall x \in [n-1,n]\\ \implies f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1)\\ \implies \sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \quad \forall N \geq 2.\end{aligned}$$

„$\Longrightarrow$“: Aus obiger Abschätzung folgt

$$\int_1^N f dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty.$$

Also ist die Funktion $t \mapsto \int_1^t f(x)dx$ monoton wachsend und beschränkt. Wegen Satz III.6.3 (S. 94, Analysis I) existiert daher $\int_1^\infty f dx$.

„$\Longleftarrow$“: Aus obiger Abschätzung folgt jetzt

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^\infty f dx < \infty \quad \forall N \geq 2.$$

Also existiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. □

Als Anwendung ergibt sich:

Beispiel VI.4.7. Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \text{ existiert für alle } s > 1. \tag{1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^s} \text{ existiert} \iff s > 1. \tag{2}$$

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz VI.4.6 und Beispiel VI.4.5 (1). ad (2): Für $s \leq 0$ ist die harmonische Reihe eine divergente Minorante. Sei also $s > 0$. Dann ist $\frac{1}{x(\ln x)^s}$ monoton fallend und

$$\int_2^\beta \frac{1}{x(\ln x)^s} dx = \begin{cases} \ln(\ln(x))|_2^\beta & \text{, für } s = 1, \\ \frac{1}{-s+1} \ln(x)^{1-s}|_2^\beta & \text{, für } s \neq 1. \end{cases}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz VI.4.6. □

Man beachte, dass wegen Satz III.7.9 (S. 102, Analysis I) für jedes $s > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Reihe $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^s}$ eine Majorante zu $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ und eine Minorante zu $\sum \frac{1}{n}$ ist.

Die folgende Definition ist das Analogon zur absoluten Konvergenz von Reihen, vgl. Definition II.5.1 (S. 49, Analysis I).

Definition VI.4.8. $f : (a, b) \to X$ sei zulässig. Dann heißt $\int_a^b f$ absolut konvergent, genau dann wenn $\int_a^b \|f\|$ existiert.

Der folgende Satz ist das Analogon zum Majorantenkriterium für Reihen, vgl. Satz II.5.4 (S. 50, Analysis I).

Satz VI.4.9 (Majorantenkriterium). *Es gelte*

(1) $f : (a, b) \to X$ *ist zulässig,*
(2) $g : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ *ist zulässig,*
(3) $\|f(x)\| \leq g(x)$ *für alle* $x \in (a, b)$,
(4) $\int_a^b g$ *existiert.*

Dann ist $\int_a^b f$ *absolut konvergent.*

Beweis. Beh.: $\int_a^b f$ existiert.
Bew. von Beh.: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\int_{\beta_1}^{\beta_2} g| < \varepsilon \qquad \forall b-\delta < \beta_1 \le \beta_2 < b.$$

Sei $c \in (a, b-\delta)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \| \int_c^{\beta_1} f - \int_c^{\beta_2} f\| &= \| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f\| \\ &\le \int_{\beta_1}^{\beta_2} \|f\| \\ &\le \int_{\beta_1}^{\beta_2} g \\ &< \varepsilon \qquad \forall b-\delta < \beta_1 \le \beta_2 < b. \end{aligned}$$

Sei nun $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ eine Folge mit $\beta_n \uparrow b$. Dann folgt aus Obigem, dass $(\int_c^{\beta_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und somit gegen ein $e \in X$ konvergiert. Man überlegt sich sofort, dass e von der Folge $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist. Also existiert $\lim\limits_{\beta\to b-0} \int_c^{\beta} f$. Analog argumentiert man für $\lim\limits_{\alpha\to a+0} \int_\alpha^c f$. Also existiert $\int_a^b f$.
Beweis des Satzes: Da f zulässig ist, ist auch $\|f\|$ zulässig. Aus Beh. folgt, dass $\int_a^b \|f\|$ existiert. □

Bemerkung VI.4.10. Aus dem Beweis von Satz VI.4.9 folgt:

$$\int_a^b f \text{ absolut konvergent } \Longrightarrow \int_a^b f \text{ existiert.}$$

Beispiel VI.4.11. (1) $X = \mathbb{R}$, $f \ge 0$. Dann gilt

$$\int_a^b f \;\text{ konvergiert absolut } \quad\Longleftrightarrow\quad \int_a^b f \;\text{ existiert.}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ konvergiert absolut.
(3) $f : (a,b) \to X$ sei zulässig.
(i) Sei $a > 0$, $b = +\infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0 \;\exists M > 0 \;\exists c \ge a : |f(x)| \le \frac{M}{x^{1+\varepsilon}} \;\forall x \ge c \\ &\Longrightarrow \int_a^\infty f \text{ konvergiert absolut.} \end{aligned}$$

(ii) Sei $a = 0$, $0 < b < +\infty$. Dann gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \ \exists c \in (0, b) : |f(x)| \leq \frac{M}{x^{1-\varepsilon}} \ \forall x \in (0, c)$$

$$\Longrightarrow \int_0^b f \text{ konvergiert absolut.}$$

(4) Das Eulersche Beta-Integral

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

existiert genau dann, wenn gilt $x > 0$ und $y > 0$. Es gilt für alle $x > 0, y > 0$:

(i)
$$B(x, y) = B(y, x)$$

(ii)
$$B(x + 1, y) = \frac{x}{x + y} B(x, y).$$

Beweis. ad (1): Klar wegen $f = \|f\|$.
ad (2): Folgt wegen $|\frac{\sin x}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ aus Beispiel VI.4.5 (4) und Satz VI.4.9.
ad (3): Folgt aus Satz VI.4.9 und Beispiel VI.4.5 (1,2).
ad (4): Sei $y \in \mathbb{R}$ fest. Dann gibt es Zahlen $0 < m \leq M$ mit

$$m \leq (1-t)^{y-1} \leq M \quad \forall t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Daher existiert

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

genau dann, wenn

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1} dt$$

existiert. Gemäß Beispiel VI.4.5 (2) ist dies genau dann der Fall, wenn $x > 0$ ist.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann gibt es Zahlen $0 < k \leq K$ mit

$$k \leq t^{x-1} \leq K \quad \forall t \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Also existiert

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

genau dann, wenn

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1} dt$$

existiert. Wegen

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} (1-t)^{y-1} dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha} s^{y-1} ds \quad s = 1-t$$

$$= \int_{1-\alpha}^{\frac{1}{2}} s^{y-1} ds \quad \forall \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

und Beispiel VI.4.5 (2) ist dies genau dann der Fall, wenn $y > 0$ ist. Sei nun $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $0 < \alpha < \beta < 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt &= -\int_{1-\alpha}^{1-\beta} (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds \quad s = 1-t \\ &= \int_{1-\beta}^{1-\alpha} (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds \\ &\underset{\substack{\alpha\to 0+\\ \beta\to 1-}}{\longrightarrow} \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1} dt.\end{aligned}$$

Hieraus folgt (i).
Weiter folgt für $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ und $0 < \alpha < \beta < 1$:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta t^x (1-t)^{y-1} dt = \int_\alpha^\beta (\frac{t}{1-t})^x (1-t)^{x+y-1} dt \quad & u = (\frac{t}{1-t})^x \\ , \quad & v = -\frac{1}{x+y}(1-t)^{x+y} \\ = -\frac{1}{x+y}(\frac{t}{1-t})^x (1-t)^{x+y}\Big|_\alpha^\beta & \\ + \int_\alpha^\beta \frac{x}{x+y}(\frac{t}{1-t})^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} \cdot (1-t)^{x+y} dt & \\ = -\frac{1}{x+y} t^x (1-t)^y \Big|_\alpha^\beta & \\ + \frac{x}{x+y} \int_\alpha^\beta t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt & \\ \underset{\substack{\alpha\to 0+\\ be\to 1-}}{\longrightarrow} \frac{x}{x+y} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt. &\end{aligned}$$

Hieraus folgt (ii). □

Bemerkung VI.4.12. Satz VI.2.1 (S. 14) gilt für uneigentliche Integrale nicht. Betrachte z. B.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} \in C(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}).$$

Dann gilt $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{glm}}{\longrightarrow}} 0$ und

$$\int_0^\infty f_n(x) dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\beta\to+\infty}(1-e^{-\frac{\beta}{n}}) \\
&= 1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

VI.5. Die Eulersche Gammafunktion

Zuerst definieren wir die Eulersche Gammafunktion.

SATZ VI.5.1 (EULERSCHE GAMMAFUNKTION). *Für alle $x\in\mathbb{R}_+^*$ existiert das uneigentliche Integral*

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Die Funktion Γ heißt EULERSCHE GAMMAFUNKTION. *Es gilt*

(i) $$\Gamma(1)=1,$$

(ii) $$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,$$

(iii) $$\Gamma(n+1)=n! \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

BEWEIS. Sei $0<t\le 1$. Dann ist

$$0<t^{x-1}e^{-t}\le t^{x-1}.$$

Damit folgt aus Beispiel VI.4.5(2) (S. 33), dass $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ existiert. Sei nun $t\ge 1$ und $m\in\mathbb{N}$ so, dass gilt $x<m$. Dann folgt

$$\frac{1}{m!}t^m<\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}t^n=e^t$$

$$\Longrightarrow\ t^{x-1}e^{-t}<t^{x-1}m!t^{-m}=\frac{m!}{t^{1+m-x}}.$$

Wegen Beispiel VI.4.5(1) (S. 33) existiert daher auch $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\Gamma(1)&=\int_0^\infty e^{-t}dt \\
&=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta e^{-t}dt \\
&=\lim_{\beta\to+\infty}(1-e^{-\beta}) \\
&=1.
\end{aligned}
$$

Für $x\in\mathbb{R}_+^*$ und $0<\alpha<\beta<+\infty$ gilt weiter

$$\int_\alpha^\beta t^xe^{-t}dt=-t^xe^{-t}|_\alpha^\beta+x\int_\alpha^\beta t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Wegen

$$\lim_{\alpha\to0+}\alpha^xe^{-\alpha}=0 \ \text{ und } \ \lim_{\beta\to+\infty}\beta^xe^{-\beta}=0$$

folgt hieraus (ii).
Die Beziehung (iii) folgt direkt aus (ii) und (i). □

Für die weitere Analyse der Eulerschen Gammafunktion benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition VI.5.2. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : J \to \mathbb{R}_+^*$ eine Funktion. f heißt LOGARITHMISCH KONVEX, falls die Funktion $\ln(f) : J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Bemerkung VI.5.3. Es gelten folgende Eigenschaften logarithmisch konvexer Funktionen:

(1) f logarithmisch konvex $\iff f(tx + (1-t)y) \le f(x)^t f(y)^{1-t}$ für alle $x, y \in J, t \in [0, 1]$.
(2) f, g logarithmisch konvex $\Longrightarrow f \cdot g$ logarithmisch konvex.
(3) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f$, f_n logarithmisch konvex für alle $n \Longrightarrow f$ logarithmisch konvex.
(4) $f : J \to \mathbb{R}_+^*$ sei zweimal differenzierbar. Dann gilt: f logarithmisch konvex $\iff f \cdot f'' - (f')^2 \ge 0$.
(5) $f, g : J \to \mathbb{R}_+^*$ seien zweimal differenzierbar und logarithmisch konvex. Dann ist $f + g$ logarithmisch konvex.
(6) Sei $-\infty \le a < b \le +\infty$ und $f : (a, b) \times J \to \mathbb{R}_+^*$. Für jedes $t \in (a, b)$ sei $f(t, .) : J \to \mathbb{R}_+^*$ zweimal differenzierbar und logarithmisch konvex. Für alle $x \in J$ existiere
$$F(x) = \int_a^b f(t, x)dt.$$
Dann ist F logarithmisch konvex.
(7) Sei $-\infty \le a < b \le +\infty$ und $\varphi \in C((a, b), \mathbb{R}_+^*)$. Dann ist die Funktion $x \mapsto \displaystyle\int_a^b \varphi(t)t^{x-1}dt$ auf ihrem Definitionsbereich logarithmisch konvex.
(8) $f : J \to \mathbb{R}_+^*$ sei logarithmisch konvex. Dann ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x + a)$ logarithmisch konvex auf ihrem Definitionsbereich.

Beweis. AD (1): f logarithmisch konvex
$$\begin{aligned}
&\iff \ln(f) \quad \text{konvex}\\
&\iff \ln f(tx + (1-t)y) \le t \ln f(x) + (1-t) \ln f(y)\\
&\iff f(tx + (1-t)y) \le f(x)^t f(y)^{1-t} \quad \forall x, y \in J, t \in [0, 1].
\end{aligned}$$
AD (2): Folgt direkt aus (1).
AD (3): Folgt direkt aus (1).
AD (4): $\ln(f)$ ist zweimal differenzierbar und
$$(\ln(f))'' = (\frac{f'}{f})' = \frac{f''f - (f')^2}{f^2}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz IV.2.15 (S. 126, Analysis I).
AD (5): Folgt aus

$$\begin{aligned}
&(f''+g'')(f+g)-(f'+g')^2\\
=&f''f+f''g+fg''+g''g-(f')^2-2f'g'-(g')^2\\
=&f''f-(f')^2+g''g-(g')^2+f''g+fg''-2f'g'\\
=&f''f-(f')^2+g''g-(g')^2+\frac{1}{fg}(fg'-f'g)^2\\
&+\frac{g}{f}(f''f-(f')^2)+\frac{f}{g}(g''g-(g')^2)\\
\geq&0.
\end{aligned}$$

AD (6): Wegen

$$F(x)=\lim_{\substack{\alpha\to a+\\ \beta\to b-}}\int_\alpha^\beta f(t,x)dt$$

und Teil (3) reicht es zu zeigen, dass

$$x\mapsto\int_\alpha^\beta f(t,x)dt$$

für alle $a<\alpha<\beta<b$ logarithmisch konvex ist. Wegen Satz VI.1.11 (S. 11) ist aber

$$\int_\alpha^\beta f(t,x)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(\alpha+k\frac{\beta-\alpha}{n},x)\frac{\beta-\alpha}{n}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Teil (3) und (5).
AD (7): Folgt aus (6) angewandt auf

$$f(t,x)=\varphi(t)t^{x-1},$$

da nach Teil (1) $x\mapsto t^x$ logarithmisch konvex ist.
AD (8): Sei $g(x)=f(x+a)$. Die Behauptung folgt aus Teil (1) und

$$g(tx+(1-t)y)=f(t(x+a)+(1-t)(y+a)).$$

□

Wir kommen nun zur Charakterisierung der Gammafunktion.

SATZ VI.5.4. *Die Eulersche Gammafunktion ist die einzige Funktion $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ mit den folgenden drei Eigenschaften:*

(1) $f(1)=1$,
(2) $f(x+1)=xf(x)$ *für alle* $x\in\mathbb{R}_+^*$,
(3) f *ist logarithmisch konvex.*

BEWEIS. Aus Satz VI.5.1 und Bemerkung VI.5.3 (7) folgt, dass Γ die Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Sei nun $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ eine beliebige Funktion mit den Eigenschaften (1)–(3). Dann folgt durch Induktion

$$f(n+1)=n!\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$f(x+n) = f(x)x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Also ist f eindeutig bestimmt durch seine Werte auf $(0,1)$.
Sei nun $0 < x < 1$. Aus

$$n + x = (1-x)n + x(n+1)$$

und (3) folgt

$$\begin{aligned} f(n+x) &\le f(n)^{1-x} f(n+1)^x \\ &= f(n)^{1-x} f(n)^x n^x \\ &= f(n)n^x \\ &= (n-1)!n^x. \end{aligned}$$

Aus

$$n + 1 = x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$$

folgt

$$\begin{aligned} n! = f(n+1) &\le f(n+x)^x f(n+1+x)^{1-x} \\ &= f(n+x)^x f(n+x)^{1-x}(n+x)^{1-x} \\ &= f(n+x)(n+x)^{1-x}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} n!(n+x)^{x-1} &\le f(n+x) \\ &\le (n-1)!n^x \\ \Longrightarrow & \frac{n!(n+x)^{x-1}}{x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1)} \\ &\le f(x) \\ &\le \frac{(n-1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \\ \Longrightarrow & (1+\frac{x}{n})^x \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \\ &\le f(x) \\ &\le \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}(1+\frac{x}{n}) \\ \Longrightarrow \quad f(x) & \underset{n\to\infty}{\longleftarrow} (\frac{n}{n+x}) f(x) \\ &\le \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\ &\le (1+\frac{x}{n})^{-x} f(x) \\ & \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x). \end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in (0,1)$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Damit ist die Eindeutigkeit von f gezeigt. □

Bemerkung VI.5.5. Aus dem Beweis von Satz VI.5.4 folgt die Gausssche Darstellung der Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Eulerschen Beta-Integral und der Eulerschen Gammafunktion.

Satz VI.5.6. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ gilt*

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y).$$

Beweis. Sei $y \in \mathbb{R}_+^*$ beliebig und

$$f(x) = B(x,y)\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}.$$

Dann folgt aus Beispiel VI.4.11(4) (S. 36)

$$\begin{aligned}
f(1) &= B(1,y)\frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(y)} \\
&= yB(1,y) \\
&= yB(y,1) \\
&= y \lim_{\alpha\to 0+} \int_\alpha^1 t^{y-1} dt \\
&= \lim_{\alpha\to 0+} (1-\alpha^y) \\
&= 1
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= B(x+1,y)\frac{\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(y)} \\
&= \frac{x}{x+y} B(x,y)(x+y)\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \\
&= xf(x).
\end{aligned}$$

Wegen Bemerkung VI.5.3 (8) ist $x \mapsto \Gamma(x+y)$ logarithmisch konvex. Wegen Bemerkung VI.5.3 (7) ist $x \mapsto B(x,y)$ logarithmisch konvex. Wegen Bemerkung VI.5.3 (2) ist daher f logarithmisch konvex. Damit folgt die Behauptung aus Satz VI.5.4. □

Das folgende Ergebnis für die Stochastik wesentlich.

Satz VI.5.7. *Es gilt:*

(1) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(2) Gausssches Fehlerintegral: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Beweis. ad (1): Aufgrund unserer vorherigen Ergebnisse gilt

$$\begin{aligned}
[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} \\
&= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \\
&= \lim_{\substack{\alpha \to 0+ \\ \beta \to 1-}} \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \\
& \qquad t = \sin^2 \varphi \\
& \qquad dt = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\
&= \lim_{\substack{\alpha \to 0+ \\ \beta \to 1-}} \int_{\arcsin \sqrt{\alpha}}^{\arcsin \sqrt{\beta}} \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}} d\varphi \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

ad (2): Es ist

$$\begin{aligned}
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \lim_{\substack{\alpha \to 0+ \\ \beta \to +\infty}} \int_\alpha^\beta t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \qquad t = s^2 \quad dt = 2s ds \\
&= 2 \lim_{\substack{\alpha \to 0+ \\ \beta \to +\infty}} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} e^{-s^2} ds \\
&= \lim_{\substack{\alpha \to 0+ \\ \beta \to +\infty}} \{ \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} e^{-s^2} ds + \underbrace{\int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} e^{-s^2} ds}_{s=-r} \} \\
&= \lim_{\substack{\alpha \to 0+ \\ \beta \to +\infty}} \{ \int_{\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\beta}} e^{-s^2} ds - \int_{-\sqrt{\alpha}}^{-\sqrt{\beta}} e^{-r^2} dr \} \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

$\square$

KAPITEL VII

Differentialrechnung mehrerer Variablen

Als Vorbereitung stellen wir zunächst einige Eigenschaften stetiger linearer Abbildungen zusammen. Anschließend definieren wir die Ableitung von Funktionen zwischen beliebigen Vektorräumen als geeignete Approximation durch lineare Abbildungen. Als Spezialfall erhalten wir Richtungs- und partielle Ableitungen, sowie Differenzierbarkeitskriterien. Danach stellen wir einige Rechenregeln wie die Produkt- und Kettenregel zusammen.
Als Vorbereitung auf höhere Ableitungen behandeln wir multilineare Abbildungen. Nach der Einführung höherer Ableitungen betrachten wir Taylorformeln und als Anwendung lokale Extrema von Funktionen mehrerer Variablen.
Zum Abschluss untersuchen wir umkehrbare Abbildungen und beweisen den Satz über implizite Funktionen.

VII.1. Stetige lineare Abbildungen

Im Folgenden seien stets $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir untersuchen in diesem Abschnitt den Raum $\mathcal{L}(X,Y)$ der stetigen linearen Abbildungen von X in Y (vgl. Definition VI.1.5 (S. 7)).

Satz VII.1.1. *Ist Y ein Banachraum, so ist $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ ebenfalls ein Banachraum.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Cauchyfolge Dann ist für jedes $x \in X$ die Bildfolge $(A_n x)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge und damit konvergent. Durch

$$(*) \qquad Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

wird die Abbildung $A : X \to Y$ definiert. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt, dass A linear ist. Mit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch die Folge der Normen $(\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit beschränkt. Aus $(*)$ folgt

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Also ist $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Sei schließlich $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge n_\varepsilon.$$

Daher gilt für jedes $x \in X$ mit $\|x\|_X = 1$

$$\begin{aligned} &\|A_n x - A_m x\|_Y \le \|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon \qquad \forall n, m \ge n_\varepsilon \\ \underset{m\to\infty}{\Longrightarrow} &\|A_n x - Ax\|_Y \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon, x \in X \ \|x\|_X = 1 \\ \Longrightarrow &\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ gegen A. □

Definition VII.1.2. (1) Eine bijektive, stetige, lineare Abbildung $A : X \to Y$ mit stetiger Inverser A^{-1} heißt topologischer Isomorphismus oder kurz Isomorphismus.
(2) Die Menge der topologischen Isomorphismen zwischen X und Y wird mit $\mathrm{Isom}(X,Y)$ bezeichnet.
(3) $A \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ heißt Isometrie, wenn gilt

$$\|Ax\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

(4) Die Räume X und Y heißen topologisch isomorph, kurz $X \cong Y$, wenn $\mathrm{Isom}(X,Y) \ne \emptyset$ ist.

Bemerkung VII.1.3. (1) $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation.
(2) $A : X \to Y$ sei bijektiv und linear. Dann ist $A \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ genau dann, wenn es zwei Konstanten $0 < \underline{c} \le \overline{c} < \infty$ gibt mit

$$\underline{c}\|x\|_X \le \|Ax\|_Y \le \overline{c}\|x\|_Y \quad \forall x \in X.$$

Der folgende Satz zeigt, dass alle Räume mit gleicher endlicher Dimension isomorph sind.

Satz VII.1.4. *Sei $m = \dim X < \infty$. Dann ist $X \cong \mathbb{K}^m$.*

Beweis. Wir versehen $\mathbb{K}^m$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$. Sei $(b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von X. Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in \mathbb{K}^m$ mit

$$x = \sum_{i=1}^m \zeta_i b_i.$$

Die Abbildung $A : x \mapsto \zeta$ ist linear mit der Inversen

$$A^{-1} : \zeta \mapsto \sum_{i=1}^m \zeta_i b_i.$$

Für $\zeta \in \mathbb{K}^m$ gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\zeta\|_X &= \|\sum_{i=1}^m \zeta_i b_i\|_X \\ &\le \sum_{i=1}^m |\zeta_i| \|b_i\|_X \end{aligned}$$

$$\leq \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|b_i\|_X^2 \right\}^{1/2} \|\zeta\|_2.$$

Also ist $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, X)$. Für $\zeta \in \mathbb{K}^m$ sei

$$\|\zeta\|_* = \|A^{-1}\zeta\|_X.$$

Wie man leicht nachprüft, ist $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{K}^m$. Wegen Satz III.1.11 (S. 64, Analysis I) gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$\|\zeta\|_2 \leq \beta \|\zeta\|_* \qquad \forall \zeta \in \mathbb{K}^m.$$

Damit folgt für $x \in X$

$$\|Ax\|_2 \leq \beta \|Ax\|_* = \beta \|x\|_X.$$

Also ist auch $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{K}^m)$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Aus Satz VII.1.4 folgt:

Satz VII.1.5. *Sei* $\dim X < \infty$. *Dann sind alle Normen auf* X *äquivalent und* X *ist vollständig.*

Beweis. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X und $A \in \mathrm{Isom}(\mathbb{K}^m, X)$. Dann sind

$$|\zeta|_1 = \|A\zeta\|_1 \text{ und } |\zeta|_2 = \|A\zeta\|_2$$

zwei Normen auf $\mathbb{K}^m$. Wegen Satz III.1.11 (S. 64, Analysis I) gibt es zwei Konstanten $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ mit

$$\begin{aligned} & \alpha|\zeta|_1 \leq |\zeta|_2 \leq \beta|\zeta|_1 \quad \forall \zeta \in \mathbb{K}^m \\ \Longrightarrow\ & \alpha\|x\|_1 = \alpha|A^{-1}x|_1 \\ & \qquad \leq |A^{-1}x|_2 = \|x\|_2 \\ & \qquad\qquad \leq \beta|A^{-1}x|_1 = \beta\|x\|_1 \ \forall x \in X. \end{aligned}$$

Also sind $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ äquivalent.
Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchyfolge Dann ist $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^m$ mit $\zeta_n = A^{-1}x_n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}^m$ und wegen Satz III.1.14 (S. 66, Analysis I) konvergent. Sei $\zeta = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n$ und $x = A\zeta$. Wegen der Stetigkeit von A folgt

$$x = \lim_{n\to\infty} A\zeta_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Also ist X vollständig. □

Bemerkung VII.1.6. Bemerkung III.1.12 (S. 66, Analysis I) und Bemerkung V.4.9 (S. 169, Analysis I) zeigen, dass Satz VII.1.5 für unendlich dimensionale Vektorräume nicht gilt.

Lineare Abbildungen auf endlich dimensionalen Räumen sind immer stetig.

Satz VII.1.7. *Sei* $\dim X < \infty$ *und* Y *beliebig. Dann ist jede lineare Abbildung* $X \to Y$ *stetig.*

Beweis. Sei $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung, $m = \dim X$ und $b_1, \dots, b_m$ eine Basis von X. Dann gilt für jedes

$$x = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i b_i \in X$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|Ax\|_Y &= \| \sum_{i=1}^{m} \zeta_i A b_i \|_Y \\ &\le \sum_{i=1}^{m} |\zeta_i| \|Ab_i\|_Y \\ &\le \alpha \|\zeta\|_2 \end{aligned}$$

mit

$$\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|Ab_i\|_Y^2 \right\}^{1/2}$$

und

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{K}^m.$$

Da gemäß dem Beweis von Satz VII.1.4 die Abbildung $x \mapsto \zeta$ aus $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}^m)$ ist, gibt es ein $\beta > 0$ mit

$$\|\zeta\|_2 \le \beta \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Damit folgt

$$\|Ax\|_Y \le \alpha\beta \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

□

Bemerkung VII.1.8. (1) Sei $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ und $A : X \to Y$ die Identität. Wegen Beispiel III.1.12 (S. 66, Analysis I) ist A nicht stetig. Dies zeigt, dass Satz VII.1.7 für unendlich dimensionale Räume nicht gilt.
(2) Sei $(X, \|\cdot\|_X) = (C^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y) = (C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ und $A : X \to Y$ definiert durch $f \mapsto f'$. Dann ist A nicht stetig. Denn sei

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \quad \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen 0, aber $Af_n = f_n' = n\cos(n^2 x)$ konvergiert nicht.

Als nächstes stellen wir einen Zusammenhang her zwischen linearen Abbildungen auf endlich dimensionalen Räumen und Matrizen.

Definition VII.1.9. Wir bezeichnen mit

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m\times n} = \{(a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} : a_{ij} \in \mathbb{K}\}$$

die Menge aller $m \times n$ Matrizen. $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ist ein Vektorraum mit der üblichen komponentenweise Addition und Multiplikation mit Skalaren. Durch

$$\|(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$$

wird eine Norm, die sog. Frobenius-Norm, auf $M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiert, und es ist

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{m\cdot n}.$$

Satz VII.1.10. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ endlich dimensionale Vektorräume und $l = \dim X$, $m = \dim Y$, $n = \dim Z$. Dann ist*

$$\mathcal{L}(X,Y) \cong M_{m,l}(\mathbb{K})$$

und die Verknüpfung von Abbildungen entspricht der Multiplikation von Matrizen.

Beweis. Seien $(e_1, \ldots, e_l)$ eine Basis von X, $(f_1, \ldots, f_m)$ eine Basis von Y und $(g_1, \ldots, g_n)$ eine Basis von Z, sowie $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Dann ist

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j \quad \forall 1 \le i \le l$$

und

$$\begin{aligned} Ax &= A(\sum_{i=1}^{l}\zeta_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\zeta_i a_{ji} f_j \\ &= \sum_{j=1}^{m}\{\sum_{i=1}^{l} a_{ji}\zeta_i\} f_j. \end{aligned}$$

Die Zuordnung $A \mapsto (a_{ji})_{1\le j\le m, 1\le i\le l} \in M_{m,l}(\mathbb{K})$ ist offensichtlich bijektiv und linear. Insbesondere folgt

$$\dim(\mathcal{L}(X,Y)) = \dim(M_{m,l}(\mathbb{K})) = m\cdot l.$$

Wegen Satz VII.1.7 ist diese Zuordnung ein topologischer Isomorphismus. Dies beweist

$$\mathcal{L}(X,Y) \cong M_{m,l}(\mathbb{K}).$$

Weiter gilt

$$Bf_j = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} g_k \quad \forall 1 \le j \le m.$$

Damit folgt für $x \in X$

$$\begin{aligned} B \circ Ax &= B\left(\sum_{j=1}^{m} \Big\{ \sum_{i=1}^{l} a_{ji}\zeta_i \Big\} f_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left\{ \Big\{ \sum_{i=1}^{l} a_{ji}\zeta_i \Big\} \sum_{k=1}^{n} b_{kj} g_k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{l} \Big[\sum_{j=1}^{m} b_{kj} a_{ji} \Big] \zeta_i \right\} g_k. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Hintereinanderschaltung von Abbildungen der Matrizenmultiplikation entspricht. □

Bemerkung VII.1.11. (1) Wir verwenden im $\mathbb{K}^m$ immer die Standardbasis $e_1, \ldots, e_m$ mit

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \ldots, 0).$$

(2) Man beachte, dass eine lineare Abbildung $X \to Y$ ein universelles Gebilde ist, während ihre Matrixdarstellung von den speziell gewählten Basen von X und Y abhängt. Daher sind universelle Eigenschaften einer linearen Abbildung wie z.B. Bijektivität oder Stetigkeit von der Wahl der Basis unabhängig.

VII.2. Differenzierbarkeit

Im Folgenden bezeichnen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ $\mathbb{K}$-Banachräume und $U \subset X, U \neq \emptyset$, eine offene Menge.

Zuerst definieren wir den Begriff der Differenzierbarkeit und zeigen, dass die neue Definition für Funktionen einer Variablen mit der alten aus Paragraph IV.1 übereinstimmt.

Definition VII.2.1. Eine Funktion $f : U \to Y$ heißt in x_0 differenzierbar, wenn es ein $A_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|_X} \{ f(x) - f(x_0) - A_{x_0}(x - x_0) \} = 0.$$

Satz VII.2.2. (1) *Die Funktion $f : U \to Y$ ist genau dann in $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn es ein $A_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$ und eine in x_0 stetige Funktion $r_{x_0} : U \to Y$ mit $r_{x_0}(x_0) = 0$ und*

$$f(x) = f(x_0) + A_{x_0}(x - x_0) + r_{x_0}(x)\|x - x_0\|_X \quad \forall x \in U$$

gibt.
(2) *Ist* $f : U \to Y$ *in* $x_0 \in U$ *differenzierbar, so ist* f *in* x_0 *stetig.*
(3) *Ist* $f : U \to Y$ *in* $x_0 \in U$ *differenzierbar, so ist* A_{x_0} *eindeutig definiert.*

Beweis. ad (1): Definiere $r_{x_0} : U \to Y$ durch

$$r_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = x_0, \\ \frac{1}{\|x-x_0\|_X}[f(x) - f(x_0) - A_{x_0}(x - x_0)] & \text{für } x \neq x_0. \end{cases}$$

Dann ist r_{x_0} genau dann in x_0 stetig, wenn f in x_0 differenzierbar ist.
ad (2): Folgt aus Teil (1).
ad (3): Es gelte für alle $x \in U$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + A(x - x_0) + s(x)\|x - x_0\|_X \\ &= f(x_0) + B(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

mit $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $s(x_0) = r(x_0) = 0$ und s und r in x_0 stetig. Sei $y \in X\backslash\{0\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (A - B)y &= \frac{1}{\varepsilon}(A - B)(\varepsilon y) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}[r(x_0 + \varepsilon y) - s(x_0 + \varepsilon y)]\|\varepsilon y\|_X \\ &= [r(x_0 + \varepsilon y) - s(x_0 + \varepsilon y)]\|y\|_X \\ &\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also ist $(A - B)y = 0$ für alle $y \in X\backslash\{0\}$ und somit $A = B$. □

Wegen Satz VII.2.2 ist folgende Definition sinnvoll.

Definition VII.2.3. (1) Sei $f : U \to Y$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist

$$Df(x_0) = f'(x_0) = A_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$$

die Ableitung von f in x_0.
(2) $f : U \to Y$ heißt differenzierbar, wenn f in x_0 differenzierbar ist für jedes $x_0 \in U$.
(3) $f : U \to Y$ heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar und $Df \in C(U, \mathcal{L}(X, Y))$ ist. Die Menge der stetig differenzierbaren Abbildungen $U \to Y$ wird mit $C^1(U, Y)$ bezeichnet.

Bemerkung VII.2.4. (1) Die Differenzierbarkeit und die Ableitungen sind unabhängig von den speziellen, äquivalenten Normen auf X und Y.
(2) Sei $X = Y = \mathbb{K}$. Dann ist

$$\mathcal{L}(X, Y) \cong M_{1,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$$

und $f : U \to Y$ ist genau dann in $x_0 \in U$ differenzierbar, wenn es ein $f'(x_0) \in \mathbb{K}$ gibt mit

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \frac{1}{|x-x_0|}[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)] = 0 \\ \iff &\frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)|}{|x-x_0|} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0 \\ \iff &\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0). \end{aligned}$$

Also stimmt für $X = Y = \mathbb{K}$ obige Definition der Differenzierbarkeit mit der alten Definition IV.1.1 (S. 111, Analysis I) überein.
(3) Sei $X = \mathbb{K}$ und Y beliebig. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, Y)$. Dann ist

$$A(x) = A(x \cdot 1) = xA(1) = xv$$

mit

$$v = A(1)$$

und

$$\begin{aligned} \|A(x)\|_Y &= |x|\|v\|_Y \\ \Longrightarrow \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K},Y)} &= \|v\|_Y = \|A(1)\|_Y. \end{aligned}$$

Also ist die Zuordnung $A \mapsto A(1)$ eine Isometrie von $\mathcal{L}(\mathbb{K}, Y)$ auf Y, vermittels derer wir $\mathcal{L}(\mathbb{K}, Y)$ und Y identifizieren können. Hieraus folgt, dass obige Definition der Differenzierbarkeit für $X = \mathbb{K}$, Y beliebig mit der alten Definition IV.1.1 (S. 111, Analysis I) übereinstimmt.

Beispiel VII.2.5. Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wegen

$$\begin{aligned} Ax &= A(x_0 + x - x_0) \\ &= Ax_0 + A(x - x_0) \end{aligned}$$

ist $A \in C^1(X, Y)$ und

$$A'(x_0) = A \quad \forall x_0 \in Y.$$

Der folgende Begriff der Richtungsableitung stimmt für Funktionen einer reellen Variablen mit dem Begriff der Differenzierbarkeit überein. Wie wir sehen werden, gibt es für Funktionen mehrerer Variablen zwischen den beiden Begriffen wesentliche Unterschiede.

Definition VII.2.6. Sei $f : U \to Y$, $x_0 \in U$ und $v \in X \backslash \{0\}$. Dann heißt die Größe

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x_0 + tv) - f(x_0)],$$

sofern sie existiert, die Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung v.

SATZ VII.2.7. *Sei $f : U \to Y$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann existiert $D_v f(x_0)$ für alle $v \in X \backslash \{0\}$ und*

$$D_v f(x_0) = Df(x_0)v \qquad \forall v \in X \backslash \{0\}.$$

BEWEIS. Sei $v \in X \backslash \{0\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} &\|\frac{1}{t}[f(x_0 + tv) - f(x_0)] - Df(x_0)v\|_Y \\ =&\|v\|_X \| \frac{1}{\|tv\|_X}[f(x_0 + tv) - f(x_0) - Df(x_0)(tv)]\|_Y \\ \xrightarrow[t \to 0]{}& 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

BEMERKUNG VII.2.8. (1) Die Umkehrung von Satz VII.2.7 ist falsch. Betrachte z. B. die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Sei $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Dann ist

$$\frac{1}{t}[f(tv) - f(0)] = \frac{1}{t} \frac{t^3 \alpha^2 \beta}{t^2(\alpha^2 + \beta^2)} = f(v) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Also ist

$$D_v f(0) = f(v),$$

und ist somit insbesondere keine lineare Funktion von v. Daher kann f nicht in 0 differenzierbar sein.
(2) Sei $f : U \to Y$, $x_0 \in U$ und $v \in X \backslash \{0\}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Definiere die Funktion $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Y$ durch

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv).$$

Dann ist φ genau dann in 0 differenzierbar, wenn $D_v f(x_0)$ existiert, und in diesem Fall ist

$$\varphi'(0) = D_v f(x_0).$$

Als nächstes betrachten wir speziell die Richtungsableitungen in Richtung der Einheitsvektoren e_j in $\mathbb{R}^m$.

DEFINITION VII.2.9. Sei $X = \mathbb{R}^m$, $f : U \to Y$ und $x_0 \in U$. Dann heißt die Größe

$$D_j f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = D_{e_j} f(x_0), \quad 1 \leq j \leq m,$$

sofern sie existiert, die j-TE PARTIELLE ABLEITUNG von f im Punkt x_0. f heißt in x_0 PARTIELL DIFFERENZIERBAR, wenn alle partiellen Ableitungen $D_j f(x_0)$ existieren.

Bemerkung VII.2.10. (1) Es ist

$$\begin{aligned} D_j f(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(x_{0,1},\dots,x_{0,j-1},x_{0,j}+t,x_{0,j+1},\dots,x_{0,m}) \\ &\qquad - f(x_{0,1},\dots,x_{0,m})] \\ &= \lim_{\zeta\to x_{0,j}} \frac{1}{\zeta - x_{0,j}}[f(x_{0,1},\dots,x_{0,j-1},\zeta,x_{0,j+1},\dots,x_{0,m}) \\ &\qquad - f(x_{0,1},\dots,x_{0,m})]. \end{aligned}$$

(2) Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f auch in x_0 partiell differenzierbar.
(3) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

ist in $(0,0)$ partiell differenzierbar, aber nicht stetig.

Beweis. ad (1): Folgt aus der Definition der Richtungsableitung.
ad (2): Folgt aus Satz VII.2.7.
ad (3): Wegen $f(x,x) = \frac{1}{4x^2}$ ist f in $(0,0)$ nicht stetig. Wegen $f(t,0) = f(0,t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$. □

Satz VII.2.11. (1) *Sei $X = \mathbb{R}^m$, Y beliebig, $f : U \to Y, x_0 \in U$ und f in x_0 differenzierbar. Dann gilt für jedes $h = (h_1,\dots,h_m) \in \mathbb{R}^m$*

$$Df(x_0)h = \sum_{j=1}^m D_j f(x_0) h_j.$$

(2) *Sei $Y = \mathbb{R}^n$, X beliebig, $f = (f_1,\dots,f_n) : U \to \mathbb{R}^n, x_0 \in U$. Dann ist f genau dann in x_0 differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1,\dots,f_n$ in x_0 differenzierbar sind. In diesem Fall gilt für alle $h \in X$*

$$Df(x_0)h = (Df_1(x_0)h,\dots,Df_n(x_0)h).$$

Beweis. ad (1): Sei $h = (h_1,\dots,h_m) \in \mathbb{R}^m$. Dann folgt aus der Linearität der Ableitung

$$\begin{aligned} & h = \sum_{j=1}^m h_j e_j \\ \Longrightarrow \quad & Df(x_0)h = \sum_{j=1}^m h_j Df(x_0) e_j \\ & \qquad = \sum_{j=1}^m D_j f(x_0) h_j. \end{aligned}$$

AD (2): Es ist $A \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $A = (A_1, \ldots, A_n)$ ist mit $A_i \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}), 1 \le i \le n$. Gemäß Satz III.3.10 (S. 78, Analysis I) gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_X}[f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)h] = 0 \\ \iff &\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_X}[f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - Df_i(x_0)h] = 0 \quad \forall 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

Aus Satz VII.2.2 (3) folgt daher

$$Df(x_0)h = (Df_1(x_0)h, \ldots, Df_n(x_0)h).$$

□

BEMERKUNG VII.2.12. Sei $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ und $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to Y$ in x_0 differenzierbar. Wegen Satz VII.2.11 und Bemerkung VII.2.10 sind dann die Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n$ in x_0 partiell differenzierbar. Für $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned} Df(x_0)h &= \sum_{i=1}^n Df_i(x_0)he_i \\ &= \sum_{i=1}^n e_i \left\{ \sum_{j=1}^m D_j f_i(x_0)h_j \right\}, \end{aligned}$$

d.h., $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(x_0) & D_2f_1(x_0) & \ldots & D_mf_1(x_0) \\ D_1f_2(x_0) & D_2f_2(x_0) & \ldots & D_mf_2(x_0) \\ \vdots & & & \\ D_1f_n(x_0) & D_2f_n(x_0) & \ldots & D_mf_n(x_0) \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

dargestellt. Diese heißt JACOBIMATRIX oder FUNKTIONALMATRIX von f in x_0.

Aus Bemerkung VII.2.10 und Satz VII.2.2 folgt, dass eine differenzierbare Funktion stets partiell differenzierbar ist, und dass die Umkehrung i. a. nicht gilt. Der folgende Satz zeigt, dass die Umkehrung gilt, wenn die partiellen Ableitungen zusätzlich stetig sind.

SATZ VII.2.13 (DIFFERENZIERBARKEITSKRITERIUM). *Sei $X = \mathbb{R}^m$ und Y beliebig. Dann ist $f \in C^1(U, Y)$ genau dann, wenn für alle $x \in U$ die Funktion f in x partiell differenzierbar ist und wenn gilt*

$$D_j f \in C(U, Y) \quad \forall 1 \le j \le m.$$

BEWEIS. „$\Longrightarrow$“ Folgt aus Bemerkung VII.2.10 und Satz VII.2.11. „$\Longleftarrow$“ Für $x \in U$ definieren wir $A_x \in \mathcal{L}(X, Y)$ durch

$$A_x h = \sum_{j=1}^m D_j f(x) h_j \quad \forall h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Da die Zuordnung $x \mapsto A_x$ wegen $D_j f \in C(U, Y)$ stetig ist, müssen wir noch zeigen

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_1}[f(x+h) - f(x) - A_x h] = 0 \quad \forall x \in U,$$

wobei $\|\cdot\|_1$ die ℓ^1-Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist.
Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $x + h \in U$ für alle $h \in \mathbb{R}^m$ mit $\|h\|_1 < \delta$ und

$$\|D_j f(x+h) - D_j f(x)\|_Y < \varepsilon \quad \forall 1 \le j \le m, \ h \in \mathbb{R}^m, \ \|h\|_1 < \delta.$$

Sei $h \in \mathbb{R}^m$ mit $\|h\|_1 < \delta$. Dann folgt mit $e_0 = 0$, $h_0 = 0$

$$\begin{aligned}
&f(x+h) - f(x) - A_x h \\
=&\sum_{j=1}^{m} [f(x + h_1 e_1 + \ldots + h_j e_j) \\
&\qquad - f(x + h_0 e_0 + \ldots + h_{j-1} e_{j-1})] \\
&- \sum_{j=1}^{m} D_j f(x) h_j \\
=&\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + h_0 e_0 + \ldots + h_{j-1} e_{j-1} + t h_j e_j) dt \\
&- \sum_{j=1}^{m} D_j f(x) h_j \\
=&\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 [D_j f(x + h_0 e_0 + \ldots + h_{j-1} e_{j-1} + t h_j e_j) h_j \\
&\qquad - D_j f(x) h_j] dt
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{\|h\|_1}[f(x+h) - f(x) - A_x h]\|_Y \\
\le&\frac{1}{\|h\|_1} \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \|D_j f \underbrace{(x + h_0 e_0 + \ldots + h_{j-1} e_{j-1} + t h_j e_j)}_{= x + \tilde{h}, \|\tilde{h}\|_1 < \delta} h_j \\
&\qquad - D_j f(x) h_j\|_Y dt \\
\le&\frac{1}{\|h\|_1} \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \varepsilon |h_j| dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|h\|_1}\varepsilon\|h\|_1 \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Da $x \in U$ und $\varepsilon > 0$ beliebig waren, folgt hieraus die Behauptung. □

Bemerkung VII.2.14. Sei $X = \mathbb{R}^m$ und $Y = \mathbb{R}^n$. Dann ist wegen Satz VII.2.13 und Satz VII.2.11 $f \in C^1(U, Y)$ genau dann, wenn für jedes $1 \leq j \leq m$ und jedes $1 \leq i \leq n$ die partielle Ableitung $D_j f_i \in C(U, \mathbb{R})$ ist.

Beispiel VII.2.15. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y, z) = (e^x \cos y, \sin(xz)).$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
D_1 f_1(x, y, z) &= e^x \cos y \\
D_2 f_1(x, y, z) &= -e^x \sin y \\
D_3 f_1(x, y, z) &= 0 \\
D_1 f_2(x, y, z) &= z \cos(xz) \\
D_2 f_2(x, y, z) &= 0 \\
D_3 f_2(x, y, z) &= x \cos(xz).
\end{aligned}
$$

Also ist $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Bemerkung VII.2.16. Sei $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}$ und $f : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist für jedes $h = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$

$$
\begin{aligned}
Df(x_0)h &= \sum_{j=1}^{m} D_j f(x_0) h_j \\
&= (\nabla f(x_0), h),
\end{aligned}
$$

wobei

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j$$

das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$ und

$$\nabla f(x_0) = (D_1 f(x_0), \ldots, D_m f(x_0))$$

den Gradienten von f bezeichnet.
Sei $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dann ist $v = \frac{1}{\|\nabla f(x_0)\|_2} \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ mit $\|v\|_2 = 1$. Für jedes $h \in \mathbb{R}^m$ mit $\|h\|_2 \leq 1$ gilt wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|Df(x_0)h| \leq \|\nabla f(x_0)\|_2 \|h\|_2 \leq \|\nabla f(x_0)\|_2$$

und speziell für $h = v$

$$Df(x_0)v = \frac{1}{\|\nabla f(x_0)\|_2}(\nabla f(x_0), \nabla f(x_0)) = \|\nabla f(x_0)\|_2.$$

Also gilt

$$Df(x_0)v = \sup_{\|h\|_2=1} |Df(x_0)h|,$$

d.h., die Richtungsableitung ist in Richtung des Gradienten maximal, oder anders ausgedrückt:

> Der Gradient gibt die Richtung des steilsten Anstieges von f an.

Zum Abschluss dieses Paragraphen untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit von Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ im Sinne von Definition IV.1.1 (S. 111, Analysis I) und der ihnen kanonisch entsprechenden Funktionen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Sinne von Definition VII.2.1.

Satz VII.2.17. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + ix_2 \in U\}$. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $F : W \to \mathbb{R}^2$ definiert durch*

$$F(x_1, x_2) = (\operatorname{Re} f(x_1 + ix_2), \operatorname{Im} f(x_1 + ix_2)).$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *f ist in $z_0 = x_1 + ix_2 \in U$ komplex differenzierbar im Sinne von Definition IV.1.1 (S. 111, Analysis I).*

(2) *F ist in $x_0 = (x_1, x_2) \in W$ differenzierbar im Sinne von Definition VII.2.1 und die partiellen Ableitungen im Punkt x_0 erfüllen die* Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} D_1F_1(x_0) &= D_2F_2(x_0) \\ D_1F_2(x_0) &= -D_2F_1(x_0). \end{aligned}$$

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $f'(z_0) = \alpha + i\beta$. Definiere $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ durch

$$Ah = (\alpha h_1 - \beta h_2, \beta h_1 + \alpha h_2) \quad \forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Sei $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ und $w = h_1 + ih_2$, so dass $z_0 + w \in U$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} &F(x_0 + h) - F(x_0) - Ah \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f(z_0 + w) & - & \operatorname{Re} f(z_0) & - & \operatorname{Re}(f'(z_0) \cdot w) \\ \operatorname{Im} f(z_0 + w) & - & \operatorname{Im} f(z_0) & - & \operatorname{Im}(f'(z_0) \cdot w) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - Ah\|_2}{\|h\|_2}$$

$$=\frac{|f(z_0+w)-f(z_0)-f'(z_0)w|}{|w|}$$
$$\underset{\substack{w\to 0\\ \iff h\to 0}}{\longrightarrow} 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Setze zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \alpha &= D_1F_1(x_0) \quad & \beta &= D_2F_1(x_0) \\ \gamma &= D_1F_2(x_0) \quad & \delta &= D_2F_2(x_0). \end{aligned}$$

Definiere die Abbildung $B : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$w = h_1 + ih_2 \mapsto \alpha h_1 + \beta h_2 + i(\gamma h_1 + \delta h_2).$$

Wie im Beweis von „(1) $\Longrightarrow$ (2)“ folgt

$$\begin{aligned} &\frac{|f(z_0+w)-f(z_0)-B(w)|}{|w|} \\ =&\frac{\|F(x_0+h)-F(x_0)-DF(x_0)h\|_2}{\|h\|_2} \\ &\underset{\substack{h\to 0\\ \iff w\to 0}}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also müssen wir noch zeigen, dass B $\mathbb{C}$-linear ist. Da B $\mathbb{R}$-linear ist, d.h.,

$$B(\alpha w) = \alpha B(w) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C},$$

ist dies genau dann der Fall, wenn gilt

$$B(iw) = iB(w) \quad \forall w \in \mathbb{C}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} B(iw) &= -\alpha h_2 + \beta h_1 + i(-\gamma h_2 + \delta h_1) \\ iB(w) &= -\gamma h_1 - \delta h_2 + i(\alpha h_1 + \beta h_2) \quad \forall w = h_1 + ih_2 \end{aligned}$$

ist dies äquivalent zu

$$\alpha = \delta, \quad \beta = -\gamma,$$

d.h., zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. □

VII.3. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Im Folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$, $(Z, \|\cdot\|_Z)$ $\mathbb{K}$-Banachräume und $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, offen.

Satz VII.3.1. *Seien $f, g : U \to Y$ in $x_0 \in U$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist $\alpha f + \beta g : U \to Y$ in x_0 differenzierbar und*

$$D(\alpha f + \beta g)(x_0) = \alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|_X \\ g(x) &= g(x_0) + Dg(x_0)(x - x_0) + s(x)\|x - x_0\|_X \end{aligned}$$

mit r, s stetig in x_0 und $r(x_0) = s(x_0) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(x_0) &+ \beta g(x_0) \\ &+ [\alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0)](x - x_0) \\ &+ [\alpha r(x) + \beta s(x)]\|x - x_0\|_X. \end{aligned}$$

Da $\alpha Df(x_0) + \beta Dg(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\alpha r + \beta s$ in x_0 stetig ist mit $\alpha r(x_0) + \beta s(x_0) = 0$ folgt hieraus die Behauptung. □

Bemerkung VII.3.2. $C^1(U, Y)$ ist ein Untervektorraum von $C(U, Y)$ und die Abbildung $D : C^1(U, Y) \to C(U, \mathcal{L}(X, Y))$ mit $f \mapsto Df$ ist linear. Ist speziell $X = \mathbb{K}$, so ist $\mathcal{L}(X, Y) \cong Y$ und $D : C^1(U, Y) \to C(U, Y)$ ist linear (vgl. Satz IV.1.7 (S. 114, Analysis I)).

Satz VII.3.3 (Kettenregel). *Sei $f : U \to Y$ und $g : V \to Z$ mit $V \subset Y$, $V \neq \emptyset$, offen. Es gelte:*

(1) *$f(U) \subset V$,*
(2) *f ist differenzierbar in x_0,*
(3) *g ist differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$.*

Dann ist $g \circ f : U \to Z$ in x_0 differenzierbar und

$$(*) \qquad D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0).$$

Dabei bezeichnet $\cdot$ die Verknüpfung von linearen Abbildungen in $\mathcal{L}(Y, Z)$ und $\mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis. Es ist

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|_X$$

mit $r : U \to Y$ stetig in x_0 und $r(x_0) = 0$ und

$$g(y) = g(y_0) + Dg(y_0)(y - y_0) + s(y)\|y - y_0\|_Y$$

mit $s : V \to Z$ stetig in y_0 und $s(y_0) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))(f(x) - f(x_0)) \\ &\quad + s(f(x))\|f(x) - f(x_0)\|_Y \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x - x_0)) \\ &\quad + Dg(f(x_0))(r(x)\|x - x_0\|_X) \\ &\quad + s(f(x))\Big\|Df(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|_X\Big\|_Y \\ &= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x - x_0)) \end{aligned}$$

$$+ z(x)\|x - x_0\|_X$$

mit $z(x_0) = 0$ und

$$\begin{aligned} z(x) &= Dg(f(x_0))r(x) \\ &\quad + s(f(x)) \left\| \frac{1}{\|x - x_0\|_X} Df(x_0)(x - x_0) + r(x) \right\|_Y \end{aligned}$$

für $x \neq x_0$. Aus den Voraussetzungen folgt, dass z in x_0 stetig ist. Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung VII.3.4. Sei $X = \mathbb{R}^l$, $Y = \mathbb{R}^m$, $Z = \mathbb{R}^n$. Ansonsten seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Satz VII.3.3. Sei $h = g \circ f$. Da die Hintereinanderschaltung linearer Abbildungen aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$ und $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ der Multiplikation der entsprechenden Matrizen aus $M_{m,l}(\mathbb{R})$ bzw. $M_{n,m}(\mathbb{R})$ entspricht, erhalten wir folgende Koordinatendarstellung der Kettenregel

$$D_i h_k(x_0) = \sum_{j=1}^{m} D_j g_k(f(x_0)) D_i f_j(x_0) \quad 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq k \leq n.$$

Beispiel VII.3.5. Betrachte

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 &\quad f(x,y) = (x^2, xy, xy^2) \\ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 &\quad g(u,v,w) = (\sin u, \cos(uvw)) \\ h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 &\quad h(x,y) = (\sin(x^2), \cos(x^4y^3)). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Dh(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) & 0 \\ -4x^3y^3\sin(x^4y^3) & -3y^2x^4\sin(x^4y^3) \end{pmatrix} \\ Df(x,y) &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \\ Dg(u,v,w) &= \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 \\ -vw\sin(uvw) & -uw\sin(uvw) & -uv\sin(uvw) \end{pmatrix} \\ Dg(f(x)) \cdot Df(x) & \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x^2) & 0 & 0 \\ -x^2y^3\sin(x^4y^3) & -x^3y^2\sin(x^4y^3) & -x^3y\sin(x^4y^3) \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2) & 0 \\ -4x^3y^3\sin(x^4y^3) & -3x^4y^2\sin(x^4y^3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Satz VII.3.6 (Produktregel). *Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann ist $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und*

$$D(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0).$$

Ist insbesondere $X = \mathbb{R}^m$, so ist

$$\nabla(f \cdot g)(x_0) = g(x_0)\nabla f(x_0) + f(x_0)\nabla g(x_0).$$

Beweis. Definiere $F : U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(x) = (f(x), g(x))$$

und $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2.$$

Dann sind F in x_0 und φ in ganz $\mathbb{R}^2$ differenzierbar und für $v \in X\backslash\{0\}$ und $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} DF(x_0)v &= (Df(x_0)v, Dg(x_0)v) \\ D\varphi(x_1, x_2)h &= x_2 h_1 + x_1 h_2. \end{aligned}$$

Also ist gemäß Satz VII.3.3 $f \cdot g = \varphi \circ F$ in x_0 differenzierbar und

$$\begin{aligned} D(f \cdot g)(x_0)v &= D(\varphi \circ F)(x_0)v \\ &= D\varphi(F(x_0))(DF(x_0)v) \\ &= D\varphi(F(x_0))h \quad \text{mit } h = (Df(x_0)v, Dg(x_0)v) \\ &= g(x_0)Df(x_0)v + f(x_0)Dg(x_0)v \\ &= [g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)]v. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung wegen

$$f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$$

□

Satz VII.3.7 (Mittelwertsatz). *Seien $x, y \in U$, $x \neq y$, mit $\{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Dann gilt:*

(1) *Ist $f : U \to Y$ in U differenzierbar, so ist*

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t(y - x))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x - y\|_X.$$

(2) *Ist $f \in C^1(U, Y)$, so ist*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)dt.$$

Beweis. ad (1): Definiere $\varphi : [0, 1] \to Y$ durch

$$\varphi(t) = f(x + t(y - x)).$$

Dann ist φ auf $[0, 1]$ differenzierbar und

$$\varphi'(t) = Df(x + t(y - x))(y - x) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Aus Satz IV.2.17 (S. 129, Analysis I) und Bemerkung IV.2.18 (S. 130, Analysis I) folgt

$$\begin{aligned}\|f(y)-f(x)\|_Y &= \|\varphi(1)-\varphi(0)\|_Y \\ &\le \sup_{0\le t\le 1}\|\varphi'(t)\|_Y \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\|Df(x+t(y-x))(y-x)\|_Y \\ &\le \sup_{0\le t\le 1}\|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x-y\|_X.\end{aligned}$$

AD (2): Sei φ wie im Beweis von (1). Da $\varphi' \in C([0,1],Y)$ ist, folgt aus Satz VI.2.12 (S. 18)

$$\begin{aligned}f(y)-f(x) &= \varphi(1)-\varphi(0) \\ &= \int_0^1 \varphi'(t)dt \\ &= \int_0^1 Df(x+t(y-x))(y-x)dt.\end{aligned}$$

□

SATZ VII.3.8. (1) *Sei U konvex und $f : U \to Y$ differenzierbar mit*

$$\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \alpha \quad \forall x \in U.$$

Dann gilt

$$\|f(y)-f(x)\|_Y \le \alpha\|y-x\|_X \quad \forall x,y \in U.$$

(2) *Sei U ein Gebiet und $f \in C^1(U,Y)$ mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann ist f konstant.*

BEWEIS. AD (1): Folgt direkt aus Satz VII.3.7.
AD (2): Sei $y \in f(U)$ beliebig und $V = f^{-1}(\{y\})$. Dann ist $V \ne \emptyset$ und abgeschlossen. Sei $x \in V$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subset U$. Da $B(x,\delta)$ konvex ist, folgt aus Teil (1)

$$f(z) = f(x) \quad \forall z \in B(x,\delta),$$

d.h.

$$B(x,\delta) \subset V.$$

Also ist V auch offen. Da U zusammenhängend ist, folgt $V = U$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

SATZ VII.3.9 (GLIEDWEISE DIFFERENTIATION VON FUNKTIONENFOLGEN). *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(U,Y)$ und $f : U \to Y$. Es gelte*

(1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{pkt} f$,

(2) $\exists g \in C(U,\mathcal{L}(X,Y)) : Df_n \xrightarrow[n\to\infty]{lok.\ glm} g$.

Dann ist $f \in C^1(U,Y)$ und $g = Df$, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} Df_n = Df.$$

Beweis. Wörtlich der selbe wie der von Satz V.2.10 (S. 154, Analysis I). □

Satz VII.3.10 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema). *Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in U$. f habe in x_0 ein lokales Extremum und alle Richtungsableitungen von f mögen in x_0 existieren. Dann gilt*

$$D_v f(x_0) = 0 \quad \forall v \in X \backslash \{0\}.$$

Beweis. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Sei $v \in X\backslash\{0\}$ beliebig. Dann ist $\varphi : (-\varepsilon/\|v\|_X, \varepsilon/\|v\|_X) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv)$$

in 0 differenzierbar mit

$$\varphi'(0) = D_v f(x_0)$$

und hat in 0 ein lokales Extremum. Damit folgt die Behauptung aus Satz IV.2.2 (S. 121, Analysis I). □

Satz VII.3.10 legt folgende Definition nahe.

Definition VII.3.11. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann heißt x_0 ein kritischer Punkt von f, wenn gilt $Df(x_0) = 0$.

Bemerkung VII.3.12. (1) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar und x_0 ein lokales Extremum, so ist x_0 ein kritischer Punkt von f.
(2) Ist $X = \mathbb{R}^m$ und f in $x_0 \in U$ differenzierbar, so ist x_0 genau dann ein kritischer Punkt von f, wenn $\nabla f(x_0) = 0$ ist.
(3) Die Umkehrung von (1) ist falsch. Betrachte z.B. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 - y^2$. Dann ist $\nabla f(0, 0) = 0$, d.h., $(0, 0)$ ist ein kritischer Punkt von f, aber $(0, 0)$ ist offensichtlich kein lokales Extremum von f.

VII.4. Höhere Ableitungen

Im Folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ $\mathbb{K}$-Banachräume und $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, offen.

Definition VII.4.1. (1) Die Funktion $f : U \to X$ sei in einer Umgebung $V \subset U$ von $x_0 \in U$ differenzierbar und die Funktion $Df : V \to \mathcal{L}(X, Y)$ sei in x_0 differenzierbar. Dann ist die zweite Ableitung $D^2 f(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ von f in x_0 definiert durch

$$D^2 f(x_0) = D(Df)(x_0).$$

In diesem Fall heißt f in x_0 zweimal differenzierbar.
(2) Die Funktion $f : U \to X$ heißt zweimal differenzierbar in U, wenn sie in jedem Punkt $x \in U$ zweimal differenzierbar ist.
(3) Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Die Funktion $f : U \to X$ sei in einer Umgebung $V \subset U$ von $x_0 \in U$ m-mal differenzierbar und die m-te Ableitung

$$D^m f : V \to \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \ldots, \mathcal{L}(X, Y)) \ldots)}_{m-\text{mal } \mathcal{L}}$$

sei in x_0 differenzierbar. Dann ist die $(m+1)$-TE ABLEITUNG

$$D^{m+1}f(x_0) \in \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y)) \dots)}_{(m+1)-\text{mal } \mathcal{L}}$$

von f in x_0 definiert durch

$$D^{m+1}f(x_0) = D(D^m f)(x_0).$$

In diesem Fall heißt f in x_0 $(m+1)$-MAL DIFFERENZIERBAR.
(4) Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Die Funktion $f : U \to X$ heißt m-MAL DIFFERENZIERBAR in U, wenn sie in jedem Punkt $x \in U$ m-mal differenzierbar ist.

BEISPIEL VII.4.2. Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t A x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i A_{ij} x_j.$$

Eine einfache Rechnung liefert

$$Df(x) = x^t A \in \mathbb{R}^n \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Also ist

$$\begin{aligned} D^2 f(x) = A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) &\cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ &\cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})). \end{aligned}$$

Die Räume $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots, \mathcal{L}(X, Y) \dots)$ sind für praktische Rechnungen ziemlich unhandlich. Daher betrachten wir nun multilineare Abbildungen.

DEFINITION VII.4.3. Seien $(X_i, \| \cdot \|_{X_i})$, $1 \le i \le m$, normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$ heißt MULTILINEAR oder m-LINEAR, wenn für jeden Punkt $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m) \in X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times X_{k+1} \times \ldots \times X_m$ und jedes $k \in \mathbb{N}_m^*$ die Abbildung

$$\varphi(x_1, \dots, x_{k-1}, \cdot, x_{k+1}, \dots, x_m) : X_k \to Y$$

linear ist.

SATZ VII.4.4. *Sei $\varphi : X_1 \times \ldots \times X_m \to Y$ m-linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *φ ist stetig.*
(2) *$\exists \alpha \in \mathbb{R}^* \; \forall (x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m$:*

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_m)\|_Y \le \alpha \|x_1\|_{X_1} \dots \|x_m\|_{X_m}.$$

BEWEIS. (1) $\Longrightarrow$ (2): Durch

$$\|(x_1, \dots, x_m)\| = \max_{1 \le i \le m} \|x_i\|_{X_i}$$

wird eine Norm auf $X_1 \times \ldots \times X_m$ definiert (Übungsaufgabe Analysis I). Da φ insbesondere in $(0, \ldots, 0) \in X_1 \times \ldots \times X_m$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|\varphi(x_1, \ldots, x_m)\|_Y \leq 1 \quad \forall \|(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \delta.$$

Seien $x_i \in X_i \backslash \{0\}$, $1 \leq i \leq m$. Wegen der Multilinearität von φ folgt

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(x_1, \ldots, x_m)\|_Y \\
=&\left\| \varphi(\frac{\|x_1\|_{X_1}}{\delta} \delta \frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \ldots, \frac{\|x_m\|_{X_m}}{\delta} \delta \frac{x_m}{\|x_m\|_{X_m}}) \right\|_Y \\
=&\delta^{-m} \|x_1\|_{X_1} \ldots \|x_m\|_{X_m} \left\| \varphi(\delta \frac{x_1}{\|x_1\|_{X_1}}, \ldots, \delta \frac{x_m}{\|x_m\|_{X_m}}) \right\|_Y \\
\leq&\delta^{-m} \|x_1\|_{X_1} \ldots \|x_m\|_{X_m}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Da Gleichung (1) offensichtlich richtig ist, wenn für ein $i \in \mathbb{N}_m^*$ gilt $x_i = 0$, folgt damit (2).
(2) $\Longrightarrow$ (1): Für $(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m$ folgt wegen der Multilinearität von φ

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(x_1, \ldots, x_m) - \varphi(y_1, \ldots, y_m)\|_Y \\
=&\|\varphi(x_1 - y_1, x_2, \ldots, x_m) \\
&+ \varphi(y_1, x_2 - y_2, x_3, \ldots, x_m) + \ldots + \\
&+ \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, x_m - y_m)\| \\
\leq&\alpha\{\|x_1 - y_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2} \ldots \|x_m\|_{X_m} \\
&\quad + \|y_1\|_{X_1} \|x_2 - y_2\|_{X_2} \|x_3\|_{X_3} \ldots \|x_m\|_{X_m} \\
&\quad + \ldots + \|y_1\|_{X_1} \ldots \|y_{m-1}\|_{X_{m-1}} \|x_m - y_m\|_{X_m}\} \\
\leq&\alpha \max\{\|(x_1, \ldots, x_m)\|^{m-1}, \|(y_1, \ldots, y_m)\|^{m-1}\} \cdot \\
&\|(x_1 - y_1, \ldots, x_m - y_m)\|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt (1). $\square$

Definition VII.4.5. (1) $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m, Y) = \{\varphi : X_1 \times \ldots \times X_m \to Y : \varphi$ ist m-linear und stetig$\}$.
(2) $\mathcal{L}^m(X, Y) = \mathcal{L}(\underbrace{X, \ldots, X}_{m-\text{mal}}, Y)$.
(3) Für $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m, Y)$ sei

$$\begin{aligned}
&\|\varphi\|_{\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m, Y)} \\
&= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^* : \|\varphi(x_1, \ldots, x_m)\|_Y \leq \alpha \|x_1\|_{X_1} \cdot \ldots \cdot \|x_m\|_{X_m} \\
&\qquad\qquad \forall (x_1, \ldots, x_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m\}.
\end{aligned}$$

(4) $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^m(X,Y)} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,\ldots,X,Y)}$.

Satz VII.4.6. (1) *Sei* $\varphi \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m, Y)$. *Dann ist*

$$\begin{aligned}&\|\varphi\|_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y)}\\&\quad= \sup\{\|\varphi(x_1,\ldots,x_m)\|_Y : \|x_j\|_{X_j} \le 1\ \forall 1 \le j \le m\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\|\varphi(x_1,\ldots,x_m)\|_Y \le \|\varphi\|_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y)}\|x_1\|_{X_1}\cdot\ldots\cdot\|x_m\|_{X_m}\\ \forall (x_1,\ldots,x_m) \in X_1 \times \ldots \times X_m.\end{aligned}$$

(2) $(\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y)})$ *ist ein normierter* $\mathbb{K}$-*Vektorraum.*
(3) *Falls* Y *vollständig ist, ist auch* $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y)$ *vollständig.*

Beweis. Völlig analog zum Beweis von Bemerkung VI.1.6 (S. 7) und Satz VII.1.1 (S. 45). □

Satz VII.4.7. $\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_m,Y) \cong \mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,\ldots,\mathcal{L}(X_m,Y))$.

Beweis. Der Übersichtlichkeit halber führen wir den Beweis nur für $m = 2$ aus. Der allgemeine Fall folgt ganz analog.
Sei $T \in \mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))$. Definiere $\varphi_T : X_1 \times X_2 \to Y$ durch

$$\varphi_T(x_1,x_2) = (Tx_1)x_2.$$

Offensichtlich ist φ_T bilinear. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|\varphi_T(x_1,x_2)\|_Y &\le \|Tx_1\|_{\mathcal{L}(X_2,Y)}\|x_2\|_{X_2}\\&\le \|T\|_{\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))}\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}.\end{aligned}$$

Also ist $\varphi_T \in \mathcal{L}(X_1,X_2,Y)$ und

$$\|\varphi_T\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2,Y)} \le \|T\|_{\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))}.$$

Sei nun $\psi \in \mathcal{L}(X_1,X_2,Y)$. Definiere T_ψ durch

$$(T_\psi x_1)(x_2) = \psi(x_1,x_2).$$

Dann folgt

$$\|(T_\psi x_1)(x_2)\|_Y \le \|\psi\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2,Y)}\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}.$$

Hieraus folgt $T_\psi \in \mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))$ und

$$\|T_\psi\|_{\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))} \le \|\psi\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2,Y)}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Mit diesen Vorbereitungen erhalten wir eine für die Praxis handlichere Interpretation der höheren Ableitungen.

Definition VII.4.8. (1) Die Funktion $f : U \to Y$ sei in $x_0 \in U$ m-mal differenzierbar. Dann identifizieren wir vermöge Satz VII.4.7 die m-te Ableitung $D^m f(x_0)$ von f in x_0 mit einem Element von $\mathcal{L}^m(X,Y)$.
(2) Die Funktion $f : U \to Y$ heißt in U m-mal stetig differenzierbar, wenn sie in U m-mal differenzierbar ist und wenn die Funktion

$D^m f : U \to \mathcal{L}^m(X,Y)$ stetig ist.
(3) $C^m(U,Y)$ bezeichnet den Vektorraum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen von U in Y.
(4) $C^\infty(U,Y) = \bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} C^m(U,Y)$.

Bemerkung VII.4.9. Es gilt

$$C^\infty(U,Y) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} C^{m+1}(U,Y) \underset{\neq}{\subset} C^m(U,Y) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} C(U,Y).$$

Beweis. Folgt aus Satz VII.2.2 (S. 50) und Bemerkung IV.1.15 (S. 117, Analysis I), die ein Spezialfall von Bemerkung VII.4.9 ist. □

Definition VII.4.10. Sei $\varphi : X\times\ldots\times X \to Y$ m-linear. Dann heißt φ symmetrisch, wenn für alle $x_1, \ldots, x_m \in X$ und alle Permutationen $\sigma : \mathbb{N}_m^* \to \mathbb{N}_m^*$ gilt

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

Satz VII.4.11. *Sei $m \geq 2$ und $f \in C^m(U,Y)$. Dann ist $D^m f(x) \in \mathcal{L}^m(X,Y)$ für jedes $x \in U$ symmetrisch.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über m.
„$m = 2$“: Sei $x \in U$ beliebig und $r \in \mathbb{R}_+^*$, so dass $B(x,r) \subset U$ ist. Seien $h, k \in X$ mit

$$\|h\|_X \leq \frac{r}{2}\ ,\ \|k\|_X \leq \frac{r}{2}.$$

Aus Satz VII.3.7 (S. 62) folgt

$$\begin{aligned}
&f(x+h+k) - f(x+k) - f(x+h) + f(x)\\
=&\int_0^1 [Df(x+k+th) - Df(x+th)]hdt\\
=&\int_0^1\int_0^1 D^2f(x+sk+th)(k,h)dsdt\\
=&D^2f(x)(k,h)\\
&+\int_0^1\int_0^1 [D^2f(x+sk+th) - D^2f(x)](k,h)dsdt\\
=&D^2f(x)(k,h) + \varphi(x,k,h)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)\\
=&\int_0^1 [Df(x+h+tk) - Df(x+tk)]kdt\\
=&\int_0^1\int_0^1 D^2f(x+sh+tk)(h,k)dsdt\\
=&D^2f(x)(h,k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+\int_0^1\int_0^1 [D^2f(x+sh+tk)-D^2f(x)](h,k)dsdt\\ =&D^2f(x)(h,k)+\psi(x,h,k).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}&\|D^2f(x)(k,h)-D^2f(x)(h,k)\|_Y\\ =&\|\varphi(x,k,h)-\psi(x,h,k)\|_Y\\ \le&\|\varphi(x,k,h)\|_Y+\|\psi(x,h,k)\|_Y\\ \le&2\|h\|_X\|k\|_X \sup_{\substack{0\le s\le 1\\ 0\le t\le 1}}\|D^2f(x+sh+tk)-D^2f(x)\|_{\mathcal{L}^2(X,Y)}.\end{aligned}$$

Ersetzen von h,k durch $\varepsilon h, \varepsilon k$ mit $\varepsilon>0$ liefert

$$\begin{aligned}&\|D^2f(x)(k,h)-D^2f(x)(h,k)\|_Y\\ =&\frac{1}{\varepsilon^2}\|D^2f(x)(\varepsilon k,\varepsilon h)-D^2f(x)(\varepsilon h,\varepsilon k)\|_Y\\ \le&2\frac{1}{\varepsilon^2}\|\varepsilon k\|_X\|\varepsilon h\|_X \sup_{\substack{0\le s\le 1\\ 0\le t\le 1}}\|D^2f(x+s\varepsilon h+t\varepsilon k)-D^2f(x)\|_{\mathcal{L}^2(X,Y)}\\ \le&2\|h\|_X\|k\|_X \sup_{\substack{0\le s\le 1\\ 0\le t\le 1}}\|D^2f(x+s\varepsilon h+t\varepsilon k)-D^2f(x)\|_{\mathcal{L}^2(X,Y)}\\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von D^2f. Damit ist die Behauptung für $m=2$ gezeigt.

„$m\to m+1$“: Seien $x\in U$ und $r\in\mathbb{R}_+^*$ wie oben und $h_1,\ldots,h_{m+1}\in X$ mit $\|h_k\|_X\le\frac{r}{m+1}$, $1\le k\le m+1$. Sei $\sigma\in\mathbb{N}_m^*\to\mathbb{N}_m^*$ eine beliebige Permutation von $\mathbb{N}_m^*$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung für jedes $t\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}[D^mf(x+th_1)(h_2,\ldots,h_{m+1})-D^mf(x)(h_2,\ldots,h_{m+1})]\\ =&\frac{1}{t}[D^mf(x+th_1)(h_{\sigma(2)},\ldots,h_{\sigma(m+1)})-D^mf(x)(h_{\sigma(2)},\ldots,h_{\sigma(m+1)})].\end{aligned}$$

Grenzübergang $t\to 0$ liefert

$$D^{m+1}f(x)(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})=D^{m+1}f(x)(h_1,h_{\sigma(2)},\ldots,h_{\sigma(m+1)}).$$

Wegen $D^{m+1}f=D^2(D^{m-1}f)$ folgt weiter

$$D^{m+1}f(x)(h_1,h_2,\ldots,h_{m+1})=D^{m+1}f(x)(h_2,h_1,\ldots,h_{m+1}).$$

Da jede Permutation von $\mathbb{N}_{m+1}^*$ dargestellt werden kann als $\sigma\circ\tau\circ\rho$, wobei τ die Indizes 1 und 2 vertauscht und σ und ρ Permutationen von $\mathbb{N}_m^*$ sind, folgt hieraus die Behauptung. □

Satz VII.4.12. *Sei $(Z,\|\cdot\|_Z)$ ein Banachraum und $f\in C^m(U,Y)$, $g\in C^m(V,Z)$ mit $f(U)\subset V$. Dann ist $g\circ f\in C^m(U,Z)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt durch Induktion aus der Kettenregel, Satz VII.3.3 (S. 60). □

Die folgende Definition ist eine Verallgemeinerung von Definition IV.3.1 (S. 132, Analysis I).

Definition VII.4.13. Seien $f \in C^m(U, Y)$, $x_0 \in U$ und $h \in X$. Dann heißt

$$T_m(f, x_0)(h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} D^k f(x_0)(\underbrace{h, \ldots, h}_{k-\text{mal}})$$

das m-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Satz VII.4.14 (Taylorsche Formel). *Seien $f \in C^m(U, Y), x \in U$ und $h \in X$, derart dass $\{x + th : 0 \le t \le 1\} \subset U$ ist. Dann gilt:*

(1) $f(x + h) = T_{m-1}(f, x)(h) + R_m(f, x, h)$ *mit*

$$\begin{aligned} &R_m(f, x, h) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(m-1)!}(1-t)^{m-1} D^m f(x + th)(\underbrace{h, \ldots, h}_{m-mal})dt. \end{aligned}$$

(2) $f(x + h) = T_m(f, x)(h) + \tilde{R}_m(f, x, h)$ *mit*

$$\begin{aligned} &\tilde{R}_m(f, x, h) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(m-1)!}(1-t)^{m-1}[D^m f(x + th) - D^m f(x)](\underbrace{h, \ldots, h}_{m-mal})dt. \end{aligned}$$

Beweis. ad (1): Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über m.
„$m = 1$“: Dies ist Satz VII.3.7(2) (S. 62).
„$m \to m + 1$“: Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} R_m(f, x, h) &= \int_0^1 \frac{1}{(m-1)!}(1-t)^{m-1} D^m f(x + th)(h, \ldots, h)dt \\ &= [-\frac{1}{m!}(1-t)^m D^m f(x + th)(h, \ldots, h)]_{t=0}^{t=1} \\ &\quad + \int_0^1 \frac{1}{m!}(1-t)^m D^{m+1} f(x + th)(\underbrace{h, \ldots, h}_{(m+1)-\text{mal}})dt \\ &= \frac{1}{m!} D^m f(x)(\underbrace{h, \ldots, h}_{m-\text{mal}}) + R_{m+1}(f, x, h). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.
ad (2): Wegen

$$\int_0^1 \frac{1}{(m-1)!}(1-t)^{m-1}dt = \frac{1}{m!}$$

folgt die Behauptung aus Teil (1). □

Bemerkung VII.4.15. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Satz VII.4.14. Dann folgt

$$\begin{aligned}&\|\tilde{R}_m(f,x,h)\|_Y\\ \leq&\frac{1}{(m-1)!}\|h\|_X^m\sup_{0\leq t\leq 1}\|D^m f(x+th)-D^m f(x)\|_{\mathcal{L}^m(X,Y)}.\end{aligned}$$

Mithin gilt

$$\lim_{\|h\|_X\to 0}\|h\|_X^{-m}\|\tilde{R}_m(f,x,h)\|_Y=0.$$

Als nächstes wenden wir die bisher erzielten Ergebnisse auf Funktionen auf dem $\mathbb{R}^k$ an.

Definition VII.4.16. Sei $U\subset\mathbb{R}^k$, $U\neq\emptyset$, offen und $f\in C^m(U,Y)$ und $j_1,\ldots,j_m\in\mathbb{N}_k^*$. Dann heißt der Ausdruck

$$D_{j_m}\ldots D_{j_1}f(x)=\frac{\partial}{\partial x_{j_m}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}f(x)=\frac{\partial^m}{\partial x_{j_m}\ldots\partial x_{j_1}}f(x)$$

eine partielle Ableitung m-ter Ordnung von f.

Beispiel VII.4.17. Für

$$f(x,y)=\frac{xy}{1+x^4+y^4}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{y(1-3x^4+y^4)}{(1+x^4+y^4)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{x(1+x^4-3y^4)}{(1+x^4+y^4)^2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}&=\frac{x^3y(-20-20y^4+12x^4)}{(1+x^4+y^4)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\ &=\frac{1-2x^4-2y^4-3x^8-3y^8+26x^4y^4}{(1+x^4+y^4)^3}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}&=\frac{xy^3(-20-20x^4+12y^4)}{(1+x^4+y^4)^3}.\end{aligned}$$

Satz VII.4.18. *Sei $U\subset\mathbb{R}^k, U\neq\emptyset$ offen.*

(1) *Es ist $f\in C^m(U,Y)$ genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen der Ordnung l für alle $1\leq l\leq m$ existieren und stetig sind.*
(2) *Ist $f\in C^m(U,Y)$, so existieren alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ und sind von der Reihenfolge der Differentiation unabhängig.*

Beweis. ad (1): „$\Longrightarrow$“ Folgt aus

$$D_{j_l} \dots D_{j_1} f(x) = D^l f(x)(e_{j_1}, \dots, e_{j_l}) \tag{2}$$

für alle $j_1, \dots, j_l \in \mathbb{N}_k^*$ und $1 \leq l \leq m$.
“$\Longleftarrow$“ Folgt durch Induktion aus Satz VII.2.13 (S. 55).
ad (2): Folgt aus Gleichung (2) und Satz VII.4.11. □

Sei $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ ein Multiindex. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
|\underline{\alpha}| &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\
\underline{\alpha}! &= \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i!) \\
x^{\underline{\alpha}} &= \prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha_i} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \\
D^{\underline{\alpha}} f &= D_1^{\alpha_1} \dots D_k^{\alpha_k} f \quad \forall f \in C^{|\underline{\alpha}|}(U, Y), U \in \mathbb{R}^k \text{ offen} \\
D^{\underline{0}} f &= f.
\end{aligned}$$

Sei nun $h = (h_1, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^k$. Dann ist für $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&D^m f(x)(\underbrace{h, \dots, h}_{m-\text{mal}}) \\
&= D^m f(x)\Big(\sum_{i_1=1}^{k} h_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_m=1}^{k} h_{i_m} e_{i_m}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{k} \dots \sum_{i_m=1}^{k} D_{i_1} \dots D_{i_m} f(x) h_{i_1} \dots h_{i_m}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Die Zahl aller m-Tupel $(j_1, \dots, j_m)$ mit $j_i \in \mathbb{N}_k^*$ und den Eigenschaften

der Index 1 kommt α_1-mal vor,

$\vdots$

der Index k kommt α_k-mal vor,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = m$$

beträgt

$$\frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} = \frac{m!}{\underline{\alpha}!}.$$

Hieraus und aus Gleichung (3) folgt

$$\frac{1}{m!} D^m f(x)(\underbrace{h, \dots, h}_{m-\text{ mal}}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=m} \frac{1}{\underline{\alpha}!} D^{\underline{\alpha}} f(x) h^{\underline{\alpha}}.$$

Hiermit können wir für Funktionen auf $\mathbb{R}^k$ die Taylorschen Formeln aus Satz VII.4.14 wie folgt schreiben:

SATZ VII.4.19 (TAYLORSCHE FORMEL FÜR FUNKTIONEN AUF $\mathbb{R}^k$). *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen, $f \in C^m(U, Y)$, $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^k$, so, dass $\{x + th : 0 \le t \le 1\} \subset U$ ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\underline{\alpha}| \le m-1} \frac{1}{\underline{\alpha}!} D^{\underline{\alpha}} f(x) h^{\underline{\alpha}} + R_m(f, x, h) \\ &= \sum_{|\underline{\alpha}| \le m} \frac{1}{\underline{\alpha}!} D^{\underline{\alpha}} f(x) h^{\underline{\alpha}} + \tilde{R}_m(f, x, h) \end{aligned}$$

mit

$$R_m(f, x, h) = \int_0^1 \sum_{|\underline{\alpha}|=m} \frac{m}{\underline{\alpha}!} (1-t)^{m-1} D^{\underline{\alpha}} f(x+th) h^{\underline{\alpha}} dt$$

und

$$\tilde{R}_m(f, x, h) = \int_0^1 \sum_{|\underline{\alpha}|=m} \frac{m}{\alpha!} (1-t)^{m-1} [D^{\underline{\alpha}} f(x+th) - D^{\underline{\alpha}} f(x)] h^{\underline{\alpha}} dt.$$

Als nächstes betrachten wir Funktionen auf $\mathbb{R}^k$ mit Werten in $\mathbb{R}$.

BEMERKUNG VII.4.20. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen und $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Dann gilt für $v = (v_1, \ldots, v_k)$, $w = (w_1, \ldots, w_k)$ aus $\mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} D^2 f(x)(v, w) &= D^2 f(x)\Big(\sum_{i=1}^k v_i e_i, \sum_{j=1}^k w_j e_j\Big) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k v_i w_j D_i D_j f(x) \\ &= v^t [D_i D_j f(x)]_{1 \le i,j \le h} w. \end{aligned}$$

Die Matrix $[D_i D_j f(x)]_{1 \le i,j \le k} \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ heißt HESSE-MATRIX von f. Wegen Satz VII.4.18 ist sie symmetrisch.

DEFINITION VII.4.21. Sei $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann heißt

(1) A POSITIV SEMI-DEFINIT
$\iff v^t A v \ge 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^k$,
(2) A POSITIV DEFINIT
$\iff v^t A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^k, v \neq 0$,
(3) A NEGATIV (SEMI-)DEFINIT
$\iff -A$ positiv (semi-) definit,
(4) A INDEFINIT
$\iff \exists v, w \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\} : v^t A v > 0,\ w^t A w < 0$.

Aus der linearen Algebra sind folgende Eigenschaften symmetrischer Matrizen bekannt.

Bemerkung VII.4.22. (1) $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ sei symmetrisch. Dann gibt es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^k$ mit

$$\begin{aligned} Ax_i &= \lambda_i x_i \quad 1 \le i \le k \\ x_i^t x_j &= \delta_{ij} \quad 1 \le i, j \le k. \end{aligned}$$

Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ heißen Eigenwerte der Matrix A und die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ die zugehörigen Eigenvektoren. O.E. gilt

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k.$$

A ist positiv semi-definit $\iff \lambda_1 \ge 0$,
A ist positiv definit $\iff \lambda_1 > 0$,
A ist indefinit $\iff \lambda_1 < 0 < \lambda_k$.
Falls A positiv definit ist, gilt für alle $v \in \mathbb{R}^k$ mit $v \neq 0$

$$v^t A v \ge \lambda_1 \|v\|_2^2.$$

(2) $A \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ sei symmetrisch. Dann ist A genau dann positiv definit, wenn alle Hauptunterdeterminanten positiv sind.

Mit Hilfe der Hesse-Matrix und dem Begriff „positiv definit“ können wir nun hinreichende Bedingungen für lokale Extrema herleiten.

Satz VII.4.23 (Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema). *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen, $x_0 \in U$, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ und x_0 ein kritischer Punkt von f, d.h. $Df(x_0) = 0$. Dann gilt:*

(1) *$D^2 f(x_0)$ positiv definit $\Longrightarrow$ f hat in x_0 ein lokales (isoliertes) Minimum.*
(2) *$D^2 f(x_0)$ negativ definit $\Longrightarrow$ f hat in x_0 ein lokales (isoliertes) Maximum.*
(3) *$D^2 f(x_0)$ indefinit $\Longrightarrow$ x_0 ist kein lokales Extremum von f.*

Beweis. ad (1): Aus Satz VII.4.14 folgt für $h \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ mit $x_0 + h \in U$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} h^t D^2(x_0) h + \tilde{R}_2(f, x_0, h).$$

Sei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert von $D^2 f(x_0)$. Wegen Bemerkung VII.4.15 gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$x_0 + h \in U \text{ und } |\tilde{R}_2(f, x_0, h)| \le \frac{\lambda_1}{4} \|h\|_2^2 \ \forall h \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\} \text{ mit } \|h\|_2 \le \delta.$$

Für $h \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ mit $\|h\|_2 \le \delta$ folgt dann

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &\ge f(x_0) + \frac{\lambda_1}{2} \|h\|_2^2 - \frac{\lambda_1}{4} \|h\|_2^2 \\ &= f(x_0) + \frac{\lambda_1}{4} \|h\|_2^2 \\ &> f(x_0). \end{aligned}$$

Also ist x_0 ein lokales (isoliertes) Minimum.
AD (2): Folgt aus Teil (1) angewandt auf $-f$.
AD (3): Seien $v, w \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ mit

$$v^t D^2(x_0) v > 0 \text{ und } w^t D^2(x_0) w < 0.$$

Für hinreichend kleines $t > 0$ folgt dann aus Satz VII.4.14 und Bemerkung VII.4.15

$$\begin{aligned} f(x_0 + tv) &= f(x_0) + \frac{1}{2} v^t D^2 f(x_0) v t^2 + \tilde{R}_2(f, x_0, tv) \\ &= f(x_0) + t^2 [\frac{1}{2} v^t D^2 f(x_0) v + \underbrace{t^{-2} \tilde{R}_2(f, x_0, tv)}_{\underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0}] \\ &> f(x_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0 + tw) &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 w^t D^2 f(x_0) w + \tilde{R}_2(f, x_0, tw) \\ &= f(x_0) + t^2 [\frac{1}{2} w^t D^2 f(x_0) w + \underbrace{t^{-2} \tilde{R}_2(f, x_0, tw)}_{\underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0}] \\ &< f(x_0). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

BEISPIEL VII.4.24. (1) Für $f(x, y) = c + x^2 + y^2$, mit $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Df(x, y) = 2(x, y) &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist einziger kritischer Punkt} \\ D^2 f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist lokales Minimum.} \end{aligned}$$

(2) Für $f(x, y) = c - x^2 - y^2$, mit $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Df(x, y) = -2(x, y) &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist einziger kritischer Punkt} \\ D^2 f(x, y) = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist lokales Maximum.} \end{aligned}$$

(3) Für $f(x, y) = c + x^2 - y^2$, mit $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Df(x, y) = 2(x, -y) &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist einziger kritischer Punkt} \\ D^2 f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist kein lokales Extremum.} \end{aligned}$$

(4) Für $f(x, y) = c + x^2 + y^4$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Df(x, y) = (2x, 4y^3) &\Longrightarrow (0, 0) \text{ ist einziger kritischer Punkt} \\ D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\text{ ist positiv semi-definit} \end{aligned}$$

$(0,0)$ ist lokales Minimum.

(5) Für $f(x,y) = x^2$ erhalten wir

$$Df(x,y) = (2x,0) \Longrightarrow (0,y), y \in \mathbb{R} \text{ sind kritische Punkte}$$
$$D^2 f(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist positiv semi-definit}$$

$(0,y)$ sind lokale Minima, aber nicht isoliert.

(6) Für $f(x,y) = x^2 + y^3$ erhalten wir

$$Df(x,y) = (2x,3y^2) \Longrightarrow (0,0) \text{ ist einziger kritischer Punkt}$$
$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist positiv semi-definit}$$

$(0,0)$ ist kein lokales Extremum.

(7) Betrachte

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^4+y^4}.$$

Wegen

$$\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$$

und

$$f(1,1) > 0$$
$$f(1,-1) < 0$$

hat f ein Minimum und Maximum. Aus Beispiel VII.4.17 folgt

$$Df(x,y) = \frac{1}{(1+x^4+y^4)^2} \begin{pmatrix} y(1-3x^4+y^4) \\ x(1+x^4-3y^4) \end{pmatrix}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$(0,0), (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}), (-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}), (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}), (-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$$

die einzigen kritischen Punkte sind. Aus Beispiel VII.4.17 folgt

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ indefinit,}$$
$$D^2 f(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = D^2 f(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ negativ definit,}$$
$$D^2 f(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = D^2 f(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ positiv definit.}$$

Also ist $(0,0)$ kein lokales Extremum, $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ sind (isolierte) lokale Maxima, $(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ und $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ sind (isolierte) lokale Minima.
Daher gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{\sqrt{8}} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

VII.5. Umkehrabbildungen

Wir erinnern an Satz IV.2.11 (S. 124, Analysis I): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C(I,\mathbb{R})$ in I differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist $J = f(I)$ ein Intervall, $f : I \to J$ bijektiv und $f^{-1} : J \to I$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

In diesem Paragraphen wollen wir ein analoges Resultat für Funktionen mehrerer Veränderlicher beweisen.

Im Folgenden sind $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banachräume.

Definition VII.5.1. $\mathcal{GL}(X) = \mathrm{Isom}(X,X) \subset \mathcal{L}(X,X)$ heißt die Automorphismengruppe von X.

Satz VII.5.2. *Sei $A \in \mathcal{L}(X,X)$ mit $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$. Dann ist $I - A \in \mathcal{GL}(X)$, wobei I die Identität auf X bezeichnet. Weiter gilt*

$$\|(I-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(X,X)}}.$$

Beweis. Wegen

$$\|A^n\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \|A\|^n_{\mathcal{L}(X,X)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

und $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$ konvergiert die Reihe $\sum A^n$ in $\mathcal{L}(X,X)$. Für $n \in \mathbb{N}^*$ folgt

$$\begin{aligned}(I-A) \cdot (\sum_{k=0}^{n} A^k) &= \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} \\ &= I - A^{n+1} \\ &= (\sum_{k=0}^{n} A^k)(I-A).\end{aligned}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}.$$

Schließlich folgt

$$\begin{aligned} \|(I-A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} &= \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=0}^{n} A^k\|_{\mathcal{L}(X,X)} \\ &\le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k_{\mathcal{L}(X,X)} \\ &= \frac{1}{1 - \|A\|_{\mathcal{L}(X,X)}}. \end{aligned}$$

□

Aus Satz VII.5.2 folgt:

SATZ VII.5.3. *(1)* $\mathrm{Isom}(X,Y)$ *ist offen in* $\mathcal{L}(X,Y)$.
(2) Die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathrm{Isom}(X,Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(X,Y) \\ A &\longrightarrow A^{-1} \end{aligned}$$

ist C^∞ *und*

$$Df(A)B = -A^{-1}BA^{-1} \quad \forall A \in \mathrm{Isom}(X,Y),\ B \in \mathcal{L}(X,Y).$$

BEWEIS. AD (1): Sei $A_0 \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ und

$$\varepsilon = \|A_0^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Sei $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit

$$\|A - A_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon.$$

Dann folgt

(1) $$A = A_0 + A - A_0 = A_0[I - A_0^{-1}(A_0 - A)].$$

Wegen

$$\|A_0^{-1}(A_0 - A)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \le \|A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|A - A_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < 1$$

und Satz VII.5.2 ist $I - A_0^{-1}(A_0 - A) \in \mathcal{GL}(X)$. Zusammen mit Gleichung (1) folgt hieraus $A \in \mathrm{Isom}(X,Y)$.
AD (2): 1. SCHRITT: f ist stetig.
Seien $A, A_0 \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ mit

$$\|A - A_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \|A_0^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Zusammen mit Teil (1) folgt

$$\begin{aligned} &f(A) - f(A_0) \\ &= A^{-1} - A_0^{-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (A^{-1}A_0 - I)A_0^{-1} \\
&= ([A - A_0 + A_0]^{-1}A_0 - I)A_0^{-1} \\
&= ([A_0(A_0^{-1}\{A - A_0\} + I)]^{-1}A_0 - I)A_0^{-1} \\
&= ([I - A_0^{-1}\{A_0 - A\}]^{-1} - I)A_0^{-1} \\
&= [I - A_0^{-1}(A_0 - A)]^{-1}[I - (I - A_0^{-1}(A_0 - A))]A_0^{-1} \\
&= [I - A_0^{-1}(A_0 - A)]^{-1}A_0^{-1}(A_0 - A)A_0^{-1} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

und wegen Satz VII.5.2

$$
\begin{aligned}
&\|f(A) - f(A_0)\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \\
&\leq \frac{\|A_0^{-1}\|^2_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \|A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|A_0 - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}\|A_0 - A\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.
\end{aligned}
$$

Also ist f stetig.
2. Schritt: f ist differenzierbar.
Sei $A_0 \in \operatorname{Isom}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit

$$\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \|A_0^{-1}\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)}.$$

Aus Gleichung (2) folgt

$$
\begin{aligned}
&f(A_0 + B) - f(A_0) + A_0^{-1}BA_0^{-1} \\
&= -[I + A_0^{-1}B]^{-1}A_0^{-1}BA_0 + A_0^{-1}BA_0^{-1} \\
&= [I + A_0^{-1}B]^{-1}\{-A_0^{-1}BA_0 + (I + A_0^{-1}B)A_0^{-1}BA_0^{-1}\} \\
&= [I + A_0^{-1}B]^{-1}A_0^{-1}BA_0^{-1}BA_0^{-1}
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}\|f(A_0 + B) - f(A_0) + A_0^{-1}BA_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \\
&\leq \frac{\|A_0^{-1}\|^3_{\mathcal{L}(Y,X)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}{1 - \|A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}} \\
&\underset{\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Also ist f differenzierbar und $Df(A_0)B = -A_0^{-1}BA_0^{-1}$.
3. Schritt: f ist C^∞.
Definiere für $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ die Abbildung $g_S : \mathcal{L}(Y,X) \times \mathcal{L}(Y,X) \to \mathcal{L}(Y,X)$ durch

$$g_S(T_1, T_2) = T_1ST_2 \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{L}(Y,X).$$

Offensichtlich ist g stetig und bilinear und somit aus C^∞. Aus Schritt 2 folgt für $A \in \operatorname{Isom}(X,Y)$ und $B \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$Df(A)B = g_B(f(A), f(A)).$$

Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion. $\square$

Wir kommen nun zu einem ersten Hauptsatz dieses Abschnittes.

Satz VII.5.4 (Satz über die Umkehrabbildung). *Sei* $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, *offen,* $f \in C^m(U,Y)$, $m \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in U$, $y_0 = f(x_0)$ *und* $Df(x_0) \in \operatorname{Isom}(X,Y)$. *Dann gilt:*

(1) $\exists V \in \mathcal{U}(x_0), W \in \mathcal{U}(y_0) : f|_V : V \to W$ *ist bijektiv,*
(2) $f^{-1} = (f|_V)^{-1} \in C^m(W,V)$,
(3) $Df^{-1}(y) = Df(x)^{-1}$ *für alle* $y = f(x), x \in V, y \in W$.

Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf den Fall $X = Y$, $x_0 = y_0 = 0$, $Df(x_0) = I$.
Definiere

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \{x - x_0 : x \in U\} \\ \tilde{f}(x) &= Df(x_0)^{-1}[f(x + x_0) - f(x_0)] \quad \forall x \in \tilde{U} \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{f} \in C^m(\tilde{U}, X)$, $\tilde{f}(0) = 0$ und

$$D\tilde{f}(0) = I.$$

Weiter gilt

$$f(x) = y \iff \tilde{f}(x - x_0) = Df(x_0)^{-1}[y - f(x_0)].$$

Daher können wir im Folgenden stets annehmen, dass gilt $X = Y$, $x_0 = y_0 = 0$ und $Df(x_0) = I$.
2. Schritt: $\exists V, W \in \mathcal{U}(0) : f|_V : V \to W$ ist bijektiv.
Wegen $f \in C^1(U,X)$ und $Df(0) = I$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|I - Df(x)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in B(0,\varepsilon).$$

Definiere

$$W = B(0, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Für $y \in W$ definieren wir $\Phi_y : X \to X$ durch

$$\Phi_y(x) = x - f(x) + y.$$

Offensichtlich gilt

$$\Phi_y(x) = x \iff f(x) = y.$$

Für $x_1, x_2 \in \overline{B(0, \frac{\varepsilon}{2})}$ gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)\|_X &= \|x_1 - x_2 - f(x_1) + f(x_2)\|_X \\ &= \| \int_0^1 [I - Df(x_1 + t(x_2 - x_1))](x_1 - x_2) dt\|_X \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_X. \end{aligned}$$

Wegen

$$\|\Phi_y(0)\|_X = \|y\|_X < \frac{\varepsilon}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt hieraus mit Satz IV.4.4 (S. 138, Analysis I), dass Φ_y einen eindeutigen Fixpunkt in $\overline{B(0, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(0, \varepsilon)$ hat.
Definiere
$$V = \{x \in B(0, \varepsilon) : f(x) \in B(0, \frac{\varepsilon}{4})\}.$$
Dann ist $V \in \mathcal{U}(0)$, und aus Obigem folgt, dass $f|_V : V \to W$ bijektiv ist.
3. Schritt: $f^{-1} = (f|_V)^{-1}$ ist stetig.
Seien $y_1, y_2 \in W$ und $x_i = f^{-1}(y_i)$, $1 \le i \le 2$. Dann folgt
$$\begin{aligned}
&\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\|_X \\
&= \|x_1 - f(x_1) + y_1 - x_2 + f(x_2) - y_2\|_X \\
&\le \| \int_0^1 [I - Df(x_1 + t(x_2 - x_1))](x_1 - x_2) dt\|_X + \|y_1 - y_2\|_X \\
&\le \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|_X + \|y_1 - y_2\|_X \\
&= \frac{1}{2}\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\|_X + \|y_1 - y_2\|_X
\end{aligned}$$
und daher
$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\|_X \le 2\|y_1 - y_2\|_X.$$
Also ist f^{-1} stetig.
4. Schritt: f^{-1} ist differenzierbar und
$$Df^{-1}(y) = Df(x)^{-1} \quad \forall y = f(x), x \in V, y \in W.$$
Seien $y_1, y_2 \in W$ und $x_1, x_2 \in V$ wie in Schritt 3. Dann folgt
$$\begin{aligned}
&\|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1) - Df(x_1)^{-1}(y_2 - y_1)\|_X \\
&= \|x_2 - x_1 - Df(x_1)^{-1}(f(x_2) - f(x_1))\|_X \\
&= \| \int_0^1 [I - Df(x_1)^{-1} Df(x_1 + t(x_2 - x_1))](x_2 - x_1) dt\|_X \\
&\le \|Df(x_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \\
&\quad \cdot \underbrace{\sup_{0 \le t \le 1} \|Df(x_1) - Df(x_1 + t(x_2 - x_1))\|_{\mathcal{L}(X,X)}}_{\to 0 \text{ für } x_2 \to x_1} \\
&\quad \cdot \|x_2 - x_1\|_X.
\end{aligned}$$
Hieraus folgt die Behauptung.
5. Schritt: $f^{-1} \in C^m(W, V)$.
Gemäß Schritt 4 ist
$$Df^{-1} = ((Df) \circ f^{-1})^{-1}. \tag{3}$$
Da gemäß Schritt 3 f^{-1} stetig ist, folgt $f^{-1} \in C^1(W, V)$. Der Rest folgt durch Induktion aus Gleichung (3) mit der Kettenregel und Satz VII.5.3. Damit ist der Satz bewiesen. □

Definition VII.5.5. (1) Seien $U \subset X$, $X \neq \emptyset$, und $V \subset Y$, $V \neq \emptyset$, offen. Dann heißt die Funktion $f : U \to V$ ein C^m-Diffeomorphismus, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ wenn gilt

(1) $f : U \to V$ ist bijektiv,
(2) $f \in C^m(U, V)$,
(3) $f^{-1} \in C^m(V, U)$.

Im Falle $m = 0$ spricht man auch von einem Homöomorphismus.
(2) Sei $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, offen. Dann heißt die Funktion $f : U \to Y$ ein lokaler C^m-Diffeomorphismus, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ wenn es zu jedem $x_0 \in U$, ein $V \in \mathcal{U}(x_0)$ und ein $W \in \mathcal{U}(f(x_0))$ gibt, so dass $f|_V : V \to W$ ein C^m- Diffeomorphismus ist. Im Fall $m = 0$ spricht man auch von einem lokalen Homöomorphismus bzw. sagt, f sei lokal topologisch.

Bemerkung VII.5.6. (1) f (lokaler) C^{m+1}-Diffeomorphismus $\Longrightarrow$ f (lokaler) C^m-Diffeomorphismus.
(2) $f \in C^{m+1}(U, Y)$, f C^m-Diffeomorphismus $\not\Longrightarrow$ f C^{m+1}-Diffeomorphismus.
(3) $f : U \to Y$ lokal topologisch $\Longrightarrow$ f ist offen, d.h., Bilder offener Mengen sind offen.
(4) $f \in C^m(U, Y)$. Dann gilt:
f lokaler C^m-Diffeomorphismus $\iff$ $Df(x) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ für alle $x \in U$.
(5) $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen und $f \in C^m(U, \mathbb{R}^k)$. Dann gilt:
f lokaler C^m-Diffeomorphismus $\iff$ $\det(Df(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$.
(6) Unter den Voraussetzungen von Satz VII.5.4 braucht f kein globaler C^m-Diffeomorphismus zu sein.

Beweis. ad (1): Ist klar.
ad (2): $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist $f \in C^\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ topologisch, aber $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ ist in $y = 0$ nicht differenzierbar.
ad (3): Ist klar.
ad (4): „$\Longrightarrow$“ Satz VII.5.4.
„$\Longleftarrow$“: $f \circ f^{-1} = id_Y$, $f^{-1} \circ f = id_X$. Mit der Kettenregel folgt hieraus für alle $y = f(x)$

$$\begin{aligned} Df(x) \cdot Df^{-1}(y) &= I_{\mathcal{L}(Y,Y)} \\ Df^{-1}(y) \cdot Df(x) &= I_{\mathcal{L}(X,X)}. \end{aligned}$$

ad (5): In diesem Fall kann man $Df(x)$ mit einer Matrix identifizieren und es ist $Df(x) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ genau dann, wenn gilt $\det(Df(x)) \neq 0$.
ad (6): $X = Y = \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. f ist $2\pi i$-periodisch, also nicht injektiv, aber ein lokaler C^ω-Diffeomorphismus. □

Beispiel VII.5.7. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass das Gleichungssystem

$$\tan(x + y) = u$$

$$\ln(1+y+xy)=v$$

für alle $u,v\in\mathbb{R}$ mit $\sqrt{u^2+v^2}<\varepsilon$ mindestens eine Lösung hat.
Dies folgt aus Satz VII.5.4 und Bemerkung VII.5.6 (5) angewandt auf die Funktion $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}\tan(x+y)\\ \ln(1+y+xy)\end{pmatrix}$$

wegen

$$DF(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\cos^2(x+y)} & \dfrac{1}{\cos^2(x+y)}\\ \dfrac{y}{1+y+xy} & \dfrac{1+x}{1+y+xy}\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}F(0,0)&=(0,0)\\ \det(DF(0,0))&=\det\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\\ &=1.\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu dem zweiten Hauptsatz dieses Abschnittes. Dazu benötigen wir folgende Notation.

Definition VII.5.8. Seien X_1,X_2 Untervektorräume von X, so dass X dargestellt werden kann als $X=X_1\times X_2$. Sei $U\subset X$, $U\neq\emptyset$, offen und $f:U\to Y$ in U differenzierbar. Dann stellen wir jeden Punkt $x\in X$ in der Form $x=(x_1,x_2)$, $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$ dar und bezeichnen mit

$$D_{x_1}f\in\mathcal{L}(X_1,Y) \text{ und } D_{x_2}f\in\mathcal{L}(X_2,Y)$$

die Ableitungen der Funktionen

$$\begin{aligned}f(\cdot,x_2^*):&\{x_1\in X_1:(x_1,x_2^*)\in U\}\to Y\\ &x_1\mapsto f(x_1,x_2^*)\quad (x_2^* \text{ fest})\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}f(x_1^*,\cdot):&\{x_2\in X_2:(x_1^*,x_2)\in U\}\to Y\\ &x_2\mapsto f(x_1^*,x_2)\quad (x_1^* \text{ fest}).\end{aligned}$$

Satz VII.5.9 (Satz über implizite Funktionen). *Sei $U\subset X$, $U\neq\emptyset$, offen, $m\in\mathbb{N}^*$, und $f\in C^m(U,Y)$. X lasse sich in der Form $X=X_1\times X_2$ mit Untervektorräumen X_1,X_2 darstellen. Es gebe ein $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in U$ mit*

(a) $$f(x^*)=0$$

(b) $$D_{x_2}f(x^*)\in\operatorname{Isom}(X_2,Y).$$

Dann gibt es Umgebungen V_1 und W von x_1^* in X_1 und V_2 von x_2^* in X_2 und ein $g\in C^m(W,X_2)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $D_{x_2}f(x_1,x_2) \in \mathrm{Isom}(X_2,Y)$ *für alle* $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$.
(2) $(x_1,x_2) \in V_1 \times V_2$ *und* $f(x_1,x_2) = 0 \iff x_1 \in W$ *und* $x_2 = g(x_1)$, *d.h., die Nullstellenmenge* $f^{-1}(0)$ *lässt sich in einer Umgebung von* x^* *als Graph der Funktion* g *darstellen, bzw. die Gleichung* $f(x_1,x_2) = 0$ *kann in einer Umgebung von* x^* *nach* x_2 *aufgelöst werden.*
(3) $Dg(x_1) = -[D_{x_2}f(x_1,g(x_1))]^{-1}D_{x_1}f(x_1,g(x_1))$ *für alle* $x_1 \in W$.

Beweis. 1. Schritt: Reduktion auf Normalform.
Definiere $\tilde{f} : U \to X_2$ durch

$$\tilde{f}(x_1,x_2) = [D_{x_2}f(x_1^*,x_2^*)]^{-1}f(x_1,x_2).$$

Dann ist $\tilde{f} \in C^m(U,X_2)$ und

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_1,x_2) = 0 &\iff f(x_1,x_2) = 0\\ D_{x_2}\tilde{f}(x_1^*,x_2^*) &= I_{X_2}.\end{aligned}$$

Also können wir im Folgenden o.E. annehmen, dass $X_2 = Y$ und $D_{x_2}f(x_1^*,x_2^*) = I_{X_2}$ ist.
2. Schritt: Konstruktion von $V = V_1 \times V_2$.
O.E. können wir annehmen, dass $U = U_1 \times U_2$ ist mit offenen Mengen $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$. Definiere $\varphi : U_1 \times U_2 \to X_1 \times X_2$ durch

$$\varphi(x_1,x_2) = (x_1, f(x_1,x_2)).$$

Dann ist $\varphi \in C^m(U_1 \times U_2, X_1 \times X_2)$ und

$$\begin{aligned}D\varphi(x_1,x_2)(u_1,u_2) &= (u_1, D_{x_1}f(x_1,x_2)u_1 + D_{x_2}f(x_1,x_2)u_2)\\ &\qquad \forall u_1 \in X_1, u_2 \in X_2.\end{aligned}$$

Definiere $B \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, X_1 \times X_2)$ durch

$$B(u_1,u_2) = (u_1, -D_{x_1}f(x_1^*,x_2^*)u_1 + u_2) \quad \forall u_1 \in X_1, u_2 \in X_2.$$

Dann folgt für $u_1 \in X_1$, $u_2 \in X_2$

$$\begin{aligned}B(D\varphi(x_1^*,x_2^*)(u_1,u_2)) &= B(u_1, D_{x_1}f(x_1^*,x_2^*)u_1 + u_2)\\ &= (u_1,u_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}D\varphi(x_1^*,x_2^*)(B(u_1,u_2)) &= D\varphi(x_1^*,x_2^*)(u_1, -D_{x_1}f(x_1^*,x_2^*)u_1 + u_2)\\ &= (u_1,u_2).\end{aligned}$$

Also ist $D\varphi(x_1^*,x_2^*) \in \mathrm{Isom}(X_1 \times X_2, X_1 \times X_2)$ und $B = D\varphi(x_1^*,x_2^*)^{-1}$. Gemäß Satz VII.5.4 gibt es eine Umgebung V von x^* in X und eine Umgebung $\tilde{W}$ von $(x_1^*,0) = \varphi(x_1^*,x_2^*)$ in X, so dass φ ein C^m-Diffeomorphismus von V auf $\tilde{W}$ ist. O.E. können wir annehmen, dass $V = V_1 \times V_2$ ist mit Umgebungen V_1 von x_1^* in X_1 und V_2 von x_2^* in X_2.

3. Schritt: Konstruktion von g und W.
Sei $\psi = (\varphi|_V)^{-1}$. Dann gilt

$$\psi(u_1, u_2) = (x_1, x_2) \iff \varphi(x_1, x_2) = (u_1, u_2).$$

Aus der Konstruktion von φ folgt, dass ψ geschrieben werden kann als

$$\psi(u_1, u_2) = (u_1, h(u_1, u_2))$$

mit $h \in C^m(\tilde{W}, V_2)$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2) \in V \text{ und } f(x_1, x_2) = v \\ \iff &(x_1, x_2) \in \tilde{W} \text{ und } h(x_1, v) = x_2. \end{aligned}$$

Definiere

$$W = \{x_1 \in X_1 : (x_1, 0) \in \tilde{W}\} = \tilde{W} \cap (X_1 \times \{0\})$$

und $g : W \to X_2$ durch

$$g(x_1) = h(x_1, 0).$$

Dann ist W eine Umgebung von x_1^* in X_1 und $g \in C^m(W, X_2)$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2) \in V \text{ und } f(x_1, x_2) = 0 \\ \iff &x_1 \in W \text{ und } x_2 = g(x_1). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (2) gezeigt.
Die Behauptung (1) folgt aus der Darstellung von $D\varphi$ und der Tatsache, dass für alle $(x_1, x_2) \in V$, gilt $D\varphi(x_1, x_2) \in \mathrm{Isom}(X_1 \times X_2, X_1 \times X_2)$.
4. Schritt: Bestimmung der Ableitung von g.
Definiere $F : W \to X_2$ durch

$$F(x_1) = f(x_1, g(x_1)).$$

Dann ist $F \in C^m(W, X_2)$ und für jedes $x_1 \in W$ gilt

$$\begin{aligned} F(x_1) &= 0 \\ 0 &= DF(x_1) \\ &= D_{x_1} f(x_1, g(x_1)) + D_{x_2} f(x_1, g(x_1)) \cdot Dg(x_1). \end{aligned}$$

Da $D_{x_2} f(x_1, g(x_1)) \in \mathrm{Isom}(X_2, X_2)$ ist für jedes $x_1 \in W$, folgt hieraus die Behauptung (3). □

Beispiel VII.5.10. Sei $k \geq 2$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 1.$$

$S^{k-1} = f^{-1}(0)$ heißt $(k-1)$-Sphäre. Offensichtlich ist $S^{k-1} = \partial B(0, 1)$ und $0 \notin S^{k-1}$, $S^{k-1} \neq \emptyset$. Sei $x^* \in S^{k-1}$. Dann ist

$$Df(x^*) = 2(x_1^*, \ldots, x_2^*) \neq 0.$$

Also gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}^k$ mit $x^*_{i_0} \neq 0$. Wir können Satz VII.5.9 anwenden mit

$$\begin{aligned} X &= \mathbb{R}^k, \\ Y &= \mathbb{R}, \\ X_1 &= \{(x_1, \dots, x_{i_0-1}, 0, x_{i_0+1}, \dots, x_k)\} \cong \mathbb{R}^{k-1}, \\ X_2 &= \{(0, \dots, 0, x_{i_0}, 0, \dots, 0) : x_{i_0} \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R} \end{aligned}$$

und erhalten, dass S^{k-1} in einer Umgebung von x^* als Graph einer Funktion

$$g : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$$

in der Form

$$\{(x_1, \dots, x_{i_0-1}, g(x_1, \dots, x_{k-1}), x_{i_0}, \dots, x_{k-1}) : (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}\}$$

dargestellt werden kann.

Wir wollen Satz VII.5.9 auf Funktionen auf dem $\mathbb{R}^k$ mit Werten in $\mathbb{R}^l$ anwenden. Dazu erinnern wir an die Lineare Algebra.

Bemerkung VII.5.11. Sei $\dim X = k$, $\dim Y = l$ und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist

$$\ker(A) = \{x \in X : Ax = 0\}$$

ein Untervektorraum von X und

$$\operatorname{im}(A) = \{y \in Y : \exists\, x \in X : Ax = y\}$$

ein Untervektorraum von Y.

$$\operatorname{Rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(A))$$

heißt der Rang von A. Es gilt

$$\dim X = \dim(\ker(A)) + \operatorname{Rang}(A).$$

Nach Einführen von Basen auf X und Y können wir A mit einer Matrix aus $M_{l,k}(\mathbb{R})$ identifizieren. Rang(A) ist unabhängig von der Wahl der Basen. Es gilt:

> $\operatorname{Rang}(A) = n \iff$ Es gibt eine n-reihige Unterdeterminante, die nicht verschwindet, und jede $(n+1)$-reihige Unterdeterminante verschwindet.

Definition VII.5.12. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^l)$. Dann heißt $x_0 \in U$ regulärer Punkt von f genau dann, wenn $Df(x_0)$ surjektiv ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{Rang}(Df(x_0)) = l$$

ist.

Mit diesen Begriffen lassen sich unsere bisherigen Ergebnisse auch folgendermaßen formulieren:

Bemerkung VII.5.13. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen und $f \in C^m(U, \mathbb{R}^l)$ mit $m \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

(1) Besitzt f einen regulären Punkt, so gilt $k \geq l$.
(2) Sei $k > l$ und x_0 ein regulärer Punkt von f mit $f(x_0) = 0$. Dann besitzt $Df(x_0)$ genau l linear unabhängige Spaltenvektoren. O.E. seien dies die letzten l Spalten, sonst führe eine Koordinatentransformation durch. Dann kann die Lösung des Gleichungssystems
$$f(x) = 0$$
in einer Umgebung von x_0 als C^m-Funktion der ersten $k - l$ Variablen dargestellt werden. D.h., $M = f^{-1}(0)$ kann in einer Umgebung von x_0 als Graph einer C^m-Funktion von $k - l$ Variablen dargestellt werden.
(3) Eine nicht leere Teilmenge M des $\mathbb{R}^k$ heißt n-dimensionale C^m-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$, $0 \leq n < k$, $m \in \mathbb{N}^*$, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ ein $V \subset \mathcal{U}(x_0)$ gibt, so dass $M \cap V$ als Graph einer C^m-Funktion von n-Variablen dargestellt werden kann. Ist speziell $n = k - 1$, so spricht man von einer Hyperfläche im $\mathbb{R}^k$.
(4) S^{k-1} ist eine Hyperfläche im $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$.
(5) Es sei $M = f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und jedes $x \in M$ sei regulärer Punkt von f. Dann ist M eine $k-l$ dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^k$.

Als Anwendung des Satzes über implizite Funktionen betrachten wir die Berechnung von Extrema unter Nebenbedingungen.

Satz VII.5.14. *Sei $U \subset \mathbb{R}^k$, $U \neq \emptyset$, offen, $1 \leq l < k$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $g \in C^1(U, \mathbb{R}^l)$. Für den Punkt $x^* \in U$ gelte*

(a) *$g(x^*) = 0$,*
(b) *x^* ist regulärer Punkt von g,*
(c) *x^* ist ein lokales Extremum von $f|_M$ mit $M = g^{-1}(0)$.*

Dann gibt es l Zahlen $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_l^* \in \mathbb{R}$, die sog. Langrange-Multiplikatoren, *so dass $(x_1^*, \ldots, x_k^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_l^*) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ kritischer Punkt der* Langrange-Funktion
$$\begin{aligned} F :&U \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R} \\ &(x, \lambda) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i g_i(x) \end{aligned}$$
ist.

Beweis. Gemäß Bemerkung VII.5.13 (2) besitzt $Dg(x^*)$ genau l linear unabhängige Spaltenvektoren. O.E. sind dies die letzten l Spalten, sonst führen wir eine Koordinatentransformation durch, die die Spalten von $Dg(x^*)$ geeignet vertauscht. Setze zur Abkürzung $n = k - l$

und $y^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$. Gemäß Satz VII.5.9 gibt es Umgebungen V von x^* in $\mathbb{R}^k$ und W von y^* in $\mathbb{R}^n$ und eine Funktion $\varphi \in C^1(W, \mathbb{R}^l)$, so dass gilt

$$M \cap V = \{(y, \varphi(y)) : y \in W\}.$$

Definiere die Funktion $\tilde{f} : W \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{f}(y) = f(y, \varphi(y)) = f(y_1, \dots, y_n, \varphi_1(y), \dots, \varphi_l(y)).$$

Dann ist $\tilde{f} \in C^1(W, \mathbb{R})$, $\tilde{f} = f|_{M\cap V}$ und y^* ist ein lokales Extremum von $\tilde{f}$. Also ist y^* kritischer Punkt von $\tilde{f}$, d.h., für $1 \le i \le n$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial y_i}\tilde{f}(y^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(y^*, \varphi(y^*)) + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} f(y^*, \varphi(y^*)) \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_j(y^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} f(x^*) \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_j(y^*). \end{aligned}$$

Setze zur Abkürzung

$$A = \Big(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}} g_i(x^*)\Big)_{1\le i,j\le l}.$$

Dann folgt aus Satz VII.5.9 für $1 \le i \le n$, $1 \le j \le l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i}\varphi_j(y^*) &= (-A^{-1} D_{x_1} g(x^*))_{j,i} \\ &= -\sum_{\mu=1}^{l} (A^{-1})_{j\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} g_\mu(x^*). \end{aligned}$$

Damit folgt für $1 \le i \le n$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^*) - \sum_{j=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{l} (A^{-1})_{j\mu} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} f(x^*) \frac{\partial}{\partial x_i} g_\mu(x^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}[f(x^*) + \sum_{\mu=1}^{l} \lambda_\mu^* g_\mu(x^*)] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} F(x^*, \lambda^*) \end{aligned}$$

mit

$$\lambda_\mu^* = -\sum_{j=1}^{l} (A^{-1})_{j\mu} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} f(x^*) \quad 1 \le \mu \le l.$$

Schließlich folgt für $1 \le \nu \le l$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}} F(x^*, \lambda^*) &= \frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}} f(x^*) + \sum_{\mu=1}^{l} \lambda_\mu^* \frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}} g_\mu(x^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}} f(x^*) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} (A^{-1})_{j\mu} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} f(x^*) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}} g_\mu^*}_{=A_{\mu\nu}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{n+\nu}} f(x^*) - \sum_{j=1}^{l} \delta_{j\nu} \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} f(x^*) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel VII.5.15. Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \\ \mathcal{E}_+ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \ge 0\}.\end{aligned}$$

Gesucht sind die Mimima und Maxima der Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit

$$f(x, y, z) = \exp(xyz),$$

sowie die Punkte, an denen diese angenommen werden, auf den Mengen

(a) S^2,
(b) $S^2 \cap \mathcal{E}$,
(c) $S^2 \cap \mathcal{E}_+$.

Da die genannten Mengen kompakt sind, ist die Aufgabe wohlgestellt.
ad (a): Die Lagrange-Funktion lautet

$$F(x, y, z, \lambda) = e^{xyz} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Wir erhalten als Bedingung für einen kritischen Punkt:

$$\begin{aligned}yze^{xyz} + 2\lambda x &= 0 \\ xze^{xyz} + 2\lambda y &= 0 \\ xye^{xyz} + 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten drei Gleichungen mit x bzw. y bzw. z und Addition liefert wegen der vierten Gleichung

$$2\lambda + 3xyze^{xyz} = 0.$$

Einsetzen ergibt

$$e^{xyz} yz(1 - 3x^2) = 0$$

$$\begin{aligned} e^{xyz}xz(1-3y^2) &= 0 \\ e^{xyz}xy(1-3z^2) &= 0, \\ (x,y,z) &\in S^2. \end{aligned}$$

Dies liefert die Lösungen

$$(\pm 1,0,0),\ (0,\pm 1,0),\ (0,0,\pm 1)$$

und

$$(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Definiere

$$\begin{aligned} N &= \{(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0),(0,0,\pm 1)\}, \\ M &= \{(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) : \\ &\qquad \text{- kommt eine gerade Anzahl Male vor}\}, \\ m &= \{(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) : \\ &\qquad \text{- kommt eine ungerade Anzahl Male vor}\}. \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 1 \quad \forall (x,y,z) \in N, \\ f(x,y,z) &= e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \quad \forall (x,y,z) \in M, \\ f(x,y,z) &= e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}} \quad \forall (x,y,z) \in m. \end{aligned}$$

Also gilt

$$e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}} \le f(x,y,z) \le e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \quad \forall (x,y,z) \in S^2$$

und das Maximum und Minimum wird genau in den Punkten von M bzw. m angenommen.

AD (B): In diesem Fall lautet die Lagrange-Funktion

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = e^{xyz} + \lambda(x^2+y^2+z^2-1) + \mu(x+y+z).$$

Die Bedingungen für einen kritischen Punkt lauten:

$$\begin{aligned} yze^{xyz} + 2\lambda x + \mu &= 0 \\ xze^{xyz} + 2\lambda y + \mu &= 0 \\ xye^{xyz} + 2\lambda z + \mu &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \\ x+y+z &= 0. \end{aligned}$$

Wie in Teil (A) folgt wegen der letzten beiden Gleichungen

$$2\lambda + 3xyze^{xyz} = 0.$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}
yze^{xyz}(1-3x^2)+\mu &= 0\\
xze^{xyz}(1-3y^2)+\mu &= 0\\
xye^{xyz}(1-3z^2)+\mu &= 0\\
(x,y,z) &\in S^2\cap\mathcal{E}.
\end{aligned}$$

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und dritten liefert

$$\begin{aligned}
e^{xyz}z(y-x)(1+3xy) &= 0\\
e^{xyz}y(z-x)(1+3xz) &= 0.
\end{aligned}$$

Wobei die zweite der obigen Gleichungen aus der ersten durch Vertauschen von y und z hervorgeht.
Wie man sich leicht überlegt, führen die Annahmen

$$z=0 \quad \text{oder} \quad y=0 \quad \text{oder} \quad x=0$$

zu einem Widerspruch zu der Bedingung $(x,y,z)\in S^2\cap\mathcal{E}$.
Aus $x=y$ und $(x,y,z)\in S^2\cap\mathcal{E}$ folgt

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Dies ist eine Lösung. Analog erhält man die Lösungen

$$\begin{gathered}
(\mp\frac{2}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}})\\
(\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\mp\frac{2}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}})
\end{gathered}$$

und überzeugt sich, dass dies alle Lösungen sind. Setze

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= \{(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}),(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}),(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\}\\
\tilde{m} &= \{(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}),(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\}.
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= e^{\frac{1}{3\sqrt{6}}} \quad \forall(x,y,z)\in\tilde{M}\\
f(x,y,z) &= e^{-\frac{1}{3\sqrt{6}}} \quad \forall(x,y,z)\in\tilde{m}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$e^{-\frac{1}{3\sqrt{6}}}\le f(x,y,z)\le e^{\frac{1}{3\sqrt{6}}} \quad \forall(x,y,z)\in S^2\cap\mathcal{E}$$

und das Maximum und Minimum wird genau in den Punkten von $\tilde{M}$ bzw. $\tilde{m}$ angenommen.
AD (C): Sei $(x,y,z)\in S^2\cap\mathcal{E}_+$ ein lokales Extremum von f. Dann gilt entweder $x+y+z=0$ oder $x+y+z>0$. Im ersten Fall ist (x,y,z) auch ein Extremum von f auf $S^2\cap\mathcal{E}$; im zweiten Fall ist es auch ein

Extremum von f auf S^2.
Wegen

$$M \cap S^2 \cap \mathcal{E}_+ = \{(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$$

$$m \cap S^2 \cap \mathcal{E}_+ = \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$$

folgt aus Teil (A) und (B)

$$\max_{(x,y,z)\in S^2\cap\mathcal{E}_+} f(x,y,z) = \max\{e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}, e^{\frac{1}{3\sqrt{6}}}\} = e^{\frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

und

$$\min_{(x,y,z)\in S^2\cap\mathcal{E}_+} f(x,y,z) = \min\{e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}}, e^{-\frac{1}{3\sqrt{6}}}\} = e^{-\frac{1}{3\sqrt{3}}}$$

und das Maximum und Minimum wird in den Punkten von $M \cap S^2 \cap \mathcal{E}_+$ bzw. $m \cap S^2 \cap \mathcal{E}_+$ angenommen.

KAPITEL VIII

Kurven und Kurvenintegrale

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht das Stammfunktionenproblem für Funktionen mehrerer Veränderlicher, d.h. die Frage, wann es zu einem gegebenen Vektorfeld $f \in C(U, \mathbb{R}^n), U \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ gibt mit $f = DF$. Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst Kurven im $\mathbb{R}^n$ und Integrale von Vektorfeldern entlang solcher Kurven.
Anschließend wenden wir die gewonnenen Ergebnisse auf den Spezialfall komplexer Funktionen an und beweisen die zentralen Sätze der Funktionentheorie (Cauchyscher Integralsatz, Satz von Liouville, Residuensatz usw.).

VIII.1. Kurven und ihre Länge

In diesem Paragraphen sei stets $I = [a, b]$ ein kompaktes, perfektes Intervall, $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|$ bezeichne stets die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

Wir knüpfen an Definition III.5.8 (S. 91, Analysis I) an.

Definition VIII.1.1. Eine Funktion $\gamma \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$ heißt C^m-Weg in $\mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$. Der Weg heißt geschlossen, wenn gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$. Die Menge

$$\mathrm{Spur}(\gamma) = \gamma(I)$$

heißt die Spur des Weges γ.

Bemerkung VIII.1.2. Verschiedene Wege können die gleiche Spur haben. Betrachte z.B. $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$$
$$\gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

Dann ist

$$\mathrm{Spur}(\gamma_1) = \mathrm{Spur}(\gamma_2) = S^1.$$

Die Spur des Weges γ sei ein Polygonzug im $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es offensichtlich Zahlen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$, so dass $\gamma([a_{i-1}, a_i])$ für alle $1 \le i \le k$ eine Strecke ist. Die Länge des Polygonzuges ist offensichtlich $\sum_{i=1}^{k} \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\|$. Anschaulich können wir die Spur eines beliebigen Weges beliebig gut durch einen Polygonzug approximieren. Dies führt auf folgende Definition.

Definition VIII.1.3. Ein Weg $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^n)$ heißt rektifizierbar, wenn gilt

$$L(\gamma) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{k} \|\gamma(a_{i-1}) - \gamma(a_i)\| : \mathcal{Z} = (a_0, \ldots, a_k) \text{ Zerlegung von } I\Big\}$$
$$< \infty.$$

In diesem Fall heißt $L(\gamma)$ die Länge von γ.

Bemerkung VIII.1.4. Es gibt stetige, nicht rektifizierbare Wege. Definiere z.B. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} t\cos\frac{\pi}{2t} & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\gamma \in C([0,1], \mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei $\mathcal{Z}_k = (t_{0,k}, \ldots, t_{4k,k})$ mit $t_{0,k} = 0$ und

$$t_{j,k} = \frac{1}{4k+1-j} \qquad 1 \leq j \leq 4k.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \gamma(t_{j,k}) &= t_{j,k}\cos\frac{\pi}{2}(4k+1-j) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq j \leq 4k, j \text{ gerade}, \\ (-1)^l t_{j,k} & \text{für } 1 \leq j \leq 4k, j = 2l+1. \end{cases} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{4k} \|\gamma(t_{j-1,k}) - \gamma(t_{j,k})\| &= 2\sum_{l=0}^{2k-1} \|\gamma(t_{2j+1,k})\| \\ &= 2\sum_{l=0}^{2k} \frac{1}{4k-2l} \\ &= \sum_{m=1}^{2k} \frac{1}{m} \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \end{aligned}$$

Satz VIII.1.5. *Sei $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Dann ist γ rektifizierbar und*

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\mathcal{Z} = (a_0, \dots, a_k)$ eine Zerlegung von I. Dann folgt mit Satz VI.2.3 (S. 15)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^{k} \| \int_{a_{i-1}}^{a_i} \gamma'(t) dt\| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \|\gamma'(t)\| dt \\
&= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{Z}$ beliebig war, folgt, dass γ rektifizierbar ist und dass gilt

$$L(\gamma) \le \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Da I kompakt ist, ist γ' gleichmäßig stetig auf I. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}^*$ mit

$$\|\gamma'(t) - \gamma'(s)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall t, s \in I \text{ mit } |t - s| \le \frac{b-a}{k}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{a+\frac{j-1}{k}(b-a)}^{a+\frac{j}{k}(b-a)} \|\gamma'(t)\| dt \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \Big\{ \int_{a+\frac{j-1}{k}(b-a)}^{a+\frac{j}{k}(b-a)} \|\gamma'(t) - \gamma'(a + \frac{2j-1}{2k}(b-a))\| dt \\
&\qquad + \|\gamma(a + \frac{j}{k}(b-a)) - \gamma(a + \frac{j-1}{k}(b-a)) \\
&\qquad\qquad - \gamma'(a + \frac{2j-1}{2k}(b-a)) \cdot \frac{b-a}{k}\| \\
&\qquad + \|\gamma(a + \frac{j-1}{k}(b-a)) - \gamma(a + \frac{j}{k}(b-a))\| \Big\} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \|\gamma(a + \frac{j-1}{k}(b-a)) - \gamma(a + \frac{j}{k}(b-a))\| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \Big\{ \int_{a+\frac{j-1}{k}(b-a)}^{a+\frac{j}{k}(b-a)} \|\gamma'(t) - \gamma'(a + \frac{2j-1}{2k}(b-a))\| dt \\
&\qquad + \| \int_{a+\frac{j-1}{k}(b-a)}^{a+\frac{j}{k}(b-a)} [\gamma'(s) - \gamma'(a + \frac{2j-1}{2k}(b-a))] ds\| \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq L(\gamma) + 2(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\\&= L(\gamma)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, folgt die Behauptung. □

Anschaulich stellt die Spur eines Weges eine „Kurve" im $\mathbb{R}^n$ dar. Wie wir gesehen haben, kann dabei eine „Kurve" durch verschiedene Wege beschrieben werden. Wir interessieren uns im Folgenden für Eigenschaften, die von der speziellen Darstellung der „Kurve" unabhängig sind. Dazu benötigen wir folgende Definition.

Definition VIII.1.6. Seien I und $\widetilde{I}$ kompakte, perfekte Intervalle und $\gamma \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\gamma} \in C^m(\widetilde{I}, \mathbb{R}^n)$ zwei C^m-Wege. Dann heißt $\widetilde{\gamma}$ eine C^m-Umparametrisierung von γ, kurz $\widetilde{\gamma} \sim_m \gamma$, wenn es einen streng monoton wachsenden C^m-Diffeomorphismus φ von I auf $\widetilde{I}$ gibt mit

$$\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi.$$

Bemerkung VIII.1.7. (1) Ist $\widetilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ, so haben beide Wege die gleichen Anfangs- und Endpunkte und die gleiche Spur.
(2) $\sim_m$ ist eine Äquivalenzrelation.
(3) Gilt $\gamma \sim_m \widetilde{\gamma}$, so gilt auch $\gamma \sim_k \widetilde{\gamma}$ für alle $0 \leq k \leq m$.

Satz VIII.1.8. *Seien I und $\widetilde{I}$ kompakte, perfekte Intervalle und $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\gamma} \in C(\widetilde{I}, \mathbb{R}^n)$ zwei stetige Wege mit $\gamma \sim_0 \widetilde{\gamma}$. Dann gilt*

$$L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma}).$$

Beweis. Sei $I = [a, b]$, $\widetilde{I} = [\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ und $\mathcal{Z} = (a_0, \ldots, a_k)$ eine Zerlegung von I. Dann ist $\widetilde{\mathcal{Z}} = (\widetilde{a}_0, \ldots, \widetilde{a}_k)$ mit $\widetilde{a}_j = \varphi(a_j)$ eine Zerlegung von $\widetilde{I}$, wobei $\varphi \in C(I, \widetilde{I})$ der Homöomorphismus aus der Definition von $\gamma \sim_0 \widetilde{\gamma}$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \|\gamma(a_i) - \gamma(a_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^{k} \|\widetilde{\gamma}(\varphi(a_i)) - \widetilde{\gamma}(\varphi(a_{i-1}))\|\\&= \sum_{i=1}^{k} \|\widetilde{\gamma}(\widetilde{a}_i) - \widetilde{\gamma}(\widetilde{a}_{i-1})\|\\&\leq L(\widetilde{\gamma})\end{aligned}$$

und somit

$$L(\gamma) \leq L(\widetilde{\gamma}).$$

Vertauschen von γ und $\widetilde{\gamma}$ liefert die Behauptung. □

Definition VIII.1.9. Unter einer C^m–Kurve Γ in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir eine Äquivalenzklasse von C^m-Wegen bzgl. $\sim_m$. Wir schreiben

$\Gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$, wenn γ ein Element der zu Γ gehörenden Äquivalenzklasse ist. Die Kurve Γ heißt REKTIFIZIERBAR, wenn ein (und damit alle) Element γ aus der zugehörigen Äquivalenzklasse rektifizierbar ist. Die Zahl

$$L(\Gamma) = L(\gamma)$$

heißt dann die BOGENLÄNGE oder kurz LÄNGE von Γ.

BEMERKUNG VIII.1.10. (1) Wegen Satz VIII.1.8 ist die Länge einer rektifizierbaren Kurve wohldefiniert.
(2) Wegen Satz VIII.1.8 und Bemerkung VIII.1.4 gibt es stetige, nicht rektifizierbare Kurven (vgl. Beispiel VIII.1.12 (7)).
(3) Wegen Bemerkung VIII.1.7 hat jede Kurve eine eindeutige Orientierung, die durch die Orientierung der Wege aus der entsprechenden Äquivalenzklasse festgelegt ist.

Aus Satz VIII.1.5 folgt unmittelbar:

SATZ VIII.1.11. *Jede C^1-Kurve ist rektifizierbar.*

BEISPIEL VIII.1.12. (1) (GRAPH EINER C^1-FUNKTION) Sei $f \in C^1(I, \mathbb{R})$ und Γ der Graph von f in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $\gamma : t \mapsto (t, f(t))$ eine Parametrisierung von Γ und

$$L(\Gamma) = L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

(2) (EBENE KURVE IN POLARKOORDINATENDARSTELLUNG) Betrachte $\Gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$ mit $r \in C^1(I, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\|\gamma'(t)\| &= \|(r'(t)\cos t - r(t)\sin t, r'(t)\sin t + r(t)\cos t)\| \\ &= \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}\end{aligned}$$

und

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}\, dt.$$

(3) (KREISLINIE MIT RADIUS R) Dies ist ein Spezialfall von (2) mit $I = [0, 2\pi]$ und $r(t) = R$ für alle $t \in I$. Es ist

$$L(\Gamma) = 2\pi R.$$

(4) (ARCHIMEDISCHE SPIRALE) Dies ist ein Spezialfall von (2) mit $I = [0, b]$, $b > 0$, und $r(t) = t\rho$ für alle $t \in I$ mit $\rho > 0$ fest. Es ist

$$\begin{aligned}L(\Gamma) &= \int_0^b \sqrt{\rho^2 + \rho^2 t^2}\, dt \\ &= \rho \int_0^b \sqrt{1 + t^2}\, dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{2}[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})]_{t=0}^{t=b} \\
&= \frac{\rho}{2}[b\sqrt{1+b^2} + \ln(b+\sqrt{1+b^2})] \\
&\underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}
$$

(5) (LOGARITHMISCHE SPIRALE) Dies ist ein Spezialfall von (2) mit $I = [a, b]$ und $r(t) = \rho e^{\lambda t}$ für alle $t \in I$ mit $\rho > 0$, $\lambda > 0$ fest. Es ist

$$
\begin{aligned}
L(\Gamma) &= \int_a^b \sqrt{\rho^2 e^{2\lambda t} + \rho^2\lambda^2 e^{2\lambda t}}\, dt \\
&= \rho\sqrt{1+\lambda^2} \int_a^b e^{\lambda t} dt \\
&= \frac{\rho}{\lambda}\sqrt{1+\lambda^2}[e^{\lambda b} - e^{\lambda a}] \\
&\underset{a\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\rho}{\lambda}\sqrt{1+\lambda^2} e^{\lambda b}.
\end{aligned}
$$

(6) (SCHRAUBENLINIE) Betrachte $\Gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, ht)$ mit $R > 0, h > 0$. R heißt Radius; h heißt Ganghöhe. Es ist

$$
\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \|(-R\sin t, R\cos t, h)\| \\
&= \sqrt{R^2 + h^2}
\end{aligned}
$$

und

$$
L(\Gamma) = (b-a)\sqrt{R^2+h^2}.
$$

(7) (NICHT REKTIFIZIERBARE STETIGE KURVE) Betrachte $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \gamma(t) = (t\cos\frac{1}{t}, t\sin\frac{1}{t})$. Für $t > 0$ ist

$$
\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \|(\cos\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}, \sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t})\| \\
&= \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}.
\end{aligned}
$$

Für $0 < a < 1$ folgt

$$
\begin{aligned}
\int_a^1 \|\gamma'(t)\| &= \int_a^1 \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\, dt \\
&\geq \int_a^1 \frac{1}{t} dt \\
&= -\ln(a) \\
&\underset{a\to0+}{\longrightarrow} +\infty.
\end{aligned}
$$

VIII.2. Tangente und Krümmung

In diesem Paragraphen sei wieder I ein kompaktes, perfektes Intervall, $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|$ bezeichne wieder die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

Wir wollen den Begriff des Tangentenvektors einführen. Dazu benötigen wir:

Definition VIII.2.1. Sei $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ein C^1-Weg. Dann heißt $t_0 \in I$ ein regulärer Punkt von γ, wenn gilt $\gamma'(t_0) \neq 0$. γ heißt regulärer Weg, wenn jedes $t \in I$ regulärer Punkt von γ ist. Eine C^1-Kurve Γ heißt regulär, wenn es in der entsprechenden Äquivalenzklasse einen regulären Weg gibt.

C^1-Umparametrisierungen beeinflussen nicht die Regularität eines Weges. Anders verhält es sich bei C^0-Umparametrisierungen. Dies zeigen die folgende Bemerkung und das folgende Beispiel.

Bemerkung VIII.2.2. Seien I und $\widetilde{I}$ kompakte, perfekte Intervalle und $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\gamma} \in C^1(\widetilde{I}, \mathbb{R}^n)$ Wege mit $\gamma \sim_1 \widetilde{\gamma}$. Dann ist γ genau dann regulär, wenn $\widetilde{\gamma}$ regulär ist.

Beweis. Sei $\varphi \in C^1(I, \widetilde{I})$ ein streng wachsender C^1-Diffeomorphismus mit $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$. Dann ist

$$\gamma'(t) = \widetilde{\gamma}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \forall t \in I.$$

Wegen $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in I$ folgt hieraus die Behauptung. □

Beispiel VIII.2.3. Die Wege $\gamma \in C^1([-1,1], \mathbb{R}^2)$ mit

$$\gamma(t) = (t^{\frac{4}{3}}, t)$$

und $\widetilde{\gamma} \in C^1([-1,1], \mathbb{R}^2)$ mit

$$\widetilde{\gamma}(t) = (t^4, t^3)$$

haben die gleichen Anfangs- und Endpunkte und die gleiche Spur. γ ist regulär, $\widetilde{\gamma}$ ist nicht regulär. Es ist $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$ mit

$$\varphi : [-1,1] \to [-1,1] \quad , \quad t \mapsto \sqrt[3]{t}.$$

φ ist ein Homöomorphismus, aber kein C^1-Diffeomorphismus.

Definition VIII.2.4. Sei $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ ein regulärer Weg. Dann heißt der Vektor

$$e_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \forall t \in I$$

der Tangenteneinheitsvektor an γ im Punkt $\gamma(t)$.

Bemerkung VIII.2.5. (1) Sind I, $\widetilde{I}$ kompakte, perfekte Intervalle, $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\gamma} \in C^1(\widetilde{I},\mathbb{R}^n)$ regulär und $\varphi \in C^1(I,\widetilde{I})$ ein streng wachsender C^1-Diffeomorphismus mit $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$, so ist

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\ &= \frac{\widetilde{\gamma}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)}{\|\widetilde{\gamma}'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\|} \\ &= \frac{\widetilde{\gamma}'(\varphi(t))}{\|\widetilde{\gamma}'(\varphi(t))\|} \\ &= \widetilde{e}_1(\varphi(t)) \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Der Tangenteneinheitsvektor ist also invariant unter Parameterwechseln.
(2) Es ist

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\|\gamma'(t_0)\|e_1(t_0) + hr(t_0,h) \quad \forall t_0 \in I, h \in \mathbb{R}$$

mit

$$\lim_{h\to 0} \|r(t_0,h)\| = 0.$$

Der Weg γ wird also im Punkt $\gamma(t_0)$ in erster Ordnung von der Tangente

$$s \mapsto \gamma(t_0) + se_1(t_0)$$

approximiert.

Definition VIII.2.6. $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ heißt nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn gilt

$$\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \in I.$$

Wir kennzeichnen die Bogenlänge stets durch s und die Ableitung nach der Bogenlänge durch $\dot{\gamma}$.

Bemerkung VIII.2.7. (1) Ist γ nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist γ regulär.
(2) Jede reguläre Kurve Γ kann nach der Bogenlänge parametrisiert werden.

Beweis. ad (1): Ist klar.
ad (2): Sei $\gamma \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ eine reguläre Parametrisierung von Γ. Sei $L = L(\gamma)$ und $\widetilde{I} = [0,L]$. Definiere $\varphi : I \to \widetilde{I}$ durch

$$\varphi(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau.$$

Dann ist φ ein streng wachsender C^1-Diffeomorphismus. Für $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1} \in C^1(\widetilde{I},\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\dot{\widetilde{\gamma}}(s) = \frac{d}{ds}\widetilde{\gamma}(s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma'(\varphi^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \\
&= \frac{\gamma'(\varphi^{-1}(s))}{\|\gamma'(\varphi^{-1}(s))\|} \quad \forall s \in \widetilde{I}
\end{aligned}
$$

und somit

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}(s)\| = 1 \quad \forall s \in \tilde{I}.$$

□

Satz VIII.2.8. *Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gilt*

$$\langle \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle = 0 \quad \forall s \in I,$$

wobei

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

das euklidische Skalarprodukt bezeichnet.

Beweis. Für alle $s \in I$ gilt

$$\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}_i(s)^2 = 1.$$

Durch Differentiation folgt

$$0 = \frac{d}{ds}\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = 2\sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}_i(s)\ddot{\gamma}_i(s) = 2\langle \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle.$$

□

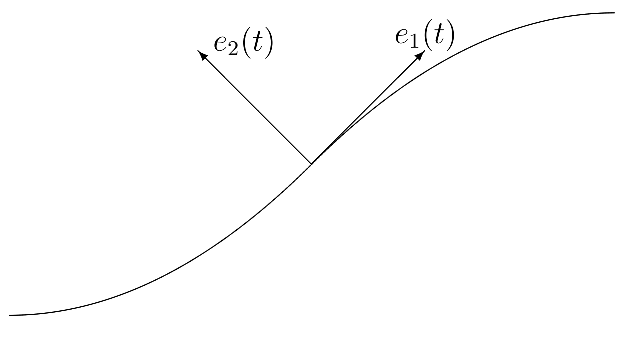

Abbildung VIII.2.1. Vektoren $e_1(t)$ und $e_2(t)$

Für den Rest des Paragraphen betrachten wir ebene Kurven, d.h., den Fall $n = 2$ (vgl. Abbildung VIII.2.1). Zu $e_1(t)$ gibt es dann einen eindeutig bestimmten Vektor $e_2(t)$ mit den Eigenschaften

$$
\begin{aligned}
\|e_2(t)\| &= 1, \\
\langle e_1(t), e_2(t) \rangle &= 0, \qquad (1) \\
\det[e_1(t), e_2(t)] &= 1.
\end{aligned}
$$

Definition VIII.2.9. Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Sei $e_1(s)$ der Tangenteneinheitsvektor zu γ und $e_2(s)$ der durch Gleichung (1) bestimmte Vektor. Dann ist

$$\ddot{\gamma}(s) = \kappa(s) e_2(s) \quad \forall s \in I.$$

Die Größe $\kappa(s)$ heißt die Krümmung der Kurve im Punkt $\gamma(s)$.

Bemerkung VIII.2.10. Ist $\kappa(s) > 0$ bzw. $\kappa(s) < 0$, so dreht sich der Tangenteneinheitsvektor $e_1(s)$ bei Durchlaufen der Kurve in mathematisch positiver Richtung bzw. mathematisch negativer Richtung.

Der folgende Satz beschreibt einen fundamentalen Zusammenhang zwischen den Vektoren e_1 und e_2 und erlaubt die Berechnung der Krümmung von Wegen, die nicht nach der Bogenlänge parametrisiert sind.

Satz VIII.2.11. (1) *Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten die* Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \kappa e_2, \\ \dot{e}_2 &= -\kappa e_1. \end{aligned}$$

(2) *Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ regulär. Dann gilt für die Krümmung*

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}} \quad \forall t \in I,$$

wobei $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ für alle $t \in I$ ist.

Beweis. ad (1): Die erste Formel folgt direkt aus der Definition der Krümmung. Aus Gleichung (1) folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_2(s), \dot{e}_2(s) \rangle \quad \forall s \in I \\ \Longrightarrow \quad \dot{e}_2(s) &= \alpha(s) e_1(s) \quad \forall s \in I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \dot{e}_1(s), e_2(s) \rangle + \langle e_1(s), \dot{e}_2(s) \rangle \\ &= \langle \kappa(s) e_2(s), e_2(s) \rangle + \langle e_1(s), \alpha(s) e_1(s) \rangle \\ &= \kappa(s) + \alpha(s). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die zweite Formel.
ad (2): Seien $\widetilde{\gamma}$ und φ wie im Beweis von Bemerkung VIII.2.7 (2). Setze $\psi = \varphi^{-1}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{\gamma}}(s) &= \gamma'(\psi(s)) \cdot \dot{\psi}(s) \\ \ddot{\widetilde{\gamma}}(s) &= \gamma''(\psi(s)) \cdot \dot{\psi}(s)^2 + \gamma'(\psi(s)) \ddot{\psi}(s) \\ \dot{\psi}(s) &= \|\gamma'(\psi(s))\|^{-1}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Krümmung und aus Gleichung (1) folgt

$$\kappa(s) = \det(\dot{\widetilde{\gamma}}(s), \ddot{\widetilde{\gamma}}(s))$$

$$\begin{aligned}
&= \dot\psi(s)^3 \det(\gamma'(\psi(s)), \gamma''(\psi(s))) \\
&\quad + \dot\psi(s)\ddot\psi(s) \det(\gamma'(\psi(s)), \gamma'(\psi(s))) \\
&= \dot\psi(s)^3 \det(\gamma'(\psi(s)), \gamma''(\psi(s))). \quad \forall s \in \widetilde{I}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \|\gamma'(t)\|^{-3} \det[\gamma'(t), \gamma''(t)] \\
&= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}} \quad \forall t \in I.
\end{aligned}$$

□

Beispiel VIII.2.12. (1) (Graph einer C^2-Funktion) Sei $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ und Γ der Graph von f. Die Krümmung ist gemäß Satz VIII.2.11 (2)

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{[1 + f'(t)^2]^{3/2}}.$$

(2) (Ebene Kurve in Polarkoordinatendarstellung) Für die Krümmung ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{r(t)^2 + 2r'(t)^2 - r(t)r''(t)}{[r(t)^2 + r'(t)^2]^{3/2}}.$$

(3) (Kreislinie mit Radius R) Aus (2) folgt mit $r(t) = R$

$$\kappa = \frac{1}{R}.$$

(4) (Archimedische Spirale) Aus (2) folgt mit $r(t) = \rho t$

$$\kappa(t) = \frac{2 + t^2}{\rho(1 + t^2)^{3/2}} \quad \forall t \in [0, b].$$

(5) (Logarithmische Spirale) Aus (2) folgt mit $r(t) = \rho e^{\lambda t}$

$$\kappa(t) = \frac{1}{\rho e^{\lambda t}\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Der folgende Satz charakterisiert die ebenen Kurven konstanter Krümmung.

Satz VIII.2.13. *Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R})$ regulär. Dann gilt:*

(1) *γ ist die Parametrisierung einer Geraden genau dann, wenn gilt*

$$\kappa(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

(2) *γ ist die Parametrisierung eines Kreisbogens, d.h. es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und ein $R \in \mathbb{R}_+^*$ mit*

$$\|\gamma(t) - x_0\| = R \quad \forall t \in I$$

genau dann, wenn gilt

$$|\kappa(t)| = \frac{1}{R} \quad \forall t \in I.$$

Beweis. ad (1): O.E. ist γ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann folgt

$$\begin{aligned} &\kappa(s) = 0 \quad \forall s \in I \\ \iff &\ddot{\gamma}(s) = 0 \quad \forall s \in I \\ \iff &\exists b \in \mathbb{R}^2 : \|b\| = 1 \text{ und } \dot{\gamma}(s) = b \quad \forall s \in I \\ \iff &\exists a, b \in \mathbb{R}^2 : \|b\| = 1 \text{ und } \gamma(s) = sb + a \quad \forall s \in I. \end{aligned}$$

ad (2): O.E. ist γ wieder nach der Bogenlänge parametrisiert.
„$\Longrightarrow$“: Aus $\|\gamma(s) - x_0\|^2 = R^2$ für alle $s \in I$ folgt

$$\langle \gamma(s) - x_0, \dot{\gamma}(s) \rangle = 0$$

Also ist

$$\gamma(s) - x_0 = \varepsilon R e_2(s) \quad \text{mit } \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Aus den Frenetschen Formeln folgt

$$e_1(s) = \dot{\gamma}(s) = \varepsilon R \dot{e}_2(s) = -\varepsilon R \kappa e_1(s)$$

und somit

$$\kappa(s) = \frac{-\varepsilon}{R} \quad \forall s \in I.$$

„$\Longleftarrow$“: Sei $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, so dass gilt

$$\kappa(s) = \frac{\varepsilon}{R} \quad \forall s \in I.$$

Aus den Frenetschen Formeln folgt

$$\begin{aligned} &(\gamma + \varepsilon R e_2)^{\cdot} = e_1 + \varepsilon R \dot{e}_2 = 0 \quad \forall s \in I \\ \iff &\gamma + \varepsilon R e_2 = x_0 \quad \text{für ein } x_0 \in \mathbb{R}^2 \\ \iff &\|\gamma - x_0\| = |\varepsilon| R \|e_2\| = R \quad \forall s \in I. \end{aligned}$$

□

VIII.3. Kurvenintegrale

In diesem Paragraphen wenden wir uns dem Stammfunktionenproblem für Funktionen mehrerer Veränderlicher zu. Dabei bezeichnet $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}^*$, stets ein Gebiet, $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes, perfektes Intervall sowie $\|\cdot\|$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die euklidische Norm bzw. das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Definition VIII.3.1. Seien $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\gamma(I) \subset G$. Dann ist das Wegintegral von f längs γ definiert durch

$$\int_\gamma f dx = \int_a^b \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Bemerkung VIII.3.2. (1) Physikalisch beschreibt $\displaystyle\int_\gamma f dx$ die Arbeit, die aufgebracht werden muss, um einen Körper in dem Kraftfeld f längs des Weges γ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ zu bewegen.
(2) Seien $I, \widetilde{I}$ kompakte perfekte Intervalle, $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{\gamma} \in C(\widetilde{I}, \mathbb{R}^n)$ zwei Wege mit $\gamma(I) \subset G$, $\widetilde{\gamma}(\widetilde{I}) \subset G$ und $\varphi \in C^1(I, \widetilde{I})$ ein C^1-Diffeomorphismus mit $\gamma = \widetilde{\gamma} \circ \varphi$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dx &= \int_a^b \langle f(\widetilde{\gamma} \circ \varphi(t)), \widetilde{\gamma}' \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t)\rangle dt \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \langle f \circ \widetilde{\gamma}(s), \widetilde{\gamma}'(s)\rangle ds \\
&= \int_{\widetilde{\gamma}} f dx.
\end{aligned}$$

D.h., das Wegintegral hängt nicht von der Parametrisierung des Weges ab.

Wegen Bemerkung VIII.3.2 (2) ist folgende Definition sinnvoll.

Definition VIII.3.3. Sei Γ eine C^1-Kurve, die ganz in G verläuft, und $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Dann ist das Kurvenintegral von f längs Γ definiert durch

$$\int_\Gamma f dx = \int_\gamma f dx,$$

wobei γ ein C^1-Weg aus der zu Γ gehörenden Äquivalenzklasse ist.

Beispiel VIII.3.4. (1) Sei $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $\Gamma = \partial B(0, R)$ mit $R \in \mathbb{R}_+^*$ und

$$f(x, y) = (-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}).$$

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$t \mapsto (R\cos t, R\sin t).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f dx &= \int_\gamma f dx \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-\frac{1}{R}\sin t, \frac{1}{R}\cos t), (-R\sin t, R\cos t)\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

(2) Sei $f = DF$ mit $F \in C^1(G,\mathbb{R})$ und γ ein beliebiger C^1-Weg, der ganz in G verläuft. Dann ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f dx &= \int_a^b \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n D_i F(\gamma(t))\gamma_i'(t) dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

D.h., $\displaystyle\int_\gamma f dx$ hängt nur von dem Anfangs- und Endpunkt von γ ab. Insbesondere ist $\displaystyle\int_\gamma f dx = 0$ für jeden geschlossenen C^1-Weg, der ganz in G verläuft.

Für unsere Zwecke müssen wir den Begriff des Kurvenintegrals noch erweitern, so dass wir z.B. auch entlang von Polygonzügen integrieren können.

Definition VIII.3.5. (1) Sei $\gamma \in C(I,\mathbb{R}^n)$. Dann heißt $\gamma^- \in C(I,\mathbb{R}^n)$ mit

$$\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t) \quad \forall t \in I$$

der zu γ inverse Weg. γ stellt die Kurve Γ dar, γ^- die zu Γ inverse Kurve $-\Gamma$.
(2) Seien $\gamma_i \in C(I_i,\mathbb{R}^n)$, $I_i = [a_i, b_i], i = 1, 2$, mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Dann heißt $\gamma_1 \oplus \gamma_2 \in C([0,1],\mathbb{R}^n)$ mit

$$(\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t) = \begin{cases}\gamma_1(a_1 + 2t(b_1 - a_1)) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(a_2 + (2t-1)(b_2 - a_2)) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1,\end{cases}$$

der zugehörige Summenweg. Stellen γ_1, γ_2 die Kurven Γ_1 und Γ_2 dar, so stellt $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ die Kurve $\Gamma_1 + \Gamma_2$ dar.
(3) $\gamma \in C(I,\mathbb{R}^n)$ heißt stückweise m-mal stetig differenzierbar, wenn es Zahlen $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ gibt mit

$$\gamma_i = \gamma|_{[a_{i-1},a_i]} \in C^m([a_{i-1}, a_i],\mathbb{R}^n) \quad \forall 1 \le i \le k.$$

Dann ist $\gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_k$. Die durch γ dargestellte Kurve Γ heißt entsprechend stückweise m-mal stetig differenzierbar.
(4) Sei $f \in C(G,\mathbb{R}^n)$ und $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_k$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, die ganz in G verläuft. Dann ist das Kurvenintegral von f längs Γ definiert durch

$$\int_\Gamma f dx = \int_{\Gamma_1} f dx + \ldots + \int_{\Gamma_k} f dx.$$

Das Kurvenintegral hat folgende Eigenschaften:

Satz VIII.3.6. *Seien* $f, f_1, f_2 \in C(G, \mathbb{R}^n)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *und* $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ *stückweise stetig differenzierbare Kurven, die ganz in* G *verlaufen. Dann gilt*

(Linearität) $$\int_\Gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_\Gamma f_1 dx + \lambda_2 \int_\Gamma f_2 dx$$

(Additivität) $$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} f dx = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f dx$$

(Orientierung) $$\int_\Gamma f dx = - \int_{-\Gamma} f dx$$

$$|\int_\Gamma f dx| \leq \max_{x \in \Gamma} \|f(x)\| L(\Gamma).$$

Beweis. ad (1), (2): Folgen direkt aus der Definition des Kurvenintegrals und den Eigenschaften des (Riemann-) Integrals.
ad (3): O.E. ist Γ eine C^1-Kurve und γ ein C^1-Weg aus der entsprechenden Äquivalenzklasse. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f dx &= \int_\gamma f dx \\
&= \int_a^b \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= - \int_a^b \langle f \circ \gamma^-(a+b-t), \gamma^{-'}(a+b-t) \rangle dt \\
&= \int_b^a \langle f \circ \gamma^-(s), \gamma^{-'}(s) \rangle ds \quad (s = a+b-t) \\
&= - \int_a^b \langle f \circ \gamma^-(s), \gamma^{-'}(s) \rangle ds \\
&= - \int_{\gamma^-} f dx \\
&= - \int_{-\Gamma} f dx.
\end{aligned}$$

ad (4): O.E. wird Γ von dem C^1-Weg γ dargestellt, sonst gehen wir zu den Teilwegen über. Dann folgt

$$\begin{aligned}
|\int_\Gamma f dx| &= |\int_\gamma f dx| \\
&\leq \int_a^b \|f \circ \gamma(t)\| \|\gamma'(t)\| dt \\
&\leq L(\gamma) \max_{x \in \Gamma} \|f(x)\|.
\end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zu der eigentlichen Fragestellung dieses Paragraphen: Wann gibt es zu gegebenem $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ein $F \in C^1(G, \mathbb{R})$ mit $f = DF$?

Definition VIII.3.7. Eine Funktion $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ heißt Gradientenfeld, wenn es ein $F \in C^1(G, \mathbb{R})$ gibt mit

$$f = DF.$$

Jedes solche F heißt eine Stammfunktion von f.

Bemerkung VIII.3.8. (1) Ist f ein Gradientenfeld, so ist die Stammfunktion von f wegen Satz VII.3.8(2) (S. 63) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.
(2) Ist $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld, so ist wegen Satz VII.4.18(2) (S. 71) die Funktionalmatrix Df symmetrisch.

Satz VIII.3.9. *Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist Gradientenfeld.*

(2) *$\int_\Gamma f dx = 0$ für jede geschlossene, stückweise C^1-Kurve, die ganz in G verläuft.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Folgt direkt aus Beispiel VIII.3.4 (2) angewandt auf die C^1-Teilkurven von Γ.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Sei $x_0 \in G$ beliebig. Aus dem Beweis von Satz III.5.14 (S. 92, Analysis I) folgt, dass es zu jedem $x \in G$ einen Weg γ_x gibt, der stückweise stetig differenzierbar ist, ganz in G verläuft und Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x hat. Definiere

$$F(x) = \int_{\gamma_x} f dx.$$

Aus (2) folgt, dass die Definition von F nicht von der Wahl des Weges γ_x abhängt. Sei nun $x \in G$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset G$. Für $i \in \mathbb{N}_n^*$ und $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ folgt dann aus (2) und Satz VIII.3.6

$$F(x + he_i) - F(x) = \int_{[x, x+he_i]} f dx,$$

wobei $[x, x+he_i]$ die Strecke von x nach $x+he_i$ bezeichnet. Damit folgt

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{h}[F(x + he_i) - F(x)] - f_i(x)| &= |\frac{1}{h} \int_0^1 \langle f(x + the_i), he_i \rangle dt - f_i(x)| \\
&= | \int_0^1 [f_i(x + the_i) - f_i(x)] dt| \\
&\le \max_{y \in \overline{B(x, |h|)}} |f_i(y) - f_i(x)| \\
&\underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Differenzierbarkeitskriterium Satz VII.2.13 (S. 55) folgt hieraus, dass F eine Stammfunktion von f ist. $\square$

Satz VIII.3.9 löst unser Problem vollständig und erlaubt auch mit der im Beweis benutzten Technik die praktische Berechnung einer Stammfunktion. Umgekehrt ist aber die Bedingung (2) in der Praxis nur schwer nachprüfbar. Wir möchten im Folgenden ein einfacheres Kriterium herleiten. Und zwar möchten wir zeigen, dass unter einer zusätzlichen Voraussetzung an G ein $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ genau dann eine Stammfunktion besitzt, wenn Df symmetrisch ist. Wegen Bemerkung VIII.3.8 (2) ist letzteres eine notwendige Bedingung. Beispiel VIII.3.4 (1) zeigt, dass sie i. a. aber nicht hinreichend ist.

Satz VIII.3.10 (Lemma von Goursat). *Sei G konvex, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und Df symmetrisch. Für je drei paarweise verschiedene Punkte $x_1, x_2, x_3 \in G$ bezeichne $[x_1, x_2, x_3]$ den Streckenzug $[x_1, x_2] \oplus [x_2, x_3] \oplus [x_3, x_1]$, wobei $[x_i, x_j]$ die Strecke von x_i nach x_j ist. Dann gilt*

$$\int_{[x_1,x_2,x_3]} f dx = 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in G \; x_1 \neq x_2 \neq x_3.$$

Beweis. Seien x_1, x_2, x_3 beliebige, im Folgenden feste, paarweise verschiedene Punkte in G. Wir definieren drei Folgen $(x_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$, $1 \leq i \leq 3$, wie folgt:

(1) $x_{i,0} = x_i \quad 1 \leq i \leq 3.$
(2) $x_{i,m}$ seien bekannt, sei

$$x'_{i,m} = \frac{1}{2}(x_{i,m} + x_{i+1,m}), \quad 1 \leq i \leq 3,$$

wobei die Indizes modulo 3 zu rechnen sind. Dann bestimmen wir $x_{i,m+1} \in \{x_{i,m}, x'_{i+1,m}, x'_{i+2,m}\}$, $1 \leq i \leq 3$, so dass gilt

$$\begin{aligned} &\Big|\int_{[x_{1,m+1},x_{2,m+1},x_{3,m+1}]} f dx\Big| \\ &= \max\Big\{\Big|\int_{[x_{1,m},x'_{1,m},x'_{3,m}]} f dx\Big|, \Big|\int_{[x'_{1,m},x_{2,m},x'_{2,m}]} f dx\Big|, \\ &\qquad \Big|\int_{[x'_{2,m},x_{3,m},x'_{3,m}]} f dx\Big|, \Big|\int_{[x'_{1,m},x'_{2,m},x'_{3,m}]} f dx\Big|\Big\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\int_{[x_{1,m},x_{2,m},x_{3,m}]} f dx \\ &= \int_{[x_{1,m},x'_{1,m},x'_{3,m}]} f dx + \int_{[x'_{1,m},x_{2,m},x'_{2,m}]} f dx \\ &\quad + \int_{[x'_{3,m},x'_{2,m},x_{3,m}]} f dx + \int_{[x'_{1,m},x'_{2,m},x'_{3,m}]} f dx \end{aligned}$$

folgt

$$|\int_{[x_{1,m},x_{2,m},x_{3,m}]} f dx| \le 4 |\int_{[x_{1,m+1},x_{2,m+1},x_{3,m+1}]} f dx|$$

und somit durch Induktion

$$|\int_{[x_1,x_2,x_3]} f dx| \le 4^m |\int_{[x_{1,m},x_{2,m},x_{3,m}]} f dx| \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich gilt für die Länge der Wege

$$L([x_{1,m+1}, x_{2,m+1}, x_{3.m+1}]) = \frac{1}{2} L([x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und damit

$$L([x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]) = 2^{-m} L([x_1, x_2, x_3]) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

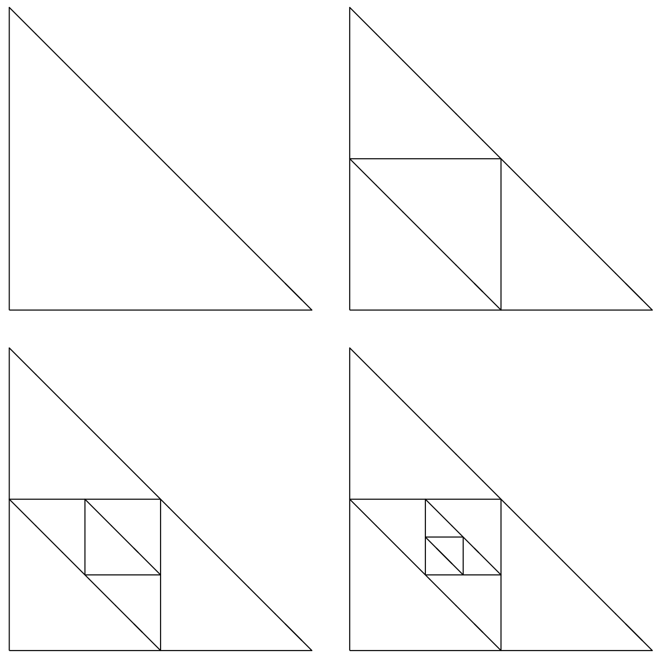

ABBILDUNG VIII.3.1. Beispiel für Dreiecke $\Delta_m, \dots, \Delta_{m+3}$

Bezeichne mit Δ_m das abgeschlossene Dreieck mit den Eckpunkten $x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}$ (vgl. Abb. VIII.3.1). Dann folgt

$$\dots \subset \Delta_{m+1} \subset \Delta_m \subset \Delta_{m-1} \subset \dots \subset \Delta_0 \subset G$$

und

$$\text{Fläche } (\Delta_{m+1}) = \frac{1}{4} \text{ Fläche } (\Delta_m).$$

Hieraus folgt

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Delta_m = \{x^*\}$$

für ein $x^* \in G$ (Beweis: Übungsaufgabe!). Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|$ hinreichend klein, gilt wegen der Differenzierbarkeit von f

$$f(x^* + h) = f(x^*) + Df(x^*)h + r(x^*, h)$$

mit

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{1}{\|h\|} \|r(x^*, h)\| = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $\overline{B(x^*, \delta)} \subset G$ und

$$\sup_{\substack{h \in \mathbb{R}^n \\ \|h\| \le \delta}} \frac{1}{\|h\|} \|r(x^*, h)\| \le \varepsilon.$$

Weiter gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\Delta_m \subset \overline{B(x^*, \delta)}$. Da die Funktion

$$h \mapsto f(x^*) + Df(x^*)h$$

wegen der Symmetrie von $Df(x^*)$ die Stammfunktion

$$h \mapsto \langle f(x^*), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, Df(x^*)h \rangle$$

hat, folgt

$$\begin{aligned}
&| \int_{[x_1, x_2, x_3]} f dx | \\
&\le 4^m | \int_{[x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]} [f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + r(x^*, x - x^*)] dx | \\
&= 4^m | \int_{[x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]} r(x^*, x - x^*) dx | \\
&\le 4^m L([x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]) \max_{y \in [x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]} \|r(x^*, y - x^*)\| \\
&\le \varepsilon 4^m L([x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]) \max_{y \in [x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}]} \|y - x^*\| \\
&\le \varepsilon 4^m L([x_{1,m}, x_{2,m}, x_{3,m}])^2 \\
&= \varepsilon L([x_1, x_2, x_3])^2.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ist damit die Behauptung gezeigt. □

SATZ VIII.3.11. *Sei G konvex und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist Gradientenfeld.*
(2) *$\int_\Gamma f dx = 0$ für jede geschlossene, stückweise C^1-Kurve, die ganz in G verläuft.*
(3) *Df ist symmetrisch.*

Beweis. Wegen Satz VIII.3.9 und Bemerkung VIII.3.8 (2) müssen wir nur noch die Implikation „(3) $\implies$ (1)“ zeigen. Sei dazu $x_0 \in G$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_{[x_0,x]} f dx \quad \forall x \in G,$$

Sei $x \in G$ und $\varepsilon > 0$ so, dass gilt $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset G$. Aus Satz VIII.3.10 folgt dann für jedes $i \in \mathbb{N}_n^*$ und $h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$F(x + he_i) - F(x) = \int_{[x,x+he_i]} f dx.$$

Hieraus folgt aber wie im Beweis von Satz VIII.3.9, dass F eine Stammfunktion von f ist. □

Satz VIII.3.11 gibt uns einfaches Kriterium zur Lösung des Stammfunktionenproblems an die Hand. Allerdings ist die Voraussetzung „G konvex“ noch zu stark. Um sie bestmöglich abzuschwächen, benötigen wir folgende Definition.

Definition VIII.3.12. (1) Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in C(I, U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt

$$x = \gamma_1(a) = \gamma_2(a) \quad , \quad y = \gamma_1(b) = \gamma_2(b).$$

Dann heißen γ_1 und γ_2 homotop in U, kurz $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn es eine Homotopie $H \in C([0, 1] \times I, U)$ gibt mit

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \gamma_1(t) \quad \forall t \in I, \\ H(1, t) &= \gamma_2(t) \quad \forall t \in I, \\ H(s, a) &= x \quad \forall s \in [0, 1], \\ H(s, b) &= y \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

(2) Ein geschlossener Weg $\gamma \in C(I, U), U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt nullhomotop in U, kurz $\gamma \sim 0$, wenn er in U homotop ist zu dem konstanten Weg $t \mapsto \gamma(a)$.
(3) Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomotop ist in G.

Bemerkung VIII.3.13. (1) Ist H eine Homotopie, so ist $\gamma_s = H(s, .)$ für jedes $s \in [0, 1]$ ein Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y.
(2) Eine konvexe Menge ist einfach zusammenhängend.

Beweis. ad (1): Folgt aus der Definition.
ad (2): Sei $\gamma \in C(I, G)$ ein geschlossener Weg in G. Dann leistet $H \in C([0, 1] \times I, G)$ mit

$$H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\gamma(a)$$

das Gewünschte. □

Die folgenden Beispiele sind anschaulich klar. Ein exakter Beweis ist jedoch zum Teil mühselig und wird hier nicht geführt. Die Aussage des zweiten Beispiels folgt aus Beispiel VIII.3.4 (1) und Satz VIII.3.16.

Beispiel VIII.3.14. (1) $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \in \mathbb{R}_+^*\}$ ist einfach zusammenhängend.
(2) $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.
(3) $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend.

Der folgende Satz bereitet unser endgültiges Ergebnis vor, ist aber auch von eigenständigem praktischen Interesse.

Satz VIII.3.15. *Sei G ein Gebiet, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ und Df symmetrisch. Dann gilt für je zwei in G homotope, stückweise stetig differenzierbare Wege γ_0, γ_1*

$$\int_{\gamma_0} f dx = \int_{\gamma_1} f dx.$$

Beweis. O.E. ist $I = [0,1]$. Sei $H \in C([0,1] \times I, G)$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1. Da $H([0,1] \times I) \subset G$ kompakt und G offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ mit

(1) $\|H(s,t) - y\| \geq \varepsilon$ für alle $s \in [0,1], t \in I, y \notin G$ und
(2) $\|H(s,t) - H(s',t')\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $s, s' \in [0,1]$, $t, t' \in I$, mit $|s - s'| + |t - t'| \leq \delta$.

Sei $m \in \mathbb{N}^*$ mit $\frac{1}{m} \leq \frac{\delta}{2}$. Für $s \in [0,1]$ bezeichnen wir dann mit $\widetilde{\gamma}_s$ den Polygonzug mit den Ecken

$$H(s,0), H(s, \frac{1}{m}), \ldots, H(s, \frac{m-1}{m}), H(s,1).$$

Wegen (1) und (2) gilt

$$\widetilde{\gamma}_s(I) \subset G \quad \forall s \in [0,1].$$

Wir zeigen nun zunächst

$$\int_{\widetilde{\gamma}_{\frac{i-1}{m}}} f dx = \int_{\widetilde{\gamma}_{\frac{i}{m}}} f dx \quad \forall 1 \leq i \leq m. \tag{3}$$

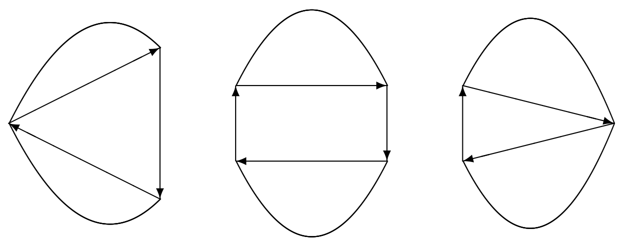

Abbildung VIII.3.2. Beispiel für Wege $\widetilde{\gamma}_{i1}$, $\widetilde{\gamma}_{ij}$, $2 \leq j \leq m-1$, und $\widetilde{\gamma}_{im}$

Sei $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le m$. Definiere den Weg $\widetilde{\gamma}_{ij}$ wie folgt (vgl. Abb. VIII.3.2

$$\widetilde{\gamma}_{ij} = \begin{cases} [H(\frac{i-1}{m},0), H(\frac{i-1}{m},\frac{1}{m})] \\ \oplus[H(\frac{i-1}{m},\frac{1}{m}), H(\frac{i}{m},\frac{1}{m})] \\ \oplus[H(\frac{i}{m},\frac{1}{m}), H(\frac{i}{m},0)] & \text{für } j=1, \\ [H(\frac{i-1}{m},\frac{j-1}{m}), H(\frac{i-1}{m},\frac{j}{m})] \\ \oplus[H(\frac{i-1}{m},\frac{j}{m}), H(\frac{i}{m},\frac{j}{m})] \\ \oplus[H(\frac{i}{m},\frac{j}{m}), H(\frac{i-1}{m},\frac{j}{m})] \\ \oplus[H(\frac{i-1}{m},\frac{j}{m}), H(\frac{i-1}{m},\frac{j-1}{m})] & \text{für } 2 \le j \le m-1, \\ [H(\frac{i-1}{m},\frac{m-1}{m}), H(\frac{i-1}{m},1)] \\ \oplus[H(\frac{i}{m},1), H(\frac{i}{m},\frac{m-1}{m})] \\ \oplus[H(\frac{i}{m},\frac{m-1}{m}), H(\frac{i-1}{m},\frac{m-1}{m})] & \text{für } j=m. \end{cases}$$

Wegen (2) gilt

$$\mathrm{Spur}(\widetilde{\gamma}_{ij}) \subset B(H(\frac{i-1}{m},\frac{j-1}{m}),\frac{2}{3}\varepsilon) \subset G.$$

Damit folgt aus Satz VIII.3.11

$$\int_{\widetilde{\gamma}_{ij}} f dx = 0 \quad \forall 1 \le i,j \le m$$

und daher

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \int_{\widetilde{\gamma}_{ij}} f = \int_{\widetilde{\gamma}_{\frac{i-1}{m}}} f dx - \int_{\widetilde{\gamma}_{\frac{i}{m}}} f dx, \quad 1 \le i \le m.$$

Damit ist (3) gezeigt.
Wir zeigen nun

$$\text{(4)} \qquad \int_{\widetilde{\gamma}_0} f dx = \int_{\gamma_0} f dx \ , \ \int_{\widetilde{\gamma}_1} f dx = \int_{\gamma_1} f dx.$$

Dazu definieren wir für $\mu = 0,1$ und $1 \le j \le m$ die Wege $\widehat{\gamma}_{\mu j}$ durch

$$\widehat{\gamma}_{\mu j} = H(\mu,t)|_{[\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]} \oplus [H(\mu,\frac{j}{m}), H(\mu,\frac{j-1}{m})].$$

Wegen (2) ist dann wieder

$$\mathrm{Spur}(\widehat{\gamma}_{\mu j}) \subset B(H(\mu,\frac{j-1}{m}),\frac{2}{3}\varepsilon) \subset G \quad \forall 1 \le j \le m, \mu = 0,1,$$

so dass aus Satz VIII.3.11 folgt

$$\int_{\widehat{\gamma}_{\mu j}} f dx = 0 \quad 1 \le j \le m, \mu = 0,1$$

Damit erhalten wir

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \int_{\widehat{\gamma}_{\mu j}} f dx = \int_{\gamma_\mu} f dx - \int_{\widehat{\gamma}_\mu} f dx, \quad \mu = 0,1.$$

Damit ist auch (4) bewiesen.
Aus (3) und (4) folgt offensichtlich die Behauptung. □

Nun können wir die Frage nach der Stammfunktion endgültig beantworten.

Satz VIII.3.16 (Satz von Poincaré). *Sei G einfach zusammenhängend und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(1) *f ist Gradientenfeld.*
(2) *$\int_\Gamma f dx = 0$ für jede geschlossene, stückweise C^1-Kurve, die ganz in G verläuft.*
(3) *Df ist symmetrisch.*

Beweis. Wegen Satz VIII.3.9 und Bemerkung VIII.3.8 (2) müssen wir nur noch die Implikation „(3) $\Longrightarrow$ (2)“ zeigen. Sei also Γ eine geschlossene, stückweise C^1-Kurve, die ganz in G verläuft. Dann ist Γ in G homotop zu dem konstanten Weg $\widetilde{\gamma} : t \mapsto \Gamma(a)$. Aus Satz VIII.3.15 folgt

$$\int_\Gamma f dx = \int_{\widetilde{\gamma}} f dx = \int_a^b \langle f \circ \widetilde{\gamma}(t), \underbrace{\widetilde{\gamma}'(t)}_{=0} \rangle dt = 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

VIII.4. Komplexe Kurvenintegrale

In diesem Paragraphen beweisen wir einige der wichtigsten Sätze der Funktionentheorie. Wir knüpfen dabei an Ergebnisse der Paragraphen V.3 und VII.2 an und nutzen Ergebnisse des letzten Paragraphen.

Im Folgenden bezeichnet $G \subset \mathbb{C}$ stets ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

Definition VIII.4.1. Sei $f \in C(G, \mathbb{C})$ und $\gamma \in C^1(I, G)$ ein C^1-Weg in G. Dann ist das Wegintegral von f längs γ definiert durch

$$\int_\gamma f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Bemerkung VIII.4.2. Seien $f \in C(G, \mathbb{C})$ und $\gamma \in C^1(I, G)$. Dann sei $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in G\}$ und

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) \in C(W, \mathbb{R}), \\
v(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy) \in C(W, \mathbb{R}), \\
F(x, y) &= (u(x, y), -v(x, y)) \in C(W, \mathbb{R}^2), \\
\overline{F}(x, y) &= (v(x, y), u(x, y)) \in C(W, \mathbb{R}^2), \\
\gamma_1(t) &= \operatorname{Re} \gamma(t) \in C^1(I, \mathbb{R}), \\
\gamma_2(t) &= \operatorname{Im} \gamma(t) \in C^1(I, \mathbb{R}), \\
\widetilde{\gamma}(t) &= (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in C^1(I, W).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
&f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
&= [u(\widetilde{\gamma}(t)) + iv(\widetilde{\gamma}(t))] \cdot [\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)] \\
&= [u(\widetilde{\gamma}(t))\gamma_1'(t) - v(\widetilde{\gamma}(t))\gamma_2'(t)] + i[u(\widetilde{\gamma}(t))\gamma_2'(t) + v(\widetilde{\gamma}(t))\gamma_1'(t)] \\
&= \langle [u(\widetilde{\gamma}(t)), -v(\widetilde{\gamma}(t))], \widetilde{\gamma}(t)\rangle + i\langle [v(\widetilde{\gamma}(t)), u(\widetilde{\gamma}(t))], \widetilde{\gamma}(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$\int_\gamma f dz = \int_{\widetilde{\gamma}} F dx + i \int_{\widetilde{\gamma}} \overline{F} dx.$$

Auf diese Weise können wir das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f dz$ mit den beiden reellen Wegintegralen $\int_{\widetilde{\gamma}} F dx$ und $\int_{\widetilde{\gamma}} \overline{F} dx$ identifizieren. Wir werden dies im Folgenden häufiger tun, wobei wir der Einfachheit halber wieder G statt W und γ statt $\widetilde{\gamma}$ schreiben. Die Bedeutung ist dann aus dem Zusammenhang klar. Insbesondere können wir auf diese Art und Weise die Begriffe (z.B. Integral längs eines stückweise C^1-Weges usw.) und Sätze des vorigen Abschnittes übertragen.

Definition VIII.4.3. Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt HOLOMORPH in G, wenn sie in ganz G stetig komplex differenzierbar ist im Sinne von Definition IV.1.1 (S. 111, Analysis I).

Satz VIII.4.4 (Cauchyscher Integralsatz). *Sei G einfach zusammenhängend und f in G holomorph. Dann ist*

$$\int_\gamma f dz = 0$$

für jeden geschlossenen, stückweise C^1-Weg in G. Insbesondere besitzt f in G eine Stammfunktion.

Beweis. Wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, Satz VII.2.17 (S. 58), sind die Funktionalmatrizen DF und $D\overline{F}$ der Funktionen F und $\overline{F}$ aus Bemerkung VIII.4.2 symmetrisch. Damit folgt die Behauptung aus Satz VIII.3.16 (S. 115). □

Satz VIII.4.5 (Cauchysche Integralformel). *Sei f in G holomorph, $z_0 \in G$ und $R \in \mathbb{R}_+^*$ mit $K = \overline{B(z_0, R)} \subset G$. Dann folgt für alle $z \in \overset{\circ}{K}$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

wobei ∂K im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

Beweis. Sei $z \in \overset{\circ}{K}$ beliebig. Definiere $g : G \to \mathbb{C}$ durch

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{falls } w \neq z, \\ f'(z) & \text{falls } w = z. \end{cases}$$

Dann ist g auf G stetig und auf $G\backslash\{z\}$ holomorph. Sei $r = \frac{1}{2}(R-|z-z_0|)$ und

$$M = \max_{w \in \overline{B(z,r)}} |g(w)|.$$

Da ∂K in $K\backslash\{z\}$ homotop ist zu $\partial B(z,\varepsilon)$ für jedes $0 < \varepsilon \le r$, folgt aus Satz VIII.3.15 (S. 113) und Satz VIII.3.6 (S. 107)

$$|\int_{\partial K} g d\eta| = |\int_{\partial B(z,\varepsilon)} g d\eta| \le M 2\pi\varepsilon \quad \forall 0 < \varepsilon \le r.$$

Also ist

$$0 = \int_{\partial K} g d\eta = \int_{\partial K} \frac{f(\eta) - f(z)}{\eta - z} d\eta$$

und somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{1}{\eta - z} d\eta.$$

Da die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ auf $K\backslash\{z\}$ holomorph ist, folgt wieder aus Satz VIII.3.15 (S. 113)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{1}{\eta - z} d\eta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,r)} \frac{1}{\eta - z} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Satz VIII.4.6. *Sei f in G holomorph. Dann ist f auf G analytisch.*

Beweis. Seien $z_0 \in G$ und $R \in \mathbb{R}_+^*$ mit $K = \overline{B(z_0,R)} \subset G$. Definiere

$$M = \max_{w \in \partial K} |f(w)|.$$

Sei $z \in \mathring{K}$ beliebig und $r_0 = |z - z_0| < R$. Wegen

$$\begin{aligned} |\frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k| &\le M \frac{r_0^k}{R^{k+1}} \\ &= \frac{M}{R} (\frac{r_0}{R})^k \quad \forall w \in \partial K,\ k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

konvergiert die Reihe

$$\sum \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k$$

auf ∂K gleichmäßig. Damit folgt aus Satz VI.2.1 und Satz VIII.4.5 mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{k+1}} d\eta \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}d\eta](z-z_0)^k \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}(\frac{z-z_0}{\eta-z_0})^k]d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{\eta-z_0})^k d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta \\ &= f(z).\end{aligned}$$

Wegen Satz VIII.3.6 (S. 107) gilt

$$|a_k| \le \frac{1}{2\pi}2\pi RMR^{-(k+1)} = MR^{-k}.$$

Mithin hat die Reihe $\sum a_k(z-z_0)^k$ den Konvergenzradius R. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung VIII.4.7. (1) Für komplexe Funktionen gilt also $C^1(G,\mathbb{C}) = C^\omega(G,\mathbb{C})$ im Gegensatz zu reellen Funktionen.
(2) Aus dem Beweis von Satz VIII.4.6 folgt direkt die Cauchysche Ableitungsformel

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,R)}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}d\eta \quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Satz VIII.4.8 (Satz von Liouville). *Die einzigen auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen und beschränkten Funktionen sind die Konstanten.*

Beweis. Sei f auf $\mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, d.h. es gibt ein $M>0$ mit

$$|f(z)| \le M \quad \forall z\in\mathbb{C}.$$

Sei $z_0\in\mathbb{C}$ beliebig und $n\in\mathbb{N}^*$. Aus Bemerkung VIII.4.7 (2) folgt für jedes $r\in\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &= \frac{n!}{2\pi}|\int_{\partial B(z_0,r)}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{n+1}}d\eta| \\ &\le \frac{n!}{2\pi}M2\pi r\frac{1}{r^{n+1}} \\ &= Mn!r^{-n} \\ &\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Beispiel VIII.4.9. Es gilt

$$\int_0^\infty \cos(2t^2)dt = \int_0^\infty \sin(2t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

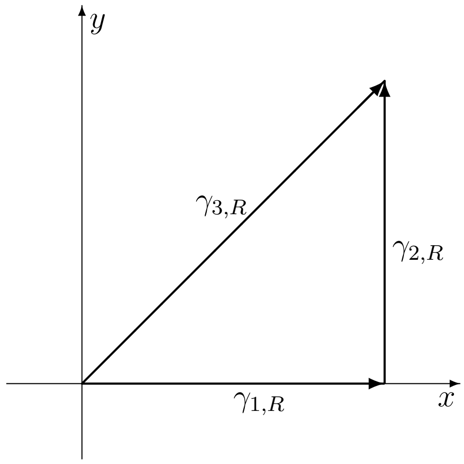

Abbildung VIII.4.1. Wege $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$, $\gamma_{3,R}$

Beweis. Die Funktion e^{-z^2} ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Sei $R > 0$ und (vgl. Abbildung VIII.4.1)

$$\begin{aligned}\gamma_{1,R} &= [0, R],\\ \gamma_{2,R} &= [R, R(1+i)],\\ \gamma_{3,R} &= [0, R(1+i)].\end{aligned}$$

Aus Satz VIII.4.4 folgt

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}dz = \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}dz + \int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2}dz.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2}dz &= \int_0^R e^{-(t(1+i))^2}(1+i)dt\\ &= (1+i)\int_0^R e^{-2it^2}dt\\ &= [\int_0^R \cos(2t^2)dt + \int_0^R \sin(2t^2)dt]\\ &\quad + i[\int_0^R \cos(2t^2)dt - \int_0^R \sin(2t^2)dt]\\ \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2}dz &= \int_0^R e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt \\
&\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{gemäß Satz VI.5.7 (S. 44)} \\
|\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz| &= |\int_0^1 e^{-[R(1+it)]^2} iR dt| \\
&= |iR\int_0^1 e^{-R^2(1-t^2)} e^{-2iR^2t} dt| \\
&\le R\int_0^1 e^{-R^2(1-t^2)} dt \\
&= Re^{-R^2}\int_0^1 e^{R^2t} e^{-R^2t(1-t)} dt \\
&\le Re^{-R^2}\int_0^1 e^{R^2t} dt \\
&= Re^{-R^2}\frac{1}{R^2}[e^{R^2}-1] \\
&\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Also existiert $\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz$ und erfüllt

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\pi}}{2} &= \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz \\
&= [\int_0^\infty \cos(2t^2) dt + \int_0^\infty \sin(2t^2) dt] \\
&\quad + i[\int_0^\infty \cos(2t^2) dt - \int_0^\infty \sin(2t^2) dt].
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt die behauptete Gleichheit. □

Satz VIII.4.6 erlaubt die Berechnung der Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion in einem Punkt ihres Definitionsbereiches. Nun wollen wir Funktionen in „Potenzreihen“ um Punkte außerhalb ihres Definitionsbereiches entwickeln.

Satz VIII.4.10. *Seien $z_0 \in G$ mit $\overline{B(z_0, R)} \subset G$ und f in $G\backslash\{z_0\}$ holomorph. Dann kann f um z_0 in eine* Laurent-Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$$

entwickelt werden, die für jedes $r \in (0, R)$ in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Für die

Koeffizienten a_n gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ 0 < s < R.$$

Der Koeffizient a_{-1} heißt RESIDUUM *von f in z_0 und wird mit* $\mathrm{Res}_{z_0} f$ *bezeichnet.*

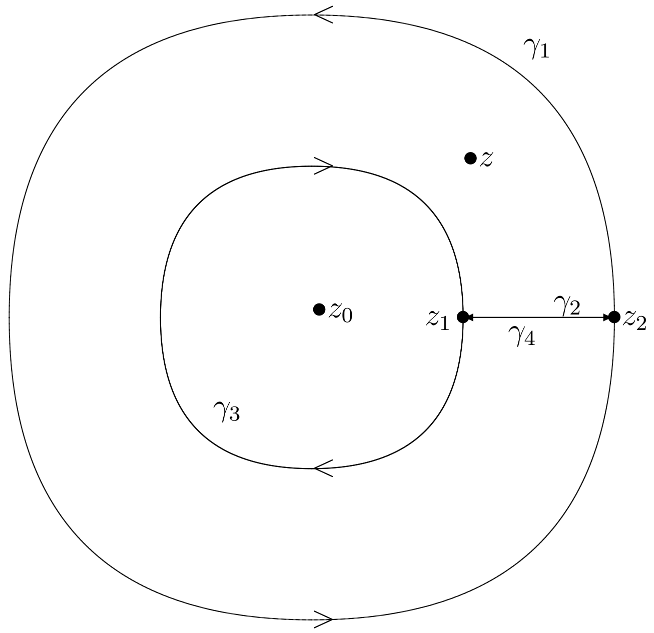

ABBILDUNG VIII.4.2. Wege γ_1, γ_2, γ_3, γ_4

BEWEIS. Sei $z \in B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ beliebig und $0 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Weiter sei $z_2 \in \partial B(z_0, r_2)$, so dass z nicht auf der Geraden durch z_0 und z_2 liegt. Bezeichne mit z_1 den Schnittpunkt der Geraden durch z_0 und z_2 mit $\partial B(z_0, r_1)$. Sei (vgl. Abbildung VIII.4.2)

γ_1: der positiv orientierte Kreisbogen mit Mittelpunkt z_0, Radius r_2 und Anfangspunkt z_2,

γ_2: die Strecke von z_2 nach z_1,

γ_3: der negativ orientierte Kreisbogen mit Mittelpunkt z_0, Radius r_1 und Anfangspunkt z_1,

γ_4: die Strecke von z_1 nach z_2

und

$$\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4.$$

Da γ in $B(z_0, R)\backslash\{z_0\}$ nullhomotop ist, folgt mit Satz VIII.4.5 und Satz VIII.3.15 (S. 113)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta.$$

Wie im Beweis von Satz VIII.4.6 folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(z-z_0)^n$$

mit

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r_2)}\frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}d\eta$$

und, dass die Reihe $\sum \alpha_n(z-z_0)^n$ in $B(z_0,r_2)$ gleichmäßig konvergiert. Sei

$$M = \max_{w\in\partial B(z_0,r_1)}|f(w)|.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k+1}}(z-z_0)^{-k}| &\le \frac{M}{r_1^{-k+1}}|z-z_0|^{-k}\\ &= \frac{M}{r_1}(\frac{r_1}{|z-z_0|})^k \quad \forall w\in\partial B(z_0,r_1),\ k\in\mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Mithin konvergiert die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-k+1}}(z-z_0)^{-k}$$

auf $\partial B(z_0,r_1)$ gleichmäßig. Damit folgt aus Satz VI.2.1 (S. 14) mit

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r_1)}\frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-k+1}}d\eta\ , k\in\mathbb{N}^*$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(z-z_0)^{-k} &= \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r_1)}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{-k+1}}d\eta](z-z_0)^{-k}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r_1)}[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}(\frac{\eta-z_0}{z-z_0})^k]d\eta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r_1)}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}[\frac{1}{1-\frac{\eta-z_0}{z-z_0}}-1]d\eta\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r_1)}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta\\ &= \int_{\gamma_3}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta.\end{aligned}$$

Wegen

$$|\beta_k(z-z_0)^{-k}| \le Mr_1r_1^{k-1}|z-z_0|^{-k}$$

$$= M(\frac{r_1}{|z - z_0|})^k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

konvergiert die Reihe $\sum \beta_k (z - z_0)^{-k}$ auf $\mathbb{C} \backslash \overline{B(z_0, r_1)}$ gleichmäßig. Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z - z_0)^{-k} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n,$$

wobei die Reihen auf der rechten Seite gleichmäßig auf $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ konvergieren. Da die Funktionen $z \mapsto (z - z_0)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ holomorph sind, folgt aus Satz VIII.3.15 (S. 113)

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\beta_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-k+1}} d\eta \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

und alle $s \in (0, R)$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung VIII.4.11. (1) Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z - z_0)^{-k}$$

heißt Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_0. Aus dem Beweis von Satz VIII.4.10 folgt, dass er für jedes $r \in \mathbb{R}_+^*$ auf $\mathbb{C} \backslash \overline{B(z_0, r)}$ gleichmäßig konvergiert. Mit den gleichen Argumenten wie beim Beweis der Sätze V.3.1 (S. 156, Analysis I) und V.3.2 (S. 157, Analysis I) folgt hieraus, dass der Hauptteil auf $\mathbb{C} \backslash \{z_0\}$ holomorph ist.
(2) Gilt $\beta_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$, so heißt z_0 eine hebbare Singularität von f. Gibt es ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $\beta_m \neq 0$ und $\beta_k = 0$ für alle $k > m$, so heißt z_0 eine Polstelle der Ordnung m von f. Ist schließlich z_0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle, so heißt z_0 eine wesentliche Singularität von f.
(3) Ist z_0 eine Polstelle der Ordnung m von f, so ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)](z_0).$$

Beispiel VIII.4.12. (1) Sei

$$f(z) = \exp(\frac{1}{z}).$$

$z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität und

$$\operatorname{Res}_0 f = 1.$$

(2) Sei

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z+1)}.$$

$z_0 = 1$ ist eine Polstelle 2-ter Ordnung und

$$\operatorname{Res}_1 f = -\frac{1}{4}.$$

$z_0 = -1$ ist eine Polstelle 1-ter Ordnung und

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \frac{1}{4}.$$

SATZ VIII.4.13 (RIEMANNSCHER HEBBARKEITSSATZ). *Sei $z_0 \in G$ und f in $G \backslash \{z_0\}$ holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f kann in z_0 holomorph fortgesetzt werden.*
(2) *f ist in einer Umgebung von z_0 beschränkt.*

BEWEIS. (1) $\Longrightarrow$ (2): Ist klar, da die Fortsetzung insbesondere stetig ist.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}_+^*$, so dass f auf $B(z_0, r) \backslash \{z_0\}$ beschränkt ist. Sei

$$M = \sup_{z \in B(z_0,r) \backslash \{z_0\}} |f(z)|.$$

Dann folgt für $k \in \mathbb{N}^*$ und $s \in (0, r)$

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,s)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-k+1}} d\eta\Big| &\leq M s^k \\ &\underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz VIII.4.10 und Bemerkung VIII.4.11 (2). □

SATZ VIII.4.14 (RESIDUENSATZ). *Sei G einfach zusammenhängend, $z_1, \ldots, z_m \in G$ und f in $G \backslash \{z_1, \ldots, z_m\}$ holomorph. Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ, der für jedes $i \in \mathbb{N}_m^*$ in $G \backslash \{z_i\}$ zu $\partial B(z_i, \varepsilon)$ mit hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ homotop ist,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z_j} f.$$

BEWEIS. Sei h_j, $1 \leq j \leq m$, der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von f um z_j. Dann ist $f - \sum\limits_{j=1}^m h_j$ in G holomorph. Damit folgt aus Satz VIII.4.4

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h_j(z) dz.$$

Sei nun $1 \leq j \leq m$ beliebig. Da γ in $G \backslash \{z_j\}$ zu einem positiv orientierten, einfach durchlaufenen Kreis um z_j homotop ist, folgt aus Satz VIII.3.15 (S. 113) für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\overline{B(z_j, \varepsilon)} \subset G$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h_j(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_j,\varepsilon)} h_j(z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k,j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_j,\varepsilon)} (z - z_j)^{-k} dz \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{k,j} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} i e^{it} dt \\
&= \beta_{1,j} \\
&= \operatorname{Res}_{z_j} f.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel VIII.4.15. (1) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ und $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} = \frac{4}{(4b)^n} \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.$$

Denn: Sei

$$f(z) = \frac{1}{(az^2+b)^n} = \frac{1}{a^n (z - i\sqrt{\frac{b}{a}})^n (z + i\sqrt{\frac{b}{a}})^n}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{i\sqrt{\frac{b}{a}}} f &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big[\frac{1}{a^n (z + i\sqrt{\frac{b}{a}})^n} \Big]_{z = i\sqrt{\frac{b}{a}}} \\
&= \frac{1}{a^n} \frac{(2n-1)!(-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} \frac{1}{(2i\sqrt{\frac{b}{a}})^{2n-1}} \\
&= \frac{-2i}{(4b)^n} \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.
\end{aligned}$$

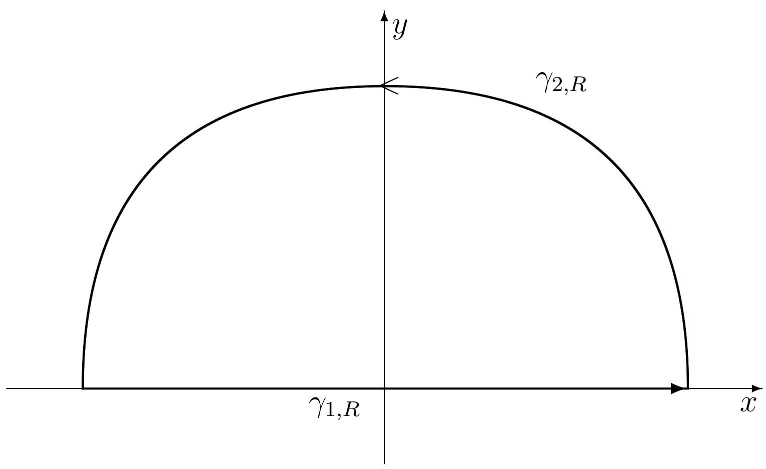

Abbildung VIII.4.3. Wege $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$

Sei $R > \sqrt{\frac{b}{a}}$ und $\gamma_{1,R}$ die Strecke von $-R$ nach R und $\gamma_{2,R}$ der Halbkreis um 0 von R nach $-R$ (vgl. Abbildung VIII.4.3). Dann folgt aus Satz VIII.4.14

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{(4b)^n}\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{i\sqrt{\frac{b}{a}}} f \\
&= \int_{\gamma_{1,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz \\
&= 2\int_0^R \frac{dx}{(ax^2+b)^n} + \int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
|\int_{\gamma_{2,R}} f(z)dz| &\le \pi R \max_{z\in\gamma_{2,R}} |f(z)| \\
&= \pi R \max_{z\in\gamma_{2,R}} \frac{1}{|az^2+b|^n} \\
&\le \frac{\pi R}{a^n(R^2-\frac{b}{a})^n} \\
&\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also existiert $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R \frac{dx}{(ax^2+b)^n}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} &= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{0} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} \\
&= \lim_{\alpha\to-\infty}\int_0^{-\alpha} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} + \lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} \frac{dx}{(ax^2+b)^n} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}[\int_{\gamma_{1,\alpha}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,\alpha}} f(z)dz] \\
&\quad + \frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}[\int_{\gamma_{1,\beta}} f(z)dz + \int_{\gamma_{2,\beta}} f(z)dz] \\
&= \frac{4\pi}{(4b)^n}\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2}.
\end{aligned}$$

(2) Sei $0 < a < 1$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x + a^2}dx = \pi.$$

Denn: Wir wollen den Integranden als $\displaystyle\int_{\partial B(0,1)} f(z)dz$ mit einer komplexen Funktion darstellen. Dies liefert für f die Bedingung

$$\begin{aligned}
f(e^{ix}) &= \frac{1}{ie^{ix}} \cdot \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x + a^2} \\
&= \frac{1}{ie^{ix}} \frac{-\frac{1}{4}(e^{ix}-e^{-ix})^2}{1-a(e^{ix}+e^{-ix})+a^2} \\
&= -\frac{1}{4i} e^{-ix} \frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{1-a(e^{ix}+e^{-ix})+a^2} \\
&= -\frac{1}{4i} \frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+1}{e^{2ix}[-ae^{2ix}-a+(a^2+1)e^{ix}]} \\
&= \frac{1}{4ai} \frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+1}{e^{2ix}[e^{2ix}-(a+\frac{1}{a})e^{ix}+1]}.
\end{aligned}$$

Sei also

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{4ai} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2[z^2-(a+\frac{1}{a})z+1]} \\
&= \frac{1}{4ai} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2[z-a][z-\frac{1}{a}]}.
\end{aligned}$$

f hat die Polstellen 0, a und $\frac{1}{a}$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_0 f &= \frac{d}{dz}(z^2 f(z))|_{z=0} \\
&= \frac{1}{4ai} \frac{(-1)}{(-a)^2(-\frac{1}{a})^2}(-a-\frac{1}{a}) \\
&= \frac{1}{4i}(1+\frac{1}{a^2}) \\
\operatorname{Res}_a f &= \frac{1}{4ai} \frac{(a^2-1)^2}{a^2(a-\frac{1}{a})} \\
&= \frac{1}{4a^2 i}(a^2-1) \\
&= \frac{1}{4i}(1-\frac{1}{a^2}).
\end{aligned}$$

Damit folgt aus Satz VIII.4.14

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1-2a\cos x+a^2} dx &= \int_{\partial B(0,1)} f(z)dz \\
&= 2\pi i[\operatorname{Res}_0 f + \operatorname{Res}_a f] \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

VI. Integralrechnung einer Variablen

1. Das (Riemann-) Integral
   Integral einer Treppenfunktion; Linearität und Beschränktheit des Integrals; die Räume $\mathcal{L}(X,Y)$ und ihre Eigenschaften; Fortsetzung stetiger, linearer Abbildungen auf den Abschluss eines Unterraumes; Integral sprungstetiger Funktionen; Approximation durch Riemannsche Summen; Zusammenhang mit dem Riemann-Integral
2. Eigenschaften des Integrals
   gliedweise Integration von Funktionenfolgen; punktweise Konvergenz nicht ausreichend; Stetigkeit und Linearität des Integrals; orientiertes Integral; Additivität und Monotonie des Integrals; Integrale komplex- und vektorwertiger Funktionen; stetige und differenzierbare Abhängigkeit des Integrals von den Integrationsgrenzen; Stammfunktion und unbestimmtes Integral; Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; Mittelwertsatz der Integralrechnung
3. Integrationstechniken
   Substitutionsregel; Darstellung mittels Differentialen; partielle Integration; Partialbruchzerlegung; Trapezregel und Fehlerabschätzung; Stirlingsche Formel
4. Uneigentliche Integrale
   zulässige Funktionen; uneigentliches Integral zulässiger Funktionen; Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Integral; Integralkriterium für Reihen; absolut konvergente Integrale; Majorantenkriterium; Eulersches Betaintegral; uneigentliche Integrale und gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen
5. Die Eulersche Gammafunktion
   Definition; Eigenschaften; logarithmisch konvexe Funktionen und ihre Eigenschaften; Charakterisierung der Gammafunktion; Gaußsche Darstellung der Gammafunktion; Zusammenhang mit dem Eulerschen Betaintegral

VII. Differentialrechnung mehrerer Variablen

1. Stetige lineare Abbildungen
   Y vollständig $\Rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ vollständig; Isomorphismus, Isometrie; $\dim X < \infty \Rightarrow X \cong \mathbb{K}^{\dim X}$; $\dim X < \infty \Rightarrow X$ ist vollständig und alle Normen auf X sind äquivalent; $\dim X < \infty$ und Y beliebig $\Rightarrow$ jede lineare Abbildung $X \to Y$ ist stetig; Aussagen gelten nicht für $\dim X = \infty$; Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen
2. Differenzierbarkeit
   Differenzierbarkeit; Zusammenhang mit Funktionen einer Variablen; differenzierbar $\Rightarrow$ stetig; Richtungsableitung; differenzierbar $\Rightarrow$ alle

Richtungsableitungen existieren und hängen linear von der Richtung ab, Umkehrung gilt nicht; partielle Ableitungen; differenzierbar $\Rightarrow$ alle partiellen Ableitungen existieren, Umkehrung gilt nicht; Jacobi-/Funktionalmatrix, Gradient; Differenzierbarkeitskriterium; Zusammenhang mit komplexer Differenzierbarkeit und Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

3. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

   Linearität der Ableitung; Kettenregel und ihre Matrixdarstellung; Produktregel; Mittelwertsatz; gliedweise Differentiation von Funktionenfolgen; notwendige Bedingung für lokale Extrema, kritische Punkte

4. Höhere Ableitungen

   m-te Ableitung; stetige, multilineare Abbildungen; m-te Ableitung als stetige, m-lineare Abbildung; Symmetrie höherer Ableitungen; Kettenregel; Taylorsche Formel; partielle Ableitungen höherer Ordnung; Kriterium für Existenz höherer Ableitungen; Taylorsche Formel für Funktionen auf $\mathbb{R}^k$; Hessesche Matrix; positiv definite Matrizen und ihre Eigenwerte; hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

5. Umkehrabbildungen

   Automorphismengruppe von X; $\mathrm{Isom}(X,Y)$ ist offen in $\mathcal{L}(X,Y)$ und Abbildung $A \to A^{-1}$ ist C^∞; Satz über die Umkehrabbildung; Diffeomorphismen; Satz über implizite Funktionen; reguläre Punkte; Anwendung auf Funktionen $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$; Berechnung lokaler Extrema unter Nebenbedingungen mittels Lagrangescher Multiplikatoren

VIII. Kurven und Kurvenintegrale

1. Kurven und ihre Länge

   C^m-Wege, rektifizierbare Wege; stetige Wege sind nicht notwendig rektifizierbar; C^1-Wege sind rektifizierbar; Umparametrisierungen; Invarianz der Länge eines Weges unter Umparametrisierungen; C^m-Kurven; Beispiele

2. Tangente und Krümmung

   reguläre Wege; Tangenteneinheitsvektor; Parametrisierung nach der Bogenlänge; Orthogonalität der ersten und zweiten Ableitung nach der Bogenlänge; Krümmung eines ebenen Weges; Frenetsche Formeln

3. Kurvenintegrale

   Wegintegral; Invarianz des Wegintegrals unter Umparametrisierungen; Kurvenintegral; stückweise C^m-Kurven; Kurvenintegral für stückweise C^m-Kurven; Eigenschaften; Gradientenfeld und Stammfunktion; f Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ das Kurvenintegral verschwindet für jede geschlossene, stückweise C^1-Kurve; Lemma von Goursat; $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, G konvex: f Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ Df symmetrisch; Homotopie von Wegen; einfach zusammenhängend; Invarianz des Wegintegrals unter Homotopie; Satz von Poincaré

4. Komplexe Kurvenintegrale

   komplexe Kurvenintegrale; holomorphe Funktionen; Cauchyscher Integralsatz; Cauchysche Integralformel; f holomorph $\Leftrightarrow$ f komplex-analytisch; Cauchysche Ableitungsformel; Satz von Liouville; Laurent-Reihen; Residuum und Hauptteil; Riemannscher Hebbarkeitssatz; Residuensatz

Index