Analysis I

Vorlesungsskriptum WS 2005/06

R. Verfürth

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL I

Aufbau des Zahlsystems

In diesem Kapitel setzen wir die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen als im Prinzip bekannt voraus. Unser Ziel ist es, die wesentlichen Punkte des axiomatischen Aufbaus herauszuarbeiten, ohne aber dabei bekannte Tatsachen wie z.B. die Assoziativität der Addition formal aus den Axiomen herzuleiten.
Für einen streng axiomatischen Aufbau verweisen wir auf E. LANDAU: GRUNDLAGEN DER ANALYSIS.
Die wesentlichen Kernpunkte unserer Darstellung sind das Induktionsprinzip und die Vollständigkeit der reellen Zahlen.
Als nicht bekannt setzen wir die komplexen Zahlen voraus. Ihre Eigenschaften stellen wir etwas ausführlicher dar.

I.1. Die natürlichen Zahlen

Die intuitiven Vorstellungen von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die vom Abzählen geprägt sind, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

(1) Es gibt die kleinste Einheit 1.
(2) Jede Zahl kann man durch geeignetes „Zusammenzählen“ der Einheit darstellen.
(3) Zu jeder Zahl gibt es eine noch größere.
(4) Es gibt eine „natürliche“ Anordnung, die festlegt, welche von zwei Zahlen die „größere“ ist.
(5) Aus praktischen Gründen ist es sinnvoll, eine Zahl 0, die „nichts“ ist, hinzuzunehmen.

Diese intuitiven Vorstellungen werden in folgendem, auf G. PEANO (1858-1932) zurückgehenden Axiomensystem präzisiert.

DEFINITION I.1.1 (PEANO AXIOME). Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erfüllen die folgenden Axiome:

(N1) (UNENDLICHKEITSAXIOM) Es gibt eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, die jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl $\nu(n) \neq 0$ zuordnet, mit der Eigenschaft (INJEKTIV)

$$n \neq m \Longrightarrow \nu(n) \neq \nu(m).$$

(N2) (INDUKTIONSAXIOM) Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften
(1) $0 \in M$
(2) $n \in M \Longrightarrow \nu(n) \in M$,

dann ist $M = \mathbb{N}$.

Wir nennen $\nu(0) = 1$ und $\nu(n) = n + 1$ den Nachfolger von n.

Der folgende Satz, den wir nicht beweisen, zeigt, dass die durch die Peano Axiome definierte Menge die Eigenschaften hat, die wir intuitiv von den natürlichen Zahlen erwarten.

Satz I.1.2. *Auf der Menge* $\mathbb{N}$ *können wir eindeutig eine Addition* $+$*, eine Multiplikation* $\cdot$ *und eine Anordnung* $\leq$ *definieren, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:*

(1) $n + m = m + n$ (Kommutativität)
$(n + m) + k = n + (m + k)$ (Assoziativität)
$n + 0 = n$ (neutrales Element 0)

(2) $n \cdot m = m \cdot n$ (Kommutativität)
$(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$ (Assoziativität)
$n \cdot 1 = n$ (neutrales Element 1)

(3) $(n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k$ (Distributivgesetz)

(4) $m \leq n \iff \exists\, l \in \mathbb{N} : m + l = n$
$m < n \iff \exists\, l \in \mathbb{N}^* : m + l = n \iff m \leq n$ *und* $m \neq n$
l ist durch m und n eindeutig festgelegt und heißt Differenz zwischen m und n, $l = n - m$.

(5) $0 \cdot n = 0$
$\nu(n) = n + 1$

(6) $n \leq n$ (Reflexivität)
$n \leq m$ *und* $m \leq k \Longrightarrow n \leq k$ (Transitivität)
$n \leq m$ *und* $m \leq n \Longrightarrow n = m$ (Antisymmetrie)
$0 \leq n \;\forall n \in \mathbb{N}$

(7) *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt genau eine der Beziehungen*
$n < m$ *oder* $n = m$ *oder* $m < n$ (Totalordnung)

(8) $\forall n \in \mathbb{N} \;\nexists\, k \in \mathbb{N}$ *mit* $n < k < n + 1$.

(9) $m \leq n \iff m + l \leq n + l \;\forall l \in \mathbb{N}$.

(10) $m, n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow m \cdot n \in \mathbb{N}^*$.

(11) $\forall m, n \in \mathbb{N} \;\forall k \in \mathbb{N}^*$ *gilt* $m \leq n \iff mk \leq nk$ *und* $m < n \iff mk < nk$.

Die erste wichtige Konsequenz des Induktionsaxioms ist der folgende Wohlordnungssatz.

Satz I.1.3. $\mathbb{N}$ *ist* wohlgeordnet, *d.h., jede nicht leere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Beweis. Sei $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$. Wir nehmen an, M besäße kein Minimum. Dann gilt

$$0 \in N = \{n \in \mathbb{N} : n < m \;\forall m \in M\}.$$

Sei $n \in N$. Dann ist $n + 1 \leq m$ für alle $m \in M$. Da M kein Minimum besitzt, gilt $n + 1 \notin M$. Also ist $n + 1 \in N$.

Aus dem Induktionsaxiom folgt $N = \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch. Denn nach Voraussetzung gibt es ein $m \in M$. Dann gilt aber $m+1 \notin N$. $\square$

DEFINITION I.1.4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{N}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$$

und für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$\mathbb{N}_n^* = \{1, \ldots, n\}.$$

SATZ I.1.5 (INDUKTIONSPRINZIP, 1. FASSUNG). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte:*

(1) (INDUKTIONSANFANG; IA) *$A(0)$ ist richtig.*
(2) (INDUKTIONSSCHRITT; IS) *$A(n)$ ist richtig $\Longrightarrow$ $A(n+1)$ ist richtig.*

Dann gilt:

$$A(n) \text{ ist für alle } n \in \mathbb{N} \text{ richtig.}$$

BEWEIS. Sei

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist richtig}\}.$$

Dann gilt:

(1) $0 \in M$.
(2) $n \in M \Longrightarrow n+1 \in M$.

Damit folgt aus dem Induktionsaxiom $M = \mathbb{N}$. $\square$

Wir wollen zwei einfache Beispiele für das Induktionsprinzip geben. Dazu benötigen wir eine Bezeichnung.

DEFINITION I.1.6. Seien $m \le n$ ganze Zahlen und $a_m, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Dann ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Falls $m > n$ ist, definieren wir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{(LEERE SUMME)}$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = 1 \qquad \text{(LEERES PRODUKT).}$$

BEISPIEL I.1.7. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(a)
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2.$$

Beweis. ad (a):

(IA) $$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = 0 \cdot \frac{1}{2}$$

(IS) $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

ad (b):

(IA) $$\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 1 = (0+1)^2$$

(IS) $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + [2(n+1)+1]\\ &= (n+1)^2 + 2n + 3\\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3\\ &= n^2 + 4n + 4\\ &= (n+2)^2.\end{aligned}$$

□

Die folgende Abwandlung des Induktionsprinzips erlaubt den Beweis von Aussagen, die für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gelten.

Satz I.1.8 (Induktionsprinzip, 2. Fassung). *Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq n_0$ sei $A(n)$ eine Aussage. Es gelte:*

(1) (Induktionsanfang; IA) *$A(n_0)$ ist richtig.*
(2) (Induktionsschritt; IS) *$n \geq n_0$ und $A(n)$ ist richtig $\Longrightarrow$ $A(n+1)$ ist richtig.*

Dann gilt:

$$A(n) \textit{ ist für alle } n \geq n_0 \textit{ richtig.}$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es ein $m \geq n_0$ gibt, so dass $A(m)$ falsch ist, d.h.

$$M := \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ und } A(n) \text{ ist falsch}\} \neq \emptyset.$$

Gemäß Satz I.1.3 existiert

$$m_0 = \min(M).$$

Aus (1) folgt $m_0 > n_0$. Also ist $A(n)$ richtig für alle n mit $n_0 \leq n \leq m_0 - 1$. Aus (2) folgt, dass $A(m_0)$ richtig ist im Widerspruch zur Konstruktion von m_0. □

Beispiel I.1.9. Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt

$$n^2 < 2^n.$$

Beweis.

$$\text{(IA)} \qquad 2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

$$\begin{aligned}
\text{(IS)} \qquad 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\
&> 2n^2 = n^2 + n^2 \\
&= n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n - 1 \\
&= (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2 \\
&\geq (n+1)^2 + 16 - 2 \qquad \text{(wegen } n \geq 5\text{)} \\
&> (n+1)^2.
\end{aligned}$$

□

Eine andere wichtige Konsequenz des Induktionsaxioms ist das Prinzip der rekursiven Definition.

Satz I.1.10 (Prinzip der rekursiven Definition). *Gegeben sei eine Abbildung $g : M \to M$ einer Menge M in sich und ein Element $a \in M$. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $f(0) = a$
(2) $f(n+1) = g(f(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. 1. Schritt: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Abbildung $f_n : \mathbb{N}_n \to M$ mit

(i) $f_n(0) = a$
(ii) $f_n(m+1) = g(f_n(m)) \quad \forall 0 \leq m < n$.

Beweis des 1. Schrittes durch Induktion:
(IA): $f_0(0) = a$ legt f_0 eindeutig fest.
(IS): Definiere f_{n+1} durch

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(m) &= f_n(m) \quad \forall 0 \leq m \leq n \\
f_{n+1}(n+1) &= g(f_n(n)).
\end{aligned}$$

Offensichtlich erfüllt f_{n+1} die Eigenschaften (i) und (ii). Sei nun f'_{n+1} eine weitere Abbildung mit diesen Eigenschaften. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$f_{n+1}(m) = f'_{n+1}(m) \quad \forall 0 \leq m \leq n.$$

Wegen (ii) gilt dann auch

$$f_{n+1}(n+1) = f'_{n+1}(n+1).$$

Damit ist der 1. Schritt bewiesen.
2. SCHRITT: Wir definieren eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ durch

$$f(n) := f_n(n).$$

Dann gilt nach Schritt 1

$$\begin{aligned} f(0) &= f_0(0) = a \\ f(n+1) &= f_{n+1}(n+1) = g(f_n(n)) = g(f(n)). \end{aligned}$$

Also leistet f das Gewünschte.
3. SCHRITT: Sei $f' : \mathbb{N} \to M$ eine weitere Abbildung mit den Eigenschaften (1) und (2). Dann folgt

$$f(0) = a = f'(0)$$

und

$$\begin{aligned} & f(n) = f'(n) \\ \Longrightarrow & f(n+1) = g(f(n)) = g(f'(n)) = f'(n+1). \end{aligned}$$

Aus dem Induktionsprinzip folgt, dass f und f' übereinstimmen. □

Mit Hilfe von Satz I.1.10 kann man zeigen, dass unsere intuitive Definition I.1.6 sinnvoll ist. Ebenso folgt, dass die Summen und Produkte nicht von der Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren abhängen. Wir werden später noch weitere Anwendungen des Rekursionsprinzips kennen lernen.

DEFINITION I.1.11. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_n$ definieren wir

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{k=1}^{n} k && \text{(Fakultät)} \\ \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} && \text{(Binomialkoeffizient).} \end{aligned}$$

SATZ I.1.12. *Für $n \in \mathbb{N}^*$ ist $n!$ gleich der Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$.*

BEWEIS. (IA): $n = 1$ ist klar.
(IS): Für $1 \le k \le n+1$ sei K_k die Klasse aller Anordnungen von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$, die A_k an erster Stelle haben. Offensichtlich sind die K_k disjunkt, und jede Anordnung von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ gehört einer Klasse K_k an. Nach Induktionsvoraussetzung hat jedes K_k genau $n!$ Elemente. Also gibt es

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Anordnungen von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$. □

LEMMA I.1.13. (1) *Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_n$ ist*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(2) *Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $k \in \mathbb{N}^*_{n-1}$ ist*
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. ad (1): Folgt aus Definition 1.11.
ad (2):
$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Satz I.1.14. *Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $k \in \mathbb{N}_n$ ist $\binom{n}{k}$ die Zahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $\{A_1, \ldots, A_n\}$.*

Beweis. Sei C^n_k die Zahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Wir zeigen durch Induktion nach n, dass gilt $C^n_k = \binom{n}{k}$.
(IA): $C^1_0 = 1 = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = C^1_1$.
(IS): Wegen $C^{n+1}_0 = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = C^{n+1}_{n+1}$ können wir $1 \le k \le n$ voraussetzen.
Sei K_0 die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$, die A_{n+1} nicht enthalten, und K_1 die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$, die A_{n+1} enthalten. Offensichtlich sind K_0 und K_1 disjunkt, und jede k-elementige Teilmenge von $\{A_1, \ldots, A_{n+1}\}$ ist in K_0 oder K_1 enthalten. Nach Induktionsvoraussetzung ist
$$|K_0| = C^n_k = \binom{n}{k}$$
$$|K_1| = C^n_{k-1} = \binom{n}{k-1}.$$
Damit folgt die Behauptung aus Lemma I.1.13. □

Satz I.1.14 zeigt, dass die Zahlen $\binom{n}{k}$ natürliche Zahlen sind, was nicht direkt aus der Definition folgt.
Es gibt
$$\binom{49}{6} = 13'983'816$$
6-elementige Teilmengen einer 49-elementigen Menge. Also ist die Chance, im Lotto 6 Richtige zu haben, ca. 1 : 14 Millionen.

Satz I.1.15 (Binomischer Lehrsatz). *Für alle reellen Zahlen x, y und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Wir erinnern daran, dass für jede reelle Zahl z gilt

$$z^0 = 1.$$

Außerdem benutzen wir die Beziehung

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}.$$

(IA): $n = 0$ klar.
(IS):

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}
\end{aligned}$$

wegen Lemma I.1.13. □

Satz I.1.16 (Summenformel für die geometrische Reihe). *Für jede reelle Zahl $x \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis. (IA): $n = 0$ klar
(IS):

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

□

Zum Abschluss dieses Paragraphen kehren wir zum Problem des Abzählens zurück. Intuitiv ist eine endliche Menge dadurch charakterisiert, dass wir ihre Elemente aufzählen können und irgendwann damit fertig werden. Mathematisch heißt dies:

DEFINITION I.1.17. Eine Menge M heißt ENDLICH, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N}_m \to M$ gibt.

SATZ I.1.18. $\mathbb{N}$ *ist nicht endlich.*

BEWEIS. Angenommen, $\mathbb{N}$ wäre endlich. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}$. Definiere

$$k_0 = f(0)$$
$$k_{n+1} = \max\{k_n, f(n+1)\} \quad 0 \le n \le m-1.$$

Offensichtlich gilt

$$k_m \ge f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_m.$$

Mithin ist $k_m + 1 \notin f(\mathbb{N}_m)$; Widerspruch. □

$\mathbb{N}$ ist zwar nicht endlich, aber wir können die Elemente von $\mathbb{N}$ immerhin auf- bzw. abzählen. Dies führt zu:

DEFINITION I.1.19. Eine Menge M heißt ABZÄHLBAR, wenn es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

BEMERKUNG I.1.20. Eine endliche Menge M ist abzählbar. Setze $f : \mathbb{N}_m \to M$ durch

$$f(n) = f(m) \quad \forall n \ge m$$

auf ganz $\mathbb{N}$ fort.

Der folgende Satz zeigt, dass es nicht abzählbare Mengen gibt. Sein Beweis verläuft nach dem Prinzip „Der Barbier, der alle Leute rasiert, die sich nicht selbst rasieren", das auf B. RUSSELL (1872-1970) zurückgeht.

SATZ I.1.21. *Die* POTENZMENGE $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *von* $\mathbb{N}$ *ist nicht abzählbar.*

BEWEIS. Wir nehmen an $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wäre abzählbar. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine surjektive Abbildung. Definiere

$$M = \{n \in \mathbb{N} : n \notin f(n)\}.$$

Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $M = f(m)$ (Surjektivität). Wir erhalten

$$m \in M \Longrightarrow m \notin f(m) = M$$
$$m \notin M \Longrightarrow m \in f(m) \Longrightarrow m \in M;$$

in jedem Fall ein Widerspruch. □

I.2. Die ganzen Zahlen

In $\mathbb{N}$ können wir addieren, multiplizieren und Zahlen miteinander vergleichen. Es gibt aber z.B. keine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n + 5 = 3.$$

Um dieses Manko zu beheben, definieren wir NEGATIVE ZAHLEN durch

(1) $-m$ ist für $m \in \mathbb{N}^*$, die Zahl mit $m + (-m) = 0$.

(2) $-0 = 0$.

Man kann zeigen, dass diese Definition sinnvoll ist. Die GANZEN ZAHLEN $\mathbb{Z}$ sind dann gegeben durch

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-m : m \in \mathbb{N}^*\}.$$

Als nächstes setzen wir die Addition, Multiplikation und die Relation $\leq$ auf $\mathbb{Z}$ wie folgt fest:

$$\begin{aligned}
(-m) + (-n) &= -(m+n) \\
m + (-n) &= (-n) + m \\
&= \begin{cases} l & \text{falls } m \geq n, m = n + l, \\ -(n + (-m)) & \text{falls } m < n. \end{cases} \\
m \cdot (-n) &= (-n) \cdot m \\
&= -(n \cdot m) \\
(-m) \cdot (-n) &= m \cdot n \\
-m &< 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \\
-m &\leq -n \iff n \leq m.
\end{aligned}$$

Man kann zeigen:

SATZ I.2.1. (1) *Die Addition auf* $\mathbb{Z}$ *ist kommutativ und assoziativ.* 0 *ist das neutrale Element. Für jedes* $p \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$p + (-p) = 0.$$

$(\mathbb{Z}, +)$ *ist eine* ABELSCHE GRUPPE.
(2) *Die Multiplikation auf* $\mathbb{Z}$ *ist kommutativ und assoziativ mit neutralem Element* 1. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *ist eine* KOMMUTATIVE HALBGRUPPE.
(3) *Es gilt das Distributivgesetz.* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *ist ein* RING.
(4) *Die Ordnung* $\leq$ *ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *ist totalgeordnet.*
(5)

$$\begin{aligned}
p \leq q &\iff \exists\, l \in \mathbb{N} : p + l = q \\
p < q &\iff \exists\, l \in \mathbb{N}^* : p + l = q
\end{aligned}$$

(6) $\forall p \in \mathbb{Z} \ \nexists q \in \mathbb{Z}$ *mit*

$$p < q < p + 1.$$

(7) $p \leq q \iff p + r \leq q + r \quad \forall r \in \mathbb{Z}$
(8) $\forall p, q \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ *gilt*

$$\begin{aligned}
p \leq q &\iff kp \leq kq \iff (-k)q \leq (-k)p \\
p < q &\iff kp < kq \iff (-k)q < (-k)p.
\end{aligned}$$

Satz I.1.3 (S. 6) kann in $\mathbb{Z}$ nicht mehr gelten, da

$$M = \{p \in \mathbb{Z} : p \le 0\}$$

offensichtlich kein Minimum besitzt. Um eine adäquate Variante von Satz I.1.3 zu beweisen, benötigen wir eine Definition.

Definition I.2.2. Eine Teilmenge M von $\mathbb{Z}$ heißt NACH OBEN bzw. NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn es ein $p \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$p > q \quad \forall q \in M$$

bzw.

$$p < q \quad \forall q \in M.$$

Satz I.2.3. *Jede nach oben bzw. nach unten beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Maximum bzw. Minimum.*

Beweis. Sei M nach oben beschränkt. Dann ist

$$N = \{n \in \mathbb{N} : n > q \quad \forall q \in M\}$$

nicht leer und besitzt nach Satz I.1.3 (S. 6) ein Minimum n_0.
Fall 1: $n_0 \ge 1$: Dann ist offensichtlich $n_0 - 1$ das gesuchte Maximum von M.
Fall 2: $n_0 = 0$: Dann ist

$$N' = \{n \in \mathbb{N} : (-n) \in M\}$$

nicht leer und besitzt nach Satz I.1.3 (S. 6) ein Minimum n_1. Wegen $n_0 = 0$ ist $(-n_1)$ das gesuchte Maximum von M.
Falls M nach unten beschränkt ist, folgt die Behauptung aus dem Gezeigten und der leicht zu beweisenden Beziehung

$$\min M = -\max\{-m : m \in M\}.$$

□

Wir haben $\mathbb{Z}$ in gewissem Sinn durch „Verdoppelung“ von $\mathbb{N}$ erhalten. Der folgende Satz zeigt, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ die gleiche Mächtigkeit haben.

Satz I.2.4. *$\mathbb{Z}$ ist abzählbar.*

Beweis. Definiere $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(2n) &= n, \\ f(2n-1) &= -n. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist f surjektiv. □

I.3. Die rationalen Zahlen

Die ganzen Zahlen erlauben uns die Lösung von Gleichungen der Form

$$p + q = r.$$

Jedoch gibt es keine ganze Zahl p mit

$$2p = 1.$$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&p = 0 \Longrightarrow 2p = 0 \neq 1.\\
&p > 0 \Longrightarrow p \geq 1 \Longrightarrow 2p \geq 2 > 1.\\
&p < 0 \Longrightarrow p \leq -1 \Longrightarrow 2p \leq -2 < 1.
\end{aligned}$$

Um dieses Manko zu beheben, definieren wir für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ als $\frac{p}{q}$ die Zahl x, die die Gleichung

$$qx = p$$

löst, und setzen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Bei dieser Definition muss man natürlich alle Brüche der Form $\frac{(rp)}{(rq)}$ mit $r \in \mathbb{Z}^*$ mit $\frac{p}{q}$ identifizieren. Wir gehen hier auf diese Details aber nicht ein, da wir nur an der prinzipiellen Konstruktion interessiert sind.
Wir setzen die Addition, Multiplikation und die Ordnung $\leq$ wie folgt auf $\mathbb{Q}$ fort:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} + \frac{r}{s} &= \frac{ps + rq}{qs}\\
\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} &= \frac{pr}{qs}\\
\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} &\quad \Longleftrightarrow \quad sp \leq rq
\end{aligned}$$

Man kann zeigen:

Satz I.3.1. (1) *Die Addition auf* $\mathbb{Q}$ *ist kommutativ und assoziativ mit neutralem Element* 0. *Zu jedem* $x \in \mathbb{Q}$ *gibt es ein* $y \in \mathbb{Q}$ *mit* $x + y = 0$. $(\mathbb{Q}, +)$ *ist eine* Abelsche Gruppe.
(2) *Die Multiplikation auf* $\mathbb{Q}$ *ist kommutativ und assoziativ mit neutralem Element* 1. *Zu jedem* $x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ *gibt es ein* $y \in \mathbb{Q}^*$ *mit* $x \cdot y = 1$. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ *ist eine* Abelsche Gruppe.
(3) *Es gilt das Distributivgesetz.* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *ist ein* Körper.
(4) *Die Relation* $\leq$ *ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. Für je zwei* $x, y \in \mathbb{Q}$ *ist genau eine der Beziehungen*

$$x < y \ , \ x = y \ , \ y < x$$

erfüllt. Es gilt

(a) $$x < y \Longrightarrow x + z < y + z \quad \forall z \in \mathbb{Q}$$

(b) $$x > 0, y > 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0.$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ *ist ein* ANGEORDNETER KÖRPER.

Der folgende Satz zeigt, dass $\mathbb{Q}$ die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ hat. Die Beweisidee ist als sog. DIAGONALVERFAHREN bekannt.

SATZ I.3.2. *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

BEWEIS. Gemäß Satz I.2.4 (S. 15) ist $\mathbb{Z}$ abzählbar, d.h., wir können $\mathbb{Z}$ in der Form
$$\mathbb{Z} = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$$
darstellen, wobei wir o.E. $p_0 = 0$ wählen können. Wir ordnen nun die Elemente von $\mathbb{Q}$ in folgendem quadratischen Schema an und zählen sie wie angedeutet ab:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overset{0}{0} & \longrightarrow & \overset{1}{\frac{p_1}{p_1}} & \longrightarrow & \overset{2}{\frac{p_2}{p_1}} & & \overset{6}{\frac{p_3}{p_1}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
 & & \overset{3}{\frac{p_1}{p_2}} & & \overset{5}{\frac{p_2}{p_2}} & & \frac{p_3}{p_2} & & \cdots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & & & & \\
 & & \overset{4}{\frac{p_1}{p_3}} & & \frac{p_2}{p_3} & & \frac{p_3}{p_3} & & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots
\end{array}$$

□

I.4. Die reellen Zahlen

SATZ I.4.1. *Es gibt keine rationale Zahl x mit*
$$x^2 = 2.$$

BEWEIS. Angenommen, $x \in \mathbb{Q}$ löse obige Gleichung. Dann ist $x \neq 0$. O.E. können wir $x > 0$ voraussetzen, sonst gehen wir zu $-x$ über. Wir stellen x dar als
$$x = \frac{p}{q}$$
mit teilerfremden Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Dann folgt
$$x^2 = 2 \Longrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Longrightarrow p^2 = 2q^2.$$
Da das Quadrat einer ungeraden Zahl stets ungerade ist, folgt $p = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$. Also
$$2q^2 = p^2 = 4n^2 \Longrightarrow q^2 = 2n^2.$$
Mithin ist $q = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}^*$, im Widerspruch zu Teilerfremdheit von p und q. □

Andererseits können wir eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ beliebig gut durch rationale Zahlen „approximieren". Um dies einzusehen, definieren wir Zahlen $a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$, rekursiv wie folgt (INTERVALLSCHACHTELUNG):

$$a_0 = 1, b_0 = 2$$
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = b_n, & \text{falls } \frac{(a_n+b_n)^2}{4} < 2 \\ a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n), & \text{falls } \frac{(a_n+b_n)^2}{4} > 2. \end{cases}$$

(Man beachte, dass wegen Satz I.4.1 der Fall $\frac{(a_n+b_n)^2}{4} = 2$ nicht auftreten kann.)
Durch Induktion zeigt man leicht:

$$a_n, b_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$
$$a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$
$$a_n^2 < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$
$$b_n^2 > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$
$$b_n - a_n \leq 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Wenn wir uns die rationalen Zahlen auf einer Geraden angeordnet denken, zeigt obige Konstruktion, dass diese Gerade „Lücken" hat. Um diese Beobachtung zu präzisieren, benötigen wir einige Bezeichnungen.

DEFINITION I.4.2. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper und $M \subset K$ nicht leer.
(1) Die Menge M heißt NACH OBEN bzw. NACH UNTEN BESCHRÄNKT, wenn es ein $x \in K$ gibt mit

$$y \leq x \text{ bzw. } x \leq y$$

für alle $y \in M$. Jedes derartige x heißt OBERE bzw. UNTERE SCHRANKE von M.
(2) Falls M nach oben bzw. nach unten beschränkt ist, heißt ein $x \in K$ SUPREMUM bzw. INFIMUM von M, kurz $x = \sup M$ bzw. $x = \inf M$, wenn x eine obere bzw. untere Schranke von M ist und für jede andere obere bzw. untere Schranke x^* von M gilt

$$x \leq x^* \text{ bzw. } x^* \leq x.$$

BEMERKUNG I.4.3. Infimum und Supremum sind eindeutig.

DEFINITION I.4.4. Ein angeordneter Körper heißt ORDNUNGSVOLLSTÄNDIG, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat.

LEMMA I.4.5. *Sei K ein angeordneter Körper. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) *K ist ordnungsvollständig.*

(2) *Jede nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.*
(3) *Für je zwei nicht leere Teilmengen A, B von K mit*

$$a \le b \quad \forall a \in A, b \in B$$

gibt es ein $c \in K$ mit

$$a \le c \le b \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $A \subset K, A \neq \emptyset$ nach unten beschränkt. Definiere

$$B = \{x \in K : x \le a \quad \forall a \in A\}.$$

Dann ist B nicht leer und nach oben beschränkt. Wegen (1) existiert $b = \sup B$. Konstruktionsgemäß ist $b = \inf A$.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Aus (2) folgt, dass $m = \inf B$ existiert. Wegen $a \le b$ für alle $a \in A, b \in B$ folgt

$$a \le m \le b \quad \forall a \in A, b \in B.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1): Sei $A \subset K, A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Definiere

$$B = \{x \in K : x \ge a \quad \forall a \in A\}.$$

Aus (3) folgt, dass es ein $c \in K$ gibt mit

$$a \le c \le b \quad \forall a \in A, b \in B.$$

Aus Definition I.4.2 folgt

$$c = \sup A.$$

□

Wir können nun unsere oben gewonnene intuitive Vorstellung von der Lückenhaftigkeit von $\mathbb{Q}$ präzisieren.

Satz I.4.6. *$\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an und definieren

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \ \text{ und } x^2 < 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \ \text{ und } x^2 > 2\}.$$

Dann ist $1 \in A$ und $2 \in B$, und für $a \in A, b \in B$ gilt

$$b - a = \frac{b^2 - a^2}{b + a} > 0 \Longrightarrow b > a.$$

Wegen unserer Annahme und wegen Lemma I.4.5 gibt es ein $c \in \mathbb{Q}$ mit $a \le c \le b$ für alle $a \in A, b \in B$. Definiere

$$x = c - \frac{c^2 - 2}{c + 2}.$$

Dann folgt

$$x = \frac{2c + 2}{c + 2} > 0 \text{ (wegen } c > 0)$$

$$x^2 - 2 = \frac{2c^2 - 4}{(c+2)^2} = \frac{2(c^2 - 2)}{(c+2)^2}.$$

1. Fall $c^2 > 2$: $\Longrightarrow x^2 > 2$ und $x < c \Longleftrightarrow x \in B$ und $x < c$ Widerspruch!
2. Fall $c^2 < 2$: $\Longrightarrow x > c$ und $x^2 < 2 \Longleftrightarrow x \in A$ und $x > c$ Widerspruch!
Also ist $c^2 = 2$ im Widerspruch zu Satz I.4.1. $\square$

Wir kommen nun zum Hauptsatz über die reellen Zahlen. Sein Beweis stammt von R. Dedekind (1832-1916). Wir skizzieren hier nur die wesentlichen Punkte der Dedekindschen Konstruktion und verweisen für Details auf das Buch von Landau.

Satz I.4.7 (Dedekindscher Hauptsatz). *Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen ordnungsvollständigen Körper, den Körper $\mathbb{R}$ der* reellen Zahlen, *der $\mathbb{Q}$ enthält und auf $\mathbb{Q}$ die natürliche Ordnung induziert.*

Beweisidee. (1) Wir nennen eine nicht leere Teilmenge S von $\mathbb{Q}$ einen Schnitt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
 (i) $s < q \quad \forall s \in S, q \in \mathbb{Q} \backslash S$
 (ii) $\nexists\, s \in S$ mit $s \geq t \quad \forall t \in S$.

Schnitte sind also nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{Q}$, die ihr Supremum (sofern überhaupt existent) nicht enthalten.
(2) Zwei Schnitte heißen gleich, wenn Sie im mengentheoretischen Sinn gleich sind.
(3) Man definiert $S < T$, falls es ein $t \in T$ gibt mit $t > s$ für alle $s \in S$.
(4) $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ ist ein Schnitt.
(5) $S \cdot T = \{s \cdot t : s \in S, t \in T\}$ ist ein Schnitt.
(6) Man zeigt, dass die Menge aller Schnitte zusammen mit $+, \cdot$ und $\leq$ ein angeordneter Körper ist.
(7) $p \in \mathbb{Q} \Longrightarrow P = \{q \in \mathbb{Q} : q < p\}$ ist ein Schnitt. Die Schnitte „umfassen“ also $\mathbb{Q}$.
(8) Die Menge der Schnitte ist ordnungsvollständig. $\square$

Bemerkung I.4.8. Wir haben folgende Kette natürlicher Inklusionen

$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$
		Ring		Körper		ordnungsvollst. Körper.

Für das Weitere ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen einzuführen.

Definition I.4.9. (1) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$.
(2) Wir definieren zwei Symbole $-\infty$ und $+\infty$ mit der Eigenschaft

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(3) $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.
(4) Sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Dann setzen wir

$$\inf M = -\infty \iff M \text{ ist nicht nach unten beschränkt.}$$
$$\sup M = +\infty \iff M \text{ ist nicht nach oben beschränkt.}$$

Satz I.4.10 (Satz von Archimedes). (1) *$\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, d.h., zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.*
(2) *Zu jedem $x \in \mathbb{R}_+^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\frac{1}{n} < x.$$

Beweis. ad (1): Offensichtlich ist nur für $x > 0$ etwas zu zeigen. Definiere

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

Wegen $A \neq \emptyset$ existiert $s = \sup A$. Aus der Definition des Supremums folgt, dass es ein $a \in A$ mit $a > s - \frac{1}{2}$ gibt. Setze $m = a + 1 \in \mathbb{N}$. Wegen

$$m > s + \frac{1}{2}$$

ist $m \notin A$ und somit

$$x < m.$$

ad (2): Wegen $x > 0$ folgt die Behauptung aus Teil (a) angewandt auf $\frac{1}{x}$. □

Satz I.4.11. *Die rationalen und die irrationalen Zahlen, d.h. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, liegen dicht in $\mathbb{R}$, d.h., zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ und ein $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit*

$$a < q < b \quad \textit{und} \quad a < x < b.$$

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wegen Satz I.4.10 gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n > \frac{1}{b-a}.$$

Also ist

$$nb > na + 1.$$

Ebenso folgt aus Satz I.4.10, dass es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$m - 1 \leq na < m.$$

Damit folgt

$$na < m \leq na + 1 < nb$$

also

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Aus dem soeben Gezeigten folgt die Existenz von zwei rationalen Zahlen r_1, r_2 mit

$$a < r_1 < r_2 < b.$$

Definiere
$$x = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}} > r_1.$$
Dann ist $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Denn andernfalls wäre
$$\sqrt{2} = \frac{r_2 - r_1}{x - r_1}$$
aus $\mathbb{Q}$ im Widerspruch zu Satz I.4.1. Außerdem ist
$$r_2 - x = (r_2 - r_1)(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0.$$
Also ist
$$a < r_1 < x < r_2 < b.$$
$\square$

SATZ I.4.12. *Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ und alle $n \in \mathbb{N}^*$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$.*

BEWEIS. EINDEUTIGKEIT: Seien x, y zwei Lösungen. O.E. ist $x < y$. Durch Induktion über n folgt $x^n < y^n$.
EXISTENZ: Die Fälle $n = 1$ und $a \in \{0, 1\}$ sind offensichtlich. Sei also $n \geq 2$ und $a \neq 0, a \neq 1$.
FALL $a > 1$: Definiere
$$A = \{x \in \mathbb{R}_+ : x^n \leq a\}.$$
Aus $a > 1$ folgt
$$1 \in A$$
und
$$x \geq a \Longrightarrow x^n \geq a^n > a$$
und somit
$$x \leq a \quad \forall x \in A.$$
Also existiert
$$s = \sup A.$$
Wir wollen zeigen: $s^n = a$.
ANN. $s^n < a$: Definiere
$$b = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k > 0$$
und wähle
$$0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{a - s^n}{b}\}.$$
Dann folgt
$$(s + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} + s^n$$

$$\begin{aligned}&\le \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k + s^n \\ &= \varepsilon b + s^n \\ &< a\end{aligned}$$

Im Widerspruch zu $s = \sup A$.
ANN. $s^n > a$: Definiere

$$c = \sum_{\substack{j \\ 0<2j-1\le n}} \binom{n}{2j-1} s^{n-2j+1} > 0$$

und wähle

$$0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{s^n - a}{c}\}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}(s-\varepsilon)^n &= s^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} \\ &= s^n + \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \underbrace{\binom{n}{n-l}}_{=\binom{n}{l}} s^{n-l} \varepsilon^l \\ &= s^n + \sum_{\substack{j \\ 0<2j\le n}} \binom{n}{2j} s^{n-2j} \varepsilon^{2j} - \sum_{\substack{j \\ 0<2j-1\le n}} \binom{n}{2j-1} s^{n-2j+1} \varepsilon^{2j-1} \\ &\ge s^n - \varepsilon \sum_{\substack{j \\ 0<2j-1\le n}} \binom{n}{2j-1} s^{n-2j+1} \\ &= s^n - \varepsilon c \\ &> a\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $s = \sup A$.
Also ist $s^n = a$.
FALL $a < 1$: Gemäß Obigem gibt es genau ein y mit $y^n = \frac{1}{a}$. $x = \frac{1}{y}$ ist die gesuchte Lösung. □

BEMERKUNG I.4.13. (1) Für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}^*$ hat die Gleichung $x^n = a$ genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$. Nämlich $x = y$ und $x = -y$, wobei $y \in \mathbb{R}_+^*$ die eindeutige Lösung in $\mathbb{R}_+$ ist.
(2) Für $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $x^n = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}_+$ folgt dies aus Satz I.4.12, für $a < 0$ aus Satz I.4.12 angewandt auf $-a$.
(3) Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}_+$ die eindeutige Lösung von $x^n = a$. Dann schreibt man $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m.$$

Bemerkung I.4.14. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und rationale Zahlen $a_0, \ldots, a_n$ gibt mit

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Insbesondere sind alle rationalen Zahlen algebraisch. $\sqrt{2}$ ist algebraisch, aber nicht rational. Interessanterweise gibt es aber auch reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind. Solche Zahlen heißen transzendent. π ist z.B. transzendent.

Der folgende Satz zeigt, dass die Dedekindsche Konstruktion die Menge $\mathbb{Q}$ wesentlich vergrößert.

Satz I.4.15. *$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass die Menge

$$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \text{ und } x \leq 1\}$$

nicht abzählbar ist.
Wir nehmen das Gegenteil an. Dann ist

$$[0,1] = \{x_0, x_1, \ldots\},$$

wobei o.E. $x_0 = 0$ gilt. Wir können jedes x_n als (unendlichen) Dezimalbruch in der Form

$$x_n = 0.a_{n1}a_{n2}\ldots$$

mit $a_{nk} \in \mathbb{N}_9$ und $a_{nk} \neq 0$ für ein $k \in \mathbb{N}^*$ darstellen. Wir definieren eine neue Zahl

$$c = 0.c_1 c_2 \ldots$$

wie folgt

$$c_n = \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{nn} \neq 5 \\ 4, & \text{falls } a_{nn} = 5 \end{cases}$$

Offensichtlich ist $0 < c$ und $c < 1$ und $c \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch. $\square$

Zum Abschluss dieses Paragraphen führen wir noch einige nützliche Bezeichnungen ein.

Definition I.4.16. Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert als

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Satz I.4.17. *Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Dann gilt:*

(1) $|x| = |-x|$.
(2) $|x| \geq 0, |x| = 0 \iff x = 0$.
(3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).
(4) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
(5) $|x - y| \leq \varepsilon \iff y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$.
(6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

BEWEIS. Übungsaufgabe. □

DEFINITION I.4.18. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann definieren wir:
(1) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (ABGESCHLOSSENES INTERVALL).
(2) $(a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\}$ (OFFENES INTERVALL).
(3) $[a, b) = [a, b] \setminus \{b\}$.
(4) $(a, b] = [a, b] \setminus \{a\}$.

I.5. Die komplexen Zahlen

Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$, besitzt die Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine reelle Lösung. Wir wollen einen möglichst kleinen Oberkörper von $\mathbb{R}$ konstruieren, in dem diese Gleichung lösbar ist. Dazu gehen wir wie folgt vor: Wir definieren formal die IMAGINÄRE EINHEIT i durch die Beziehung

$$i^2 = -1$$

und definieren die KOMPLEXEN ZAHLEN $\mathbb{C}$ durch

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Dabei vereinbaren wir sinnvollerweise

$$0 \cdot i = 0,$$

so dass $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ enthalten ist. Wir setzen die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ durch

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$
$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + uy)$$

fort. Man kann zeigen:

SATZ I.5.1. (1) *$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Oberkörper von $\mathbb{R}$, in dem die Gleichung $z^2 = -1$ genau die Lösungen $z = \pm i$ hat.*
(2) *Jeder Oberkörper von $\mathbb{R}$, in dem die Gleichung $z^2 = -1$ lösbar ist, ist auch ein Oberkörper von $\mathbb{C}$.*

Der Beweis von Teil (1) ist langweilig. Beim Nachweis der Körpereigenschaften, muss man u.a. zeigen, dass für $x, y \in \mathbb{R}^*$ gilt

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

so dass wir die folgende Divisionsregel erhalten

$$\frac{u + iv}{x + iy} = \frac{xu + yv}{x^2 + y^2} + i\frac{xv - yu}{x^2 + y^2}.$$

Bemerkung I.5.2. Stellen wir komplexe Zahlen $z = x + iy$ als Vektoren in der x, y-Ebene dar, so entspricht die Addition zweier komplexer Zahlen der Addition der entsprechenden Vektoren. Die Multiplikation $w \cdot z$ entspricht einer Drehung um den von z und der x-Achse eingeschlossenen Winkel gefolgt von einer Streckung um den Faktor $\sqrt{x^2 + y^2}$ (vgl. Abb. I.5.1).

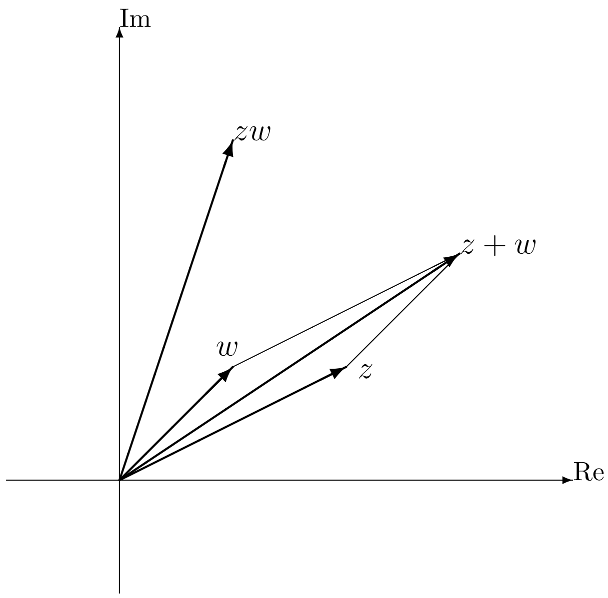

Abbildung I.5.1. Addition und Multiplikation von $z = 2 + i$ und $w = 1 + i$

Bemerkung I.5.3. $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden. Denn sonst würde für jedes $z \in \mathbb{C}$ gelten

$$z^2 \geq 0 \neq -1.$$

Definition I.5.4. Sei $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$, eine komplexe Zahl. Dann heißen

$$\begin{aligned} \text{Re } z = x & \quad \text{der Realteil von } z, \\ \text{Im } z = y & \quad \text{der Imaginärteil von } z \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} & \quad \text{der Betrag von } z, \\ \overline{z} = x - iy & \quad \text{die zu } z \text{ konjugierte Zahl.} \end{aligned}$$

Satz I.5.5. *Es gelten folgende Rechenregeln* ($z = x + iy, w = u + iv, x, y, u, v \in \mathbb{R}$):

(1) $\text{Re } z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\text{Im } z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
(2) $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
(3) $\overline{(\overline{z})} = z$
(4) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(5) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
(6) $|z| \geq 0, |z| = 0 \iff z = 0$
(7) $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$
(8) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
(9) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
(10) $||z| - |w|| \leq |z - w|$
(11) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$
(12) $z \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Übereinkunft: Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$ stets $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

KAPITEL II

Folgen und Reihen

In diesem Kapitel betrachten wir Folgen und Reihen in $\mathbb{K}$. Wesentlich ist der Grenzwertbegriff und die Vollständigkeit von $\mathbb{K}$.
Die Ergebnisse sind einerseits von eigenständigem Interesse, indem sie wichtige Beweistechniken einführen. Andererseits sind sie Einleitung zu späteren Kapiteln, indem sie z.B. nichttriviale Beispiele normierter Vektorräume liefern oder den Begriff der Vollständigkeit motivieren.

II.1. Konvergenz von Folgen

DEFINITION II.1.1. Eine FOLGE (in $\mathbb{K}$) ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{K}$; jedem $n \in \mathbb{N}$ ist ein Wert $x_n \in \mathbb{K}$ zugeordnet. Wir schreiben hierfür $(x_0, x_1, \ldots)$ oder kürzer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

BEMERKUNG II.1.2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist von der Punktmenge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu unterscheiden.

DEFINITION II.1.3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$. Dann heißt a HÄUFUNGSPUNKT (kurz HP) von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unendliche Teilmenge N_ε von $\mathbb{N}$ gibt mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in N_\varepsilon.$$

Der folgende Satz gibt eine äquivalente, häufig praktischere Definition des HP. Sein Beweis ist offensichtlich.

SATZ II.1.4. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *a ist HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
(2) *$\forall \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \geq n : |x_m - a| < \varepsilon$.*

BEISPIEL II.1.5. (1) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ hat den HP a.
(2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ hat den HP 0.
(3) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die HPe 1 und -1.
(4) $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die HPe $1, -1, i, -i$.
(5) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$ hat keinen HP.
(6) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 = 1, x_1 = 1$ und

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

hat keinen HP. (FIBONACCI FOLGE)
(7) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Dann ist jedes $a \in \mathbb{R}$ ein HP.

Beweis. (1) Ist offensichtlich.
(2) Folgt aus Satz I.4.10 (S. 21).
(3)–(5) Trivial.
(6) Man zeigt durch Induktion $x_n \geq n$ für alle $n \geq 1$.
(7) Angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist kein HP. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n > n_0.$$

Insbesondere ist

$$\delta = \min\{\varepsilon_0, \min\{|x_n - a| : n \leq n_0, x_n \neq a\}\}$$

wohldefiniert und positiv. Dann enthält $(a, a + \frac{\delta}{2})$ keine rationale Zahl im Widerspruch zu Satz I.4.11 (S. 21). □

Definition II.1.6. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt KONVERGENT, wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - a| < \varepsilon.$$

a heißt dann der GRENZWERT von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir schreiben kurz

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \text{ oder } a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Eine Folge, die keinen Grenzwert hat, heißt DIVERGENT.

Beispiel II.1.5 (Forts.). (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
(3)–(7) Die Folgen sind divergent.

Definition II.1.7. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt BESCHRÄNKT, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_+$ gibt mit

$$|x_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Satz II.1.8. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann existiert $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| \leq 1 \quad \forall n \geq n_1.$$

Also ist

$$|x_n| \leq |a| + |x_n - a| \leq |a| + 1 \quad \forall n \geq n_1.$$

Setze

$$c = \max\{|a| + 1, \max\{|x_n| : n < n_1\}\}.$$

Dann folgt

$$|x_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Beispiel II.1.9. Beispiele II.1.5 (3) und (4) zeigen, dass die Umkehrung von Satz II.1.8 i. a. falsch ist.

Satz II.1.10. *Es gelte* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. *Dann ist* a *der einzige HP von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Insbesondere ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Aus den Definitionen II.1.3 und II.1.6 folgt, dass a HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Sei $b \in \mathbb{K}\backslash\{a\}$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}|b-a|$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Also ist

$$\begin{aligned} |x_n - b| &\geq ||b-a| - |x_n - a|| \\ &\geq |b-a| - |x_n - a| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon \\ &= \varepsilon \qquad\quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Mithin ist b kein HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Bemerkung II.1.11. Die Folge $(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots)$ zeigt, dass die Umkehrung von Satz II.1.10 i. a. falsch ist.

Definition II.1.12. Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung. Dann heißt

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel II.1.13. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die konstanten Teilfolgen $((-1)^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz II.1.14. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$
(2) $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ *für jede Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Wegen der Monotonie von φ gibt es ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$n_k \geq n_\varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Wähle für φ die identische Abbildung. □

Satz II.1.15. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) a *ist HP von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) *Es gibt eine Teilfolge* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *von* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Wir konstruieren eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv. Setze $n_0 = 0$. Es seien $n_0 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$ gewählt. Da a HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, existiert ein $n \geq n_{k-1} + 1$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{k}.$$

Definiere

$$n_k = \min\{n : n > n_{k-1} \text{ und } |x_n - a| < \frac{1}{k}\}.$$

Offensichtlich ist die so konstruierte Abbildung $k \to n_k$ streng monoton wachsend.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Konstruktionsgemäß gilt

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon.$$

Also gilt $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Folgt direkt aus den Definitionen II.1.3, II.1.6 und II.1.12.
$\square$

Als nächstes leiten wir einige sehr nützliche Regeln für das Rechnen mit konvergenten Folgen her. Dazu benötigen wir folgende Definition:

Definition II.1.16. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Nullfolge genau dann, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Lemma II.1.17. (1) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge $\Longleftrightarrow$ $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.*
(2) *$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Longleftrightarrow (x_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.*
(3) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathbb{K}$ und $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge in $\mathbb{R}_+$. Weiter gebe es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$|x_n| \leq r_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Nullfolge.

Beweis. (1) und (2) sind klar.
ad(3): Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n'_ε mit

$$|r_n| = r_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n'_\varepsilon.$$

Setze $n_\varepsilon = \max\{n_0, n'_\varepsilon\}$. Dann folgt

$$|x_n| < r_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

$\square$

Satz II.1.18. *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen und $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Zahl. Dann gilt:*

(1) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow \alpha x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha a$

(2) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ *und* $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \Longrightarrow x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$

(3) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt* $\Longrightarrow x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(4) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ *und* $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b \Longrightarrow x_n \cdot y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \cdot b$

(5) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ *und* $a \neq 0 \Longrightarrow$ *es existiert ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $x_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$ *und* $\frac{1}{x_n} \underset{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$.

(6) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow |x_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a|$.

Beweis. (1) O.E. ist $\alpha \neq 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Dann folgt

$$|\alpha x_n - \alpha a| = |\alpha||x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

(2) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ und $n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1}$$
$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_2}.$$

Setze $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$. Dann folgt

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

(3) Es existiert ein $c > 0$ mit

$$|y_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{c} \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Dann folgt

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq c|x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

(4) Es ist

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = (x_n - a)y_n + a(y_n - b) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Behauptung folgt somit aus Satz II.1.8 (y_n ist beschränkt), Lemma II.1.17 Teil (3) und Teil (2).

(5) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Daraus folgt

$$|x_n| \geq |a| - |x_n - a| > \frac{|a|}{2} > 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Weiter folgt für alle $n \geq n_0$

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|x_n - a|}{|x_n \cdot a|} \leq \frac{2}{|a|^2}|x_n - a|.$$

Damit folgt die Behauptung aus Lemma II.1.17.
(6) Die Behauptung folgt aus Definition II.1.6 und

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

□

Abschließend noch ein wichtiges Vergleichskriterium für konvergente Folgen.

Satz II.1.19. (1) *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ und $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim_{n\to\infty} y_n$. Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gelte*

$$x_n \leq y_n.$$

Dann ist

$$a \leq b.$$

(2) *Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} y_n$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine dritte Folge in $\mathbb{R}$. Es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann folgt, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und

$$a = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ und ein $n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} & |x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1} \\ \Longrightarrow \quad & a - \varepsilon < x_n \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & |y_n - b| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_2} \\ \Longrightarrow \quad & y_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Weiter gibt es ein $n_\varepsilon \geq \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$ mit

$$x_{n_\varepsilon} \leq y_{n_\varepsilon}.$$

Damit folgt

$$a - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq y_{n_\varepsilon} < b + \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a - b \leq 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, folgt hieraus die Behauptung.
(2) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ und $n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |x_n - a| &< \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_1}, \\ |y_n - a| &< \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Setze $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}, n_0\}$. Dann folgt

$$a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung II.1.20. Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = -\frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{1}{n}$ zeigen, dass aus

$$x_n < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i. a. nicht folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n.$$

II.2. Vollständigkeit

Definition II.2.1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$x_{n+1} \ge x_n \qquad \text{bzw. } x_{n+1} \le x_n.$$

Satz II.2.2. *Jede monoton wachsende bzw. monoton fallende, beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist konvergent, und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung nur für monoton wachsende Folgen. Der Beweis für monoton fallende Folgen verläuft völlig analog.
Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend und beschränkt. Wegen Satz I.4.7 (S. 20) existiert

$$s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Definition des Supremums folgt, dass es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \le s.$$

Wegen der Monotonie gilt diese Ungleichung für alle $n \ge n_\varepsilon$. □

Beispiel II.2.3. (1) Sei $a \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^n &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0, && \text{falls } |a| < 1 \\ a^n &\xrightarrow[n\to\infty]{} 1, && \text{falls } a = 1 \\ (a^n)_{n\in\mathbb{N}} & && \text{divergiert, falls } |a| \ge 1 \text{ und } a \ne 1. \end{aligned}$$

(2) Sei $a \in \mathbb{K}$ mit $|a| < 1$ und $r \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt

$$n^r a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
(4) Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
(5) Die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Der Grenzwert heißt EULERSCHE ZAHL und wird mit e bezeichnet. Es ist

$$2 < e \le 3.$$

(6) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

BEWEIS. (1) Angenommen $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sei $\alpha = \lim_{n\to\infty} a^n$. Für die Teilfolge $(a^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k = k+1$ gilt dann $\alpha = \lim_{k\to\infty} a^{k+1}$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{k\to\infty} a^{k+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} (a\cdot a^k) \\ &= a\cdot \lim_{k\to\infty} a^k \\ &= \alpha a.\end{aligned}$$

Also ist $\alpha = 0$ oder $a = 1$.
Sei $|a| < 1$. Dann ist $(|a|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent. Aus Obigem folgt

$$\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0.$$

Lemma II.1.17(3) (S. 32) liefert $a^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Sei $|a| = 1$ und $a \ne 1$. Angenommen $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$ im Widerspruch zu $|a|^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $|a| > 1$. Dann folgt $\left(\frac{1}{a}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{|a^n|} < \varepsilon \quad \forall n \ge n_\varepsilon.$$

Also ist $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt. Damit folgt die Behauptung aus Satz II.1.8 (S. 30).
(2) O.E. ist $a \ne 0$. Setze $\alpha = |a|$ und

$$x_n = n^r \alpha^n.$$

Dann gilt

$$x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

und

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^r}{n^r}\frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = (1+\frac{1}{n})^r \alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Sei $\beta \in (\alpha, 1)$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mit

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \beta \qquad \forall n \geq n_0,$$

d.h.

$$0 < x_{n+1} \leq \beta x_n \qquad \forall n \geq n_0.$$

Damit folgt durch Induktion

$$x_n \leq x_{n_0} \beta^{n-n_0} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Also gilt

$$|n^r a^n| = x_n \leq x_{n_0} \beta^{n-n_0} \underset{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_0}}{\longrightarrow} 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung zusammen mit Lemma II.1.17 (S. 32).
(3): Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $0 < \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$ folgt aus Teil (2):

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{1+\varepsilon})^n = 0.$$

Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mit

$$\begin{aligned} & 0 < n(\frac{1}{1+\varepsilon})^n < 1 \quad \forall n \geq n_0 \\ \iff \quad & 1 \leq n < (1+\varepsilon)^n \quad \forall n \geq n_0 \\ \iff \quad & 1 \leq \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mit Satz II.1.19 (S. 34).
(4): Wegen $a > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} < a < n \quad \forall n \geq n_0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq n_0.$$

Damit folgt die Behauptung aus Teil (3) und Satz II.1.19 (S. 34).
(5): Definiere

$$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Aus der Binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} \quad \text{wegen } k! \ge 2^{k-1} \\
&= 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\le 1 + 2 \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt insbesondere

$$
(*) \qquad e_n \le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \le 3.
$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung

$$
(1+x)^n \ge 1 + nx \quad \forall x > -1
$$

folgt weiter

$$
\begin{aligned}
\frac{e_n}{e_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&\ge (1 - \frac{1}{n}) \frac{n}{n-1} \\
&= 1 \qquad \forall n \ge 2.
\end{aligned}
$$

Also ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch 2 bzw. 3 nach unten bzw. oben beschränkt. Hieraus folgt die Behauptung.
(6): Sei

$$
x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.
$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und wegen $(*)$ nach oben durch 3 beschränkt. Mithin existiert

$$
e' = \lim_{n\to\infty} x_n.
$$

Weiter folgt aus $(*)$

$$
e_n \le x_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}
$$

und somit wegen Satz II.1.19 (S. 34)

$$
e \le e'.
$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Für $n > m$ folgt

$$
e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n
$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&> \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{k-1}{n}) \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \\
&= x_m.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$e \geq x_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

und somit

$$e \geq e'.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Der folgende Satz ist das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts. Es geht auf B. Bolzano (1781-1848) und K. Weierstrass (1815-1897) zurück.

Satz II.2.4 (Satz von Bolzano-Weierstrass). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $A_n \leq B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(2) Jedes Intervall $[A_n, B_n]$ enthält unendlich viele Glieder der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
(3) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.
(4) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
(5) $B_n - A_n \leq 2^{-n}(B_0 - A_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Beschränktheit von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ folgt die Existenz von A_0 und B_0. A_n und B_n seien konstruiert.
Fall 1: Es gibt unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ mit

$$x_k = \frac{1}{2}(A_n + B_n).$$

Dann ist $c = \frac{1}{2}(A_n + B_n)$ offensichtlich ein HP von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und wir sind fertig.

FALL 2: Unendlich viele Folgenglieder von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegen in $[A_n, \frac{1}{2}(A_n + B_n)]$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n \\ B_{n+1} &= \frac{1}{2}(A_n + B_n). \end{aligned}$$

FALL 3: Unendlich viele Folgenglieder von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegen in $(\frac{1}{2}(A_n + B_n), B_n]$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{1}{2}(A_n + B_n) \\ B_{n+1} &= B_n. \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften (1), (3) und (4) und Satz II.2.2 sind die Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Wegen der Eigenschaft (5) stimmen ihre Grenzwerte überein. Sei also

$$c = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Wir müssen noch zeigen, dass c HP der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ und ein $n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} c - \varepsilon < A_n \le c \quad \forall n \ge n_{\varepsilon_1} \\ c \le B_n < c + \varepsilon \quad \forall n \ge n_{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Setze $n_\varepsilon = \max\{n_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$. Konstruktionsgemäß gibt es unendlich viele k mit

$$c - \varepsilon < A_{n_\varepsilon} \le x_k \le B_{n_\varepsilon} < c + \varepsilon.$$

Also ist c HP von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Definiere für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_k &= \operatorname{Re}\ x_k \\ v_k &= \operatorname{Im}\ x_k \end{aligned}$$

wegen

$$|\operatorname{Re} z| \le |z|, \ |\operatorname{Im} z| \le |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

sind $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Gemäß Obigem gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert. Dann gibt es aber auch eine Teilfolge $(v_{k_{l_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(v_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $b \in \mathbb{R}$ mit

$$b = \lim_{m\to\infty} v_{k_{l_m}}.$$

Wegen

$$|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

folgt

$$\lim_{m\to\infty} x_{k_{l_m}} = a + ib.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Der folgende, für praktische Anwendungen äußerst wichtige Begriff geht auf A.L. Cauchy (1789-1857) zurück.

Definition II.2.5. Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, kurz CF, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Satz II.2.6. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

wobei $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ist. Für $n, m \geq n_\varepsilon$ folgt

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

□

Satz II.2.7. *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < 1 \quad \forall n, m \geq n_1.$$

Definiere

$$c = \max\{|x_n| + 1 : n \leq n_1\}.$$

Für $n \leq n_1$ gilt trivialerweise

$$|x_n| \leq c.$$

Für $n \geq n_1$ folgt

$$\begin{aligned}|x_n| &\leq |x_{n_1}| + |x_n - x_{n_1}| \\ &< |x_{n_1}| + 1 \\ &\leq c.\end{aligned}$$

□

Satz II.2.8. *Jede Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist konvergent.*

Beweis. Aus Satz II.2.4 und Satz II.2.7 folgt, dass die Cauchyfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen HP a hat. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

Außerdem gibt es ein $k_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ mit

$$|x_{k_\varepsilon} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt

$$|x_n - a| \leq |x_{k_\varepsilon} - a| + |x_n - x_{k_\varepsilon}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

□

Bemerkung II.2.9. Die Aussage von Satz II.2.8 ist in $\mathbb{Q}$ i. a. falsch. Um dies einzusehen, erinnern wir an die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, die wir zu Beginn von Paragraph I.4 konstruiert haben. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ war monoton wachsend, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ war monoton fallend, es galt

$$|a_n - b_n| \le 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Wegen Satz II.2.6 sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren. Man sagt auch, $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.
Wir haben die reellen Zahlen als ordnungsvollständige Erweiterung von $\mathbb{Q}$ konstruiert. Aus der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt dann die Vollständigkeit, d.h. die Konvergenz von Cauchyfolgen. Man kann $\mathbb{R}$ äquivalent auch als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$, d.h. als Obermenge, in der alle Cauchyfolgen konvergieren, konstruieren. Die Ordnungsvollständigkeit folgt dann aus der Vollständigkeit. Schematisch können wir diesen Sachverhalt wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{cccl} & \le & K_1 & \text{ordnungsvollständige Erweiterung} \\ & \nearrow & \downarrow\cong & \\ \mathbb{Q} & & \mathbb{R} & \\ & \searrow & \uparrow\cong & \\ & \text{CF} & K_2 & \text{vollständige Erweiterung} \end{array}$$

II.3. Uneigentliche Konvergenz

Wir erinnern an Definition I.4.9 (S. 20), in der wir zwei Symbole $+\infty$ und $-\infty$ eingeführt haben mit

$$-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definition II.3.1. Wir definieren $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ und setzen Addition und Multiplikation auf $\overline{\mathbb{R}}$ wie folgt fort:

$$\begin{aligned} x + \infty &= +\infty \quad \forall x > -\infty \\ x - \infty &= -\infty \quad \forall x < +\infty \\ x \cdot (+\infty) &= \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 0 \\ -\infty & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ x \cdot (-\infty) &= -(x \cdot (+\infty)) \\ 0 \cdot \infty &= 0 \\ \frac{x}{+\infty} &= \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \frac{x}{0} &= \begin{cases} +\infty & \text{falls } x > 0 \\ -\infty & \text{falls } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Aus Definition I.4.9 (S. 20) folgt:

Bemerkung II.3.2. Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum und Supremum in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definition II.3.3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir sagen, dass x_n gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ konvergiert, wenn es zu jedem $R \in \mathbb{R}_+$ ein $n_R \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n > R \quad \forall n \geq n_R$$

bzw.

$$x_n < -R \quad \forall n \geq n_R.$$

Beispiel II.3.4. (1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$
(3) Die Folge $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $\overline{\mathbb{R}}$. Sie hat die beiden HP $+\infty$ und $-\infty$.

Satz II.3.5. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ oder } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \Longrightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(2) $$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ und } x_n > 0 \text{ für fast alle } n \Longrightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ und } x_n < 0 \text{ für fast alle } n \Longrightarrow \frac{1}{x_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Beweis. (1) Es gelte $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Dann folgt $x_n > 0$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ und

$$\frac{1}{x_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Der Fall $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ wird analog behandelt.
(2) Es gelte $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $x_n > 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n > 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Sei $R \in \mathbb{R}^*$ beliebig. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n| < \frac{1}{R} \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Setze $n_R = \max\{n_0, n_\varepsilon\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{x_n} > R \quad \forall n \geq n_R.$$

Der Fall $x_n < 0$ für fast alle n wird analog behandelt. □

SATZ II.3.6. *Jede monoton wachsende bzw. monoton fallende Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\overline{\mathbb{R}}$ *konvergiert in* $\overline{\mathbb{R}}$ *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

BEWEIS. Wir betrachten nur monoton wachsende Folgen. Der Beweis für monoton fallende Folgen ist völlig analog.
FALL 1 $x_n = -\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$: Dann ist natürlich

$$-\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad -\infty = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

FALL 2 $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} > -\infty$: Es reicht, die Folge $(x_n)_{n\geq n_0}$ zu betrachten.
Angenommen $(x_n)_{n\geq n_0}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$. Dann folgt die Behauptung aus Satz II.2.2 (S. 35).
Angenommen $(x_n)_{n\geq n_0}$ ist nicht beschränkt in $\mathbb{R}$. Sei $R \in \mathbb{R}^*$. Dann gibt es ein $n_R \geq n_0$ mit

$$x_{n_R} > R.$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist, folgt

$$x_n > R \quad \forall n \geq n_R.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Gemäß Satz II.3.6 sind daher beide Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ konvergent. Mithin ist die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION II.3.7. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} \text{ (LIMES SUPERIOR)}$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} \text{ (LIMES INFERIOR).}$$

BEMERKUNG II.3.8. Wegen

$$\sup\{x_k : k \geq n\} \geq \inf\{x_k : k \geq n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt stets

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \geq \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

SATZ II.3.9. *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$. *Dann ist* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *bzw.* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *der größte bzw. kleinste HP der Folge in* $\overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung nur für den Limes superior. Der Beweis für den Limes inferior verläuft analog. Sei $x = \limsup_{n\to\infty} x_n$ und $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Fall 1 $x = +\infty$: Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt

$$y_n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\forall R > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k_n \geq n : x_{k_n} > R.$$

Also ist $+\infty$ HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für jeden anderen HP z gilt trivialerweise $z \leq x$.
Fall 2 $x \in \mathbb{R}$: Sei $\varepsilon > 0$. Da $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt

$$\begin{aligned} &\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon : y_n < x + \varepsilon \\ \Longrightarrow &\operatorname{Anz}\{k \in \mathbb{N} : x_k \geq x + \varepsilon\} < \infty. \end{aligned}$$

Also gilt für jeden HP z von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$z < x + \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, gilt für jeden HP z von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$z \leq x.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon : x \leq y_n < x + \varepsilon \\ \Longrightarrow &\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geq n : x - \varepsilon \leq x_k < x + \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist x auch HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Fall 3 $x = -\infty$: Sei $R \in \mathbb{R}_+$. Dann folgt

$$\begin{aligned} &\exists\, n_R \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_R : y_n < -R \\ \Longrightarrow\ &\operatorname{Anz}\{k \in \mathbb{N} : x_k \geq -R\} < \infty. \end{aligned}$$

Da R beliebig ist, folgt wieder, dass für jeden HP z von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$z = -\infty.$$

Außerdem folgt

$$\begin{aligned} &\forall R \in \mathbb{R}_+ \quad \exists\, n_R \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_R : y_n < -R \\ \Longrightarrow &\forall R \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geq n : x_k < -R \end{aligned}$$

Also ist $-\infty$ auch ein HP der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Beispiel II.3.10. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

Satz II.3.11. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1)
$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in \overline{\mathbb{R}}$$

(2)
$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq a \leq \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Folgt aus Satz II.3.9, da a einziger HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Aus Bemerkung II.3.8 folgt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Wegen Satz II.3.9 ist a der einzige HP. Hieraus folgt

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathrm{Anz}\{n \in \mathbb{N} : x_n < a - \varepsilon\} < \infty$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \mathrm{Anz}\{n \in \mathbb{N} : x_n > a + \varepsilon\} < \infty.$$

Also ist $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

II.4. Reihen

Definition II.4.1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Wir definieren die n-te Partialsumme s_n durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Reihe und wird zur Abkürzung mit dem Symbol

$$\sum x_n$$

bezeichnet. Die Reihe heißt konvergent bzw. divergent, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent bzw. divergent ist. Falls $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} s \in \mathbb{R}$ gilt, schreiben wir kurz

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Beispiel II.4.2. (1) $\sum \frac{1}{n!}$ ist konvergent, $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent.

(3) Die harmonische Reihe $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ist divergent.

(4) Die geometrische Reihe $\sum a^n$ ist genau dann konvergent, wenn gilt $|a| < 1$. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Beweis. ad (1): Beispiel II.2.3(6) (S. 35).
ad (2): $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ ist monoton wachsend. Weiter gilt für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz II.2.2 (S. 35).
ad (3): Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und die Behauptung folgt aus Satz II.2.6 (S. 41).
ad (4): Für $a = 1$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = n + 1.$$

Für $a \neq 1$ ist gemäß Satz I.1.16 (S. 12)

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Beispiel II.2.3(1) (S. 35). □

Satz II.4.3. *Ist die Reihe $\sum x_n$ konvergent, so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

BEWEIS. Ist $\sum x_n$ konvergent, so ist definitionsgemäß $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und damit eine Cauchyfolge. Daher gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

BEMERKUNG II.4.4. Beispiel II.4.2 (3) zeigt, dass die Umkehrung von Satz II.4.3 i. a. falsch ist.

Aus Definition II.4.1 und Satz II.1.18 (S. 32) folgen unmittelbar folgende Rechenregeln für Reihen.

SATZ II.4.5. *Seien* $\sum x_n$ *und* $\sum y_n$ *zwei konvergente Reihen und* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

(1) $\sum(\alpha x_n)$ *ist konvergent und* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

(2) $\sum(x_n + y_n)$ *ist konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Als nächstes geben wir einige Konvergenzkriterien für Reihen an.

SATZ II.4.6 (CAUCHYKRITERIUM). $\sum x_n$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_\varepsilon.$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt wegen

$$|s_n - s_m| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big|$$

aus den Sätzen II.2.6 (S. 41) und II.2.8 (S. 41). □

SATZ II.4.7. *Sei* $\sum x_n$ *eine Reihe in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

BEWEIS. Wegen $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Damit folgt die Behauptung aus den Sätzen II.1.8 (S. 30) und II.2.2 (S. 35). □

SATZ II.4.8 (LEIBNIZKRITERIUM). *Sei* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge in* $\mathbb{R}$ *mit* $x_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist die Reihe* $\sum(-1)^n x_n$ *genau dann konvergent, wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit folgt aus Satz II.4.3. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit nicht negativen Gliedern. Dann folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= x_{2n+2} - x_{2n+1} \leq 0 \\ s_{2n+3} - s_{2n+1} &= -x_{2n+3} + x_{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

Also sind $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende bzw. monoton wachsende Folgen. Weiter gilt

$$s_{2n+1} - s_{2n} = -x_{2n+1} \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also sind $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ durch s_1 nach unten und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ durch s_0 nach oben beschränkt. Gemäß Satz II.2.2 (S. 35) sind sie konvergent. Sei

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} \ , \ t = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Dann folgt aus Satz II.1.18 (S. 32)

$$s - t = \lim_{n\to\infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1.$$

und

$$|s_{2n+1} - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2.$$

Sei $n_\varepsilon = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$. Dann folgt für $n \geq n_\varepsilon$

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

□

Beispiel II.4.9 (alternierende harmonische Reihe).

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \log 2$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

II.5. Absolute Konvergenz

Definition II.5.1. Eine Reihe $\sum x_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum |x_n|$ konvergent ist. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, heißt bedingt konvergent.

Satz II.5.2. *Eine absolut konvergente Reihe ist stets konvergent.*

Beweis. Sei $\sum x_n$ absolut konvergent und $\varepsilon > 0$. Gemäß Satz II.4.6 (S. 48) gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \Big|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_\varepsilon.$$

Also ist $\sum x_n$ gemäß Satz II.4.6 (S. 48) konvergent. □

BEMERKUNG II.5.3. Die Umkehrung von Satz II.5.2 ist i. a. falsch. Die alternierende harmonische Reihe ist nur bedingt konvergent.

Als nächstes geben wir einige wichtige Kriterien für die absolute Konvergenz von Reihen an.

SATZ II.5.4 (MAJORANTENKRITERIUM). *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$, derart dass $\sum \alpha_n$ konvergiert. Es gebe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$|x_n| \leq \alpha_n \quad \forall n \geq n_0.$$

Dann ist $\sum x_n$ absolut konvergent.

BEWEIS. $(\sum_{k=0}^{n} |x_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und durch $\sum_{k=0}^{n_0-1} |x_k| + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ nach oben beschränkt. Damit folgt die Behauptung aus Satz II.4.7 (S. 48). □

BEISPIEL II.5.5. Sei $k \geq 2$ fest. Wegen Beispiel II.4.2(2) (S. 46) und Satz II.5.4 ist $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^k}$ absolut konvergent.

SATZ II.5.6 (WURZELKRITERIUM). *Sei*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}.$$

Dann gilt:

(1) *Falls $\alpha < 1$ ist, ist $\sum x_n$ absolut konvergent.*
(2) *Falls $\alpha > 1$ ist, ist $\sum x_n$ divergent.*
(3) *Für $\alpha = 1$ ist keine Aussage möglich.*

BEWEIS. AD (1): Sei $\alpha < 1$ und $q \in (\alpha, 1)$. Wegen Satz II.3.9 (S. 44) gibt es ein $n_q \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q \quad \forall n \geq n_q$$
$$\Longrightarrow |x_n| \leq q^n \quad \forall n \geq n_q.$$

Also ist die geometrische Reihe mit $a = q$ eine konvergente Majorante.
AD (2): Sei $\alpha > 1$. Dann folgt

$$\mathrm{Anz}\{n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|x_n|} \geq 1\} = \infty$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Anz}\{n \in \mathbb{N} : |x_n| \geq 1\} = \infty.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Damit folgt die Behauptung aus Satz II.4.3 (S. 47).
AD (3): $\sum \frac{1}{n^2}$ ist absolut konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{-2} = 1.$$

$\sum \frac{1}{n}$ ist divergent und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{-1} = 1.$$

□

SATZ II.5.7 (QUOTIENTENKRITERIUM). *Es gebe ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \geq k_0$.*

(1) *Gilt*

$$\limsup_{\substack{n\to\infty\\ n\geq k_0}} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1,$$

so ist $\sum x_n$ absolut konvergent.

(2) *Gibt es ein $k_1 \geq k_0$ mit*

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1 \quad \forall n \geq k_1,$$

so ist $\sum x_n$ divergent.

BEWEIS. AD (1): Wegen Satz II.3.9 (S. 44) gibt es ein $q \in (0,1)$ und ein $n_q \geq k_0$ mit

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq q \quad \forall n \geq n_q.$$

Durch Induktion folgt

$$|x_n| \leq |x_{n_q}| q^{n-n_q} = \frac{|x_{n_q}|}{q^{n_q}} q^n \quad \forall n \geq n_q.$$

Also ist $\sum cq^n$ mit $c = \frac{|x_{n_q}|}{q^{n_q}}$ eine konvergente Majorante.
AD (2): Für $n \geq k_1$ folgt

$$|x_n| \geq |x_{k_1}| > 0.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. □

BEISPIEL II.5.8. (1) $\sum \frac{n^2}{2^n}$ ist absolut konvergent.
(2) $\sum (\frac{1}{2})^{n+(-1)^n}$ ist absolut konvergent.
(3) $\sum \frac{z^n}{n!}$ ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die jedem $z \in \mathbb{C}$ die Zahl $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ zuordnet, heißt EXPONENTIALFUNKTION. Es gilt $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Beweis. ad (1):

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

ad (2):

$$\begin{aligned}|\frac{x_{n+1}}{x_n}| &= 2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}+n+(-1)^n}\\ &= 2^{-1+2(-1)^n}\\ &= \begin{cases} 2, & \text{falls } n \ \text{ gerade}\\ \frac{1}{8}, & \text{falls } n \ \text{ ungerade}\end{cases}\end{aligned}$$

Daher ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar. Wegen

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|x_n|} &= 2^{-1-\frac{1}{n}(-1)^n}\\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}, & \text{falls } n \ \text{ gerade}\\ \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}, & \text{falls } n \ \text{ ungerade}\end{cases}\end{aligned}$$

folgt aber $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, so dass das Wurzelkriterium die behauptete Konvergenz liefert.
ad (3): Sei o.E. $z \neq 0$. Dann folgt

$$|\frac{x_{n+1}}{x_n}| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Definition II.5.9. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt $\sum x_{\sigma(n)}$ eine Umordnung von $\sum x_n$.

Beispiel II.5.10. Betrachte die alternierende harmonische Reihe

$$s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

und die Umordnung $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definiert durch

$$\sigma(n) = \begin{cases} 2m+1 & \text{falls } n = 3m+1, m \geq 0,\\ 4m+2 & \text{fals } n = 3m+2, m \geq 0,\\ 4m & \text{falls } n = 3m, m \geq 1.\end{cases}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7}\dots\\ &= (1-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \dots\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$
$$= \frac{1}{2}s.$$

Also ist die Addition bei unendlich vielen Summanden i.a. nicht kommutativ.

SATZ II.5.11. *Die Reihe $\sum x_n$ sei absolut konvergent. Dann ist jede Umordnung auch absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} \quad \forall \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \textit{bijektiv.}$$

BEWEIS. Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige bijektive Abbildung und im Folgenden fest. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_\varepsilon.$$

Sei

$$r_\varepsilon = \max\{k : \sigma(k) \leq n_\varepsilon\}.$$

Dann gilt

$$\mathbb{N}_{n_\varepsilon} \subset \sigma(\mathbb{N}_{r_\varepsilon}).$$

Für $r \geq r_\varepsilon$ und $n \geq n_\varepsilon$ folgt daher mit $N = \max\{r, \sigma(0), \dots, \sigma(r)\}$

$$|\sum_{k=0}^{r} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n} x_k| \leq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{N} |x_k| < \varepsilon.$$

Also gilt für $r \geq r_\varepsilon$

$$|\sum_{k=0}^{r} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} x_k| < \varepsilon.$$

Mithin konvergiert $\sum x_{\sigma(n)}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Analog folgt für $r \geq r_\varepsilon$ und $n \geq n_\varepsilon$

$$|\sum_{k=0}^{r} |x_{\sigma(k)}| - \sum_{k=0}^{n} |x_k|| \leq \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{N} |x_k| < \varepsilon$$

und somit

$$|\sum_{k=0}^{r} |x_{\sigma(k)}| - \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|| < \varepsilon.$$

Also ist $\sum x_{\sigma(n)}$ auch absolut konvergent. $\square$

Bemerkung II.5.12 (Satz von Riemann). Sei $\sum x_n$ bedingt konvergent in $\mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig. Man kann zeigen, dass es dann eine Umordnung von $\sum x_n$ gibt mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)} = z.$$

Als nächstes wenden wir uns dem Problem zu, das Produkt zweier konvergenter Reihen zu berechnen. Für die Partialsummen erhalten wir

$$(*) \qquad \begin{aligned}(\sum_{k=0}^{n} x_k) \cdot (\sum_{l=0}^{n} y_l) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}(x_k y_l)\\ &= \sum_{m=0}^{2n}(\sum_{\substack{0\le k,l\le n\\ k+l=m}} x_k y_l)\\ &= \sum_{m=0}^{n}(\sum_{k=0}^{m} x_k y_{m-k}) + \sum_{m=n+1}^{2n}(\sum_{\substack{0\le k,l\le n\\ k+l=m}} x_k y_l).\end{aligned}$$

Formal erhalten wir somit

$$(\sum x_n) \cdot (\sum y_k) = \sum z_n$$

mit

$$z_n = \sum_{\substack{0\le k,l\le n\\ k+l=n}} x_k y_l = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} y_k.$$

Der Ausdruck z_n heißt Cauchyprodukt.
Der folgende Satz präzisiert unsere formale Argumentation.

Satz II.5.13. *Die Reihen $\sum x_n$ und $\sum y_n$ seien absolut konvergent. Dann ist die Reihe $\sum z_n$ mit*

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}$$

ebenfalls absolut konvergent und es gilt

$$(\sum_{n=0}^{\infty} x_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Beweis. Durch Anwenden von $(*)$ auf $\sum |x_n|$ und $\sum |y_n|$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n} |z_m| &\le \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{0\le k,l\le n\\ k+l=m}} |x_k||y_l|\\ &\le (\sum_{k=0}^{n} |x_k|) \cdot (\sum_{l=0}^{n} |y_l|)\end{aligned}$$

$$\leq (\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|) \cdot (\sum_{l=0}^{\infty} |y_l|).$$

Hieraus und aus Satz II.2.2 (S. 35) folgt die absolute Konvergenz von $\sum z_n$.
Sei

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \quad , \quad b = \sum_{k=0}^{\infty} |y_k|.$$

O.E. ist $a > 0$ und $b > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=m+1}^{n} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2b} \quad \forall n > m \geq n_1$$

und

$$\sum_{k=m+1}^{n} |y_k| < \frac{\varepsilon}{2a} \quad \forall n > m \geq n_2.$$

Setze $n_\varepsilon = \max\{n_1, n_2\} + 1$. Dann folgt für $n \geq 2n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k=0}^{n} z_k - (\sum_{k=0}^{n} x_k) \cdot (\sum_{k=0}^{n} y_k)| \\
=&|\sum_{m=n+1}^{2n} (\sum_{\substack{0 \leq k,l \leq n \\ k+l=m}} x_k y_l)| \quad \text{wegen } (*) \\
\leq& \sum_{m=n+1}^{2n} \sum_{\substack{0 \leq k,l \leq n \\ k+l=m}} |x_k||y_l| \\
\leq& \sum_{m=n+1}^{2n} \sum_{k=0}^{n} |x_k||y_{m-k}| \\
=& \sum_{k=0}^{n} |x_k| (\sum_{l=n+1-k}^{2n-k} |y_l|) \\
\leq& \sum_{k=0}^{n_\varepsilon} |x_k| (\sum_{l=n_\varepsilon+1}^{2n} |y_l|) + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} |x_k| (\sum_{l=n+1-k}^{2n-k} |y_l|) \\
\leq& a \cdot \sum_{l=n_2+1}^{2n} |y_l| + b \cdot \sum_{k=n_1+1}^{2n} |x_k| \\
<& \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\left(\sum_{k=0}^{n} z_k - (\sum_{k=0}^{n} x_k) \cdot (\sum_{k=0}^{n} y_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine Nullfolge. Damit folgt die Behauptung aus Lemma II.1.17 (S. 32) und Satz II.1.18 (S. 32). □

Bemerkung II.5.14. (1) Wenn die Reihen $\sum x_n$ und $\sum y_n$ nur bedingt konvergent sind, ist Satz II.5.13 i. a. falsch. Um dies einzusehen, betrachte

$$x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Wegen Satz II.4.8 (S. 48) ist $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent. Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

und Beispiel II.4.2(3) (S. 46) ist $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nur bedingt konvergent. Für dieses Beispiel ist

$$\begin{aligned}
|z_n| =& |\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}}| \\
=& \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \\
\geq& \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k+n-k} \qquad \text{wegen} \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \\
=& 2\frac{n-1}{n} \\
\geq& 1 \quad \forall n \geq 2.
\end{aligned}$$

Also ist $\sum z_n$ nicht konvergent.
(2) Man kann zeigen, dass Satz II.5.13 gültig bleibt, wenn eine der Reihen absolut und die andere bedingt konvergent ist.

Beispiel II.5.15. Für die Exponentialfunktion aus Beispiel II.5.8 (3) gilt

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= \exp(z_1 + z_2) \\
&= \exp(z_1) \exp(z_2) \\
&= e^{z_1} e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Aus Satz II.5.13 und der Binomischen Formel folgt

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \right\} \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$1 = e^0 = e^{z-z} = e^z \cdot e^{-z}.$$

Also ist $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

□

II.6. Potenzreihen

Definition II.6.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $z_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt die Reihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ mit $z \in \mathbb{K}$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten a_n und Entwicklungspunkt z_0.

Beispiel II.6.2. (1) $\sum \frac{z^n}{n!}$; $a_n = \frac{1}{n!}$, $z_0 = 0$. Die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut.
(2) $\sum z^n$; $a_n = 1$,$z_0 = 0$. Die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut.
(3) $\sum n!z^n$; $a_n = n!$, $z_0 = 0$. Wegen

$$|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}| = (n+1)|z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \forall z \neq 0$$

konvergiert die Potenzreihe nur für $z = 0$.

Satz II.6.3. *Sei $\sum a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe und*

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty].$$

Dann gilt:

(1) *Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| < \rho$.*
(2) *Die Potenzreihe divergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z - z_0| > \rho$.*

Die Zahl ρ heißt Konvergenzradius *der Potenzreihe; die Menge $\{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < \rho\}$ heißt* Konvergenzkreis *der Potenzreihe.*

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n}\\ =&|z-z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\\ =&\frac{|z-z_0|}{\rho}\end{aligned}$$

folgt die Behauptung aus Satz II.5.6 (S. 50). □

Satz II.6.4. *Sei $\sum a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe und es existiere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt für den Konvergenzradius der Potenzreihe*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Beweis. Sei $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$. Dann folgt

$$\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|z-z_0| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|z-z_0|}{\alpha}.$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz II.5.7 (S. 51). □

Beispiel II.6.5.

(1) $$\sum \frac{z^n}{n!}$$

$$\Longrightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$$\Longrightarrow \rho = \infty.$$

(2) $$\sum n^m z^n \quad m\in\mathbb{N} \text{ fest}$$

$$\Longrightarrow \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n^m}{(n+1)^m} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\Longrightarrow \rho = 1.$$

(3) $$\sum \frac{z^{n^2}}{n!}$$

$$\Longrightarrow a_n = \begin{cases}\frac{1}{j!} & n=j^2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{j\to\infty} \left(\frac{1}{j!}\right)^{1/j^2}$$

$$1 \le j! \le j^j \Longrightarrow \frac{1}{j^j} \le \frac{1}{j!} \le 1$$

$$\Longrightarrow 1 \ge \limsup_{j\to\infty}\left(\frac{1}{j!}\right)^{1/j^2} \ge \limsup_{j\to\infty}\left(\left(\frac{1}{j^j}\right)^{1/j}\right)^{1/j} = \limsup_{j\to\infty} \frac{1}{\sqrt[j]{j}} = 1$$

$\Longrightarrow \rho = 1.$

Bemerkung II.6.6. Über das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe auf dem Rand ihres Konvergenzkreises kann keine allgemeine Aussage getroffen werden:

(1) $\sum z^n \Longrightarrow \rho = 1$ und Divergenz für alle z mit $|z| = 1$.
(2) $\sum \frac{z^n}{n} \Longrightarrow \rho = 1$ und Konvergenz für $z = -1$ und Divergenz für $z = 1$.
(3) $\sum \frac{z^n}{n^2} \Longrightarrow \rho = 1$ und absolute Konvergenz für alle z mit $|z| = 1$.

Die folgenden Rechenregeln sind eine unmittelbare Konsequenz der Sätze II.4.5 (S. 48) und II.5.13 (S. 54).

Satz II.6.7. *Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $\sum a_n(z-z_0)^n$ und $\sum b_n(z-z_0)^n$ zwei Potenzreihen mit gleichem Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradien ρ_1 und ρ_2. Dann gilt:*

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n (z-z_0)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall |z-z_0| < \rho_1$$

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \quad \forall |z-z_0| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)(z-z_0)^n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n\Big) \quad \forall |z-z_0| < \min\{\rho_1, \rho_2\}.$$

Sei $\sum a_n(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann wird durch

$$z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

eine Funktion $\{z \in \mathbb{K} : |z-z_0| < \rho\} \to \mathbb{K}$ definiert. Die Potenzreihe stellt die Funktion f auf dem Konvergenzkreis dar.
Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

ist auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ definiert. Auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ wird sie durch die Potenzreihe $\sum z^n$ dargestellt.

Darstellungen von Funktionen als Potenzreihen werden in späteren Abschnitten eine wichtige Rolle spielen.

KAPITEL III

Stetige Funktionen

Im Zentrum dieses Kapitels steht der Begriff der Stetigkeit von Funktionen zwischen normierten Vektorräumen. Zunächst führen wir den Begriff eines normierten Vektorraumes ein und leiten einige topologische Grundbegriffe her. Danach führen wir den Begriff der Stetigkeit ein und leiten Folgerungen daraus ab. Dann betrachten wir Funktionen auf zusammenhängenden und kompakten Mengen und daraus resultierende Konsequenzen. Zum Abschluss stellen wir einige spezielle Eigenschaften von stetigen Funktionen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ zusammen.

III.1. Normierte Vektorräume

Definition III.1.1. Eine Menge X heißt $\mathbb{K}$-Vektorraum, wenn es zwei Abbildungen

$$+ : X \times X \to X \text{ und } \cdot : \mathbb{K} \times X \to X$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

(VR1) $(X, +)$ ist eine Abelsche Gruppe mit neutralem Element o.

(VR2) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle $x, y \in X$ gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x + y) &= (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y) \\ (\alpha + \beta) \cdot x &= (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) &= (\alpha\beta) \cdot x \end{aligned}$$

(VR3) $1 \cdot x = x$ für alle $x \in X$.

Bemerkung III.1.2. Aus obigen Axiomen folgt insbesondere

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= o \quad \forall x \in X \\ (-1) \cdot x &= \widetilde{x} \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

wobei $\widetilde{x}$ das inverse Element zu x in $(X, +)$ ist.

Beispiel III.1.3. Beispiele für Vektorräume:

(1) $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(2) $\mathbb{K}^m = \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{m-\text{ mal}}, m \in \mathbb{N}^*$, ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(3) Der Raum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ der Folgen in $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(4) Der Raum ℓ_∞ aller beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
(5) Der Raum ℓ_1 aller $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ derart, dass $\sum x_n$ absolut konvergiert, ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
(6) Der Raum ℓ_2 aller $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ derart, dass $\sum |x_n|^2$ konvergiert, ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis. ad (1)–(4): Sind klar.
ad (5): Folgt aus Satz II.4.5 (S. 48), der Dreiecksungleichung in $\mathbb{K}$ und Satz II.5.4 (S. 50).
ad (6): Folgt aus Satz II.4.5 (S. 48), der Abschätzung

$$|a+b|^2 \le 2(|a|^2+|b|^2) \quad \forall a,b\in\mathbb{K}$$

und Satz II.5.4 (S. 50). □

Definition III.1.4. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn gilt:

(N1) $\|x\| \ge 0 \quad \forall x\in X$ und $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x \in X, \alpha\in\mathbb{K}$,

(N3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y\in X.$ (Dreiecksungleichung)

$(X, \|\cdot\|)$ heißt normierter $\mathbb{K}$ Vektorraum.

Bemerkung III.1.5. Aus der Dreiecksungleichung folgt die sog. umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|.$$

Denn:

$$\begin{aligned} &\|x\| = \|y+(x-y)\| \le \|y\| + \|x-y\| \\ &\|y\| = \|x+(y-x)\| \le \|x\| + \|x-y\| \\ \Longrightarrow &\|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \text{ und } \|y\|-\|x\| \le \|x-y\| \\ \Longrightarrow &|\|x\|-\|y\|| = \max\{\|x\|-\|y\|, \|y\|-\|x\|\} \le \|x-y\|. \end{aligned}$$

Beispiel III.1.6. Beispiele für Normen:
(1) $|\cdot|$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.
(2) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le k\le n} |x_k|$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \{\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2\}^{1/2}$ sind Normen auf $\mathbb{K}^n$. Für alle $x\in\mathbb{K}^n$ gilt:
  (a) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$,
  (b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$,
  (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_1$.
(3) $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ist eine Norm auf ℓ_∞.
(4) $\|x\|_1 = \sum\limits_{n=0}^\infty |x_n|$ ist eine Norm auf ℓ_1.

(5) $\|x\|_2 = \{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\}^{1/2}$ ist eine Norm auf ℓ_2.

Beweis. ad (1): Ist klar.
ad (2): Die Normeigenschaften von $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind klar, ebenso (N1) und (N2) für $\|\cdot\|_2$. Die Dreiecksungleichung folgt mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\}^{1/2}\{\sum_{k=1}^{n} b_k^2\}^{1/2}$$

für alle $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$. Abschätzungen (a) und (b) sind offensichtlich. Die erste Ungleichung (c) folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, die zweite Ungleichung (c) folgt aus (a) und (b).
ad (3): Ist klar.
ad (4), (5): (N1) und (N2) sind klar. (N3) folgt wie bei (2) zunächst für die Partialsummen und dann durch Grenzübergang. □

Im Folgenden sei stets $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die folgende Vereinbarung erleichtert die Notationen.

Definition III.1.7. Für $x_0 \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+^*$ heißt

$$B(x_0; r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

der (offene) Ball um x_0 mit Radius r. $B(0; 1)$ heißt auch Einheitsball.

In Abbildung III.1.1 sind die Einheitsbälle in $\mathbb{R}^2$ für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ skizziert.

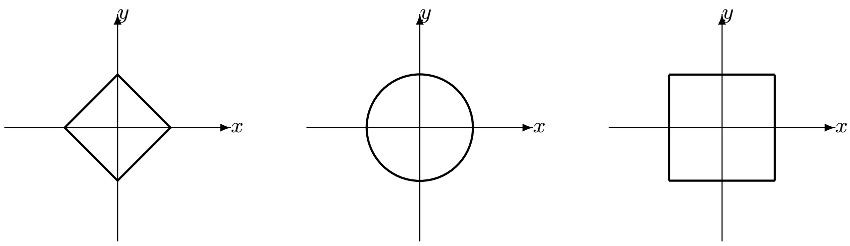

Abbildung III.1.1. Einheitsbälle in $\mathbb{R}^2$ für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ (v.l.n.r)

Bemerkung III.1.8. In einem normierten Vektorraum kann man ganz analog zu $\mathbb{K}$ die Begriffe Folge, konvergente Folge, Häufungspunkt einer Folge, Cauchyfolge, Reihe, absolute Konvergenz einer Reihe definieren. Man muss überall den Betrag $|\cdot|$ durch die Norm $\|\cdot\|$ ersetzen. So erhält man z.B.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ konvergiert gegen } x \in X$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_\varepsilon : \|x_n - x\| < \varepsilon$$

oder

$$\begin{aligned}&(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ ist eine Cauchyfolge}\\ \iff &\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Beispiel III.1.6 zeigt, dass man auf einen Vektorraum verschiedene Normen definieren kann. Dann stellt sich natürlich die Frage, ob z.B. eine Folge, die bezüglich der einen Norm konvergiert, auch bezüglich einer anderen Norm konvergiert. Dies ist sicherlich der Fall, wenn zwischen den Normen eine Abschätzung analog zu denen in Beispiel III.1.6 (2) gilt. Dies führt auf folgende Definition:

Definition III.1.9. Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei Normen auf X. Dann heißen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Äquivalent, wenn es zwei Konstanten $\underline{c}$ und $\overline{c}$ mit $\underline{c} > 0$, $\overline{c} > 0$ und

$$\underline{c}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \overline{c}\|x\|_a \quad \forall x \in X$$

gibt.

Bemerkung III.1.10. (1) Beispiel III.1.6 (2) zeigt, dass die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{K}^n$ äquivalent sind.
(2) Sind $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei äquivalente Normen auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum X, so ist eine Folge in X genau dann bzgl. $\|\cdot\|_a$ konvergent, wenn sie bzgl. $\|\cdot\|_b$ konvergent ist. Gleiches gilt natürlich auch für Cauchyfolgen, Häufungspunkte usw.

Bemerkung III.1.10 zeigt, wie wesentlich der folgende Satz ist.

Satz III.1.11. *Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, reicht es zu zeigen, dass jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ zu $\|\cdot\|_1$ äquivalent ist. Sei also $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{K}^n$.
Für $1 \leq i \leq n$ sei

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Komponente}}, 0, \dots, 0)$$

der i-te Einheitsvektor. Dann ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

Definiere

$$\begin{aligned} C_i &= \|e_i\| \quad 1 \leq i \leq n \\ C &= \max\{C_1, \dots, C_n\}. \end{aligned}$$

Dann folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \\ &\leq C\|x\|_1. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{c} = C$.
Sei nun

$$M = \{\|x\| : x \in \mathbb{K}^n, \|x\|_1 = 1\} \subset \mathbb{R}.$$

M ist nicht leer $(C_i \in M, 1 \leq i \leq n)$ und durch 0 nach unten beschränkt. Also existiert

$$\rho = \inf M$$

und es ist $\rho \geq 0$.
Angenommen, es wäre $\rho = 0$. Dann existiert eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$ mit

$$\|x_k\| \leq \frac{1}{k} \ , \ \|x_k\|_1 = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Da für die i-te Komponente $x_{k,i}$ von x_k gilt

$$|x_{k,i}| \leq \|x_k\|_1 = 1,$$

folgt aus Satz II.2.4 (S. 39), dass es ein $x^* \in \mathbb{K}^n$ und eine Teilfolge $(x_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$x_{k_l,i} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} x_i^* \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \|x^*\| &\leq \|x_{k_l}\| + \|x^* - x_{k_l}\| \\ &\leq \frac{1}{k_l} + C\|x^* - x_{k_l}\|_1 \\ &\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Mithin ist $\|x^*\| = 0$ und somit $x^* = 0$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \|x^*\|_1 &\geq \|x_{k_l}\|_1 - \|x^* - x_{k_l}\|_1 \\ &= 1 - \|x^* - x_{k_l}\|_1 \\ &\underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. Also ist $\rho > 0$.
Sei nun $x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0$, beliebig. Dann folgt $\|\frac{1}{\|x\|_1} x\| \in M$ und somit

$$\frac{1}{\|x\|_1}\|x\| = \|\frac{1}{\|x\|_1} x\| \geq \rho > 0$$

und somit

$$(*) \qquad \rho\|x\|_1 \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0.$$

Da $(*)$ offensichtlich für 0 gilt, ist die Behauptung damit bewiesen. □

Bemerkung III.1.12. Satz III.1.11 gilt in unendlich dimensionalen Räumen i. a. nicht. So ist z.B. $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm auf ℓ_1. Für die Folgen $(x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & n \le m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

gilt

$$\|x^{(m)}\|_\infty = 1 \text{ und } \|x^{(m)}\|_1 = m+1.$$

Daher können $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf ℓ_1 nicht äquivalent sein.

Wir haben in Satz II.2.8 (S. 41) gezeigt, dass in $\mathbb{K}$ jede Cauchyfolge konvergent ist. Diese Eigenschaft ist so zentral, dass normierte Vektorräume mit dieser Eigenschaft besonders bezeichnet werden.

Definition III.1.13. Ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig oder kurz ($\mathbb{K}$)-Banachraum, wenn jede Cauchyfolge in X konvergent ist.

Satz III.1.14. *Die folgenden normierten $\mathbb{K}$-Vektorräume sind vollständig:*

(1) $\mathbb{K}$,
(2) $\mathbb{K}^n, n \in \mathbb{N}^*$,
(3) $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$,
(4) $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$,
(5) $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis. ad (1): Satz II.2.8 (S. 41).
ad (2): Wegen Satz III.1.11 brauchen wir die Behauptung nur für die Norm $\|\cdot\|_\infty$ zu zeigen. Sei also $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist für jedes $i \in \mathbb{N}_n^*$ die Folge $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ der i-ten Komponenten eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ und konvergiert gemäß Satz II.2.8 (S. 41) gegen ein $x_i^* \in \mathbb{K}$. Sei $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{K}^n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es Zahlen $k_{\varepsilon_i} \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n$, mit

$$|x_i^* - x_{k,i}| < \varepsilon \quad \forall k \ge k_{\varepsilon_i}, 1 \le i \le n.$$

Sei

$$k_\varepsilon = \max_{1\le i\le n} k_{\varepsilon_i}.$$

Dann gilt für alle $k \ge k_\varepsilon$

$$\|x^* - x_k\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i^* - x_{k,i}| < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.
ad (3): Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_1$. Wir bezeichnen mit $x_{k,n}$ die n-te Komponente von $x_k, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall k, l \ge k_\varepsilon : \|x_k - x_l\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_{k,n} - x_{l,n}| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, k_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall k, l \geq k_\varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N} : |x_{k,n} - x_{l,n}| < \varepsilon.$$

Wegen Satz II.2.8 (S. 41) gibt es also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n^* \in \mathbb{K}$ mit

$$x_{k,n} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_n^*.$$

Sei $x^* = (x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $x^* \in \ell_1$ ist. Aus Bemerkung III.1.5 folgt, dass $(\|x_k\|_1)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit beschränkt ist. Also gilt

$$C = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_1 < \infty.$$

Sei nun $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gibt es Zahlen $k_{\varepsilon_0}, \ldots, k_{\varepsilon_N} \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_i^* - x_{k,i}| < \frac{1}{N+1} \quad \forall k \geq k_{\varepsilon_i}, 0 \leq i \leq N.$$

Sei $k_\varepsilon = \max\limits_{1\leq i\leq N} k_{\varepsilon_i}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} |x_i^*| &\leq \sum_{i=0}^{N} |x_i^* - x_{k_\varepsilon,i}| + \sum_{i=0}^{N} |x_{k_\varepsilon,i}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{N+1} + \|x_{k_\varepsilon}\|_1 \\ &\leq 1 + C. \end{aligned}$$

Da C nicht von N abhängt und N beliebig war, folgt, dass $\sum x_i^*$ absolut konvergiert, d.h., $x^* \in \ell_1$.
Wir müssen noch zeigen: $\|x^* - x_k\|_1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Angenommen, dies gelte nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass gilt

$$\text{(i)} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \; \exists \, m \geq k : \|x^* - x_m\|_1 > \varepsilon_0.$$

Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \ell_1$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{(ii)} \qquad \|x_k - x_l\|_1 < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \forall k, l \geq k_0.$$

Zu k_0 gibt es wegen (i) ein $m_0 \geq k_0$ mit

$$\text{(iii)} \qquad \|x^* - x_{m_0}\|_1 > \varepsilon_0.$$

Da $\sum |x_i^* - x_{m_0,i}|$ absolut konvergiert, gibt es gemäß Satz II.4.6 (S. 48) ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{(iv)} \qquad \sum_{i=n_0}^{\infty} |x_i^* - x_{m_0,i}| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Wegen $x_{k,i} \to x_i^*$ für $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein $l_0 \geq k_0$ mit

$$\text{(v)} \qquad |x_{l_0,i} - x_i^*| < \frac{\varepsilon_0}{4n_0} \quad \forall 0 \leq i \leq n_0 - 1.$$

Aus (i)–(v) folgt

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 < \|x^* - x_{m_0}\|_1 &\le \sum_{i=0}^{n_0-1} |x_i^* - x_{m_0,i}| + \frac{\varepsilon_0}{4} \\
&\le \sum_{i=0}^{n_0-1} |x_i^* - x_{l_0,i}| + \sum_{i=0}^{n_0-1} |x_{l_0,i} - x_{m_0,i}| + \frac{\varepsilon_0}{4} \\
&\le \sum_{i=0}^{n_0-1} \frac{\varepsilon_0}{4n_0} + \|x_{l_0} - x_{m_0}\|_1 + \frac{\varepsilon_0}{4} \\
&\le \frac{3}{4}\varepsilon_0.
\end{aligned}
$$

Dies ist wegen $\varepsilon_0 > 0$ ein Widerspruch. Also gilt $\|x^* - x_k\|_1 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Damit ist die Vollständigkeit von $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ gezeigt.

AD (4),(5): Übungsaufgabe, Beweis analog zu (3). □

III.2. Topologische Grundbegriffe

Im Folgenden bezeichnet $(X, \|\cdot\|)$ stets einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum.

DEFINITION III.2.1. (1) Sei $M \subset X, M \neq \emptyset$. Ein Punkt $x \in M$ heißt INNERER PUNKT VON M, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B(x;\varepsilon) \subset M$.
(2) $M \subset X$ heißt OFFEN, falls jedes $x \in M$ innerer Punkt von M ist.
(3) Sei $x \in X$ und $U \subset X$ offen mit $x \in U$. Dann heißt U eine UMGEBUNG von x. Die Menge aller Umgebungen von x wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

BEISPIEL III.2.2. Der Ball $B(x_0; r)$ mit $x_0 \in X, r > 0$, ist offen.

BEWEIS. Sei $x \in B(x_0; r)$. Dann ist

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(r - \|x - x_0\|) > 0.$$

Für $y \in B(x;\varepsilon)$ folgt

$$
\begin{aligned}
\|x_0 - y\| &\le \|x_0 - x\| + \|x - y\| \\
&< \|x_0 - x\| + \frac{1}{2}(r - \|x_0 - x\|) \\
&= \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\|x_0 - x\| \\
&< r.
\end{aligned}
$$

□

BEMERKUNG III.2.3. (1) Der Begriff „offen“ hängt vom umgebenden Vektorraum ab. So ist z.B. das Intervall $(0,1)$ offen in $\mathbb{R}$ aber nicht in $\mathbb{R}^2$ (in $\mathbb{R}^2$ wird $(0,1)$ dabei mit $(0,1) \times \{0\}$ identifiziert).

(2) Sind $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei äquivalente Normen auf X, so ist jede bzgl. $\|\cdot\|_a$ offene Menge auch bzgl. $\|\cdot\|_b$ offen und umgekehrt.

Satz III.2.4. *Sei $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ die Menge aller offenen Mengen in X. Dann gilt:*

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.
(2) $\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha \in A$ *(A beliebige Indexmenge)* $\Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{O}$.
(Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.)
(3) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
(Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.)

Beweis. Ist offensichtlich. □

Bemerkung III.2.5. Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge mit den Eigenschaften (1)–(3) von Satz III.2.4. Dann heißt $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Viele der Eigenschaften, die wir für normierte Vektorräume beweisen, gelten allgemein für topologische Räume.

Bemerkung III.2.6. Der abzählbare Durchschnitt offener Mengen ist i. a. nicht offen. So ist z.B.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B(0; \frac{1}{n}) = \{0\}$$

nicht offen.

Definition III.2.7. $M \subset X$ heißt abgeschlossen genau dann, wenn $M^c = X \backslash M$ offen ist.

Satz III.2.8. *Es gilt:*

(1) $\emptyset$, X *sind abgeschlossen.*
(2) *Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.*
(3) *Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind wieder abgeschlossen.*

Beweis. ad (1) Ist klar.
ad (2) $(\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in A} (M_\alpha)^c$
ad (3) $(M_1 \cup M_2)^c = M_1^c \cap M_2^c$. □

Bemerkung III.2.9. Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind i. a. nicht abgeschlossen. So ist z.B.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(x; \frac{1}{n})^c = X \backslash \{x\}$$

nicht abgeschlossen.

Definition III.2.10. Sei $M \subset X$. Ein Punkt $x \in X$ heißt Berührungspunkt bzw. Häufungspunkt von M, wenn für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt

$$U \cap M \neq \emptyset \quad \text{bzw. } M \cap U \backslash \{x\} \neq \emptyset.$$

Wir definieren

$$\overline{M} = \{x \in X : x \text{ ist Berührungspunkt von } M\}.$$

Beispiel III.2.11. (1) $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\overline{M} = M \cup \{0\}$ und 0 ist einziger Häufungspunkt von M.
(2) $M = B(0;1)$. Dann ist $\overline{M} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ und jeder Berührungspunkt ist auch Häufungspunkt.

Beweis. ad (1) Ist klar.
ad (2)

$$\begin{aligned}
&\|x\| < 1 : \Longrightarrow x \in M \Longrightarrow x \in \overline{M} \\
&\|x\| = 1 : \varepsilon > 0 \text{ beliebig } \Longrightarrow x_\varepsilon = (1 - \frac{\varepsilon}{2})x \in M \\
&\qquad\qquad \text{und } \|x - x_\varepsilon\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \\
&\|x\| > 1 : \text{Sei } y \in B(x;r) \text{ mit } r = \frac{1}{2}(\|x\| - 1) > 0. \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow \|y\| \geq \|x\| - \|x - y\| \\
&\qquad\qquad\qquad > \|x\| - \frac{1}{2}(\|x\| - 1) \\
&\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2} \\
&\qquad\qquad\qquad > 1 \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow B(x;r) \cap M = \emptyset.
\end{aligned}$$

□

Satz III.2.12. (1) *Es ist* $M \subset \overline{M}$.
(2) *Es ist* $M = \overline{M}$ *genau dann, wenn* M *abgeschlossen ist.*

Beweis. ad (1): Ist klar.
ad (2): „$\Longrightarrow$“:

$$\begin{aligned}
x \in M^c = (\overline{M})^c &\Longrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) \quad U \cap M = \emptyset \\
&\Longrightarrow U \subset M^c \\
&\Longrightarrow M^c \text{ offen} \\
&\Longrightarrow M = (M^c)^c \text{ abgeschlossen}
\end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“:

$$\begin{aligned}
M \text{ abgeschlossen} &\Longrightarrow M^c \text{ offen} \\
&\Longrightarrow \forall x \in M^c \; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \quad U \subset M^c \\
&\Longrightarrow \forall x \in M^c \; \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \quad U \cap M = \emptyset
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow M^c \subset (\overline{M})^c\\&\Longrightarrow \overline{M} \subset M\\&\Longrightarrow \overline{M} = M \quad \text{wegen (1).}\end{aligned}$$

□

SATZ III.2.13. *Es gilt:*

(1) *x ist Häufungspunkt von M genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gibt mit $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.*
(2) *x ist Berührungspunkt von M genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gibt mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.*

BEWEIS. AD (1): „$\Longrightarrow$“: Da x Häufungspunkt von M ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ein x_n in $B(x;\frac{1}{n}) \cap M \setminus \{x\}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leistet das Gewünschte.
„$\Longleftarrow$“: Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in U$ und $x_k \neq x$. Also ist x Häufungspunkt.
AD (2): Folgt aus (1). □

SATZ III.2.14. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$M \subset X$ ist abgeschlossen.*
(2) *M enthält alle seine Häufungspunkte.*
(3) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in M$.*

BEWEIS. (1) $\Longrightarrow$ (2): Aus Definition III.2.10 folgt

$$\begin{aligned}&\overline{M} = M \cup M' \quad \text{mit}\\&M' = \{x \in X : x \text{ ist Häufungspunkt von } M\}.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz III.2.12.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Folgt aus Satz III.2.13 (1).
(3) $\Longrightarrow$ (1): Folgt aus Satz III.2.13 (1) und Satz III.2.12. □

SATZ III.2.15. *$\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von M, d.h.*

$$\overline{M} = \bigcap \{A : A \supset M, A \textit{ ist abgeschlossen}\}.$$

BEWEIS. Sei

$$B = \bigcap \{A : A \supset M, A \text{ ist abgeschlossen}\}.$$

Gemäß Satz III.2.8 (2) ist B abgeschlossen. Außerdem ist $M \subset B$. Sei $x \in B^c$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset B^c$. Also ist

$$U \cap B = \emptyset \Longrightarrow U \cap M = \emptyset.$$

Mithin ist $x \notin \overline{M}$. Dies zeigt

$$B^c \subset (\overline{M})^c \Longrightarrow \overline{M} \subset B.$$

Sei nun umgekehrt $x \in (\overline{M})^c$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \cap M = \emptyset$. U^c ist abgeschlossen, $x \notin U^c$ und $M \subset U^c$. Also ist $x \notin B$. Dies zeigt

$$(\overline{M})^c \subset B^c \Longrightarrow B \subset \overline{M}.$$

$\square$

Satz III.2.16. *Es gilt:*

(1) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,
(2) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,
(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Beweis. ad (1): $\overline{B} \supset B$ ist abgeschlossene Obermenge von A. Damit folgt die Behauptung aus Satz III.2.15.
ad (2): $\overline{A}$ ist gemäß Satz III.2.15 abgeschlossen. Damit folgt die Behauptung aus Satz III.2.12.
ad (3): $A \cup B \supset A$, $A \cup B \supset B \Longrightarrow$ (mit (1)) $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$.
$\overline{A} \cup \overline{B}$ abgeschlossen, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Definition III.2.17. Wir definieren für $M \subset X$

$$\overset{\circ}{M} = \{x \in X : x \text{ ist innerer Punkt von } M\}.$$

Aus der Definition von „offen“ folgt unmittelbar.

Satz III.2.18. (1) $\overset{\circ}{M} \subset M$.
(2) $\overset{\circ}{M} = M \iff M$ *ist offen.*

In Analogie zu den Sätzen III.2.15 und III.2.16 erhalten wir.

Satz III.2.19. $\overset{\circ}{M}$ *ist die größte offene Teilmenge von* M*, d.h.*

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup \{O : O \subset M, O \textit{ ist offen}\}.$$

Beweis. Gemäß Satz III.2.4 (2) ist

$$B = \bigcup \{O : O \subset M, O \text{ ist offen}\}$$

eine offene Teilmenge von M. Sei $x \in B$. Dann ist x innerer Punkt von B und wegen $B \subset M$ auch innerer Punkt von M. Also ist

$$B \subset \overset{\circ}{M}.$$

Sei $x \in \overset{\circ}{M}$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset M$. Konstruktionsgemäß ist $U \subset B$. Also ist auch

$$\overset{\circ}{M} \subset B.$$

$\square$

Satz III.2.20. *Es gilt:*

(1) $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

(2) $(\mathring{A})^\circ = \mathring{A}$.

(3) $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz III.2.19.
ad (2): Folgt aus Satz III.2.18 und III.2.19.
ad (3): $A \cap B \subset A \Longrightarrow$ (mit (1)) $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A}$
$A \cap B \subset B \Longrightarrow$ (mit (1)) $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{B}$
Satz III.2.4 $\Longrightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B}$ offene Teilmenge von $A \cap B$
$\Longrightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset (A \cap B)^\circ$. □

Definition III.2.21. Der Rand ∂M einer Menge M ist definiert durch

$$\partial M = \overline{M} \backslash \mathring{M}.$$

Satz III.2.22. *Es gilt:*

(1) *∂M ist abgeschlossen.*

(2) *Es ist $x \in \partial M$ genau dann, wenn es für jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt*

$$U \cap M \neq \emptyset \quad \text{und}\, U \cap M^c \neq \emptyset.$$

Beweis. ad (1): $\partial M = \overline{M} \cap (\mathring{M})^c$.
ad (2): $x \notin \mathring{M} \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M^c \neq \emptyset$
$x \in \overline{M} \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap M \neq \emptyset$. □

Beispiel III.2.23. (1) $M = B(0;1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} M &= \mathring{M} \\ \overline{M} &= \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, \\ \partial M &= \{x \in X : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

(2) $M = B(0;1) \backslash \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} M &= \mathring{M} \\ \overline{M} &= \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, \\ \partial M &= \{x \in X : \|x\| = 1\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Das folgende Hausdorffsche Trennungsaxiom ist für normierte Vektorräume trivial. Für allgemeine topologische Räume muss es separat als Axiom gefordert werden. Ohne seine Gültigkeit sind viele wesentliche Sätze falsch.

Satz III.2.24 (Hausdorffsches Trennungsaxiom). *Sei $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann gibt es zwei Umgebungen $U_x \in \mathcal{U}(x)$ und $U_y \in \mathcal{U}(y)$ mit*

$$U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Beweis. Sei $r = \|x - y\| > 0$. Setze

$$U_x = B(x; \frac{r}{2}) \ , \ U_y = B(y; \frac{r}{2}).$$

Dann gilt für $z \in U_y$

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\geq \|x - y\| - \|y - z\| \\ &> \|x - y\| - \frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $U_x \cap U_y = \emptyset$. □

Eine einfache Konsequenz aus Satz III.2.24 ist:

Satz III.2.25. *Sei $x \in X$. Dann ist $\{x\}$ abgeschlossen.*

Zum Abschluss führen wir noch einen, für das Folgende sehr hilfreichen Begriff ein.

Definition III.2.26. Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, und $A \subset M$. Dann heißt A relativ offen bzw. relativ abgeschlossen in M, wenn es eine offene bzw. abgeschlossene Menge B in X gibt mit $A = B \cap M$.

Beispiel III.2.27. Sei $X = \mathbb{R}$ und $M = [0, 1)$. Dann ist $[0, \frac{1}{2})$ relativ offen in M und $[\frac{1}{2}, 1)$ relativ abgeschlossen in M.

III.3. Stetigkeit

Im Folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ und $(Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Vektorräume.

Definition III.3.1. Sei $D \subset X$ nicht leer und $f : D \to Y$ eine Funktion. f heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gibt mit $f(U \cap D) \subset V$. f heißt stetig in $D' \subset D$, $D' \neq \emptyset$, wenn f stetig ist in jedem Punkt $x \in D'$. Ist insbesondere f stetig in D, so sagen wir auch kurz „f ist stetig“.

Bevor wir Beispiele stetiger und nicht stetiger Abbildungen geben, wollen wir einige andere äquivalente Definitionen der Stetigkeit angeben.

Satz III.3.2. *Sei $f : D \to Y, D \subset X$, eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist stetig in x_0.*
(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : x \in D, \|x - x_0\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon.$
(3) *$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $\varepsilon > 0$ und $V = B(f(x_0); \varepsilon) \in \mathcal{U}(f(x_0))$. Dann gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(U \cap D) \subset V$. Da U offen ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $B(x_0; \delta) \subset U$. Wegen $f(B(x_0; \delta) \cap D) \subset f(U \cap D) \subset V$ folgt die Behauptung.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\varepsilon > 0$. Sei δ wie in Teil (2). Dann gibt es ein $n_\delta \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_0\|_X < \delta$ für alle $n \geq n_\delta$. Dann gilt aber auch

$$\|f(x_n) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\delta.$$

Also ist $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.
(3) $\Longrightarrow$ (1): Angenommen, f ist nicht stetig in x_0. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\exists\, V \in \mathcal{U}(f(x_0)) \quad \forall U \in \mathcal{U}(x_0) : f(U \cap D) \not\subset V \\
\Longrightarrow &\exists\, V \in \mathcal{U}(f(x_0)) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : f(B(x_0; \frac{1}{n}) \cap D) \not\subset V \\
\Longrightarrow &\exists\, V \in \mathcal{U}(f(x_0)) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \exists\, x_n \in B(x_0; \frac{1}{n}) \cap D : f(x_n) \notin V \\
\Longrightarrow &\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \text{ und } f(x_n) \not\to f(x_0)
\end{aligned}$$

Widerspruch. □

Satz III.3.3. *Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$, $D \neq \emptyset$, eine Funktion und $D' \subset D$ nicht leer. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist stetig in D'.*
(2) *Für jede offene Teilmenge V von Y ist $f^{-1}(V)$ relativ offen in D'.*
(3) *Für jede abgeschlossene Teilmenge A von Y ist $f^{-1}(A)$ relativ abgeschlossen in D'.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): O.E. ist $D' \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Sei $x \in D' \cap f^{-1}(V)$. Dann ist $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Also gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$f(D' \cap U) \subset f(D \cap U) \subset V$$

d.h. $D' \cap U \subset f^{-1}(V)$. Also ist x relativ innerer Punkt von $D' \cap f^{-1}(V)$.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Sei $A \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist $V = Y \backslash A$ offen. Wegen

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \backslash A) = D \backslash f^{-1}(A)$$

ist $D \backslash f^{-1}(A)$ relativ offen in D' und damit $f^{-1}(A)$ relativ abgeschlossen in D'.
(3) $\Longrightarrow$ (1): Sei $x \in D'$ und $V \subset \mathcal{U}(f(x))$. Dann ist $Y \backslash V$ abgeschlossen und damit nach Voraussetzung

$$f^{-1}(Y \backslash V) = D \backslash f^{-1}(V)$$

relativ abgeschlossen in D'. Also ist $f^{-1}(V)$ relativ offen in D', d.h., es gibt ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$f^{-1}(V) \cap D' = U \cap D'.$$

Also ist

$$f(U \cap D') \subset V.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Beispiel III.3.4. (1) $f : X \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = \|x\|$ ist stetig.
(2) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig.
(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lceil x \rceil = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ ist stetig für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.
(5) $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}$ mit $f((x_1, \ldots, x_m)) = x_j, 1 \leq j \leq m$, ist stetig. Dies gilt für allgemeine Produkträume $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$.
(6) Die Funktionen $z \to \text{Re}(z)$ und $z \to \text{Im}(z)$ von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ sind stetig.
(7) Sei $Y = X$ und $\| \cdot \|_Y$ zu $\| \cdot \|_X$ äquivalent. Dann ist die identische Abbildung $x \to x$ von $X \to Y$ stetig.
(8) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $r \in \mathbb{R}$. Dann sind die Mengen

$$\{x \in X : f(x) < r\} \text{ , } \{x \in X : f(x) > r\}$$

offen und die Mengen

$$\{x \in X : f(x) \leq r\} \text{ , } \{x \in X : f(x) \geq r\}$$

abgeschlossen.

Beweis. ad (1): Folgt aus Bemerkung III.1.5 (S. 62).
ad (2): (a) „$x_0 = 0$“: Sei $\varepsilon < 0$ gegeben, setze $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Dann gilt

$$0 \leq x < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x_0} - \sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon,$$

(b) „$x_0 > 0$“: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, setze $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \varepsilon\sqrt{x_0}$. Dann gilt

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x_0} - \sqrt{x}| = \frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x}} \leq \frac{|x_0 - x|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon.$$

ad (3):

$$\begin{aligned} x \notin \mathbb{Z} &\Longrightarrow \exists\, \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow f|_{(x-\delta, x+\delta)} \text{ ist konstant,} \\ x \in \mathbb{Z} &\Longrightarrow f(y) \leq x - 1 \quad \forall y < x \\ & f(y) \geq x \qquad \forall y \geq x. \end{aligned}$$

ad (4): Folgt aus Satz I.4.11 (S. 21).
ad (5): Folgt aus Teil (7) und

$$|x_j - y_j| \leq \{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\}^{1/2} = \|x - y\|_2.$$

AD (6): Folgt aus Satz I.5.5 (S. 26).
AD (7): Folgt aus der Definition III.1.9 (S. 64)

$$\|x-y\|_X \le \bar{c}\|x-y\|_Y \quad \forall x,y \in X.$$

AD (8): Folgt aus Satz III.3.3. □

SATZ III.3.5. *Seien $D_f \subset X$, $D_g \subset X$, $x_0 \in D_f \cap D_g$, $f : D_f \to Y$ und $g : D_g \to Y$ in x_0 stetig, sowie $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*

(1) $\alpha f : x \mapsto \alpha f(x)$ *ist stetig in* x_0.
(2) $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ *ist stetig in* x_0.
(3) $Y = \mathbb{K}$; $f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ *ist stetig in* x_0.
(4) $Y = \mathbb{K}$ *und* $g(x_0) \neq 0$; $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ *ist stetig in* x_0.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus Satz III.3.2 und Satz II.1.18 (S. 32), sowie Bemerkung III.1.8 (S. 63). □

Wegen Satz III.3.5 ist die folgende Bezeichnung sinnvoll.

DEFINITION III.3.6. Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$. Dann bezeichnet $C(M,Y)$ den Vektorraum aller stetigen Funktionen von M in Y. Ist insbesondere $Y = \mathbb{K}$, so schreiben wir kurz $C(M)$ statt $C(M,\mathbb{K})$.

Aus Satz III.3.5 folgt unmittelbar:

SATZ III.3.7. *Alle* POLYNOME, *d.h. Funktionen der Form*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N},$$

und alle RATIONALEN FUNKTIONEN, *d.h. Funktionen der Form*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p,q \text{ Polynome},$$

sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

SATZ III.3.8. *Seien $f : D_f \to Y$, $D_f \subset X$, und $g : D_g \to Z$, $D_g \subset Y$, zwei Funktionen mit $f(D_f) \subset D_g$. Dann ist die* KOMPOSITION *oder* VERKNÜPFUNG *$g \circ f : D_f \to Z$ definiert durch*

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)).$$

Ist f in $x_0 \in D_f$ stetig und g in $y_0 = f(x_0) \in D_g$ stetig, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

BEWEIS. Sei $W \in \mathcal{U}(g(y_0))$. Dann folgt

$$g \text{ stetig in } y_0 \Longrightarrow\ \exists\, V \in \mathcal{U}(y_0) : g(D_g \cap V) \subset W$$
$$f \text{ stetig in } x_0 \Longrightarrow\ \exists\, U \in \mathcal{U}(x_0) : f(D_f \cap U) \subset V.$$

Wegen

$$g \circ f(D_f \cap U) \subset g(D_g \cap V) \subset W$$

ist die Behauptung damit bewiesen. □

Beispiel III.3.9. (1) Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$, stetig. Dann ist $\|f\|_Y : D \to \mathbb{R}_+$ mit $x \mapsto \|f(x)\|_Y$ stetig.
(2) Sei $f : D \to \mathbb{K}$, $D \subset X$, stetig. Dann ist $f^2 : D \to \mathbb{K}$ mit $x \mapsto f(x)^2$ stetig.
(3) Sei $f : D \to \mathbb{R}_+$, $D \subset X$, stetig. Dann ist $\sqrt{f} : D \to \mathbb{R}_+$ mit $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ stetig.

Satz III.3.10. (1) *$f = (f_1 \dots, f_n) : D \to \mathbb{K}^n$, $D \subset X$, ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn alle Komponentenfunktionen f_i, $1 \leq i \leq n$, in x_0 stetig sind.*
(2) *$f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset X$, ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *in x_0 stetig sind.*

Beweis. ad (1): „$\Longrightarrow$“ folgt aus Satz III.3.8 und Beispiel III.3.4 (5).
„$\Longleftarrow$“ Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung Zahlen $\delta_j(\varepsilon) > 0, 1 \leq j \leq n$, mit

$$|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \forall \|x - x_0\|_X < \delta_j.$$

Setze $\delta(\varepsilon) = \min\limits_{1 \leq j \leq n} \delta_j(\varepsilon)$. Dann folgt für $x \in B(x_0; \delta)$

$$\|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{K}^n} = \{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_0)|^2\}^{1/2} < \varepsilon.$$

ad (2): Folgt wegen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ mit $f_1 = \operatorname{Re} f, f_2 = \operatorname{Im} f$ aus Teil (1). $\square$

Definition III.3.11. Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$, eine Funktion. Zu $x_0 \in X$ gebe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann definieren wir

$$y = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

wenn für *jede* Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ gilt $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Satz III.3.12. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(1) $y = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
(2) $\forall V \in \mathcal{U}(y)\ \exists\, U \in \mathcal{U}(x_0) : f(D \cap U) \subset V$.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Angenommen, es existiert ein $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $f(D \cap U) \not\subset V$ für alle $U \in \mathcal{U}(x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(D \cap B(x_0; \frac{1}{n})) \not\subset V \\ \Longrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists\, x_n \in D \cap B(x_0; \frac{1}{n}) : f(x_n) \notin V \\ \Longrightarrow &\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \ \text{ mit } x_n \to x_0 \ \text{ und } f(x_n) \not\to y_0. \end{aligned}$$

Widerspruch.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\varepsilon > 0$. Dann

gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(D \cap U) \subset B(y_0; \varepsilon)$. Zu U gibt es aber ein $n_U \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_U$. Also gilt

$$f(x_n) \in B(y_0; \varepsilon) \quad \forall n \geq n_U.$$

Mithin konvergiert $f(x_n)$ gegen y_0. □

Bemerkung III.3.13. (1) Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$, und $x_0 \in D$. Dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ genau dann, wenn f in x_0 stetig ist.
(2) Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$, $x_0 \notin D$ und es existiere $y = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Dann können wir eine Erweiterung $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to Y$ von f durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \neq x_0 \\ y & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

definieren. $\tilde{f}$ ist dann in x_0 stetig und heißt daher stetige Ergänzung von f in x_0.

Beispiel III.3.14. (1) $X = Y = \mathbb{R}$, $D = X \backslash \{1\}$ und

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Aus Satz I.1.16 (S. 12) folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \quad \forall x \in X \backslash \{1\}$$

und damit

$$\lim_{x \to 1} f(x) = n.$$

$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x - 1} & \text{falls } x \neq 1 \\ n & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

ist die stetige Ergänzung von f.
(2) $X = Y = \mathbb{C}$, $D = \mathbb{C} \backslash \{0\}$ und

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Da für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - 1| &= |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} - 1| \\ &= |\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} z^m| \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} |z|^m \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2}|z|^m$$
$$\leq \frac{1}{2}|z|\frac{1}{1-|z|},$$

ist

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 1.$$

Die stetige Ergänzung von f ist also

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0. \end{cases}$$

Wir kommen nun zu einer Besonderheit stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$, die mit der Anordnung von $\mathbb{R}$ zusammenhängt.

Definition III.3.15. Die Funktion $f : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt linksseitig stetig bzw. rechtsseitig stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(D \cap (x_0 - \delta, x_0]) \subset V \quad \text{bzw.} \quad f(D \cap [x_0, x_0 + \delta)) \subset V.$$

Beispiel III.3.16. Die Funktion $\lceil x \rceil$ aus Beispiel III.3.4 (3) ist rechtsseitig stetig in jedem $x \in \mathbb{R}$.

Satz III.3.17. *Sei $f : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent,*

(1) *f ist linksseitig bzw. rechtsseitig stetig in x_0.*
(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall x_0 - \delta < x \leq x_0 : \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$
bzw.
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall x_0 \leq x < x_0 + \delta : \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon.$
(3) *$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_n \leq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $x_n \geq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Beweis. Übungsaufgabe (analog zum Beweis von Satz III.3.2). $\square$

Satz III.3.18. *Die Funktion $f : D \to Y$, $D \subset \mathbb{R}$, ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn sie in x_0 linksseitig und rechtsseitig stetig ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Folgt aus Satz III.3.2 und III.3.17.
„$\Longleftarrow$“: Sei $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\delta_1 > 0$ mit

$$f(D \cap (x_0 - \delta_1, x_0]) \subset V$$

und ein $\delta_2 > 0$ mit

$$f(D \cap [x_0, x_0 + \delta_2)) \subset V.$$

Für $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt

$$f(D \cap B(x_0; \delta)) = f(D \cap (x_0 - \delta, x + \delta)) \subset V.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bei der Definition der Stetigkeit hängt das δ neben ε auch von dem Punkt x, der gerade betrachtet wird, ab. Für viele praktische und theoretische Ergebnisse ist der Fall von Bedeutung, dass δ unabhängig von x gewählt werden kann. Dies führt zu folgender Definition.

Definition III.3.19. Sei $f : D \to Y$, $D \subset X$, eine Funktion und $D' \subset D$ nicht leer. Dann heißt f auf D' gleichmässig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon \quad \forall x, y \in D' \text{ mit } \|x - y\|_X < \delta.$$

Bemerkung III.3.20. Eine gleichmäßig stetige Funktion ist auch stetig.

Beispiel III.3.21. (1) $f : X \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = \|x\|$ ist gleichmäßig stetig.
(2) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig.
(3) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist gleichmäßig stetig.
(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. ad (1): Folgt aus Bemerkung III.1.5 (S. 62).
ad (2): Wegen Satz III.3.5 ist f stetig. Sei $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$ mit $n > \frac{1}{2\delta}$. Dann folgt

$$|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \delta$$

und

$$|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})| = n \geq 1.$$

Also kann f nicht gleichmäßig stetig sein.
ad (3): Für $x, y \in [-1, 1]$ gilt

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq 2|x - y|.$$

Also ist f gleichmäßig stetig auf $[-1, 1]$.
ad (4): Sei $\delta > 0$ und $n \in \mathbb{N}^*$ mit $n > \frac{1}{\delta}$. Dann folgt für $x \geq n$ und $y = x + \frac{\delta}{2}$:

$$|x - y| < \delta$$

und

$$|f(x) - f(y)| = \delta x + \frac{\delta^2}{4} > \delta n > 1.$$

Also ist f nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. □

III.4. Kompaktheit

Im Folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ stets normierte Vektorräume.

Definition III.4.1. Sei $M \subset X$.

(1) Eine Menge $\{O_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathcal{P}(x)$ heißt offene Überdeckung von M, wenn gilt $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$ und alle O_α sind offen.
(2) M heißt kompakt, wenn *jede* offene Überdeckung $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ von M eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in A$ mit $M \subset \bigcup_{0 \le i \le n} O_{\alpha_i}$.

Beispiel III.4.2. (1) $\emptyset$ ist kompakt.
(2) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.
(3) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Beweis. ad (1): Ist offensichtlich.
ad (2): Setze $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. Sei $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es ein $\alpha_0 \in A$ mit $0 \in O_{\alpha_0}$. Wegen $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \in O_{\alpha_0}$ für alle $n \ge n_0$. Schließlich gibt es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_0} \in A$ mit $\frac{1}{k} \in O_{\alpha_k}, 1 \le k \le n_0$. Dann ist $\{O_{\alpha_k} : 0 \le k \le n_0\}$ eine endliche Teilüberdeckung von M.
(3) $\{B(\frac{1}{n}; \frac{1}{2n^2}) : n \in \mathbb{N}^*\}$ ist eine offene Überdeckung von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ durch paarweise disjunkte Kugeln und enthält daher keine endliche Teilüberdeckung. □

Satz III.4.3. *$M \subset X$ sei kompakt. Dann gilt:*

(1) *M ist beschränkt, d.h., es gibt ein $R > 0$ mit $M \subset B(0; R)$.*
(2) *M ist abgeschlossen.*

Beweis. ad (1): $\{B(0; r) : r \in \mathbb{R}_+^*\}$ ist eine offene Überdeckung von M. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition der Kompaktheit.
ad (2): Sei $x \in M^c$. Dann ist $\{B(y; \frac{1}{2}\|y - x\|_X) : y \in M\}$ eine offene Überdeckung von M. Sei $\{B(y_i; \frac{1}{2}\|y_i - x\|_X) : 0 \le i \le n\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Definiere

$$r = \min_{0 \le i \le n} \frac{1}{2}\|y_i - x\|_X.$$

Dann ist $r > 0$ und

$$B(x; r) \cap B(y_i; r) = \emptyset \quad \forall 0 \le i \le n.$$

Also ist $B(x; r) \subset M^c$ und somit x innerer Punkt von M^c. □

Satz III.4.4. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$M \subset X$ ist kompakt.*

(2) *Jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ *in* M *besitzt einen Häufungspunkt in* M*.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Angenommen (2) wäre falsch. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, die keinen HP in M hat. D.h., zu jedem $x \in M$ gibt es ein $\varepsilon(x) > 0$, so dass $B(x;\varepsilon(x))$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. $\{B(x;\varepsilon(x)) : x \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M. Sei $\{B(y_i;\varepsilon(y_i)) : 0 \le i \le n\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Da jedes $B(y_i;\varepsilon(y_i))$ nur endlich viele Folgenglieder enthält, enthält $\bigcup_{0\le i\le n} B(y_i;\varepsilon(y_i))$ auch nur endlich viele Folgenglieder. Widerspruch.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Wir zeigen zunächst, dass für jedes $r \in \mathbb{R}_+^*$ die offene Überdeckung

$$B_r = \{B(x;r) : x \in M\}$$

von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.
Angenommen dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein $R > 0$, so dass jede endliche Teilmenge von B_R die Menge M nicht überdeckt. Sei $x_0 \in M$ beliebig. Dann gibt es ein $x_1 \in M\backslash B(x_0;R)$. Weiter gibt es ein $x_2 \in M\backslash[B(x_0;R) \cup B(x_1;R)]$. Durch Induktion zeigen wir, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gibt mit

$$x_{n+1} \in M\backslash \bigcup_{0\le i\le n} B(x_i;R).$$

Gemäß (2) besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen HP $x^* \in M$. Dann enthält $B(x^*;\frac{R}{2})$ unendlich viele Folgenglieder $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$. Für je zwei solche Folgenglieder x_{n_1} und x_{n_2} gilt

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\|_X \le \|x_{n_1} - x^*\|_X + \|x_{n_2} - x^*\|_X < R$$

im Widerspruch zur Konstruktion.
Sei nun $\{O_\alpha : \alpha \in A\}$ eine beliebige offene Überdeckung von M. Wir nehmen an, dass sie keine endliche Teilüberdeckung enthält. Wie wir oben gezeigt haben, enthält $B_{\frac{1}{n}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ eine endliche Teilüberdeckung. Da $\{O_\alpha, \alpha \in A\}$ keine endliche Teilüberdeckung enthält, gibt es somit für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ ein $x_n \in M$, so dass $B(x_n;\frac{1}{n}) \cap M$ nicht durch endlich viele O_α's überdeckt werden kann. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt gemäß (2) einen HP x^* in M. Dann gibt es ein $\alpha^* \in A$ und ein $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$x^* \in O_{\alpha^*} \text{ und } B(x^*;\varepsilon^*) \subset O_{\alpha^*}.$$

Da x^* HP von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es zu $N > (\frac{\varepsilon^*}{2})^{-1}$ ein $m \ge N$ mit

$$\|x_m - x^*\|_X < \frac{\varepsilon^*}{2}.$$

Für $x \in B(x_m;\frac{1}{m})$ folgt

$$\begin{aligned}\|x - x^*\|_X &\le \|x - x_m\|_X + \|x_m - x^*\| \\ &< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon^*}{2}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon^*}{2}$$
$$< \varepsilon^*.$$

Also ist

$$B(x_m; \frac{1}{m}) \subset B(x^*; \varepsilon^*) \subset O_{\alpha^*}.$$

Widerspruch. □

Bemerkung III.4.5. Eine Menge M mit der Eigenschaft (2) aus Satz III.4.4 nennt man auch folgenkompakt. Satz III.4.4 sagt also, dass in einem normierten Vektorraum eine Menge genau dann kompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist. Diese Aussage ist in allgemeinen topologischen Räumen i. a. falsch; dort kann man Beispiele folgenkompakter, nicht kompakter Mengen konstruieren.

Wir kommen nun zu einer wesentlichen topologischen Charakterisierung des $\mathbb{K}^m$. Sie geht auf E. Heine (1821-1881) und E. Borel (1871-1956) zurück.

Satz III.4.6 (Satz von Heine-Borel). *Eine Teilmenge M des $\mathbb{K}^m$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Satz III.4.3.
„$\Longleftarrow$“: Sei $M \subset \mathbb{K}^m$ beschränkt und abgeschlossen und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Gemäß Satz II.1.15 (S. 31) und Satz II.2.4 (S. 39) gibt es ein $x^* \in \mathbb{K}^m$ und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_k,i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_i^* \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$

d.h., $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x^*$ in $\mathbb{K}^m$. Da M abgeschlossen ist, gilt $x^* \in M$. Damit folgt die Behauptung aus Satz III.4.4. □

Bemerkung III.4.7. Der Satz von Heine-Borel gilt für unendlich dimensionale Vektorräume nicht. So sind z.B. die abgeschlossenen Einheitskugeln $B(0;1)$ in ℓ_1, ℓ_2 und ℓ_∞ nicht kompakt. Denn für die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ der „Einheitsvektoren“ mit

$$e_{n,k} = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{für } k \neq n, \end{cases}$$

gilt

$$\|e_n\|_1 = \|e_n\|_2 = \|e_n\|_\infty = 1$$

und

$$\|e_n - e_m\|_1 = 2$$
$$\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$$
$$\|e_n - e_m\|_\infty = 1$$

für alle $n \neq m$, so dass sie keinen HP besitzen kann.

Als nächstes befassen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen Kompaktheit und Stetigkeit.

Satz III.4.8. *Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, kompakt und $f \in C(M,Y)$. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist, gibt es zu jedem $x \in M$ ein $\delta(x) > 0$ mit

$$f(M \cap B(x;\delta(x))) \subset B(f(x);\frac{\varepsilon}{2}).$$

$\{B(x;\frac{1}{2}\delta(x)) : x \in M\}$ ist eine offene Überdeckung von M. Sei $\{B(x_i;\frac{1}{2}\delta(x_i)) : 0 \leq i \leq n\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist

$$\delta = \min_{0\leq i\leq n} \frac{1}{2}\delta(x_i) > 0.$$

Seien nun $x, y \in M$ mit $\|x-y\|_X < \delta$ beliebig. Dann gibt es ein x_i, $0 \leq i \leq n$, mit $x \in B(x_i, \frac{1}{2}\delta(x_i))$. Es folgt

$$\begin{aligned}\|y - x_i\|_X &\leq \|y-x\|_X + \|x_i - x\|_X \\ &< \delta + \frac{1}{2}\delta(x_i) \\ &\leq \delta(x_i)\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|_Y &\leq \|f(x) - f(x_i)\|_Y + \|f(x_i) - f(y)\|_Y \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist hiermit die gleichmäßige Stetigkeit von f gezeigt. □

Satz III.4.9. *Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, kompakt und $f \in C(M,Y)$. Dann ist $f(M)$ kompakt.*

Beweis. Sei $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von $f(M)$. Da V_α offen und f stetig ist, gibt es zu jedem V_α eine offene Menge U_α mit

$$f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha \cap M.$$

Da $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ die Bildmenge $f(M)$ überdeckt, ist $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung der Urbildmenge M. Also gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\alpha_i} : 0 \leq i \leq n\}$ von M. Dann ist aber $\{V_{\alpha_i} : 0 \leq i \leq n\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(M)$. □

Eine einfache Konsequenz der Sätze III.4.3 und III.4.9 ist der folgende Satz:

Satz III.4.10. *Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, kompakt und $f \in C(M, \mathbb{R})$. Dann nimmt f auf M sein Minimum und Maximum an, d.h., es gibt ein $\underline{x} \in M$ und ein $\overline{x} \in M$ mit*

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}) \quad \forall x \in M.$$

Beweis. $f(M) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt und damit beschränkt und abgeschlossen. Also gilt

$$-\infty < \rho = \inf f(M) \leq \sup f(M) = R < +\infty.$$

Aus der Definition des Supremums folgt, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gibt mit

$$R = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Da M kompakt ist, besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen HP $\overline{x}$ in M. Da f stetig ist, gilt

$$f(\overline{x}) = R.$$

Analog folgt die Existenz eines $\underline{x} \in M$ mit

$$f(\underline{x}) = \rho.$$

□

Bemerkung III.4.11. Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, kompakt und $f \in C(M, Y)$. Wegen Beispiel III.3.9(1) (S. 78) und Satz III.4.10 ist

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(M,Y)} = \max_{x\in M} \|f(x)\|_Y$$

wohldefiniert. Wie man leicht nachrechnet, ist $\|\cdot\|_{C(M,Y)}$ eine Norm auf $C(M, Y)$.

Eine weitere wichtige Konsequenz aus Satz III.4.10 ist:

Satz III.4.12 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

ein nicht konstantes Polynom. O.E. können wir $a_n = 1$ und $n \geq 2$ annehmen. Sei

$$R = 1 + \sum_{k=0}^{n} |a_k|.$$

Für $|z| \geq R$ folgt

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k \\ &\geq |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |z|^{n-1}\{|z| - (R-1)\} \\
&\geq |z|^{n-1} \\
&\geq |R|^{n-1} \\
&\geq R.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$|p(0)| = |a_0| < R.$$

Also gilt wegen Satz III.4.10

$$\begin{aligned}
\inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)| &= \inf_{z\in\overline{B(0;R)}} |p(z)| \\
&= \min_{z\in\overline{B(0;R)}} |p(z)| = |p(z_0)|
\end{aligned}$$

mit $|z_0| \leq R$. Wir nehmen an, dass $p(z_0) \neq 0$ ist. Dann ist

$$q(z) = \frac{1}{p(z_0)} p(z_0 + z)$$

ein Polynom vom Grade n mit

$$(*) \qquad |q(z)| \geq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

und

$$q(0) = 1.$$

Also können wir q in der Form

$$q(z) = 1 + bz^k + z^{k+1}\rho(z)$$

mit $k \geq 1$, $b \in \mathbb{C}^*$ und einem Polynom ρ schreiben. Wie wir in Paragraph III.7 genauer sehen werden, können wir $-\frac{1}{b}$ in der Form

$$-\frac{1}{b} = r\cos\omega + ir\sin\omega$$

mit $r \in \mathbb{R}_+^*$ und $\omega \in [0, 2\pi)$ darstellen, und für

$$z^* = \sqrt[k]{r}\cos\frac{\omega}{k} + i\sqrt[k]{r}\sin\frac{\omega}{k}$$

gilt dann

$$(z^*)^k = -\frac{1}{b}.$$

Die Funktion

$$t \mapsto |(z^*)^{k+1}\rho(tz^*)|$$

nimmt gemäß Satz III.4.10 auf dem Intervall $[0, 1]$ ihr Maximum an. Sei m dieses Maximum. O.E. ist $m \geq 1$. Für $t \in (0, \frac{1}{2m})$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|q(tz^*)| &\leq |1 + b(tz^*)^k| + |(tz^*)^{k+1}\rho(tz^*)| \\
&\leq |1 - t^k| + t^{k+1}m \\
&= 1 - t^k(1 - tm)
\end{aligned}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{2}t^k$$
$$< 1.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $(*)$. □

III.5. Zusammenhang

Im Folgenden seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Vektorräume.

Definition III.5.1. Eine Teilmenge M von X heißt zusammenhängend, wenn es keine zwei in M relativ offenen Mengen O_1, O_2 gibt mit

$$O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset, O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \cup O_2 = M.$$

Satz III.5.2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $M \subset X$ *ist zusammenhängend.*
(2) *Für jede Teilmenge O von M, die gleichzeitig relativ offen und relativ abgeschlossen in M ist, gilt $O = \emptyset$ oder $O = M$.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $O \subset M$ relativ offen und relativ abgeschlossen in M. Setze $O' = M \backslash O$. Dann sind O und O' relativ offen in M und erfüllen

$$O \cap O' = \emptyset, O \cup O' = M.$$

Da M zusammenhängend ist, gilt $O = \emptyset$ oder $O' = \emptyset$, d.h., $O = M$.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Angenommen M ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nicht leere, in M relativ offene Mengen O_1, O_2 mit

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset \text{ und } O_1 \cup O_2 = M.$$

Also ist $O_1 = M \backslash O_2$ und somit auch relativ abgeschlossen in M. Aus (2) folgt $O_1 = \emptyset$ oder $O_1 = M$, d.h., $O_2 = \emptyset$; Widerspruch. □

Der Begriff des Zusammenhangs führt u.a. zu einem wichtigen Beweisprinzip:

> Sei $P(x)$ eine Eigenschaft, die man für alle x aus einer Menge M beweisen will. Dann zeigt man sukzessive:
> (1) M ist zusammenhängend,
> (2) $\{x \in M : P(x) \text{ gilt}\} \neq \emptyset$,
> (3) $\{x \in M : P(x) \text{ gilt}\}$ ist offen in M,
> (4) $\{x \in M : P(x) \text{ gilt}\}$ ist abgeschlossen in M.
> Wegen Satz III.5.2 gilt dann $P(x)$ für alle $x \in M$.

Als nächstes geben wir eine wesentliche topologische Charakterisierung der Intervalle in $\mathbb{R}$.

Satz III.5.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) $M \subset \mathbb{R}$ *ist zusammenhängend.*
(2) M *ist ein Intervall.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei

$$a = \inf M \in \overline{\mathbb{R}}\ ,\ b = \sup M \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Dann ist

$$M \subset [a, b].$$

Wir müssen noch

$$(a, b) \subset M$$

nachweisen. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Dann gibt es ein c mit

$$a < c < b \ \text{ und } c \notin M.$$

Definiere

$$O_1 = [a, c) \cap M\ ,\ O_2 = (c, b] \cap M.$$

Dann sind O_1 und O_2 relativ offen in M. Wegen der Definition von a, b, c und wegen $c \notin M$ gilt

$$O_1 \cup O_2 = M, O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset,$$

im Widerspruch zum Zusammenhang von M.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Angenommen M ist nicht zusammenhängend. Dann existieren in M relativ offene Mengen O_1 und O_2 mit

$$O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset, O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \cup O_2 = M.$$

Seien $x \in O_1$ und $y \in O_2$. O.E. ist $x < y$. Sei

$$z = \sup(O_1 \cap [x, y]) \in \mathbb{R}.$$

Ann. $z \in O_1 :\Longrightarrow\ \exists\, \delta > 0 : [z, z + \delta] \subset O_1 \cap [x, y] \Longrightarrow$ Widerspruch.
Ann. $z \in O_2 :\Longrightarrow\ \exists\, \delta > 0 : [z - \delta, z] \subset O_2 \cap [x, y] \Longrightarrow$ Widerspruch.
Also ist $z \notin O_1 \cup O_2 = M$. Andererseits gilt

$$M \ni x \leq z \leq y \in M$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, dass M ein Intervall ist. □

Als nächstes beschäftigen wir uns mit den Auswirkungen des Zusammenhangs auf stetige Funktionen.

Satz III.5.4. *Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, zusammenhängend und $f \in C(M, Y)$. Dann ist $f(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $V \subset f(M)$ nicht leer und in $f(M)$ relativ offen und relativ abgeschlossen. Da f stetig ist, ist $U = f^{-1}(V)$ in M relativ offen und relativ abgeschlossen. Wegen $\emptyset \neq V \subset f(M)$ ist $U \neq \emptyset$. Da M zusammenhängend ist, folgt $U = M$. Also ist

$$V = f(U) = f(M).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz III.5.2. □

Satz III.5.5 (Zwischenwertsatz). *Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, zusammenhängend, $f \in C(M, \mathbb{R})$ und $x, y \in M$ mit $f(x) < f(y)$. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an, d.h., zu jedem $a \in [f(x), f(y)]$ gibt es ein $z \in M$ mit $f(z) = a$.*

Beweis. Wegen Satz III.5.3 und Satz III.5.4 ist $f(M)$ ein Intervall. Daher gilt $[f(x), f(y)] \subset f(M)$. □

Eine Konsequenz des Zwischenwertsatzes ist:

Satz III.5.6. *Sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und ungeradem Grad n, d.h., $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ und $n = 2\ell + 1$, $\ell \in \mathbb{N}$. Dann besitzt p eine reelle Nullstelle.*

Beweis. O.E. ist $n \geq 3$ und $a_n = 1$. Sei

$$R = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} p(R) &\geq R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \\ &\geq R^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{n-1} \\ &= R^{n-1}(R - (R-1)) \\ &\geq R \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p(-R) &\leq (-R)^n + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^k \\ &\leq -R^n + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{n-1} \\ &= -R^{n-1}(R - (R-1)) \\ &= -R^{n-1} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz III.5.5. □

Bemerkung III.5.7. Satz III.5.6 ist für Polynome mit geradem Grad i. a. falsch, wie das Beispiel $p(x) = x^2 + 1$ zeigt.

Wir kommen nun zu einigen Abwandlungen des Zusammenhangbegriffes.

Definition III.5.8. (1) Eine Funktion $\omega \in C([0,1], X)$ heißt (stetiger) Weg in X. Die Punkte $\omega(0) \in X$ und $\omega(1) \in X$ heißen Anfangs- und Endpunkt des Weges. Die Menge $\omega([0,1]) \subset X$ heißt Spur des Weges.
(2) Eine nicht leere Teilmenge M von X heißt wegzusammenhängend, wenn es zu jedem $x \in M$ und jedem $y \in M$ einen Weg mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt, der ganz in M verläuft, d.h., $\omega([0,1]) \subset M$.

Aus Satz III.5.4 folgt:

Bemerkung III.5.9. Die Spur eines Weges ist zusammenhängend.

Satz III.5.10. *Jede wegzusammenhängende Menge M ist zusammenhängend.*

Beweis. Wir nehmen an $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, sei wegzusammenhängend, aber nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nicht leere, disjunkte, in M offene Mengen O_1, O_2 mit $O_1 \cup O_2 = M$. Seien $x \in M \cap O_1$ und $y \in M \cap O_2$. Dann gibt es einen Weg ω, der ganz in M verläuft mit Anfangspunkt x und Endpunkt y. Sei S die Spur von ω. Dann folgt

$$\begin{aligned}
&(O_1 \cap S) \cup (O_2 \cap S) = M \cap S = S \\
&(O_1 \cap S) \cap (O_2 \cap S) = \emptyset \\
&O_1 \cap S \neq \emptyset, O_2 \cap S \neq \emptyset \\
&O_i \cap S \text{ ist relativ offen in } S, i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu Bemerkung III.5.9. □

Definition III.5.11. Eine nicht leere Teilmenge M von X heißt konvex, wenn für alle $x, y \in M$ gilt (vgl. Abbildung III.5.1)

$$\{tx + (1-t)y : 0 \le t \le 1\} \subset M.$$

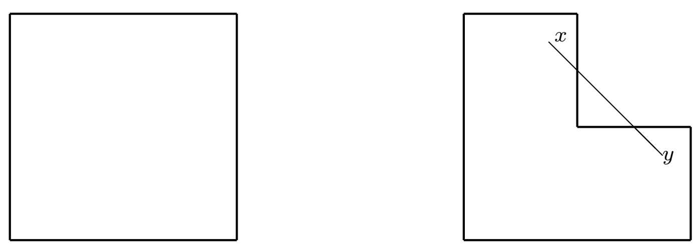

Abbildung III.5.1. Beispiel einer konvexen (links) und einer nicht konvexen (rechts) Menge

Bemerkung III.5.12. (1) Eine konvexe Menge ist wegzusammenhängend und damit zusammenhängend.
(2) $B(a;r)$ und $\overline{B(a;r)}$ sind für jedes $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}_+^*$ konvex.

Beweis. ad (1): $\omega \in C([0,1], M)$ mit $\omega(t) = tx + (1-t)y$ ist ein Weg mit Anfangspunkt y und Endpunkt x.
ad (2): Für $x, y \in B(a; r)$ und $t \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} \|a - (tx + (1-t)y)\|_X &= \|ta - tx + (1-t)a - (1-t)y\|_X \\ &\leq t\|a - x\| + (1-t)\|a - y\| \\ &< tr + (1-t)r \\ &= r. \end{aligned}$$

Analog für $x, y \in \overline{B(a; r)}$. □

Lemma III.5.13. *Durch*

> *„$x \sim y$ für $x, y \in M$ genau dann, wenn es einen Weg in M mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt"*

wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M definiert.

Beweis. (1) $x \sim x : \omega(t) = x$ für alle $t \in [0,1]$ ist stetig.
(2) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x : \omega \in C([0,1], M)$ $\omega(0) = x, \omega(1) = y \Longrightarrow w^*(t) = \omega(1-t)$ leistet das Gewünschte.
(3) $x \sim y, y \sim z \Longrightarrow x \sim z$:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Longrightarrow \ \exists\, \omega_1 \in C([0,1], M) \ \text{ mit } \omega_1(0) = x, \omega_1(1) = y \\ y \sim z &\Longrightarrow \ \exists\, \omega_2 \in C([0,1], M) \ \text{ mit } \omega_2(0) = y, \omega_2(1) = z. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \omega(t) = \begin{cases} \omega_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega_2(2t-1) & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

leistet das Gewünschte. □

Satz III.5.14. *$M \subset X$, $M \neq \emptyset$, sei offen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *M ist zusammenhängend.*
(2) *M ist wegzusammenhängend.*

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $a \in M$ beliebig und

$$U = \{x \in M : x \sim a\}.$$

Dann ist $a \in U$.
Sei $x \in U$. Da M offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x; \varepsilon) \subset M$. Sei $y \in B(x; \varepsilon)$. Gemäß Bemerkung III.5.12 (2) gilt $y \sim x$ und wegen $x \sim a$ auch $y \sim a$. Also ist $B(x; \varepsilon) \subset U$. Mithin ist U offen in M.
Sei $x \in M \backslash U$. Da M offen ist, gibt es wieder ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x; \varepsilon) \subset M$. Dann ist auch $B(x; \varepsilon) \cap U = \emptyset$. Denn sonst gäbe es ein $y \in B(x; \varepsilon)$ mit $y \sim a$; wegen $y \sim x$ folgte $x \sim a$ ein Widerspruch zu $x \notin U$. Mithin ist U auch abgeschlossen in M.
Da M zusammenhängend ist, folgt $U = M$. Also ist M wegzusammenhängend.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Satz III.5.10. □

Bemerkung III.5.15. Auf die Voraussetzung „M offen“ kann in Satz III.5.14 nicht verzichtet werden. Denn sei $X = \mathbb{R}^2$

$$X' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y < 1\}$$

$$Y_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, 0 \le y < 1 - \frac{1}{n}\}$$

und

$$M = X' \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X_n.$$

Die Menge M (vgl. Abbildung III.5.2) ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend.

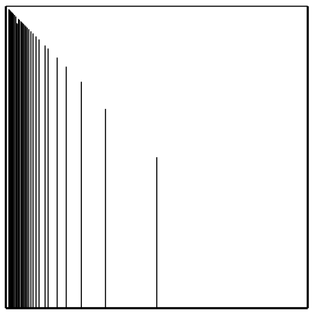

Abbildung III.5.2. Skizze der Menge M aus Bemerkung III.5.15. Dicke Linien gehören zu M, dünne Linien nicht.

Beweis. (1): $(0,0) \not\sim (1,0)$. Angenommen $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in C([0,1], M)$ erfüllt $\omega(0) = (0,0), \omega(1) = (1,0)$. Aus Satz III.4.10 (S. 86) folgt

$$m = \max_{0 \le t \le 1} \omega_2(t) < 1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $1 - \frac{1}{n} > m$ ist. Aus Satz III.5.5 folgt, dass es ein $t^* \in (0,1)$ gibt mit

$$\omega_1(t^*) = \frac{1}{n}.$$

Dann ist

$$\omega(t^*) \in Y_n \iff \omega(t^*) \notin M.$$

Dies ist ein Widerspruch.
(2): $(0, y_1) \sim (0, y_2)$ für alle $y_1, y_2 \in [0,1)$.
(3): $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$ mit $x_1 > 0, x_2 > 0$.
Sei nun $N \subset M$ nicht leer und in M relativ offen und in M relativ abgeschlossen.
(4): Bemerkung III.5.7 impliziert:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ in } M \text{ und } (x_1, y_1) \in N \Longrightarrow (x_2, y_2) \in N.$$

(5): N relativ offen in $M \Longrightarrow \exists\, (x,y) \in N$ mit $x > 0$.
(6): (3), (4), (5) $\Longrightarrow \forall x > 0 \quad \forall y \in [0,1) : (x,y) \in N$.

(7): (6) $\Longrightarrow (\frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{1}{2}) \in N \quad \forall n \geq 2$.
N relativ abgeschlossen in M und

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2}) \in M \Longrightarrow (0, \frac{1}{2}) \in N$$

(8): (2), (4), (7) $\Longrightarrow (0, y) \in N \quad \forall y \in [0, 1)$
Also ist $N = M$ und M somit zusammenhängend. □

Definition III.5.16. Eine nicht leere, offene und zusammenhängende Teilmenge von X heißt Gebiet.

III.6. Funktionen in $\mathbb{R}$

Im Folgenden sei $I \subset \mathbb{R}$ stets ein nicht leeres Intervall.

Definition III.6.1. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt

(a) monoton wachsend,
(b) streng monoton wachsend,
(c) monoton fallend,
(d) streng monoton fallend,

wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt

(a) $f(x) \leq f(y)$,
(b) $f(x) < f(y)$,
(c) $f(x) \geq f(y)$,
(d) $f(x) > f(y)$.

Eine monoton wachsende oder monoton fallende Funktion heißt monoton.

Beispiel III.6.2. (1) $f(x) = x^2$ ist streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, +\infty)$. Falls $0 \in \mathring{I}$ ist, ist f auf I nicht monoton.
(2) Die Funktion $f(x) = \lceil x \rceil$ aus Beispiel III.3.4(3) (S. 76) ist monoton wachsend.
(3) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

aus Beispiel III.3.4(4) (S. 76) ist nicht monoton.

Satz III.6.3. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton und $\alpha = \inf I \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann existieren in $\overline{\mathbb{R}}$ die Grenzwerte*

$$f(\alpha + 0) = \lim_{x\to\alpha+0} f(x) = \lim_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)$$
$$f(\beta - 0) = \lim_{x\to\beta-0} f(x) = \lim_{\substack{x\to\beta \\ x<\beta}} f(x)$$

und es gilt

$$f(\alpha+0) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in (\alpha,\beta]\} & \textit{falls } f \textit{ wachsend,} \\ \sup\{f(x) : x \in (\alpha,\beta]\} & \textit{falls } f \textit{ fallend,} \end{cases}$$

$$f(\beta-0) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in [\alpha,\beta)\} & \textit{falls } f \textit{ wachsend,} \\ \inf\{f(x) : x \in [\alpha,\beta)\} & \textit{falls } f \textit{ fallend.} \end{cases}$$

Beweis. Sei f monoton wachsend und

$$b = \sup f(I) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$ und $x_n < \beta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\eta < b$ ein $\zeta \in I$, $\zeta < \beta$, mit $f(\zeta) = \eta$. Zu ζ gibt es ein $n_\zeta \in \mathbb{N}$ mit

$$\zeta \le x_n < \beta \quad \forall n \ge n_\zeta.$$

Da f monoton wachsend ist, folgt

$$\eta = f(\zeta) \le f(x_n) \le b \quad \forall n \ge n_\zeta.$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Also existiert $f(\beta - 0)$ und ist gleich b. Ganz analog zeigt man die Existenz von $f(\alpha+0)$ und geht für monoton fallendes f vor. □

Definition III.6.4. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, Y ein normierter Vektorraum und $f : D \to Y$ ein Funktion. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in \overline{D \cap (-\infty, x_0)} \cap \overline{D \cap (x_0, +\infty)}$ heißt Sprungstelle von f, wenn die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0)$ existieren und verschieden sind.

Beispiel III.6.5. Für die Funktion f aus Beispiel III.6.2 (2) ist jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Sprungstelle. Es ist

$$f(k+0) - f(k-0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Satz III.6.3 zeigt, dass für eine monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ für jedes $x_0 \in \mathring{I}$ die Grenzwerte $f(x_0 \pm 0)$ existieren. Der folgende Satz zeigt, dass eine solche Funktion bis auf abzählbar viele Sprungstellen stetig ist. Beispiel III.6.5 zeigt, dass umgekehrt auch abzählbar viele Sprungstellen auftreten können.

Satz III.6.6. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f bis auf abzählbar viele Sprungstellen stetig.*

Beweis. O.E. ist f monoton wachsend. Sonst gehen wir zu $-f$ über. Definiere

$$M = \{x \in \mathring{I} : f(x+0) \neq f(x-0)\}.$$

Wir müssen zeigen, dass M abzählbar ist. Dazu genügt es, eine injektive Abbildung von M in eine abzählbare Menge zu konstruieren. Sei dazu

$x \in M$. Da f monoton wachsend ist, ist $f(x+0) > f(x-0)$. Also gibt es ein

$$q_x \in \mathbb{Q} \cap (f(x-0), f(x+0)).$$

$x \mapsto q_x$ ist eine Abbildung von M in $\mathbb{Q}$. Seien nun $x, y \in M$ mit $x < y$. Da f monoton wachsend ist, folgt

$$f(x+0) \leq f(y-0).$$

Also gilt

$$q_x < f(x+0) \leq f(y-0) < q_y.$$

Mithin ist die Abbildung injektiv. Damit folgt die Behauptung aus Satz I.3.2 (S. 17). □

Der folgende Satz zeigt, dass stetige, monotone Funktionen sehr gutartig sind. Er wird uns im nächsten Paragraphen gute Dienste leisten.

Satz III.6.7. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend. Dann gilt*

1. *$J = f(I)$ ist ein Intervall.*
2. *$f : I \to J$ ist bijektiv.*
3. *Die Umkehrabbildung $f^{-1} : J \to I$ ist stetig und streng monoton wachsend bzw. fallend.*

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz III.5.3 (S. 88) und III.5.4 (S. 89).
ad (2): Die Surjektivität folgt aus der Definition von J, die Injektivität aus der strengen Monotonie.
ad (3): Sei $g = f^{-1} : J \to \mathbb{R}$. O.E. setzen wir voraus, dass f streng monoton wachsend ist. Andernfalls gehen wir zu $-f$ über.
Sei $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$. Angenommen es ist $g(y_1) \geq g(y_2)$. Da f streng monoton wachsend ist, folgt

$$y_2 = f(g(y_2)) \leq f(g(y_1)) = y_1.$$

Also ist g streng monoton wachsend.
Sei nun $y_0 \in \overset{\circ}{I}$. Gemäß Satz III.6.3 existieren die Grenzwerte

$$g(y_0+0) \text{ und } g(y_0-0).$$

Wir müssen zeigen, dass sie mit $g(y_0)$ übereinstimmen. Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset J$ eine monoton wachsende Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} y_k = y_0 \text{ und } y_k < y_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = g(y_k)$ eine monoton wachsende Folge mit

$$x_k < x_0 = g(y_0) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Sei

$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Dann ist

$$\overline{x} \leq x_0 \quad \text{und } \overline{x} \in I.$$

Angenommen es wäre, $\overline{x} < x_0$. Dann folgt aus der Stetigkeit und der strengen Monotonie von f

$$\begin{aligned} y_0 &= \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \\ &= f(\overline{x}) \\ &< f(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

Also ist $\overline{x} = x_0$ und somit

$$g(y_0 - 0) = g(y_0).$$

Ganz analog folgt $g(y_0 + 0) = g(y_0)$. Also ist g stetig. □

Beispiel III.6.8. Sei $n \geq 2$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$f(x) = x^n.$$

Für $0 \leq x < y$ gilt

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= y^n - x^n \\ &= y^n(1 - (\frac{x}{y})^n) \\ &= \underbrace{y^n}_{>0} \underbrace{(1 - (\frac{x}{y}))}_{>0} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(\frac{x}{y})^k}_{>0} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also ist f streng monoton wachsend.
Wegen $0 \leq f(x) = x^n \leq x$ für alle $0 \leq x \leq 1$ gilt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0.$$

Wegen $f(x) = x^n \geq x$ für alle $x \geq 1$ gilt

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Also ist gemäß Satz III.6.7 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ bijektiv und es gibt eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrfunktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Es ist

$$g(x) = \sqrt[n]{x}.$$

III.7. Exponentialfunktion und Verwandte

Definition III.7.1. Durch

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

werden drei Funktionen von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$, genannt EXPONENTIALFUNKTION, COSINUS und SINUS, definiert.

SATZ III.7.2. *Es gilt:*

(1) *Die Potenzreihen in Definition III.7.1 haben alle den Konvergenzradius* ∞.
(2) $\exp, \sin, \cos$ *sind reellwertig auf* $\mathbb{R}$.
(3) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ *für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
(4) $e^z \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}; e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$
(5) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(6) $\cos$ *ist gerade, d.h.,* $\cos(-z) = \cos(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
$\sin$ *ist ungerade, d.h.,* $\sin(-z) = -\sin(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(7) $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(8) $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(9) $\exp, \cos, \sin$ *sind stetig.*

BEWEIS. AD (1): Folgt aus Satz II.6.4 (S. 58).
AD (2): Ist klar.
AD (3): Beispiel II.5.15 (S. 56).
AD (4): Beispiel II.5.15 (S. 56).
AD (5):

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(i)^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}(i)^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{wg. abs. Konv. mögl.} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(z) + i \sin(z).
\end{aligned}$$

AD (6): Ist offensichtlich.
AD (7):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) &= \frac{1}{2}(\cos(z) + i \sin(z) + \cos(-z) + i \sin(-z)) \\
&= \cos(z) \\
\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) &= \frac{1}{2i}(\cos(z) + i \sin(z) - \cos(-z) - i \sin(-z)) \\
&= \sin(z).
\end{aligned}$$

AD (8): Folgt aus (2) und (5).
AD (9): Gemäß Beispiel III.3.14(2) (S. 79) gibt es ein $\rho > 0$ mit

$$\frac{|e^z - 1|}{|z|} \le 2 \qquad \forall |z| < \rho.$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle

$$\delta = \min\{\rho, \frac{\varepsilon}{2|e^{z_0}|}\} > 0.$$

Dann folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |e^z - e^{z_0}| &= |e^{z_0}| \cdot \frac{|e^{(z-z_0)} - 1|}{|z - z_0|} |z - z_0| \\ &\le 2|e^{z_0}||z - z_0| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist exp stetig. Wegen Satz III.3.8 (S. 77) ist dann auch

$$z \mapsto \exp(-z)$$

stetig. Damit folgt die Stetigkeit von Sinus und Cosinus aus (7) und Satz III.3.5 (S. 77). □

SATZ III.7.3 (ADDITIONSTHEOREME). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*
(1) $\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w)$.
$\sin(z \pm w) = \sin(z)\cos(w) \pm \cos(z)\sin(w)$.
(2) $\sin(z) - \sin(w) = 2\cos(\frac{z+w}{2})\sin(\frac{z-w}{2})$.
$\cos(z) - \cos(w) = -2\sin(\frac{z+w}{2})\sin(\frac{z-w}{2})$.
(3) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$.

BEWEIS. AD (1):

$$\begin{aligned} \cos(z + w) &= \frac{1}{2}(e^{i(z+w)} + e^{-(z+w)}) \\ &= \frac{1}{2}[e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}] \\ &= \frac{1}{4}[(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) \\ &\qquad + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})] \\ &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \end{aligned}$$

Die Identität für $\cos(z - w)$ folgt aus $\cos(z - w) = \cos(z + (-w))$ und Satz III.7.2 (6). Der Beweis der Identität für $\sin(z \pm w)$ ist völlig analog.
AD (2): Setze $u = \frac{z-w}{2}$, $v = \frac{z+w}{2}$. Dann ist

$$z = u + v, \ w = v - u.$$

Damit folgt aus (1) und Satz III.7.2 (6)

$$\sin(z) - \sin(w) = \sin(u + v) + \sin(u - v)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sin(u)\cos(v) \\
&= 2\sin(\frac{z-w}{2})\cos(\frac{z+w}{2})
\end{aligned}
$$

Die zweite Identität folgt analog.
AD (3): Aus (1) folgt

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = \cos(z-z) = \cos(0) = 1.$$

□

Wegen $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ ist das Verhalten der Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ festgelegt durch ihr Verhalten auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ und $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten zunächst die reelle Exponentialfunktion.

SATZ III.7.4. *Es gilt:*

(1) $0 < e^x < 1$ *für alle* $x < 0$*;*
$e^x > 1$ *für alle* $x > 0$.
(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *ist streng monoton wachsend.*
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-n}e^x = +\infty$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$*,*
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

BEWEIS. AD (1): Für $x > 0$ folgt

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1.$$

Für $x < 0$ folgt

$$e^x = e^{-(-x)} = \frac{1}{e^{-x}} \in (0,1).$$

AD (2): Für $x < y$ folgt aus (1)

$$e^y = e^x e^{y-x} > e^x.$$

AD (3): Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ folgt

$$x^{-n}e^x > x^{-n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{(n+1)!} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Schließlich gilt

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

□

Wegen Satz III.7.4 und Satz III.6.7 (S. 96) ist die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION III.7.5. Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion heißt (NATÜRLICHER) LOGARITHMUS und wird mit ln bezeichnet;

$$\ln = (\exp|_{\mathbb{R}})^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}.$$

Satz III.7.6. (1) *Der Logarithmus ist eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \ \lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty.$$

(2) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *gilt*

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y).$$

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz III.6.7 (S. 96) und Satz III.7.4.
ad (2): Sei $a = \ln(x)$, $b = \ln(y)$. Dann folgt aus Satz III.7.2 und der Definition des Logarithmus

$$x \cdot y = e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$
$$\Longrightarrow \ln(x) + \ln(y) = a + b = \ln(x \cdot y)$$

Analog für $\ln(\frac{x}{y})$. □

Sei $a > 0$. Dann folgt

$$a = e^{\ln(a)}$$

und damit

$$a^n = (e^{\ln(a)})^n = e^{n\ln(a)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{e^{n\ln(a)}} = e^{-n\ln(a)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $x = e^{\frac{1}{n}\ln(a)} \in \mathbb{R}_+^*$. Dann folgt

$$x^n = e^{n\frac{1}{n}\ln(a)} = e^{\ln(a)} = a.$$

Also gilt

$$\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n}\ln(a)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Hieraus folgt für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$

$$a^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln(a)}.$$

Dies führt zu folgender Definition.

Definition III.7.7. Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$a^x = e^{x\ln(a)}.$$

Satz III.7.8. *Seien* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *dann gilt:*

(1) $a^x a^y = a^{x+y}$, $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
(2) $a^x b^x = (ab)^x$, $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$.
(3) $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$.
(4) $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Der folgende Satz sagt etwas aus über das asymptotische Verhalten des Logarithmus für $x \to 0+$ und $x \to +\infty$.

Satz III.7.9. *Für* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *gilt*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}\ln(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} x^{\alpha}\ln(x) = 0.$$

Beweis. Da aus $x \to +\infty$ folgt $y = \ln(x) \to +\infty$ erhalten wir mit Satz III.7.4 (3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}\ln(x) &= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} \\ &= \frac{1}{\alpha}\lim_{y\to+\infty}\frac{\alpha y}{e^{\alpha y}} \\ &= \frac{1}{\alpha}\lim_{z\to+\infty}\frac{z}{e^{z}} \qquad (z=\alpha y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x^{\alpha}\ln(x) &= \lim_{y\to+\infty} y^{-\alpha}\ln(\frac{1}{y}) \qquad (x=\frac{1}{y}) \\ &= -\lim_{y\to+\infty} y^{-\alpha}\ln(y) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Als nächstes untersuchen wir das Verhalten der Exponentialfunktion auf $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Um Schreibarbeit zu sparen, definieren wir für $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ixp}(x) = e^{ix} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Satz III.7.10. $\operatorname{ixp}(\mathbb{R}) = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Beweis. Wegen Satz III.7.3 (3) ist $\operatorname{ixp}(\mathbb{R}) \subset S^1$. Um die Gleichheit zu zeigen, beweisen wir zunächst:
Beh.: $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
Bew. der Beh.: Wegen Satz III.5.3 (S. 88) und Satz III.5.4 (S. 89) ist $I = \cos(\mathbb{R})$ ein Intervall. Wegen $\cos(0) = 1$ ist $1 \in I$. Wegen

$$\begin{aligned}\cos 1 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{(-1)^{2k-1}}{(4k-2)!} + \frac{(-1)^{2k}}{(4k)!}\} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{1}{(4k-2)!} - \frac{1}{(4k)!}\} \\ &< 1\end{aligned}$$

ist $I \neq \{1\}$ und

$$a = \inf I < 1.$$

Wegen Satz III.7.3 (3) ist $a \geq -1$. Angenommen $a > -1$. Dann ist $\alpha = \frac{a+1}{2} \in I$ und es gibt ein x mit $\cos(x) = \alpha$. Mit Satz III.7.3 folgt

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2\cos^2(x) - 1 \\ &= 2(\frac{a+1}{2})^2 - 1 \\ &= a - \frac{1-a^2}{2} \\ &< a.\end{aligned}$$

Also ist $a = -1$. Insbesondere ist $0 \in I$ und es gibt ein x mit $\cos(x) = 0$. Mit Satz III.7.3 folgt wieder

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = -1.$$

Damit ist Beh. bewiesen.
Sei nun $z \in S^1$. Dann gibt es gemäß Behauptung ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\cos(x) = \operatorname{Re} z \in [-1, 1].$$

Dann gilt aber $e^{ix} = z$ oder $\overline{(e^{ix})} = e^{-ix} = z$, d.h.,

$$\operatorname{ixp}(x) = z \ \text{ oder } \operatorname{ixp}(-x) = z.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Satz III.7.11. *Die Menge* $M = \{x \in \mathbb{R}^*_+ : \operatorname{ixp}(x) = 1\}$ *besitzt ein positives Minimum. Wir definieren*

$$\pi = \frac{1}{2}\min\{x \in \mathbb{R}^*_+ : \operatorname{ixp}(x) = 1\}.$$

Beweis. Wegen Satz III.7.10 gibt es ein x mit

$$\operatorname{ixp}(x) = -1.$$

Wegen $\operatorname{ixp}(0) = 1$ ist $x \neq 0$. Wegen

$$\operatorname{ixp}(-x) = [\operatorname{ixp}(x)]^{-1} = -1$$

ist o.E. $x > 0$. Wegen

$$\operatorname{ixp}(2x) = [\operatorname{ixp}(x)]^2 = 1$$

ist $M \neq \emptyset$. Für $x \in (0, 1)$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\{\frac{(-1)^{2k}x^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{(-1)^{2k+1}x^{4k+3}}{(4k+3)!}\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+1}[\frac{1}{(4k+1)!} - \frac{x^2}{(4k+3)!}]\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+1}[\frac{1}{(4k+1)!} - \frac{1}{(4k+3)!}]$$
$$> 0.$$

Also ist

$$M = \varphi^{-1}(\{1\})$$

mit $\varphi = \mathrm{ixp}|_{[1,\infty)}$. Hieraus folgt die Behauptung. □

SATZ III.7.12. *Es gilt:*

(1) $e^z = 1 \iff z \in 2\pi i\mathbb{Z} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi i.$
(2) $e^z = -1 \iff z \in \pi i + 2\pi i\mathbb{Z} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = (2k+1)\pi i.$

BEWEIS. AD (1): „$\Longleftarrow$“: $e^{2k\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1$
„$\Longrightarrow$“: $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, e^z = 1$

$$\Longrightarrow 1 = |e^z| = |e^x||e^{iy}| = e^x \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$
$$y = 2k\pi + r \quad \text{mit } 0 \leq r < 2\pi$$
$$\Longrightarrow 1 = e^z = e^{2k\pi i}e^{ir} = e^{ir} \quad \Longrightarrow \quad r = 0 \quad \text{nach Def. von } \pi.$$

AD (2): „$\Longleftarrow$“: $e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i} = a$

$$a^2 = e^{2\pi i} = 1 \Longrightarrow a = \pm 1 \Longrightarrow a = -1 \text{ nach Def. von } \pi.$$

„$\Longrightarrow$“:

$$e^z = -1 \Longrightarrow e^{2z} = 1 \Longrightarrow 2z \in 2\pi i\mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow z \in \pi i\mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow z = (2\ell+1)\pi i \quad \text{mit } \ell \in \mathbb{Z} \text{ wegen (1).}$$

□

Aus Satz III.7.12 folgt

$$e^z = e^{z+2k\pi i} \quad \forall z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}.$$

Falls es für eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ein $p \in \mathbb{K}^*$ gibt mit

$$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{K},$$

sagt man, f sei p-PERIODISCH. exp ist also $2\pi i$ periodisch.

SATZ III.7.13. *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\mathrm{ixp} : [a, a+2\pi) \to S^1$$

und

$$\mathrm{ixp} : (a, a+2\pi] \to S^1$$

sind bijektiv.

Beweis. Injektiv:

$$\begin{aligned}\operatorname{ixp}(x) = \operatorname{ixp}(y) &\iff \operatorname{ixp}(x-y) = 1\\ &\iff x - y = 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ (Satz III.7.12)}\\ &\iff x = y \text{ da } |x-y| < 2\pi \ \forall x, y \in [a, a+2\pi)\\ &\qquad\qquad \text{bzw. } \forall x, y \in (a, a+2\pi].\end{aligned}$$

Surjektiv: Zu $z \in S^1$ gibt es nach Satz III.7.10 ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{ixp}(x) = z$. x lässt sich in der Form $x = a + 2k\pi + r$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in [0, 2\pi)$ darstellen. Damit folgt

$$\begin{aligned}z = \operatorname{ixp}(x) &= \operatorname{ixp}(a+r) \cdot \operatorname{ixp}(2k\pi)\\ &= \operatorname{ixp}(a+r).\end{aligned}$$

Wegen $a + r \in [a, a+2\pi)$ folgt die Surjektivität. □

Satz III.7.14. *Es gilt:*

(1) $\cos(z + 2k\pi) = \cos(z)$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$.
(2) $\cos(z) = 0 \iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$,
$\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}$.
(3) $\sin(x) > 0$ *für alle* $x \in (0, \pi)$,
$\sin(x)$ *ist streng monoton wachsend auf* $(0, \frac{\pi}{2})$.
(4) $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(5) $\cos(z) = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$, $\sin(z) = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.
(6) $\cos(\mathbb{R}) = \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz III.7.2 (7) und Satz III.7.12.
ad (2):

$$\begin{aligned}\cos(z) = 0 &\iff e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\iff e^{2iz} = -1\\ &\iff 2zi \in \pi i + 2\pi i\mathbb{Z} \text{ wegen Satz III.7.12}\\ &\iff z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\\ \sin(z) = 0 &\iff e^{iz} = e^{-iz}\\ &\iff e^{2iz} = 1\\ &\iff 2iz \in 2\pi i\mathbb{Z} \text{ wegen Satz III.7.12}\\ &\iff z \in \pi\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

ad (3): Im Beweis von Satz III.7.11 wurde gezeigt

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1).$$

Damit folgt aus Teil (2) und Satz III.5.5 (S. 90)

$$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Mit dem gleichen Argument folgt aus $\cos(0) = 1$

$$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Sei nun $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. Dann folgt aus Satz III.7.3

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) > 0.$$

AD (4): Folgt aus Satz III.7.12 und Satz III.7.3.
AD (5): Folgt aus (2), (3) und Satz III.7.3.
AD (6): Aus Satz III.7.10 folgt $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Aus (5) folgt dann $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. □

BEMERKUNG III.7.15. (1) Die reellen Funktionen cos und sin sind durch die Werte von $\sin(x)$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ eindeutig festgelegt.
(2) Die Zahl π ist irrational, ja sie ist sogar transzendent (Beweis von LINDEMANN 1882), d.h., es gibt kein Polynom p mit rationalen Koeffizienten und $p(\pi) = 0$.
(3) Die Zahl $\frac{\pi}{2}$ ist die kleinste positive Nullstelle des Cosinus. Um sie numerisch zu berechnen, benutzen wir die Identität

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2n+2}(x)$$

mit

$$r_{2n+2}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und die (zu beweisende!) Abschätzung

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \forall |x| \leq 2n+3.$$

Für $0 < x \leq 5$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + r_4 \\ &\leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2}(1 - \frac{x^2}{12}) \\ &< 1 \qquad\qquad \forall\, 0 < x < \sqrt{12}. \end{aligned}$$

Also ist $2\pi \geq \sqrt{12}$ und damit $\pi \geq \sqrt{3} > 1.5$. Für $x = 1.5$ und $x = 1.6$ erhalten wir

$$\cos(1.5) = 0.070'737'201'63 \pm 20 \cdot 10^{-11} > 0$$
$$\cos(1.6) = -0.029'199'522'39 \pm 20 \cdot 10^{-11} < 0.$$

Also ist $1.5 < \frac{\pi}{2} < 1.6$. Sei

$$a = 1.5 + 0.1 \frac{\cos(1.5)}{\cos(1.5) - \cos(1.6)} = 1.57078\ldots \quad .$$

a ist der Schnittpunkt der Geraden durch $(1.5, \cos(1.5))$ und $(1.6, \cos(1.6))$ mit der x-Achse. Wir erhalten

$$\cos(1.5707) = 0.000'096'326'73 \pm 20 \cdot 10^{-11} > 0$$
$$\cos(1.5708) = -0.000'003'673'26 \pm 20 \cdot 10^{-11} < 0.$$

Wegen

$$\cos y - \cos x = -2 \sin(\frac{y+x}{2}) \sin(\frac{x-y}{2})$$
$$< 0 \qquad \forall\, 0 < x < y < \pi$$

ist der Cosinus auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend. Daher folgt aus obiger Abschätzung

$$1.5707 < \frac{\pi}{2} < 1.5708.$$

Sei

$$b = 1.5707 + 0.0001 \frac{\cos(1.5707)}{\cos(1.5707) - \cos(1.5708)}$$
$$= 1.570'796'326' \ldots \quad .$$

Wir erhalten

$$\cos(1.570'796'326) = 0.000'000'000'73 \pm 20 \cdot 10^{-11} > 0$$
$$\cos(1.570'796'327) = -0.000'000'000'27 \pm 20 \cdot 10^{-11} < 0.$$

Also gilt

$$1.570'796'326 < \frac{\pi}{2} < 1.507'796'327$$

d.h.

$$\pi = 3.141'592'653 \pm 10^{-9}.$$

Satz III.7.16. *Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp : \mathbb{R} \times [a, a + 2\pi)i \to \mathbb{C}^*$$
$$\exp : \mathbb{R} \times (a, a + 2\pi]i \to \mathbb{C}^*$$

ist bijektiv.

Beweis. Injektiv: Für $z = x + iy$, $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ folgt

$$e^z = e^w \iff e^x e^{iy} = e^u e^{iv}$$
$$\implies |e^x e^{iy}| = |e^u e^{iv}|$$
$$\implies e^x = e^u \implies x = u$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow e^{iy} = e^{iv}\\
&\Longrightarrow e^{i(y-v)} = 1\\
&\Longrightarrow y - v \in 2\pi\mathbb{Z}\\
&\Longrightarrow y = v.
\end{aligned}
$$

Surjektiv: Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Dann ist $|z| > 0$ und $\frac{z}{|z|} \in S^1$. Also gibt es nach Satz III.7.6 und Satz III.7.10 ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $y \in [a, a+2\pi)$ bzw. $y \in (a, a+2\pi]$ mit

$$e^x = |z|, \; e^{iy} = \frac{z}{|z|}.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Hieraus folgt unmittelbar die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen.

Satz III.7.17 (Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen). *Zu jedem $z \in \mathbb{C}^*$ gibt es genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit*

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

α heißt das Argument *von z, kurz $\alpha = \arg(z)$.*

Bemerkung III.7.18. Seien $z, u \in \mathbb{C}^*$ und

$$z = re^{i\varphi}, \; u = se^{i\psi}$$

mit $r, s \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi, \psi \in [0, 2\pi)$. Dann folgt

$$z \cdot u = (r \cdot s)e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Also

$$\arg(z \cdot u) = \arg(z) + \arg(u) \mod 2\pi.$$

Zwei komplexe Zahlen werden also miteinander multipliziert, indem ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente modulo 2π addiert werden.

Satz III.7.19 (komplexe Wurzeln). *Für jedes $a \in \mathbb{C}^*$ und jedes $n \in \mathbb{N}^*$ besitzt die Gleichung $z^n = a$ genau die n komplexen Lösungen*

$$z_k = |a|^{1/n} e^{i(\arg(a)+2\pi k)/n} \quad 0 \le k \le n-1.$$

Beweis. Sei z eine Lösung der Gleichung $z^n = a$. Dann ist $z \in \mathbb{C}^*$ und somit

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ und } \varphi \in [0, 2\pi).$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&z^n = r^n e^{in\varphi} = a = |a|e^{i\arg(a)}\\
\Longleftrightarrow\ &r^n = |a|\\
\Longleftrightarrow\ &r = |a|^{1/n}
\end{aligned}
$$

und

$$\begin{aligned} &n\varphi - \arg(a) \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \iff &\varphi = \frac{1}{n}(\arg(a) + 2k\pi) \quad 0 \le k \le n-1. \end{aligned}$$

□

Zum Abschluss beweisen wir noch eine andere Darstellung der Exponentialfunktion.

Satz III.7.20. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist*

$$e^z = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}^*$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} e^z - (1 + \frac{z}{n})^n &= (e^{\frac{z}{n}})^n - (1 + \frac{z}{n})^n \\ &= [e^{\frac{z}{n}} - (1 + \frac{z}{n})] \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{z}{n}k} (1 + \frac{z}{n})^{n-1-k} \\ &= A \cdot B. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} A &= e^{\frac{z}{n}} - (1 + \frac{z}{n}) \\ &= \frac{z}{n}[\frac{e^{\frac{z}{n}} - 1}{\frac{z}{n}} - 1] \\ &= \frac{z}{n} r_n(z). \end{aligned}$$

Gemäß Beispiel III.3.14(2) (S. 79) gilt

$$\lim_{n\to\infty} r_n(z) = 0.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |e^{\frac{z}{n}}| &\le e^{\frac{|z|}{n}} \\ |1 + \frac{z}{n}| &\le 1 + \frac{|z|}{n} \\ &\le e^{\frac{|z|}{n}}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |B| &\le \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{|z|}{n}k} |1 + \frac{z}{n}|^{n-1-k} \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{|z|}{n}(k+n-1-k)} \\ &\le n e^{|z|\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$

$$\leq ne^{|z|}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} |e^{\frac{z}{n}} - (1 + \frac{z}{n})^n| &\leq \frac{|z|}{n} |r_n(z)| ne^{|z|} \\ &= |z| e^{|z|} |r_n(z)| \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

$\square$

KAPITEL IV

Differentialrechnung einer Veränderlichen

Zunächst führen wir den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion von $M \subset \mathbb{K}$ in einen normierten Vektorraum ein und betrachten darauf aufbauende Begriffe. Danach leiten wir Mittelwertsätze her und befassen uns mit Konsequenzen wie z.B. der Regel von de l'Hôpital. Anschließend beweisen wir Taylorformeln und ziehen daraus Konsequenzen.
Als Anwendung betrachten wir die numerische Lösung von Gleichungen. Wir beweisen den Banachschen Fixpunktsatz, leiten das Newtonverfahren her und beweisen seine Konvergenz.

IV.1. Differenzierbarkeit

Im Folgenden sei, sofern nicht anders vermerkt, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum, $M \subset \mathbb{K}$ eine nicht leere Menge, $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von M und $f : M \to Y$ eine Funktion.

Definition IV.1.1. Die Funktion $f : M \to Y$ heißt im Punkt $x_0 \in M$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

in Y existiert. Falls f in x_0 differenzierbar ist, nennen wir

$$\begin{aligned} f'(x_0) = Df(x_0) =& \frac{df}{dx}(x_0) \\ =& \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ =& \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in Y \end{aligned}$$

die Ableitung von f im Punkte x_0.

Bevor wir Eigenschaften differenzierbarer Funktionen untersuchen einige Beispiele.

Beispiel IV.1.2. (1) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ ist differenzierbar für jedes $z \in \mathbb{C}$ und $f'(z) = nz^{n-1}$.
(2) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ ist differenzierbar für jedes $z \in \mathbb{C}$ und $f'(z) = e^z$.
(3) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ und $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x^2)^t$ ist differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $f'(x) = (1, 2x)^t$.
(5) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.
(6) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = \operatorname{Re} z$ ist in keinem Punkt $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar.

Beweis. ad (1):

$$\begin{aligned}\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-k-1} \\ &\xrightarrow[z \to z_0]{} \sum_{k=0}^{n-1} z_0^k z_0^{n-k-1} = n z_0^{n-1}.\end{aligned}$$

ad (2):

$$\frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0} \frac{e^{z-z_0} - 1}{z - z_0} \xrightarrow[z \to z_0]{} e^{z_0}.$$

ad (3):

$$\frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{-h}{h x_0 (x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0(x_0 + h)} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{1}{x_0^2}.$$

ad (4):

$$\begin{aligned}\left\| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - (1, 2x_0)^t \right\| &= \|(1, 2x_0 + h)^t - (1, 2x_0)^t\| \\ &= \sqrt{(1-1)^2 + (2x_0 + h - 2x_0)^2} \\ &= |h| \\ &\xrightarrow[h \to 0]{} 0\end{aligned}$$

ad (5):

$$\begin{aligned}\lim_{n \to \infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \\ \lim_{n \to \infty} \frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n}} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1.\end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^*$ folgt analog, dass f differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

ad (6): Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{f(z + \frac{1}{n}) - f(z)}{\frac{1}{n}} &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \\ \frac{f(z + \frac{i}{n}) - f(z)}{\frac{i}{n}} &= 0 \qquad\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

□

Satz IV.1.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(1) *f ist differenzierbar in x_0.*
(2) *Es gibt ein $c \in Y$ mit*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - c(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

(3) *Es gibt ein $c \in Y$ und eine Abbildung $r : M \to Y$, die in x_0 stetig ist und $r(x_0) = 0$ erfüllt, mit*

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \forall x \in M.$$

In den Fällen (2) und (3) ist c eindeutig bestimmt und $c = f'(x_0)$.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Ist offensichtlich.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Definiere $r : M \to Y$ durch

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)-c(x-x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0. \end{cases}$$

Aus (2) folgt dann, dass r in x_0 stetig ist.
(3) $\Longrightarrow$ (1): Ist offensichtlich. $\square$

Aus Satz IV.1.3 folgt unmittelbar:

Satz IV.1.4. *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Gemäß Satz IV.1.3 (3) ist

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$$

mit einer in x_0 stetigen Funktion r. Also ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$\square$

Bemerkung IV.1.5. (1) Beispiele IV.1.2 (5) und (6) zeigen, dass die Umkehrung von Satz IV.1.4 i. a. falsch ist.
(2) Eine Funktion der Form $x \to f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist affin. Mithin besagt Satz IV.1.3, dass eine in x_0 differenzierbare Funktion f in der Nähe von x_0 durch eine affine Funktion bis auf einen Fehler $R(x)$ mit

$$(*) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0,$$

d.h. einen Fehler höherer Ordnung, approximiert werden kann. Sei nun umgekehrt $h : M \to Y$ eine affine Funktion, $R : M \to Y$ eine Funktion, die $(*)$ erfüllt, und

$$f(x) = h(x) + R(x) \quad \forall x \in M.$$

Da h affin ist, gilt für alle $x \in M$

$$h(x) = h(0) + cx$$

mit $c \in Y$. Daher gilt

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= h(x) + R(x) - h(x_0) - \underbrace{R(x_0)}_{=0} \\ &= h(0) + cx + R(x) - h(0) - cx_0 \\ &= c(x - x_0) + R(x) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c.$$

Also ist f in x_0 differenzierbar.
Mithin ist also eine Funktion genau dann in x_0 differenzierbar, wenn sie dort linear approximierbar, d.h. durch eine affine Funktion bis auf Terme höherer Ordnung darstellbar ist. Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f durch eine Gerade approximiert werden kann.
(3) Ist $f : M \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $x_0 \in M \cap \mathbb{R}$ differenzierbar, ist weiter x_0 ein Häufungspunkt von $M \cap \mathbb{R}$ und ist $f(M \cap \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, so ist $f|_{M \cap \mathbb{R}}$ als Funktion von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Beispiel IV.1.2 (6) zeigt, dass die Umkehrung i. a. falsch ist.
(4) Ist $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ in x_0 differenzierbar, so ist f aufgefasst als Abbildung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ auch in x_0 differenzierbar und die Ableitungen stimmen unter Berücksichtigung der Konvention $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \sim x + iy \in \mathbb{C}$ überein.

Satz IV.1.6. $f = (f_1, \ldots, f_m)^t : M \to \mathbb{K}^m$ *ist genau dann in* x_0 *differenzierbar, wenn jede Komponentenfunktion* f_j, $1 \le j \le m$, *in* x_0 *differenzierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))^t.$$

Beweis. Wegen

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}, \ldots, \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} \right)^t$$

folgt die Behauptung aus Satz III.3.10 (S. 78) und Bemerkung III.3.13 (S. 79). □

Satz IV.1.7. *Seien* $f : M \to Y$, $g : M \to Y$ *in* x_0 *differenzierbar und* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

(1) $\alpha f + \beta g$ *ist in* x_0 *differenzierbar und*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0),$$

d.h., die in x_0 *differenzierbaren Funktionen bilden einen* $\mathbb{K}$-*Vektorraum.*

(2) *Ist* $Y = \mathbb{K}$, *so ist auch* $f \cdot g$ *in* x_0 *differenzierbar und*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(3) *Ist* $Y = \mathbb{K}$ *und* $g(x_0) \neq 0$ *so ist auch* $\frac{f}{g}$ *in* x_0 *differenzierbar und*

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis. ad (1): Ist offensichtlich.
ad (2):

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} \\
=&\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}& f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{wg. Satz IV.1.4}
\end{aligned}$$

ad (3): Wegen Satz IV.1.4 gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Für $x \in U$ folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} \\
=&\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} \\
=&\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] \\
\underset{x\to x_0}{\longrightarrow}&\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

□

Satz IV.1.8 (Kettenregel). $f : M \to \mathbb{K}$ *sei in* x_0 *differenzierbar,* $y_0 = f(x_0)$ *sei ein Häufungspunkt von* $N \subset \mathbb{K}$ *und* $g : N \to Y$ *sei differenzierbar in* y_0. *Dann ist* $g \circ f$ *in* x_0 *differenzierbar und es gilt*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Beweis. Es ist gemäß Satz IV.1.3

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + r(x)(x-x_0) \quad \forall x \in M \\
g(y) &= g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + s(y)(y-y_0) \quad \forall y \in N
\end{aligned}$$

mit in x_0 bzw. y_0 stetigen Funktionen r und s und $r(x_0) = 0$, $s(y_0) = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
g\circ f(x) &= g\circ f(x_0) + g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)) \\
&\qquad + s\circ f(x)(f(x)-f(x_0)) \\
&= g\circ f(x_0) + g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)(x-x_0) \\
&\qquad + [g'(f(x_0))r(x) \\
&\qquad\quad + s\circ f(x)\cdot f'(x_0) + s\circ f(x)r(x)](x-x_0).
\end{aligned}$$

Da die Funktion $\varphi : M \to Y$ mit

$$\varphi(x) = g'(f(x_0))r(x) + s \circ f(x) \cdot f'(x_0) + s \circ f(x) \cdot r(x)$$

gemäß Satz III.3.5 (S. 77) und Satz III.3.8 (S. 77) in x_0 stetig ist und $\varphi(x_0) = 0$ erfüllt, folgt die Behauptung. □

Satz IV.1.9 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). *Sei $f : M \to \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und injektiv. Weiter sei $f^{-1} : N \to \mathbb{K}$ mit $N = f(M)$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist f^{-1} in y_0 differenzierbar genau dann, wenn gilt $f'(x_0) \neq 0$. In diesem Fall ist*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Gemäß Satz IV.1.4 ist f stetig in x_0. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Dann gilt $f(x_n) \neq f(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. Also ist y_0 ein Häufungspunkt von N, so dass es sinnvoll ist, von Differenzierbarkeit in y_0 zu sprechen.
„$\Longrightarrow$“: Für alle $x \in M$ gilt

$$f^{-1} \circ f(x) = x.$$

Damit folgt aus Satz IV.1.8

$$1 = (f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(y_0)f'(x_0).$$

Hieraus folgt $f'(x_0) \neq 0$ und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
„$\Longleftarrow$“:

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &\underset{y=f(x)}{=} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \\ &\underset{\substack{y\to y_0 \\ (\Longleftrightarrow x\to x_0)}}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(x_0)}.\end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass wegen der Injektivität von f gilt

$$y \neq y_0 \iff x \neq x_0,$$

und dass wegen der Stetigkeit von f^{-1} in y_0 gilt

$$y \to y_0 \iff f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0.$$

□

Bemerkung IV.1.10. Sei $M \neq \emptyset$, $M \neq \{x_0\}$, $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : M \to \mathbb{R}$ streng monoton, stetig, in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz III.6.7 (S. 96) und Satz IV.1.9. □

Beispiel IV.1.11. $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist für jedes $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$ differenzierbar und

$$\frac{d}{dx}\ln(y_0) = \frac{1}{y_0} \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Beweis. Wegen Satz III.7.4 (S. 100) und Beispiel IV.1.2 (2) sind die Voraussetzungen von Satz IV.1.9 erfüllt. Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln(y_0) &= \frac{1}{\exp(x_0)} \quad (\exp(x_0) = y_0)\\ &= \frac{1}{y_0}.\end{aligned}$$

□

Definition IV.1.12. Eine Teilmenge M eines normierten Vektorraumes heißt perfekt, wenn jeder Punkt von M Häufungspunkt von M ist.

Beispiel IV.1.13. (1) M offen $\Longrightarrow M$ perfekt.
(2) $M \subset \mathbb{R}$ Intervall. $M \neq \emptyset, M \neq \{x\} \Longrightarrow M$ perfekt.
(3) $\{x\} \subset \mathbb{R}$ ist nicht perfekt.

Definition IV.1.14. Sei $M \subset \mathbb{K}$ perfekt.

(1) $f : M \to Y$ heißt differenzierbar (in M), wenn f in jedem Punkt $x \in M$ differenzierbar ist.
(2) $f : M \to Y$ heißt stetig differenzierbar (in M), wenn f differenzierbar und f' stetig ist.
(3) $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = Df = f'$,
$f^{(n+1)} = D^{n+1}f = (f^{(n)})' \quad \forall n \in \mathbb{N}$, sofern definiert.
(4) f heißt n-mal stetig differenzierbar, $n \in \mathbb{N}^*$, wenn $f^{(n)}$ existiert und stetig ist.
(5) $C^n(M,Y) = \{f \in C(M,Y) : f$ ist n-mal stetig differenzierbar$\}$, $n \in \mathbb{N}^*$,
$C^\infty(M,Y) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C^n(M,Y)$.

Bemerkung IV.1.15. (1) $C^n(M,Y)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.
(2) $C(M,Y) \underset{\neq}{\supset} C^1(M,Y) \underset{\neq}{\supset} C^2(M,Y) \cdots$.
(3) Falls M perfekt und kompakt ist, ist

$$\|f\|_{C^n(M,Y)} = \max_{0\le k\le n} \|f^{(k)}\|_{C(M,Y)}$$

wohldefiniert und eine Norm auf $C^n(M,Y)$.

Beweis. ad (1): Folgt durch Induktion über n aus Satz IV.1.7.
ad (2): $C^n(M,Y) \subset C^{n-1}(M,Y)$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ folgt durch Induktion aus Satz IV.1.3. $|x|x^{n-1}$ ist in $C^{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aber nicht in $C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$.
ad (3): Übungsaufgabe. □

Satz IV.1.16 (Leibnizregel). *Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $f, g \in C^n(M, \mathbb{K})$ mit $M \subset \mathbb{K}$ perfekt. Dann ist $f \cdot g \in C^n(M, \mathbb{K})$ und*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Beweis. Induktion über n.
$n = 1$: Satz IV.1.7 (2).
$n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(n+1)} &= \Big((f \cdot g)^{(n)}\Big)' \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}] \\
&= \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n}{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-l)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}] f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel IV.1.17. (1) $M \subset \mathbb{R}, f : M \to \mathbb{C}$. Dann ist $f = g + ih$ mit $g, h : M \to \mathbb{R}$. Es gilt: f differenzierbar in $x_0 \iff g$ und h differenzierbar in x_0.

$$f'(x_0) = g'(x_0) + ih'(x_0).$$

(2) $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_k \in \mathbb{K}$. Dann ist $p \in C^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ mit

$$p' = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}(l+1) x^l$$

und

$$p^{(m)} = 0 \quad \forall m > n.$$

(3) $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $q = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{K}$ und $q(x) \neq 0$ für alle

$x \in M$, M perfekt. Dann ist $\frac{p}{q} \in C^\infty(M, \mathbb{K})$.
(4) $\exp \in C^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K}), \exp' = \exp$.
(5) $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{K}, \mathbb{K})$

$$\cos' = -\sin\ ,\ \sin' = \cos\,.$$

(6) $\ln \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$,

$$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, k \in \mathbb{N}^*.$$

(7) $a > 0$. Dann ist $x \mapsto a^x \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a).$$

(8)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, aber f' ist nicht stetig.

Beweis. ad (1): Folgt aus Satz IV.1.6 und Bemerkung IV.1.5 (4).
ad (2): Folgt aus Satz IV.1.7 und Beispiel IV.1.2 (1).
ad (3): Folgt aus (2) und Satz IV.1.7.
ad (4): Beispiel IV.1.2 (2).
ad (5): Folgt aus (4) und Satz III.7.2(7) (S. 98).
ad (6): Folgt aus Beispiel IV.1.11 und Satz IV.1.7.
ad (7): Folgt aus Satz IV.1.8 und $a^x = \exp(x \ln(a))$.
ad (8): Aus

$$|\frac{f(x)}{x}| = |x||\sin(\frac{1}{x})| \le |x|$$

folgt die Differenzierbarkeit in 0 und $f'(0) = 0$. Für $x \neq 0$ folgt aus Satz IV.1.7, Satz IV.1.8 und Teil (5)

$$f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}).$$

Damit folgt

$$f'(\frac{1}{2n\pi}) = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1.$$

Also ist f' in 0 nicht stetig. □

Definition IV.1.18. Sei $M \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von M. Dann heißt f in x_0 linksseitig bzw. rechtsseitig differenzierbar, falls der Grenzwert

$$D_- f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bzw.

$$D_+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Beispiel IV.1.19. Sei $f(x) = |x|$. Dann ist

$$D_- f(0) = -1, \; D_+ f(0) = 1.$$

Satz IV.1.20. *Sei $M \subset \mathbb{R}$. Dann ist $f : M \to Y$ genau dann in $x_0 \in M$ differenzierbar, wenn es links- und rechtsseitig differenzierbar ist und*

$$D_+ f(x_0) = D_- f(x_0)$$

ist.

Beweis. „$\Longrightarrow$:" Ist offensichtlich.
„$\Longleftarrow$:" Definiere $\varphi : M \to Y$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & , x \neq x_0, \\ D_+ f(x_0) & , x = x_0. \end{cases}$$

Wegen $D_+ f(x_0) = D_- f(x_0)$ ist φ in x_0 stetig. Damit folgt die Behauptung aus der Definition der Differenzierbarkeit. □

Beispiel IV.1.21. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist in $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es gilt

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Offensichtlich ist $f \in C^\infty((-\infty, 0], \mathbb{R})$ und

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \leq 0.$$

Beh.: $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \, p_{2n}$ Polynom vom Grad $\leq 2n$ mit:

$$f^{(n)}(x) = p_{2n}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \quad \forall x > 0.$$

Bew. der Beh.: Induktion über n.
$n = 0 : p_0(y) = 1.$
$n \to n + 1 :$

$$\begin{aligned} [p_{2n}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}]' &= -\frac{1}{x^2} p_{2n}'(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} p_{2n}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \\ &= p_{2n+2}(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

mit

$$p_{2n+2}(y) = y^2 p_{2n}(y) - y^2 p_{2n}'(y).$$

Aus Beh. folgt $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.
Wegen Satz IV.1.20 müssen wir noch zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \to 0+} f^{(n)}(x) = 0.$$

Wegen Beh. und Satz III.7.4 (S. 100) gilt aber

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} f^{(n)}(x) &= \lim_{x \to 0+} p_{2n}\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{\substack{y \to +\infty \\ y = \frac{1}{x}}} p_{2n}(y) e^{-y} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} a_{2n,k} \lim_{y \to \infty} \frac{y^k}{e^y} \qquad \Big(\text{mit } p_{2n} = \sum a_{2n,k} x^k\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

IV.2. Mittelwertsätze

Definition IV.2.1. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion der nicht leeren Teilmenge M des normierten Vektorraumes $(X, \|\cdot\|_X)$ in die reellen Zahlen. Dann hat f in $x_0 \in M$ ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum, wenn es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gibt mit

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap M$$

bzw.

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap M.$$

Ein lokales Minimum oder Maximum nennen wir auch lokales Extremum.

Satz IV.2.2. *Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \overset{\circ}{M}$. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein lokales Extremum und sei in x_0 differenzierbar. Dann gilt*

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis. O.E. habe f in x_0 ein lokales Minimum. Sonst gehen wir zu $-f$ über. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Daher ist

$$D_+ f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

und

$$D_- f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Damit folgt die Beh. aus Satz IV.1.20 (S. 120). □

Im Weiteren setzen wir, soweit nicht anders gesagt, voraus, dass

$$\text{(V)} \qquad f \in C([a,b],\mathbb{R}) \ \text{ in } (a,b) \ \text{ differenzierbar}$$

ist mit $-\infty < a < b < +\infty$.

Bemerkung IV.2.3. (1) Falls (V) gilt, ist

$$\max_{a\le x\le b} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x) : f'(x) = 0, x \in (a,b)\}$$
$$\min_{a\le x\le b} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x) : f'(x) = 0, x \in (a,b)\}.$$

(2) Falls $x_0 \notin \overset{\circ}{M}$, ist, ist Satz IV.2.2 i. a. falsch, wie das Beispiel $f(x) = x$, $M = [0,1]$, $x_0 = 1$ zeigt.

Der folgende, fundamentale Satz geht auf M. Rolle (1652-1719) zurück.

Satz IV.2.4 (Satz von Rolle). *Es gelte (V) und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\zeta \in (a,b)$ mit*

$$f'(\zeta) = 0.$$

Beweis. O.E. ist f nicht konstant. Gemäß Satz III.4.10 (S. 86) nimmt f sein Minimum m und sein Maximum M in einem Punkt $x_m \in [a,b]$, bzw. $x_M \in [a,b]$ an. Da f nicht konstant ist und $f(a) = f(b)$ gilt, ist mindestens einer der beiden Punkte ein innerer Punkt von $[a,b]$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IV.2.2. □

Der folgende Satz ist für das Weitere zentral.

Satz IV.2.5 (Mittelwertsatz). *Es gelte (V). Dann gibt es ein $\zeta \in (a,b)$ mit*

$$f(b) = f(a) + f'(\zeta)(b-a).$$

Beweis. Definiere $g \in C([a,b],\mathbb{R})$ durch

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Dann ist g in (a,b) differenzierbar und erfüllt

$$g(a) = f(a) = g(b).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz IV.2.4. □

Satz IV.2.6. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C(I,\mathbb{R})$ in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. Dann ist f auf I konstant.*

Beweis. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann ist $(a,b) \subset \overset{\circ}{I}$. Damit folgt die Behauptung aus Satz IV.2.5. □

SATZ IV.2.7. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$ in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gilt*

$$\text{(1)} \qquad f \text{ ist monoton fallend (wachsend)}$$
$$\iff f'(x) \le 0 \quad (\text{bzw. } f'(x) \ge 0) \quad \forall x \in \overset{\circ}{I},$$

$$\text{(2)} \qquad f'(x) < 0 \quad (\text{bzw. } f'(x) > 0) \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$$
$$\Longrightarrow \text{ist streng monoton fallend (wachsend).}$$

BEWEIS. AD (1): „$\Longrightarrow$:" O.E. ist f monoton fallend, sonst gehe zu $-f$ über. Sei $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ und $x \in I$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x > x_0 &\Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \\ &\Longrightarrow D_+ f(x_0) \le 0 \\ x < x_0 &\Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \\ &\Longrightarrow D_- f(x_0) \le 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

„$\Longleftarrow$:" Seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Dann ist $(x, y) \subset \overset{\circ}{I}$ und wegen Satz IV.2.5 gibt es ein $\zeta \in (x, y)$ mit

$$f(y) = f(x) + f'(\zeta)(y - x) \le f(x).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(2): Folgt wie „$\Longleftarrow$" in (1). □

BEMERKUNG IV.2.8. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend und in $(-1, 1)$ differenzierbar. Aber es ist $f'(0) = 0$. Dies zeigt, dass in Satz IV.2.7 (2) die Umkehrung i. a. nicht gilt.

SATZ IV.2.9. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C(I, \mathbb{R})$ in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. Dann ist f injektiv.*

BEWEIS. Angenommen, f ist nicht injektiv. Dann gibt es $a, b \in I$ mit $f(a) = f(b)$. O.E. ist $a < b$. Dann ist $(a, b) \subset \overset{\circ}{I}$ und aus Satz IV.2.4 folgt

$$f'(\zeta) = 0$$

für ein $\zeta \in (a, b)$; Widerspruch. □

BEMERKUNG IV.2.10. Satz IV.2.9 ist für Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ i. a. falsch. Z. B. ist $\text{ixp} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit

$$\text{ixp}(x) = e^{ix}$$

nicht injektiv und erfüllt

$$\text{ixp}'(x) = ie^{ix} \neq 0 \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

Satz IV.2.11. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$ in $\mathring{I}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathring{I}$. Dann gilt:*

(1) *f ist streng monoton,*
(2) *$J = f(I)$ ist ein perfektes Intervall,*
(3) *$f^{-1} : J \to I$ ist differenzierbar in $\mathring{J}$ und*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ für } y = f(x).$$

Beweis. Gemäß Satz IV.2.9 ist f injektiv. Wegen Satz III.5.5 (S. 90) ist J ein Intervall. Angenommen f wäre nicht streng monoton. Dann gibt es $x, y, z \in I$ mit $x < y < z$ und

$$f(x) < f(y) \text{ und } f(y) > f(z)$$

oder

$$f(x) > f(y) \text{ und } f(y) < f(z).$$

Daher hat f in (x, z) ein Extremum. Wegen Satz IV.2.2 ist dies ein Widerspruch zur Annahme $f'(u) \neq 0$ für alle $u \in \mathring{I}$. Also ist f streng monoton. Da f streng monoton ist, besteht J nicht aus einem Punkt, ist also perfekt. Der Rest folgt aus Bemerkung IV.1.10 (S. 116). $\square$

Beispiel IV.2.12. Es ist

$$\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0 \text{ auf } (0, \pi)$$
$$\sin'(x) = \cos(x) \neq 0 \text{ auf } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Also existieren

$$\arccos = (\cos|_{(0,\pi)})^{-1} : (-1, 1) \to (0, \pi)$$
$$\arcsin = (\sin|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1} : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\arccos'(x) &\underset{x=\cos y}{=} \frac{1}{\cos'(y)} \\
&= \frac{-1}{\sin(y)} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1, 1) \\
\arcsin'(x) &\underset{x=\sin y}{=} \frac{1}{\sin'(y)} \\
&= \frac{1}{\cos(y)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1).$$

Durch Induktion folgt hieraus

$$\arccos \in C^\infty((-1,1),(0,\pi)),$$
$$\arcsin \in C^\infty((-1,1),(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})).$$

DEFINITION IV.2.13. Sei $(X,\|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum, $M \subset X$ konvex und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt

(1) f KONVEX,
(2) f STRIKT KONVEX,
(3) f KONKAV,
(4) f STRIKT KONKAV,

wenn gilt

(1) $f((1-t)x+ty) \le (1-t)f(x)+tf(y)$,
(2) $f((1-t)x+ty) < (1-t)f(x)+tf(y)$,
(3) $f((1-t)x+ty) \ge (1-t)f(x)+tf(y)$,
(4) $f((1-t)x+ty) > (1-t)f(x)+tf(y)$

für alle $x,y \in M, x \ne y$, und alle $t \in (0,1)$.

BEMERKUNG IV.2.14. (1) f ist genau dann (strikt) konvex, wenn $-f$ (strikt) konkav ist.
(2) Ist f konvex, so ist die Menge

$$\{(x,u) : x \in M, u \in \mathbb{R}, u \ge f(x)\}$$

konvex.
(3) Ist $M \subset \mathbb{R}$, so ist f genau dann (strikt) konvex, wenn für alle $a,b \in M$ mit $a<b$ und alle $x \in (a,b)$ gilt

$$f(x) \underset{(<)}{\le} f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

(4) Ist $M \subset \mathbb{R}$, so ist f genau dann (strikt) konvex, wenn für alle $a,b \in M$ mit $a<b$ und alle $x \in (a,b)$ gilt

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{(<)}{\le} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \underset{(<)}{\le} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}.$$

BEWEIS. AD (1), (2): Sind klar.
AD (3): Sei $a,b \in M, a<b$, und $x \in (a,b)$. Dann ist $x=(1-t)a+tb$ mit $t=\frac{x-a}{b-a} \in (0,1)$. Damit folgt

$$f(x) = f((1-t)a+tb) \underset{(<)}{\le} (1-t)f(a)+tf(b)$$

$$= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

AD (4): Die erste Ungleichung ist offensichtlich äquivalent zu (3). Sei $a, b \in M$, $a < b$, und $x \in (a, b)$. Dann ist $x = (1 - t)b + ta$ mit $t = \frac{b-x}{b-a} \in (0, 1)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1 - t)b + ta) \\ &\underset{(<)}{\leq} f(b) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(b - x). \end{aligned}$$

Das ist offensichtlich äquivalent zur zweiten Ungleichung. □

SATZ IV.2.15. (1) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und f in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann (strikt) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.*
(2) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und f in $\overset{\circ}{I}$ zweimal differenzierbar. Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. Gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$, so ist f strikt konvex.*

BEWEIS. AD (1): „$\Longrightarrow$:“ Sei $a, b \in \overset{\circ}{I}$ mit $a < b$. Dann folgt aus Bemerkung IV.2.14 (4)

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \\ \Longrightarrow \quad f'(a) = D_+(a) &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &\leq D_- f(b) = f'(b). \end{aligned}$$

Also ist f' monoton wachsend. Sei nun f strikt konvex.
Ann.: f' ist nicht streng monoton wachsend. Da f' monoton wachsend ist, gibt es dann $x, y \in \overset{\circ}{I}$ mit $x < y$ und

$$f'(x) = f'(z) = f'(y) \quad \forall z \in [x, y].$$

Sei $z \in (x, y)$. Dann folgt aus der strikten Konvexität von f und Satz IV.2.5

$$\begin{aligned} f(z) &< f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) \\ &= f(x) + f'(\eta_1)(z - x) \end{aligned}$$

mit $\eta_1 \in (x, y)$. Andererseits gibt es wegen Satz IV.2.5 ein $\eta_2 \in (x, y)$ mit

$$f(z) = f(x) + f'(\eta_2)(z - x).$$

Wegen $f'(\eta_1) = f'(\eta_2)$ ist dies ein Widerspruch.
„$\Longleftarrow$:“ Seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und $x \in (a, b)$. Dann ist $x \in \overset{\circ}{I}$ und

gemäß Satz IV.2.5 gibt es ein $\zeta \in (a, x)$ und ein $\eta \in (x, b)$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\zeta)$$

und

$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\eta).$$

Wegen der (strengen) Monotonie von f' folgt

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\underset{(<)}{\leq} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \\ \Longrightarrow \ f(x)\frac{b - a}{(x - a)(b - x)} &\underset{(<)}{\leq} \frac{f(a)}{x - a} + \frac{f(b)}{b - x} \\ \Longrightarrow \ f(x) &\underset{(<)}{\leq} f(a)\frac{b - x}{b - a} + f(b)\frac{x - a}{b - a}. \end{aligned}$$

Also gilt für $t \in (0, 1)$

$$f((1 - t)a + tb) \underset{(<)}{\leq} (1 - t)f(a) + tf(b).$$

Mithin ist f (strikt) konvex.
AD (2): Folgt aus Teil (1) und Satz IV.2.7. □

Beispiel IV.2.16. (1) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und strikt konvex.
(2) $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und strikt konkav.
(3) $x \mapsto x^\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und konvex für $\alpha > 1$, streng monoton wachsend und konkav für $0 < \alpha < 1$, streng monoton fallend und konvex für $\alpha < 0$.
(4) Sei $1 < p < \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$x \cdot y \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'}. \quad \text{(Youngsche Ungleichung)}$$

(5) Sei $1 < p < \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$. Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ definiere

$$\|x\|_p = \{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\}^{1/p}.$$

Dann gilt für $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}. \quad \text{(Höldersche Ungleichung)}$$

Insbesondere ist $\| \cdot \|_p$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$.

Beweis. ad (1): $\exp = \exp' = \exp'' > 0$ auf $\mathbb{R}$.
ad (2):

$$\ln' = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}_+^*,$$
$$\ln'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}_+^*.$$

ad (3):

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \begin{cases} > 0 \text{ auf } \mathbb{R}_+^* & , \text{ für } \alpha > 0, \\ < 0 \text{ auf } \mathbb{R}_+^* & , \text{ für } \alpha < 0 \end{cases}$$
$$(x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \quad \begin{cases} > 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^* & , \text{ für } \alpha > 1 \text{ und } \alpha < 0 \\ < 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+^* & , \text{ für } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

ad (4): Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} \ln(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p'}y^{p'}) &= \ln(\frac{1}{p}x^p + (1-\frac{1}{p})y^{p'}) \\ &\geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + (1-\frac{1}{p})\ln(y^{p'}) \\ &= \ln(x) + \ln(y) \\ &= \ln(x \cdot y). \end{aligned}$$

ad (5): O.E. ist $\|x\|_p \neq 0$, $\|y\|_{p'} \neq 0$. Dann folgt aus (4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|x\|_p}\frac{|y_k|}{\|y\|_{p'}} &\leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^n \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'}\sum_{k=1}^n \frac{|y_k|^{p'}}{\|y\|_{p'}^{p'}} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{k=1}^n |x_k||y_k| \leq \|x\|_p\|y\|_{p'}.$$

Offensichtlich muss man von den Norm-Eigenschaften nur noch die Dreiecksungleichung beweisen. Für $x, y \in \mathbb{K}^n$ folgt

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p = & \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \\ \leq & \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1}[|x_k| + |y_k|] \\ = & \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1}|x_k| + \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{p-1}|y_k| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|x\|_p \{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)p'}\}^{1/p'} \\
&\quad + \|y\|_p \{\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)p'}\}^{1/p'} \\
&= \quad [\|x\|_p + \|y\|_p] \|x + y\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung IV.2.10 zeigt, dass der Mittelwertsatz IV.2.5 für Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{K}^n, n \geq 2$, nicht gelten kann. Man kann allerdings eine Abschwächung beweisen.

SATZ IV.2.17. *Sei $M \subset \mathbb{K}$ konvex und $f : M \to \mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, in $\overset{\circ}{M}$ differenzierbar. Dann gibt es für alle $a, b \in M$ ein $\theta \in (0, 1)$ mit*

$$\|f(b) - f(a)\|_2 \leq \|f'((1 - \theta)a + \theta b)\|_2 |b - a|,$$

wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist.

BEWEIS. Seien $a, b \in M$. Wir definieren einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ wie folgt

$$v_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{, falls } f(b) = f(a), \\ \frac{\overline{f_k(b) - f_k(a)}}{\|f(b) - f(a)\|_2} & \text{, falls } f(b) \neq f(a), \end{cases}$$

$1 \leq k \leq n$. Außerdem definieren wir eine Funktion $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n f_k((1 - t)a + tb) v_k\right).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(1) - \varphi(0) &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n [f_k(b) - f_k(a)] v_k\right) \\
&= \|f(b) - f(a)\|_2.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist φ in $(0, 1)$ differenzierbar mit

$$\varphi'(t) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n (b - a) f_k'((1 - t)a + tb) v_k\right).$$

Gemäß Satz IV.2.5 gibt es ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned}
\|f(b) - f(a)\|_2 &= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= \varphi'(\theta) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n (b - a) f_k'((1 - \theta)a + \theta b) v_k\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |b-a| \sum_{k=1}^{n} |f_k'((1-\theta)a+\theta b)||v_k| \\
&\leq |b-a| \|f'((1-\theta)a+\theta b)\|_2.
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung IV.2.18. Man kann die Aussage von Satz IV.2.17 auch für beliebige andere Normen auf $\mathbb{K}^n$ und für Funktionen mit Werten in beliebigen normierten Vektorräumen beweisen.

Zum Abschluss beweisen wir noch eine Variante des Mittelwertsatzes, die mit der Regel von de l'Hôpital (1661-1704) eine besonders wichtige praktische Konsequenz hat.

Satz IV.2.19. *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f, g \in C(I, \mathbb{R})$ in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in \overset{\circ}{I}$. Dann gibt es für alle $a, b \in I$ mit $a < b$ ein $\zeta \in (a, b)$ mit*

$$
\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.
$$

Beweis. Wegen Satz IV.2.4 ist $g(b) \neq g(a)$. Daher ist

$$
h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))
$$

in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Wegen

$$
h(a) = f(a) = h(b)
$$

folgt die Behauptung aus Satz IV.2.4. □

Satz IV.2.20 (Regel von de l'Hôpital). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $a < x < b$. Existiert*

$$
\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)},
$$

so existiert auch $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$$
\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
$$

Beweis. Wegen Satz IV.2.4 ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Wegen Satz IV.2.19 existiert zu jedem $x \in (a, b)$ ein $\zeta(x) \in (a, x)$ mit

$$
\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\zeta(x))}{g'(\zeta(x))}.
$$

Wegen $\zeta(x) \to a$ für $x \to a$ folgt hieraus die Behauptung. □

Bemerkung IV.2.21. (1) Die Voraussetzungen von Satz IV.2.20 sind insbesondere erfüllt, wenn $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ sind mit $g'(a) \neq 0$.
(2) Eine analoge Aussage gilt auch für die linksseitigen Grenzwerte $x \to b-0$.

Beispiel IV.2.22.

(1)
$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x\to a} \frac{nx^{n-1}}{mx^{m-1}} = \frac{n}{m} a^{n-m}.$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n} - x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1 + a_1 x^{-1} + \ldots + a_{n-1}x^{-(n-1)} + a_n x^{-n}} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt[n]{1 + a_1 y + \ldots + a_n y^n} - 1}{y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1}{n} (1 + a_1 y + \ldots + a_n y^n)^{-1+\frac{1}{n}} (a_1 + 2a_2 y + \ldots + n a_n y^{n-1}) \\
&= \frac{a_1}{n}.
\end{aligned}$$

IV.3. Taylorformeln

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C^n(I,\mathbb{R})$ und $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Wir möchten f „möglichst gut" durch ein Polynom p der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k$$

approximieren. Dabei stellen wir uns vor, dass die Annäherung gut ist, wenn f und p in x_0 mit allen Ableitungen bis und mit Ordnung n übereinstimmen. Dies liefert

$$\begin{aligned}
f(x_0) = p(x_0) &\iff c_0 = f(x_0) \\
f'(x_0) = p'(x_0) &\iff c_1 = f'(x_0) \\
f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0) &\iff k! c_k = f^{(k)}(x_0), 1 \le k \le n,
\end{aligned}$$

d.h., p ist notwendigerweise von der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k.$$

Offensichtlich können wir diese Argumentation auch durchführen, wenn I eine konvexe, perfekte Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist und wenn f Werte in einem normierten Vektorraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ hat. Dies führt auf folgende Definition.

Definition IV.3.1. Sei $M \subset \mathbb{K}$ konvex und perfekt und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Vektorraum.
(1) Sei $f \in C^n(M, Y), n \in \mathbb{N}^*$. Dann heißt

$$T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

das n-te Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt x_0.
(2) Sei $f \in C^\infty(M, Y)$. Dann heißt

$$T(f, x_0)(x) = \sum \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0.
Man spricht in beiden Fällen auch kurz von der Taylorentwicklung von f um x_0.

Wir wenden uns zunächst der Frage zu, wie gut f durch seine Taylorpolynome approximiert wird.

Satz IV.3.2 (Taylorsche Formel, B. Taylor (1685-1731)).
(1) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ und $f^{(n)}$ in $\overset{\circ}{I}$ differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x, x_0 \in I$ ein $\zeta \in \overset{\circ}{I}$ mit*

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

(2) *Sei $M \subset \mathbb{K}$ konvex und perfekt, $f \in C^n(M, \mathbb{K}^m)$ und $f^{(n)}$ in $\overset{\circ}{M}$ differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x, x_0 \in M$ ein $\theta \in (0,1)$ mit*

$$\begin{aligned} &\|f(x) - T_n(f, x_0)(x)\|_2 \\ \le &\frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}((1-\theta)x_0 + \theta x)\|_2 |x - x_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

Beweis. ad (1): Seien $x, x_0 \in I$. O.E. ist $x \neq x_0$. Sei

$$\rho = [f(x) - T_n(f, x_0)(x)] \frac{(n+1)!}{(x - x_0)^{n+1}}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(t) = f(x) - &\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0 + t(x - x_0))(1-t)^k (x - x_0)^k \\ &- \rho(1-t)^{n+1} \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(x) - T_n(f, x_0)(x) - \rho \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \\ \varphi(1) &= f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

und

$$\varphi'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}[f^{(k+1)}(x_0 + t(x - x_0))(1-t)^k(x-x_0)^{k+1}$$

$$- f^{(k)}(x_0 + t(x - x_0))k(1-t)^{k-1}(x-x_0)^k]$$

$$\begin{aligned}
&+ \rho(1-t)^n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \\
= &-\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0))(1-t)^n(x-x_0)^{n+1} \\
&+ \rho \frac{1}{n!}(1-t)^n(x-x_0)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Gemäß Satz IV.2.4 (S. 122) gibt es ein $\theta \in (0,1)$ mit

$$\begin{aligned}
&\varphi'(\theta) = 0 \\
\Longrightarrow &\rho = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mit $\zeta = x_0 + \theta(x - x_0)$.
AD (2): Seien $x, x_0 \in M$ und o.E. $x \neq x_0$. Wir definieren ρ wie in Teil (1). Man beachte, dass jetzt $\rho \in \mathbb{K}^m$ ist. Wir definieren den Vektor $v \in \mathbb{K}^m$ durch

$$v_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}} & \text{falls } \rho = 0, \\ \frac{\overline{\rho}_k}{\|\rho\|_2} & \text{falls } \rho \neq 0, \end{cases}$$

$1 \leq k \leq m$. Sei

$$\psi(t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{l=1}^{m} v_l \Big\{ f_l(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_l^{(k)}(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (1-t)^k (x-x_0)^k \right.$$

$$\left. -\rho_l \frac{1}{(n+1)!}(1-t)^{n+1}(x-x_0)^{n+1} \Big\} \right).$$

Dann ist $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$. Wie in Teil (1) folgt

$$\begin{aligned}
&\psi(0) = 0 \\
&\psi(1) = 0 \\
&\psi'(t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{l=1}^{n} v_l \Big\{ \rho_l - f_l^{(n+1)}(x_0 + t(x-x_0)) \Big\} \frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Gemäß Satz IV.2.4 (S. 122) gibt es wieder ein $\theta \in (0,1)$ mit $\psi'(\theta) = 0$. Wegen der Definition von v folgt

$$\|\rho\|_2 = \mathrm{Re}\left(\sum_{l=1}^{n} \rho_l v_l \right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\sum_{l=1}^{n} f_l^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))v_l\right)$$
$$\leq \|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\|_2$$

und somit

$$\begin{aligned}\|f(x)-T_n(f,x_0)x\|_2 &= \frac{1}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\|\rho\|_2 \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))\|_2.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung IV.3.3. Ebenso wie Satz IV.2.17 (S. 129) kann man Satz IV.3.2 (2) auch für jede andere Norm des $\mathbb{K}^m$ und für Funktionen mit Werten in einem beliebigen normierten Vektorraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ beweisen.

Bemerkung IV.3.4. (1) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C^2(I,\mathbb{R})$ konvex. Dann gilt für alle $x_0, x \in I$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

(2) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall, $f \in C^n(I,\mathbb{R})$ und $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ mit

$$f^{(1)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0, \quad n \geq 2.$$

Dann gilt:

(a) Ist n ungerade, so ist x_0 kein lokales Extremum von f.
(b) Ist n gerade, so ist x_0 ein lokales Extremum von f und zwar ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ ist, und ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist.

Beweis. ad (1): Wegen Satz IV.2.15(2) (S. 126) und Satz IV.3.2 gilt für $x, x_0 \in I$ mit einem $\zeta \in \overset{\circ}{I}$

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\zeta)(x-x_0)^2 \\ &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).\end{aligned}$$

ad (2): O.E. ist $f^{(n)}(x_0) > 0$; sonst gehen wir zu $-f$ über. Da $f^{(n)}$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ und

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Wegen Satz IV.3.2 gibt es zu jedem $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ein $\zeta \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\zeta)(x-x_0)^n.$$

Falls n ungerade ist, folgt

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Falls n gerade ist, folgt

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

□

Bemerkung IV.3.5. (1) Die Taylorreihe von f ist eine Potenzreihe und konvergiert in ihrem Konvergenzkreis. Für ein $x \neq x_0$ aus dem Konvergenzkreis gilt $f(x) = T(f, x_0)(x)$ genau dann, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(f, x_0)(x)| = 0.$$

(2) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

aus Beispiel IV.1.21 (S. 120) gilt

$$T(f, 0)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Die Taylorreihe stellt also die Funktion in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}_+^*$ dar, obwohl sie den Konvergenzradius ∞ hat.

Beispiel IV.3.6. Es gilt:

(1) $\ln(1 + x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

(2) $\ln(1 - x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in [-1, \frac{1}{2}]$.

(3) $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(4) Möchte man $\ln(2)$ mit Hilfe der Darstellungen (1) oder (2) auf 10-Stellen genau berechnen, so benötigt man ca. 10^{10} Summanden. Benutzt man dagegen die Darstellung (3) mit $x = \frac{1}{3}$, so kommt man mit ca. 11 Summanden aus.

Beweis. ad (1): Gemäß Beispiel IV.1.17(6) (S. 118) gilt für

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \ln(1 + x) \quad , x \in (-1, +\infty) \\ \varphi(0) &= 0 \\ \varphi^{(k)}(0) &= (-1)^{k-1}(k - 1)! \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Also ist

$$T(\ln(1 + x), 0) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Aus Satz IV.3.2 folgt weiter

$$|\ln(1 + x) - \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}| = \frac{1}{m+1} (\frac{|x|}{1+\zeta})^{m+1}$$

mit $x < \zeta < 0$ falls $x \le 0$ und $0 < \zeta < x$ sonst. Für $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{1+\zeta} &\le \frac{|x|}{1-|x|} \le 1 && \text{falls } x < 0 \\ \frac{x}{1+\zeta} &\le x \le 1 && \text{falls } x \ge 0. \end{aligned}$$

AD (2): Folgt aus Teil (1) durch Ersetzen von x durch $-x$.
AD (3): Folgt durch Subtraktion von (2) von (1).
AD (4): Folgt aus

$$|\ln(2) - \sum_{n=1}^{m} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}| \le \frac{1}{m+1}$$

bzw.

$$\begin{aligned} |\ln(2) - 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1} (\frac{1}{3})^{2k+1}| &\le \frac{2}{3} \cdot 9^{-m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{3}{4} \cdot 9^{-m}. \end{aligned}$$

□

IV.4. Numerische Lösung von Gleichungen

Im Folgenden sei stets $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $M \subset X$ nicht leer und $f : M \to X$ eine Funktion.

DEFINITION IV.4.1. (1) Ein Punkt $a \in M$ heißt FIXPUNKT von f, wenn gilt $f(a) = a$.
(2) Die Funktion f heißt eine KONTRAKTION in M, wenn gilt $f(M) \subset M$ und wenn es ein $\kappa \in (0, 1)$ gibt mit

$$\|f(x) - f(y)\|_X \le \kappa \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in M.$$

Die Zahl κ heißt KONTRAKTIONSRATE von f.

BEMERKUNG IV.4.2. (1) Eine Kontraktion ist stets stetig. Die Umkehrung ist natürlich i. a. falsch.
(2) Falls $M \subset \mathbb{K}$ und $f \in C^1(M, M)$ ist mit

$$|f'(x)| \le \kappa < 1 \quad \forall x \in M,$$

so ist f eine Kontraktion in M.

Der folgende Satz hat vielfältige Anwendungen, die weit über die Beispiele dieses Paragraphen hinausgehen. So werden wir z. B. später mit seiner Hilfe die Lösbarkeit von Differentialgleichungen beweisen.

Satz IV.4.3 (Banachscher Fixpunktsatz). *M sei abgeschlossen und f sei eine Kontraktion in M mit Kontraktionsrate κ. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt x^* in M. Für beliebiges $x_0 \in M$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$(*) \qquad x_n = f(x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (Fixpunktiteration)}$$

gegen x^* und es gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|x_n - x^*\|_X \le \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|x_1 - x_0\|_X \text{ (a priori Abschätzung)}$$

und

$$\|x_n - x^*\|_X \le \frac{\kappa}{1-\kappa}\|x_n - x_{n-1}\|_X. \text{ (a posteriori Abschätzung)}$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $x^*, y^* \in M$ zwei Fixpunkte von f. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\|_X &= \|f(x^*) - f(y^*)\|_X \le \kappa\|x^* - y^*\|_X \\ \Longrightarrow x^* &= y^*. \end{aligned}$$

Existenz: Sei $x_0 \in M$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gemäß $(*)$ definiert. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_{n+k+1}\|_X &= \|f(x_{n+k-1}) - f(x_{n+k})\|_X \\ &\le \kappa\|x_{n+k-1} - x_{n+k}\|_X. \end{aligned}$$

und somit

$$\text{(i)} \qquad \|x_{n+k} - x_{n+k+1}\|_X \le \kappa^k\|x_n - x_{n+1}\|_X.$$

Aus (i) folgt weiter für $m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\|_X &\le \sum_{k=0}^{m-1} \|x_{n+k+1} - x_{n+k}\|_X \\ &\le \sum_{k=0}^{m-1} \kappa^k\|x_n - x_{n+1}\|_X \\ &\le \frac{1}{1-\kappa}\|x_n - x_{n+1}\|_X \\ \text{(ii)} \qquad &\le \frac{\kappa}{1-\kappa}\|x_n - x_{n-1}\|_X \\ \text{(iii)} \qquad &\le \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|x_1 - x_0\|_X. \end{aligned}$$

Da $\kappa \in (0,1)$ ist, folgt aus (iii), dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da $M \subset X$ abgeschlossen ist, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x^* \in M$. Aus der Stetigkeit von f folgt

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(x^*).$$

Die Fehlerabschätzungen folgen schließlich, indem man in (ii) bzw. (iii) n festhält und m gegen ∞ streben lässt. □

Als nächstes zeigen wir eine für Anwendungen besonders praktische Variante des Banachschen Fixpunktsatzes.

SATZ IV.4.4. *Zu der Abbildung $f : X \to X$ gebe es ein $x_0 \in X$ und zwei Zahlen $\kappa \in (0,1)$ und $r \in \mathbb{R}_+^*$ mit*

$$\|f(x_0) - x_0\|_x \leq (1-\kappa)r$$

und

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq \kappa \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in \overline{B(x_0, r)}.$$

Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt x^* in $\overline{B(x_0, r)}$, die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

konvergiert gegen x^* und es gelten die Fehlerabschätzungen von Satz IV.4.3.

BEWEIS. Offensichtlich reicht es zu zeigen, dass f die Menge $M = \overline{B(x_0, r)}$ in sich abbildet. Für $x \in M$ folgt

$$\begin{aligned}\|f(x) - x_0\|_X &\leq \|f(x) - f(x_0)\|_X + \|f(x_0) - x_0\|_X \\ &\leq \kappa\|x - x_0\|_X + (1-\kappa)r \\ &\leq \kappa r + (1-\kappa)r \\ &= r.\end{aligned}$$

□

BEISPIEL IV.4.5. Die Strahlungsintensität eines schwarzen Körpers bei der absoluten Temperatur T und der Wellenlänge λ beträgt

$$J(\lambda) = \frac{c^2 h}{\lambda^5(e^{ch/\lambda kT} - 1)},$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit, h die Plancksche und k die Boltzmannsche Konstante ist. Gesucht ist die maximale Strahlungsintensität und die zugehörige Wellenlänge. Wegen

$$J(\lambda) = \frac{k^5 T^5}{c^3 h^4} f(\frac{kT}{ch}\lambda)$$

müssen wir das Maximum von

$$f(x) = \frac{1}{x^5(e^{1/x} - 1)}$$

auf $\mathbb{R}_+^*$ bestimmen.
Wegen Satz III.7.4(3) (S. 100) ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} f(x) &\underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^{-5}(e^y-1)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wegen Satz IV.2.20 (S. 130) ist

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} f(x) &\underset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to 0+} \frac{y^5}{e^y-1} \\ &= \lim_{y\to 0+} \frac{5y^4}{e^y} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Wegen $f(1) > 0$ besitzt f mindestens ein Maximum x^* in $\mathbb{R}^*$. Dort gilt wegen Satz IV.2.2 (S. 121)

$$f'(x^*) = 0.$$

Wegen

$$f'(x) = -\frac{5x^4(e^{\frac{1}{x}}-1) - x^3e^{\frac{1}{x}}}{x^{10}(e^{\frac{1}{x}}-1)^2}$$

gilt

$$\begin{aligned}f'(x^*) = 0 &\iff 5x^*(e^{1/x^*}-1) = e^{1/x^*} \\ &\iff 5\frac{1}{t^*}(e^{t^*}-1) = e^{t^*}, \quad t^* = \frac{1}{x^*} \\ &\iff 5(1-e^{-t^*}) = t^*, \quad t^* = \frac{1}{x^*}.\end{aligned}$$

Also haben wir unser Problem darauf reduziert, einen Fixpunkt von

$$g(t) = 5(1-e^{-t})$$

zu finden. Wegen

$$g'(t) = 5e^{-t}$$

gilt

$$\begin{aligned}g'(t) > 1 &\quad \text{für} \quad 0 < t < \ln(5) \\ g'(t) < 1 &\quad \text{für} \quad t > \ln(5).\end{aligned}$$

Also ist $g(t) - t$ auf $(0, \ln(5))$ streng monoton wachsend und auf $(\ln(5), +\infty)$ streng monoton fallend. Wegen $g(0) = 0$ hat g daher höchstens einen Fixpunkt t^* in $\mathbb{R}_+^*$. Wegen

$$g(4) = 4.90\ldots > 4 \quad \text{und} \quad g(5) = 4.96\ldots < 5$$

gilt $4 < t^* < 5$.
Wir wollen Satz IV.4.4 mit $t_0 = 5$ und $r = 1$ anwenden. Wegen

$$|g'(t)| = 5e^{-t} \le 5e^{-4} = 0.09157\ldots \quad \forall t \in [4,6]$$

und Bemerkung IV.4.2 (S. 136) ist $\kappa \le 0.092$. Wegen

$$|g(5) - 5| = 0.04\ldots < 1 - \kappa$$

sind die Voraussetzungen von Satz IV.4.4 erfüllt. Die a posteriori Fehlerabschätzung liefert

$$|t^* - t_n| \le \frac{\kappa}{1-\kappa}|t_n - t_{n-1}| \le |t_n - t_{n-1}|.$$

Bei Rechnung mit 6 Dezimalstellen erhalten wir folgende Tabelle:

n	t_n
0	5.0
1	4.96631
2	4.965155
3	4.965115
4	4.965114
5	4.965114

Also ist

$$t^* = 4.965114 \pm 10^{-6}.$$

Für die gesuchte Wellenlänge ergibt sich

$$\lambda^* = \frac{1}{t^*}\frac{ch}{kT} = (0.2014052 \pm 10^{-7})\frac{ch}{kT}.$$

Die entsprechende Strahlungsintensität ist

$$J(\lambda^*) = 21.201442\frac{k^5T^5}{c^3h^4}.$$

Sei nun $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Gesucht ist eine Nullstelle x^* von f. Für jedes $a \in \mathbb{K}^*$ gilt

$$\begin{aligned} f(x^*) = 0 &\iff af(x^*) = 0 \\ &\iff x^* - af(x^*) = x^*. \end{aligned}$$

Das Problem ist also äquivalent dazu, einen Fixpunkt von $g(x) = x - af(x)$ zu bestimmen. Falls f und damit g differenzierbar ist, wissen wir auf Grund von Bemerkung IV.4.2, dass wir a so wählen sollten, dass zumindest in der Nähe von x^*

$$|g'(x)| = |1 - af'(x)|$$

möglichst klein ist. Dies ist offensichtlich für $a = \frac{1}{f'(x^*)}$ der Fall. Da wir aber x^* nicht kennen, ist dieses Verfahren nicht praktikabel. Allerdings könnten wir versuchen, bei der Berechnung der $n+1$-ten Iterierten $a = \frac{1}{f'(x_n)}$ zu setzen.

Dieser Ansatz wird auch durch folgende Überlegung gestützt: In der Nähe der n-ten Iterierten x_n gilt

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Setzen wir diese Approximation in die Bedingung $f(x_{n+1}) = 0$ ein, erhalten wir

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Diese Überlegungen führen uns zu folgendem Verfahren:

Definition IV.4.6 (Newtonverfahren). Sei $M \subset \mathbb{K}$ perfekt und $f \in C^1(M, \mathbb{K})$. Für $x_0 \in M$ ist das Newtonverfahren mit Startwert x_0 gegeben durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \in \mathbb{N},$$

solange $f'(x_n) \neq 0$ ist.

Bemerkung IV.4.7. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist x_{n+1} der Schnittpunkt mit der x-Achse der Geraden durch $(x_n, f(x_n))$ mit Steigung $f'(x_n)$.

Satz IV.4.8. *Sei $M \subset \mathbb{K}$ perfekt und $f \in C^2(M, \mathbb{K})$. Es gebe ein $x^* \in \mathring{M}$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\overline{B(x^*, \delta)} \subset \mathring{M}$ ist und dass das Newtonverfahren für jeden Startwert $x_0 \in \overline{B(x^*, \delta)}$ durchführbar ist und gegen x^* konvergiert. Die Konvergenz ist* quadratisch, *d.h., es gibt eine Konstante $c > 0$ mit*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wegen $f'(x^*) \neq 0$ gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $\overline{B(x^*; \delta_1)} \subset \mathring{M}$ und

$$|f'(x)| \geq \frac{1}{2}|f'(x^*)| \quad \forall x \in \overline{B(x^*; \delta_1)}.$$

Setze

$$m = \frac{1}{2}|f'(x^*)|.$$

Auf $\overline{B(x^*; \delta_1)}$ definieren wir eine Funktion g durch

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Es ist offensichtlich

$$g(x^*) = x^*.$$

Außerdem ist g differenzierbar mit

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Gemäß Satz III.4.10 (S. 86) existieren

$$M_1 = \max_{x \in \overline{B(x^*; \delta_1)}} |f'(x)|$$

und

$$M_2 = \max_{x \in \overline{B(x^*;\delta_1)}} |f''(x)|.$$

Wegen $f(x^*) = 0$ folgt mit Satz IV.2.17 (S. 129) für alle $x \in \overline{B(x^*;\delta_1)}$

$$|g'(x)| \le \frac{M_2}{m^2}|f(x) - f(x^*)| \le \frac{M_1 M_2}{m^2}|x - x^*|.$$

Wähle

$$\delta = \min\{\delta_1, \frac{m^2}{2M_1, M_2}\}.$$

Dann gilt gemäß Bemerkung IV.4.2 für alle $x, y \in \overline{B(x^*;\delta)}$

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\le \frac{1}{2}|x - y| \\ |g(x) - x^*| &= |g(x) - g(x^*)| \\ &\le \frac{1}{2}|x - x^*|. \end{aligned}$$

Also erfüllen g und $\overline{B(x^*;\delta)}$ die Voraussetzungen von Satz IV.4.3. Hieraus folgt, dass das Newtonverfahren für jeden Startwert $x_0 \in \overline{B(x^*;\delta)}$ durchführbar ist und gegen x^* konvergiert. Aus Satz IV.2.17 (S. 129) folgt schließlich für ein $\theta \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x^*| &= |g(x_n) - g(x^*)| \\ &\le |g'((1-\theta)x^* + \theta x_n)||x_n - x^*| \\ &\le \frac{M_1 M_2}{m^2}\theta|x_n - x^*|^2 \\ &\le \frac{M_1 M_2}{m^2}|x_n - x^*|^2. \end{aligned}$$

□

Bemerkung IV.4.9. Die Konvergenz des Newtonverfahrens ist i. a. nur lokal gegeben. Betrachte z. B. die Funktion $f = \arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit der eindeutigen Nullstelle $x^* = 0$. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Wegen

$$\lim_{|x| \to +\infty} |\arctan(x)| = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{3|x|}{1 + x^2} = 0$$

gibt es ein $R \in \mathbb{R}_+^*$ mit

$$|\arctan(x)| \geq \frac{3|x|}{1+x^2} \quad \forall |x| \geq R.$$

Sei $|x_0| \geq R$. Dann ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

und somit

$$\begin{aligned}|x_1| &\geq -|x_0| + |\arctan(x_0)|(1+x_0^2)\\ &\geq -|x_0| + 3|x_0|\\ &= 2|x_0|.\end{aligned}$$

Also divergiert das Newtonverfahren mit Startwert x_0.
Für den Startwert $x_0 = 2$ erhalten wir z. B. folgende Ergebnisse:

n	x_n
0	2.000000
1	-3.535747
2	13.950959
3	-279.344067
4	122016.998918

Unter bestimmten Voraussetzungen lässt sich jedoch die globale Konvergenz des Newtonverfahrens beweisen. Hierzu ein Beispiel.

Satz IV.4.10. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall und $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ strikt konvex bzw. strikt konkav. Es gebe eine Nullstelle $x^* \in \overset{\circ}{I}$ von f. Dann konvergiert das Newtonverfahren für jeden Startwert $x_0 \in I$ mit $f(x_0) > 0$ bzw. mit $f(x_0) < 0$ monoton gegen x^*.*

Beweis. O.E. sei f konvex, sonst gehen wir zu $-f$ über. Wegen Satz IV.2.4 (S. 122) hat f höchstens zwei Nullstellen z_1, z_2 in I.
Fall 1: x^* ist einzige Nullstelle. Sei $x_0 \in I$ mit $f(x_0) > 0$.
Fall 1a: $x_0 > x^*$: Sei $\overline{x}$ eine Nullstelle von f'. Aus Bemerkung IV.3.4 (S. 134) folgt

$$0 = f(x^*) \geq f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x^* - \overline{x}) = f(\overline{x}).$$

Wegen $f(x_0) > 0$ folgt aus Satz IV.2.15 (S. 126)

$$\overline{x} \leq x^*.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}f'(x) > 0 \quad \forall x > x^*\\ f(x) > 0 \quad \forall x > x^*.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

und

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= \frac{f(\zeta)f''(\zeta)}{f'(\zeta)^2}(x_0 - x^*) \quad (\text{mit } x^* < \zeta < x_0) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Newtonverfahren monoton fallend gegen x^*.
Fall 1b: $x_0 < x^*$: Dann folgt wie oben

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad \forall x < x^* \\ f(x) &> 0 \quad \forall x < x^* \end{aligned}$$

und somit

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$$

und

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= \frac{f(\zeta)f''(\zeta)}{f'(\zeta)^2}(x_0 - x^*) \quad (\text{mit } x_0 < \zeta < x^*) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert das Newtonverfahren monoton wachsend gegen x^*.
Fall 2: Es gibt zwei Nullstellen $z_1 < z_2$: Dann gibt es gemäß Satz IV.2.4 (S. 122) ein $z_0 \in (z_1, z_2)$ mit $f'(z_0) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \quad \forall x > z_0 \\ f'(x) &< 0 \quad \forall x < z_0 \\ f(x) &< 0 \quad \forall x \in (z_1, z_2) \\ f(x) &> 0 \quad \forall x > z_2 \text{ oder } x < z_1. \end{aligned}$$

Falls $x_0 > z_2$ ist, folgt die Behauptung wie in Fall 1a, andernfalls wie in Fall 1b. □

Beispiel IV.4.11. (1) Wir wenden das Newtonverfahren auf Beispiel IV.4.5 an. Es ist

$$f(t) = t - 5(1 - e^{-t}).$$

Wegen $f''(t) = 5e^{-t}$ sind die Voraussetzungen von Satz IV.4.10 erfüllt. Mit dem Startwert $t_0 = 5$ erhalten wir folgende Tabelle:

n	t_n
0	5.0
1	4.9651356
2	4.9651142
3	4.9651142

(2) (Divisionsfreie Berechnung von $\frac{1}{a}$). Sei $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Wegen $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ sind die Voraussetzungen von Satz IV.4.10

auf $\mathbb{R}_+^*$ erfüllt. Die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens lautet

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}} \\ &= x_n + (x_n - a x_n^2) \\ &= 2x_n - a x_n^2 \\ &= x_n(2 - a x_n). \end{aligned}$$

Sie erlaubt somit die divisionsfreie Berechnung von $\frac{1}{a}$.

(3) (Verfahren von Heron). Sei $a \in \mathbb{R}_+^*, k \geq 2$ und $f(x) = x^k - a$. Wegen $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$ sind die Voraussetzungen von Satz IV.4.10 auf $\mathbb{R}_+^*$ erfüllt. Die Nullstelle von f ist offensichtlich $\sqrt[k]{a}$. Die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens lautet

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} \\ &= \frac{k-1}{k} x_n + \frac{a}{k x_n^{k-1}}. \end{aligned}$$

Sie erlaubt somit die Berechnung von $\sqrt[k]{a}$ mittels der 4 Grundrechenarten.

Für $k = 2$, $a = 2$, $x_0 = 2$ erhalten wir z. B. folgende Tabelle:

n	x_n
0	2.0
1	1.5
2	$1.41\overline{6}$
3	1.4142156
4	1.4142135
5	1.4142135

KAPITEL V

Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Funktionenfolgen und deren Konvergenzverhalten. Im Mittelpunkt stehen Sätze über das Vertauschen von Grenzprozessen, d.h. Sätze der Form „f_n konvergiert gegen f, f_n ist stetig $\Longrightarrow$ f ist stetig“. Als Anwendung kommen wir auf Potenzreihen zurück und betrachten analytische Funktionen.
Zur Vorbereitung des nächsten Kapitels betrachten wir schließlich Treppenfunktionen, d.h. stückweise konstante Funktionen, und ihre Grenzwerte.

V.1. Gleichmässige Konvergenz

DEFINITION V.1.1. Sei $M \subset X$, $M \neq \emptyset$, und $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, Abbildungen von M in Y. Wir sagen f_n KONVERGIERT PUNKTWEISE GEGEN f, kurz $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f$, wenn für jedes $x \in M$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Wir sagen f_n KONVERGIERT GLEICHMÄSSIG GEGEN f, kurz $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in M : \|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon.$$

BEMERKUNG V.1.2. Es gilt:

(1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f \Longrightarrow (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist für jedes $x \in M$ eine Cauchyfolge.
(2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in M \quad \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$: $\|f_n(x) - f(x)\|_Y < \varepsilon$.
(3) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f$.

Beispiel V.1.3 zeigt, dass die Umkehrung i.a. falsch ist.

BEWEIS. Ist offensichtlich. □

BEISPIEL V.1.3. (1) $M = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Es gilt $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f$, aber $f_n \overset{\text{glm}}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f$.

(2) $M = [0,1]$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2 - 2nx & \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

und

$$f(x) = 0.$$

Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f \quad \text{aber} \quad f_n \overset{\text{glm}}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f.$$

(3) $M = \mathbb{R}$ und

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \le x < n+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} 0$.

(4) $M = \mathbb{R}_+^*$ und $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Dann gilt

(1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} 0$,

(2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} 0$ auf $[c, \infty)$ für alle $c > 0$,

(3) $f_n \overset{\text{glm}}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} 0$ auf $\mathbb{R}_+^*$.

Beweis. ad (1): Folgt aus Beispiel II.2.3(1) (S. 35) und der Identität

$$\sup_{0\le x\le 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0\le x\le 1} |x^n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ad (2): Es ist $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $x > 0$ gilt

$$\exists n_x \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n_x} < x \iff f_n(x) = 0 \quad \forall n \ge n_x.$$

Hieraus folgt $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} 0$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist aber

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Also gilt $f_n \overset{\text{glm}}{\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} f$.

ad (3): Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein N_ε so, dass $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ ist. Dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \ge N_\varepsilon.$$

AD (4):

(1) Ist klar.

(2) Für $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ wähle N_ε so, dass $\frac{1}{N_\varepsilon} < c\varepsilon$ ist. Dann folgt

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{nc} < \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon, x \in [c, \infty).$$

(3) $f_n(\frac{1}{n}) = 1 \Longrightarrow f_n \overset{\text{glm}}{\not\longrightarrow} 0.$

□

DEFINITION V.1.4. $B(M,Y)$ bezeichnet die Menge aller beschränkten Abbildungen von M in Y. Für $f \in B(M,Y)$ setze

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} \|f(x)\|_Y.$$

BEMERKUNG V.1.5. (1) $B(M,Y)$ ist eine Verallgemeinerung von ℓ_∞.
(2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
(3) Es kann gelten $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f$ und $f_n, f \notin B(M,Y)$. Betrachte dazu z.B. $M = Y = \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}, \quad f(x) = x.$$

Die Funktionen f, f_n sind nicht beschränkt, aber f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

SATZ V.1.6. *Y sei ein Banachraum, dann ist $(B(M,Y), \|\cdot\|_\infty)$ ebenfalls ein Banachraum.*

BEWEIS. Offensichtlich ist $B(M,Y)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $B(M,Y)$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(M,Y)$ eine Cauchyfolge in $B(M,Y)$. Dann ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ für jedes $x \in M$ eine Cauchyfolge in Y. Da Y vollständig ist, existiert somit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in M.$$

Wegen Bemerkung III.1.5 (S. 62) ist $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ auch eine Cauchyfolge und somit beschränkt. Sei

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty.$$

Zu $x \in M$ gibt es ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f(x) - f_{n_x}(x)\|_Y \le 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_Y &\le \|f_{n_x}(x)\|_Y + 1 \\ &\le \|f_{n_x}\|_\infty + 1 \\ &\le C + 1.\end{aligned}$$

Also ist $f \in B(M,Y)$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$. Damit folgt für alle $x \in M$ und $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\|f(x) - f_n(x)\|_Y &= \|\lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_n(x)\|_Y \\ &= \lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f_n(x)\|_Y \\ &\leq \limsup_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Also gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. □

Aus Satz V.1.6 folgt das folgende wichtige Konvergenzkriterium. Man beachte, dass dabei die Abbildungen f_n und f nicht in $B(M,Y)$ liegen müssen.

Satz V.1.7 (Cauchykriterium für gleichmässige Konvergenz). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig.*
(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Es gelte $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f$. Dann ist $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit eine Cauchyfolge in $B(M,Y)$. Wegen

$$(f_n - f) - (f_m - f) = f_n - f_m$$

folgt hieraus die Behauptung.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Es gibt ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n - f_{N_1}\|_\infty \leq 1 \quad \forall n \geq N_1.$$

Setze zur Abkürzung $\hat{f} = f_{N_1}$. Dann ist $(f_n - \hat{f})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(M,Y)$. Wegen Satz V.1.6 konvergiert $f_n - \hat{f}$ gleichmäßig gegen ein $\tilde{f} \in B(M,Y)$. Damit folgt

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} \tilde{f} + \hat{f}.$$

□

Definition V.1.8. Die Funktionenreihe $\sum f_n$ heißt

(1) punktweise konvergent,
(2) absolut konvergent,
(3) gleichmässig konvergent,
(4) normal konvergent,

wenn gilt

(1) $\sum f_n(x)$ konvergiert für jedes $x \in M$,
(2) $\sum \|f_n(x)\|_Y$ konvergiert für jedes $x \in M$,

(3) die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ der Partialsummen konvergiert gleichmäßig,

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$.

BEMERKUNG V.1.9. Es gilt:

(1) $\sum f_n$ absolut konvergent $\Longrightarrow \sum f_n$ punktweise konvergent.

(2) $\sum f_n$ gleichmäßig konvergent $\not\Longrightarrow \sum f_n$ absolut konvergent, $\sum f_n$ absolut konvergent $\not\Longrightarrow \sum f_n$ gleichmäßig konvergent.

(3) $\sum f_n$ absolut und gleichmäßig konvergent $\not\Longrightarrow \sum f_n$ normal konvergent.

BEWEIS. AD (1): Folgt aus Satz II.5.2 (S. 49).
AD (2): Sei $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M$, dann gilt $\sum f_n$ konvergiert gleichmäßig aber nicht absolut.
Sei $M = (-1,1)$, $Y = \mathbb{R}$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist $\sum f_n$ absolut konvergent, aber

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=n+1}^{m} f_k\|_\infty &= \sup_{-1<x<1} | \sum_{k=n+1}^{m} x^k| \\
&= \sup_{-1<x<1} |\frac{1-x^{m-n}}{1-x} x^{n+1}| \\
&= \lim_{x\to 1-0} |x^{n+1} \frac{1-x^{m-n}}{1-x}| \\
&= m-n.
\end{aligned}$$

Also ist $\sum f_n$ nicht gleichmäßig konvergent.
AD (3): Sei $M = Y = \mathbb{R}$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \le x < n+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\sum f_n$ ist gleichmäßig und absolut konvergent, aber $\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n}$ ist divergent. □

SATZ V.1.10. *Jede normal konvergente Funktionenreihe konvergiert absolut und gleichmäßig.*

BEWEIS. Sei $\sum f_n$ normal konvergent. Dann ist für jedes $x \in M$ $\sum \|f_n\|_\infty$ eine konvergente Majorante zu $\sum \|f_n(x)\|_Y$. Wegen Satz II.5.4 (S. 50) ist $\sum f_n$ absolut konvergent. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\sum \|f_n\|_\infty$ konvergiert, gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \ge N_\varepsilon.$$

Wegen

$$\|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\|_\infty \le \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty$$

folgt damit die gleichmäßige Konvergenz von $\sum f_n$ aus Satz V.1.7. $\square$

Beispiel V.1.11. $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ konvergiert gleichmäßig und absolut auf $\mathbb{R}$, da $\sum \frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante ist.

Satz V.1.12. *Sei $\sum a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann konvergiert $\sum a_k(x-x_0)^k$ für jedes $r \in (0,\rho)$ normal und damit gleichmäßig und absolut in $\overline{B(x_0;r)}$.*

Beweis. Sei $r \in (0,\rho)$, $M = \overline{B(x_0;r)}$, $Y = \mathbb{K}$ und $f_k = a_k(x-x_0)^k$. Dann ist

$$\|f_k\|_\infty = |a_k| r^k.$$

Wegen Satz II.6.3 (S. 57) ist

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|f_k\|_\infty} = r \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{r}{\rho} < 1.$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz II.5.6 (S. 50). $\square$

V.2. Vertauschen von Grenzprozessen

Satz V.2.1. *Seien f, f_n Funktionen von $M \subset X$, $M \ne \emptyset$, in Y und $x_0 \in M$. Es gelte*

(1) $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{glm}{\longrightarrow}} f$,
(2) *f_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ in x_0 stetig.*

Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Gemäß Bemerkung V.1.5(2) (S. 149) gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{N_\varepsilon} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zu f_{N_ε} gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit

$$\|f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in U \cap M.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0)\|_Y &\le \|f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)\|_Y + \|f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(x_0)\|_Y \\ &\quad + \|f_{N_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)\|_Y \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in U \cap M.\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung V.2.2. Beispiel V.1.3(1) (S. 147) zeigt, dass die Aussage des Satzes falsch ist, wenn f_n nur punktweise gegen f konvergiert.

Definition V.2.3. Wir sagen f_n konvergiert lokal gleichmässig gegen f, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt, so dass $f_{n|U\cap M}$ gleichmäßig auf $U \cap M$ gegen f konvergiert.

Bemerkung V.2.4. Es gilt:

(1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{lokal glm}} f$.

(2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{lokal glm}} f$ und M kompakt $\Longrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{glm}} f$.

Beweis. ad (1): Ist klar.
ad (2): Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu jedem $x \in M$ gibt es dann ein $U_x \in \mathcal{U}(x)$ und ein $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_n(y) - f(y)\|_Y < \varepsilon \quad \forall n \geq N_{\varepsilon,x}, y \in U_x \cap M.$$

Da $\{U_x : X \in M\}$ eine offene Überdeckung von M und M kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_i} : 1 \leq i \leq k\}$. Sei

$$N_\varepsilon = \max_{1\leq i\leq k} N_{\varepsilon,x_i}.$$

Dann gilt

$$\|f_n(y) - f(y)\|_Y < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon, y \in M.$$

□

Satz V.2.5. *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(M,Y)$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen f. Dann ist $f \in C(M,Y)$.*

Beweis. Folgt aus Satz V.2.1, da die Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. □

Bemerkung V.2.6. (1) Seien f und f_n wie in Beispiel V.1.3(2) (S. 147). Dann gilt $f_n, f \in C(M,Y)$ und $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{pkt}} f$, aber f_n konvergiert in keiner Umgebung von 0 gleichmäßig gegen f.
(2) Seien $f_n \in C(M,Y)$, $\sum f_n$ konvergiere lokal gleichmäßig. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \in C(M,Y)$.
(3) Seien $f_n \in C(M,Y)$, $\sum f_n$ konvergiere lokal gleichmäßig und es sei $x_0 \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)) &= \sum_{n=0}^{\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0).\end{aligned}$$

(4) Jede Potenzreihe stellt im Innern ihres Konvergenzkreises eine stetige Funktion dar.

Beweis. ad (1): Ist klar.
ad (2): Folgt aus Satz V.2.5.
ad (3): $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ist stetig.
ad (4): Wegen Satz V.1.12 (S. 152) konvergiert jede Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises lokal gleichmäßig. $\square$

Definition V.2.7. Definiere $BC(M,Y) = B(M,Y) \cap C(M,Y)$ und $\|\cdot\|_{BC(M,Y)} = \|\cdot\|_\infty$.

Aus Satz V.2.5 folgt:

Satz V.2.8. (1) *$BC(M,Y)$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $B(M,Y)$.*
(2) *Falls M kompakt ist, gilt $BC(M,Y) = C(M,Y)$.*

Beweis. ad (1): Dass $BC(M,Y)$ ein Untervektorraum von $B(M, Y)$ ist, ist offensichtlich. Dass $BC(M,Y)$ in $B(M,Y)$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz V.2.5 und Satz III.2.14 (S. 71).
ad (2): Aus Satz III.4.10 (S. 86) folgt $C(M,Y) \subset B(M,Y)$. $\square$

Als nächstes möchten wir zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen der Grenzwert einer Folge differenzierbarer Funktionen ebenfalls differenzierbar ist. Dazu benötigen wir folgenden Hilfssatz.

Lemma V.2.9. *Sei $-\infty < a < b < +\infty$ und $\varphi : [a,b] \to Y$ differenzierbar. Dann gilt*

$$\|\varphi(b) - \varphi(a) - \varphi'(a)(b-a)\|_Y \le \sup_{0 \le x \le b} \|\varphi'(x) - \varphi'(a)\|_Y |b-a|.$$

Beweis. Definiere $\psi : [a,b] \to Y$ durch

$$\psi(x) = \varphi(x) - \varphi'(a)(x-a).$$

Dann ist ψ differenzierbar und

$$\psi'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(a)$$
$$\psi(b) - \psi(a) = \varphi(b) - \varphi(a) - \varphi'(a)(b-a).$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz IV.2.17 (S. 129) und Bemerkung IV.2.18 (S. 130). $\square$

Satz V.2.10. *Es sei $M \subset \mathbb{K}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(M,Y)$. Es gelte:*

(1) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{pkt} f$,
(2) $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{lokal\ glm} g$.

Dann gilt:

(1) $f \in C^1(M,Y)$,
(2) $f' = g$,

(3) $f_n \overset{lokal\ glm}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$.

Beweis. Sei $x_0 \in M$ und $r > 0$, so dass $B(x_0; r) \subset M$ ist und f_n' auf $B(x_0; r)$ gleichmäßig gegen g konvergiert. Sei $x \in B(x_0; r)$ beliebig. Definiere

$$\varphi_n(t) = f_n(x_0 + t(x - x_0)).$$

Dann ist $\varphi_n \in C^1([0,1], Y)$ und

$$\begin{aligned}
\varphi_n(0) &= f_n(x_0)\\
\varphi_n(1) &= f_n(x)\\
\varphi_n'(t) &= f_n'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0).
\end{aligned}$$

Aus Lemma V.2.9 folgt

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x) - f_n(x_0) - f_n'(x_0)(x - x_0)\|_Y\\
=&\|\varphi_n(1) - \varphi_n(0) - \varphi_n'(0)\|_Y\\
\le& \sup_{0\le t\le 1} \|\varphi_n'(t) - \varphi_n'(0)\|_Y\\
=& \sup_{0\le t\le 1} \|f_n'(x_0 + t(x - x_0)) - f_n'(x_0)\|_Y |x - x_0|.
\end{aligned}$$

Wegen $f_n \overset{\text{pkt}}{\longrightarrow} f$ und $f_n' \overset{\text{glm}}{\longrightarrow} g$ auf $B(x_0; r)$ folgt

$$\begin{aligned}
&\|f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)\|_Y\\
\le& \sup_{0\le t\le 1} \|g(x_0 + t(x - x_0)) - g(x_0)\|_Y |x - x_0|.
\end{aligned}$$

Wegen $f_n' \in C(M, Y)$ und $f_n' \overset{\text{lokal glm}}{\longrightarrow} g$ folgt aus Satz V.2.5 $g \in C(M, Y)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x - x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)\|_Y}{|x - x_0|}\\
\le& \lim_{x\to x_0} \sup_{0\le t\le 1} \|g(x_0 + t(x - x_0)) - g(x_0)\|_Y\\
=&0.
\end{aligned}$$

Also ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = g(x_0)$. Da $x_0 \in M$ beliebig war, sind damit (1) und (2) bewiesen.
Weiter gilt für $x_0 \in M$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ mit $B(x_0; r) \subset M$ und $x \in B(x_0; r)$

$$\begin{aligned}
&\|f_n(x) - f(x)\|_Y\\
\le&\|f_n(x) - f(x) - f_n(x_0) + f(x_0)\|_Y + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_Y\\
\le& \sup_{0\le t\le 1} \|f_n'(x_0 + t(x - x_0)) - f'(x_0 + t(x - x_0))\|_Y |x - x_0|\\
&+ \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_Y\\
\le& r\|f_n' - f'\|_{\infty, B(x_0;r)} + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|_Y,
\end{aligned}$$

Wegen $f' = g$ und $f_n' \overset{\text{lokal glm}}{\longrightarrow} g$ und $f_n \overset{\text{pkt}}{\longrightarrow} f$ folgt hieraus (3). □

Ganz analog gilt:

Satz V.2.11. *Sei $M \subset \mathbb{K}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(M,Y)$. Es gelte:*

(1) $\sum f_n$ *konvergiert punktweise,*
(2) $\sum f_n'$ *konvergiert lokal gleichmäßig.*

Dann gilt:

(1) $\sum f_n$ *konvergiert lokal gleichmäßig,*
(2) $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in C^1(M,Y)$,
(3) $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

Beweis. Folgt aus Satz V.2.10 angewandt auf die Folge der Partialsummen. □

Bemerkung V.2.12. (1) $f_n, f \in C^1(M,Y)$ und $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$, impliziert nicht die Konvergenz von f_n' gegen f'. Dies zeigt das Beispiel $M = Y = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx),\ f(x) = 0.$$

(2) $f_n \in C^1(M,Y)$ und $\sum f_n$ gleichmäßig konvergent impliziert nicht die gleichmäßige Konvergenz von $\sum f_n'$. Dies zeigt das Beispiel $M = Y = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin(nx).$$

(3) Satz V.2.10 gilt auch unter folgenden Voraussetzungen:

(1) M ist ein Gebiet,
(2) $f_n : M \to Y$ differenzierbar,
(3) $f_n' \xrightarrow{\text{lokal glm}} g$.

(4) Satz V.2.10 gilt auch, wenn M konvex und perfekt ist, z.B. für $M = [a,b)$ mit $a < b$.

V.3. Analytische Funktionen

Wir beginnen mit einer Aussage über die gliedweise Differentiation von Potenzreihen.

Satz V.3.1. *Sei $\sum a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann hat die Potenzreihe $\sum na_n(x-x_0)^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius ρ und es gilt*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \quad \forall x \in B(x_0,\rho),$$

d.h., Potenzreihen dürfen im Innern des Konvergenzkreises gliedweise differenziert werden.

Beweis. Sei ρ' der Konvergenzradius von $\sum na_n(x-x_0)^n$. Dann folgt aus Satz II.6.3 (S. 57) und Beispiel II.2.3(3) (S. 35)

$$\rho' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

Damit folgt die Behauptung aus Bemerkung V.2.6(4) (S. 153) und Satz V.2.11 (S. 156). $\square$

Aus Satz V.3.1 folgt unmittelbar:

Satz V.3.2. *Sei $\sum a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \forall x \in B(x_0;\rho).$$

Dann ist $f \in C^\infty(B(x_0;\rho),\mathbb{K})$ und $\sum a_n(x-x_0)^n = T(f,x_0)$, d.h., die Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 stimmt mit der Taylorreihe mit Entwicklungspunkt x_0 der durch sie dargestellten Funktion überein.

Definition V.3.3. Sei $M \subset \mathbb{K}$, $M \neq \emptyset$, offen. Dann heißt eine Funktion $f : M \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K}$-analytisch, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 und Konvergenzradius $\rho > 0$ gibt, die f in einer Umgebung von x_0 darstellt. Die Gesamtheit aller $\mathbb{K}$-analytischen Funktionen von M in $\mathbb{K}$ wird mit $C^\omega(M,\mathbb{K})$ bezeichnet.

Bemerkung V.3.4. (1) Sei $f \in C^\omega(M,\mathbb{K})$ und $x_0 \in M$. Dann ist die f darstellende Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 eindeutig bestimmt und stimmt mit der Taylorreihe $T(f,x_0)$ überein.
(2) $C^\omega(M,\mathbb{K}) \underset{\neq}{\subset} C^\infty(M,\mathbb{K})$. Die Funktion f aus Beispiel IV.1.21 (S. 120) erfüllt

$$f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \backslash C^\omega(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

(3) Die Analytizität ist eine lokale Eigenschaft, d.h., es ist $f \in C^\omega(M,\mathbb{K})$ genau dann, wenn es zu jedem $x_0 \in M$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gibt mit $f|_U \in C^\omega(U,\mathbb{K})$.
(4) $C^\omega(M,\mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $f,g \in C^\omega(M,\mathbb{K})$ ist auch $f \cdot g \in C^\omega(M,\mathbb{K})$ und $\frac{f}{g} \in C^\omega(M,\mathbb{K})$, sofern zusätzlich $g(x) \neq 0$ ist für alle $x \in M$.

Beispiel V.3.5. (1) Polynome sind analytisch.
(2) $f(x) = \frac{1}{x} \in C^\omega(\mathbb{K}^*,\mathbb{K})$.

Beweis. ad (1): Sei $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und x_0 beliebig. Dann folgt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0+x_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a_k \binom{k}{l} (x-x_0)^l x_0^{k-l}$$
$$= \sum_{l=0}^{n} \left\{ \sum_{k=l}^{n} a_k \binom{k}{l} x_0^{k-l} \right\} (x-x_0)^l.$$

AD (2): Sei $x_0 \in \mathbb{K}^*$. Dann folgt für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x-x_0| < |x_0|$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x-x_0+x_0} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1+\frac{x-x_0}{x_0}}$$
$$= \frac{1}{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_0^{-k} (x-x_0)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_0^{-1-k} (x-x_0)^k.$$

□

SATZ V.3.6. *Konvergente Potenzreihen stellen im Innern des Konvergenzkreises analytische Funktionen dar.*

BEWEIS. Sei $\sum a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \forall x \in B(x_0;\rho).$$

Sei $y_0 \in B(x_0;\rho)$ beliebig und $r = \frac{1}{2}(\rho - |x_0 - y_0|) > 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(y_0) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} a_k k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-n+1)(y_0-x_0)^{k-n}$$
$$= \sum_{k=n}^{\infty} a_k \binom{k}{n} (y_0-x_0)^{k-n}.$$

Also ist

$$T(f,y_0)(x) = \sum \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k \binom{k}{n} (y_0-x_0)^{k-n} \right\} (x-y_0)^n.$$

Wir zeigen zunächst, dass $T(f,y_0)$ in $\overline{B(y_0;r)}$ normal konvergiert. Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k \binom{k}{n} (y_0-x_0)^{k-n} \} (x-y_0)^n \|_{\infty, \overline{B(y_0;r)}}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \binom{k}{n} |y_0-x_0|^{k-n} \} r^n$$
$$(*) \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left\{ \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} |y_0-x_0|^{k-n} r^n \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(r + |y_0 - x_0|)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|(\underbrace{\frac{1}{2}(\rho + |y_0 - x_0|)}_{<\rho})^k \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir an der Stelle $(*)$ ausgenutzt, dass eine absolut konvergente Doppelreihe beliebig umgeordnet werden kann (Beweis siehe Heuser Satz 45.1 bzw. 45.2).
Da $T(f, y_0)(x)$ insbesondere für jedes $x \in B(y_0; r)$ absolut konvergiert, erhalten wir mit dem gleichen Argument

$$
\begin{aligned}
T(f, y_0)(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \binom{k}{n} (y_0 - x_0)^{k-n} \right\} (x - y_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\{ \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (y_0 - x_0)^{k-n} (x - y_0)^n \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Also konvergiert $T(f, y_0)$ in $B(y_0; r)$ und stellt dort f dar. Da $y_0 \in B(x_0; \rho)$ beliebig war folgt hieraus die Behauptung. $\square$

Bemerkung V.3.7. Aus Satz V.3.6 folgt:
(1) $\exp, \sin, \cos \in C^\omega(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.
(2) $f \in C^\omega(M, \mathbb{K}) \Longrightarrow f' \in C^\omega(M, \mathbb{K})$.

Definition V.3.8. Sei $M \subset \mathbb{K}$ offen und $f : M \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt eine Abbildung $F : M \to Y$ Stammfunktion von f genau dann, wenn gilt $F' = f$.

Bemerkung V.3.9. (1) Ist $M \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, so unterscheiden sich zwei Stammfunktionen von f höchstens um eine additive Konstante.
(2) Ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

in $B(x_0; \rho)$, so ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion von f in $B(x_0; \rho)$.

Beweis. ad (1): Seien F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen von f. Dann gilt

$$(F_1 - F_2)' = 0 \text{ in } M.$$

Sei $x_0 \in M$ beliebig,

$$c = F_1(x_0) - F_2(x_0)$$

und

$$N = \{x \in M : F_1(x) - F_2(x) = c\}.$$

Dann ist $N \neq \emptyset$. Sei $x \in N$ und $r \in \mathbb{R}_+^*$ so, dass $B(x; r) \subset M$ ist. Dann folgt für $y \in B(x; r)$ und

$$\varphi(t) = F_1(x + t(y - x)) - F_2(x + t(y - x)) \quad \forall t \in [0, 1]$$

die Identität

$$\varphi'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Aus Satz IV.2.17 (S. 129) und Bemerkung IV.2.18 (S. 130) folgt

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= F_1(y) - F_2(y) \\ &= \varphi(0) \\ &= F_1(x) - F_2(x) \\ &= c. \end{aligned}$$

Also ist N offen in M. Da $F_1 - F_2$ stetig ist, ist N aber auch abgeschlossen in M. Da M zusammenhängend ist, folgt $N = M$, d.h., $F_1 - F_2$ ist konstant auf M.
ad (2): Folgt direkt aus Satz V.3.1. □

Satz V.3.10. *Ist $f \in C^\omega(M, \mathbb{K})$ und F eine Stammfunktion von f, so ist $F \in C^\omega(M, \mathbb{K})$.*

Beweis. Sei $x_0 \in M$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{in} \quad B(x_0; r)$$

mit $r > 0$. Dann folgt aus Bemerkung V.3.9

$$F(x) = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1}$$

mit einem geeigneten $c \in \mathbb{K}$. Hieraus folgt die Behauptung. □

Beispiel V.3.11. (1) $\ln \in C^\omega(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ und

$$\ln(x) = \ln(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) x_0^{n+1}} (x - x_0)^{n+1} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, |x - x_0| < x_0.$$

(2) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\binom{\alpha}{0} = 1$ und für $n \in \mathbb{N}^*$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Es ist

(Binomialreihe) $$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall |x| < 1.$$

Insbesondere ist $x^\alpha \in C^\omega(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ und

$$x^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n}(x-x_0)^n \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, |x-x_0| < x_0.$$

(3) Sei $\arcsin : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Umkehrfunktion von $\sin|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$. Dann ist $\arcsin \in C^\omega((-1,1) : \mathbb{R})$ und

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall |x| < 1.$$

Beweis. ad (1): Folgt aus Beispiel V.3.5 (2) und Satz V.3.10 zusammen mit $\ln' = \frac{1}{x}$.
ad (2): Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = 1.$$

Also hat die Reihe $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ gemäß Satz II.6.4 (S. 58) den Konvergenzradius 1. Für $|x| < 1$ sei

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Aus Satz V.3.1 folgt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m+1} (m+1) x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-m)}{m!} x^m \\
&= \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{m} x^m.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) &= \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{m} x^m (1+x) \\ &= \alpha \left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{m} x^m + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^k \right] \\ &= \alpha \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha-1}{m} + \binom{\alpha-1}{m-1} \right] x^m \right] \\ &= \alpha \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\alpha}{m} x^m \right] \\ &= \alpha g(x)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}0 &= (1+x)^{-\alpha-1}[(1+x)g'(x) - \alpha g(x)] \\ &= (1+x)^{-\alpha} g'(x) - \alpha(1+x)^{-\alpha-1} g(x) \\ &= \Big((1+x)^{-\alpha} g(x)\Big)'.\end{aligned}$$

Also ist $(1+x)^{-\alpha} g(x)$ auf $(-1,1)$ konstant. Wegen

$$1^\alpha = 1 = g(0)$$

folgt

$$g(x) = (1+x)^\alpha.$$

Für $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ und $|x - x_0| < x_0$ folgt nun

$$\begin{aligned}x^\alpha &= (x - x_0 + x_0)^\alpha \\ &= (\frac{x-x_0}{x_0} + 1)^\alpha x_0^\alpha \\ &= x_0^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (\frac{x-x_0}{x_0})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x_0^{\alpha-n} (x-x_0)^n.\end{aligned}$$

AD (3): Da sin auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend ist, existiert arcsin. Wegen

$$\sin' = \cos = \sqrt{1 - \sin^2} \quad \text{auf} \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

folgt

$$\arcsin' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aus Teil (2) folgt mit $\alpha = -\frac{1}{2}$ für $|x| < 1$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n.$$

Nun ist für $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2} - 1) \cdot \ldots \cdot (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \\ &= (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}.\end{aligned}$$

Substitution $x \to -x^2$ liefert

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} x^{2n}.$$

Zusammen mit Satz V.3.10 folgt hieraus die Behauptung. □

Satz V.3.12 (Identitätssatz für analytische Funktionen). *Sei $M \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet und $f, g \in C^\omega(M, \mathbb{K})$. Es gebe eine nicht leere, offene Teilmenge U von M mit $f|_U = g|_U$. Dann ist $f = g$ auf M.*

Beweis. Sei $h = f - g$. Dann ist $h \in C^\omega(M, \mathbb{K})$ und $h|_U = 0$. Wir müssen zeigen $h = 0$. Sei

$$N = \{x \in M : \exists\, U \in \mathcal{U}(x) : h|_U = 0\}.$$

Nach Voraussetzung ist $N \neq \emptyset$.
Konstruktionsgemäß ist N offen.
Um zu zeigen, dass N abgeschlossen ist, sei $x_0 \in M$ ein Häufungspunkt von N und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \backslash \{x_0\}$ eine Folge in N mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Wegen $h \in C^\omega(M, \mathbb{K})$ gibt es ein $\rho > 0$ mit

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \forall x \in B(x_0; \rho).$$

O.E. ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(x_0; \rho)$. Wir nehmen an, es sei $\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\} \neq \emptyset$. Sei $K = \min\{k : a_k \neq 0\}$. Dann gilt für $x \in B(x_0; \rho) \backslash \{x_0\}$

$$\begin{aligned}\frac{h(x)}{(x-x_0)^K} &= \sum_{k=K}^{\infty} a_k (x - x_0)^{K-k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_{K+l} (x - x_0)^l.\end{aligned}$$

Da $\sum a_{k+l}(x-x_0)^l$ in $B(x_0;\rho)$ eine analytische Funktion darstellt, also insbesondere stetig ist, folgt

$$a_K = \lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n)}{(x_n-x_0)^K} = 0.$$

Also ist $h|_{B(x_0;\rho)} = 0$ und damit $x_0 \in N$.
Da M zusammenhängend ist, folgt $N = M$. □

Bemerkung V.3.13. (1) Aus dem Beweis von Satz V.3.12 ergibt sich folgende Variante:
Ist $M \subset \mathbb{K}$ ein Gebiet, $f, g \in C^\omega(M,\mathbb{K})$ und gibt es $x_0 \in M$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M\backslash\{x_0\}$ mit

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \quad \text{und} \quad f(x_n) = g(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dann ist $f = g$.
(2) Beispiel IV.1.21 (S. 120) zeigt, dass Satz V.3.12 für C^∞-Funktionen nicht gilt.

Zum Abschluss dieses Paragraphen beweisen wir noch einige Eigenschaften komplex-analytischer Funktionen, die für reell-analytische Funktionen nicht gelten. Weitere, wie z.B. die Beziehung

$$C^1(M,\mathbb{C}) = C^\omega(M,\mathbb{C}) \quad \forall M \subset \mathbb{C}, M \text{ Gebiet},$$

werden wir in den Kapiteln VII und VIII kennen lernen.

Satz V.3.14 (Maximumprinzip). *Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C^\omega(M,\mathbb{C})$. Es gebe ein $z_0 \in M$ mit $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ für alle $z \in M$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Es gibt ein $\rho > 0$ mit $B(z_0;\rho) \subset M$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0) \quad \forall z \in B(z_0;\rho).$$

Wir nehmen an, dass $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \neq 0\} \neq \emptyset$ ist. Sei $k = \min\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \neq 0\}$. Dann ist

$$f(z) = a_0 + a_k(z-z_0)^k + (z-z_0)^{k+1}g(z) \quad \forall z \in B(z_0;\rho)$$

mit

$$g(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{k+1+l}(z-z_0)^l \quad \forall z \in B(z_0;\rho).$$

Sei $c = \max\limits_{z\in \overline{B(z_0;\frac{\rho}{2})}} |g(z)|$. Dann gilt für $z \in B(z_0;\frac{\rho}{2})$

$$|f(z)| \geq |a_0 + a_k(z-z_0)^k| - c|z-z_0|^{k+1}.$$

Sei

$$a_0 = r_0 e^{i\alpha},\ a_k = r_k e^{i\beta}$$

mit $r_0, r_k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $r_k = |a_k| > 0$. Sei $s \in (0, \frac{\rho}{2})$ und

$$z = z_0 + se^{i\frac{\alpha-\beta}{k}}.$$

Dann ist $z \in B(z_0; \frac{\rho}{2})$ und

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |r_0 e^{i\alpha} + r_k e^{i\beta} s^k e^{i(\alpha-\beta)}| - cs^{k+1} \\ &= |r_0 + r_k s^k| - cs^{k+1} \\ &\geq r_0 + r_k s^k - cs^{k+1} \\ &= r_0 + s^k(r_k - cs). \end{aligned}$$

Für

$$0 < s \leq \min\{\frac{\rho}{2}, \frac{r_k}{2c}\}$$

folgt

$$|f(z)| \geq r_0 + s^k \frac{1}{2} r_k > r_0 = |f(z_0)|.$$

Dies ist ein Widerspruch.
Also ist f auf $B(z_0; \rho)$ konstant und damit gemäß Satz V.3.12 auf ganz M konstant. □

SATZ V.3.15. *Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in C^\omega(M, \mathbb{C})$ und $K \subset M$ nicht leer und kompakt. Dann nimmt $f|_K$ das Maximum seines Betrages auf dem Rand ∂K an.*

BEWEIS. Gemäß Satz III.4.10 (S. 86) gibt es ein $z_0 \in K$ mit

$$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in K.$$

Falls $z_0 \in \partial K$ ist, sind wir fertig.
Sei also $z_0 \in \overset{\circ}{K}$. Dann ist gemäß Satz III.4.10 (S. 86)

$$(**) \qquad s = \min\{|z - z_0| : z \in \partial K\} > 0.$$

Es gilt

$$B(z_0; s) \subset \overset{\circ}{K} \quad \text{und} \quad \overline{B(z_0; s)} \subset K.$$

Wegen Satz V.3.14 ist f auf $B(z_0; s)$ konstant gleich $f(z_0)$. Wegen der Stetigkeit gilt dies auch auf $\overline{B(z_0; s)}$. Da das Minimum in $(**)$ an einem Punkt $z_1 \in \partial K$ angenommen wird, folgt $f(z_0) = f(z_1)$. □

SATZ V.3.16 (MINIMUMPRINZIP). *Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C^\omega(M, \mathbb{C})$.*

(1) *Es gebe ein $z_0 \in M$ mit*

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0 \quad \forall z \in M.$$

Dann ist f konstant.

(2) *Ist $K \subset M$ nicht leer und kompakt und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in M$, so nimmt $f|_K$ das Minimum seines Betrages auf ∂K an.*

Beweis. Folgt aus den Sätzen V.3.14 und V.3.15 angewandt auf $\frac{1}{f}$. □

Satz V.3.17 (Satz von der Gebietstreue). *Sei $M \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C^\omega(M, \mathbb{C})$ nicht konstant. Dann ist $f(M)$ ein Gebiet.*

Beweis. Wegen Satz III.5.4 (S. 89) müssen wir noch zeigen, dass $f(M)$ offen ist. Sei also $z_0 \in M$ und $w_0 = f(z_0)$. Wegen Bemerkung V.3.13 (1) gibt es ein $r \in \mathbb{R}_+^*$ mit $\overline{B(z_0; r)} \subset M$ und

$$f(z) \neq f(z_0) \quad \forall z \in \overline{B(z_0; r)} \backslash \{z_0\}.$$

Daher ist

$$\rho = \inf\{|f(z) - w_0| : z \in \partial B(z_0; r)\} > 0.$$

Sei nun $w \notin f(M)$. Wegen Satz V.3.16 ist

$$\begin{aligned} |w - w_0| &= |f(z_0) - w| \\ &\geq \inf\{|f(z) - w| : z \in \overline{B(z_0; r)})\} \\ &= |f(z_1) - w| \end{aligned}$$

mit einem geeigneten $z_1 \in \partial B(z_0; r)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \rho &\leq |f(z_1) - w_0| \\ &\leq |f(z_1) - w| + |w - w_0| \\ &\leq 2|w - w_0|, \end{aligned}$$

also $|w - w_0| \geq \frac{1}{2}\rho$. Mithin ist $B(w_0; \frac{1}{2}\rho) \subset f(M)$. □

V.4. Sprungstetige Funktionen

Im Folgenden sei stets $I \subset \mathbb{R}$ ein perfektes Intervall mit $\alpha = \inf I \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum.

Definition V.4.1. (1) Eine Menge $Z = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, mit $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$ heißt Zerlegung von I.
(2) Eine Funktion $f : I \to Y$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung $Z = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ von I gibt, so dass $f|_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)}$ für jedes $1 \leq i \leq n$ konstant ist.
(3) $T(I, Y)$ ist die Menge aller Treppenfunktionen.
(4) Eine Funktion $f : I \to Y$ heißt sprungstetig, wenn für jedes $x \in I$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(x - 0)$ und $f(x + 0)$ existieren.
(5) $S(I, Y)$ ist die Menge aller sprungstetigen Funktionen.

Beispiel V.4.2. (1) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

ist in $T((-1,1),\mathbb{R})$.
(2) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ x^2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

ist in $S([-1,1],\mathbb{R})$.
(3) Jede monotone Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist sprungstetig.
(4) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nicht sprungstetig.

Bemerkung V.4.3. (1) $T(I,Y)$ ist ein Untervektorraum von $B(I, Y)$. Es ist $T(I,Y) \subset S(I,Y)$.
(2) $S(I,Y)$ ist ein Vektorraum. Es ist $C(I,Y) \subset S(I,Y)$.
(3) Falls I kompakt ist, ist $S(I,Y) \subset B(I,Y)$.

Beweis. ad (1): $T(I,Y) \subset S(I,Y)$ ist offensichtlich. Ebenso, dass aus $f \in T(I,Y)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ folgt $\lambda f \in T(I,Y)$. Seien also $f, g \in T(I,Y)$ und $Z_f = (\alpha_0 \ldots, \alpha_n)$ und $Z_g = (\beta_0, \ldots, \beta_m)$ Zerlegungen von I mit

$$f|_{(\alpha_{i-1},\alpha_i)}, g|_{(\beta_{j-1},\beta_i)} \quad 1 \le i \le n, 1 \le j \le m$$

sind konstant. Sei $Z = Z_f \cup Z_g = (\gamma_0, \ldots, \gamma_K)$ mit der natürlichen Anordnung. Dann folgt

$$(f+g)|_{(\gamma_{l-1},\gamma_l)} \quad \text{ist konstant.}$$

ad (2): $C(I,Y) \subset S(I,Y)$ ist klar. Die Vektorraumeigenschaft folgt aus der Linearität der einseitigen Grenzwerte.
ad (3): Sei I kompakt und $f \in S(I,Y)$. Aufgrund der Definition der einseitigen Grenzwerte gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\alpha(x) < x$ und ein $\beta(x) > x$ mit

$$\|f(s) - f(t)\|_Y \le 1 \quad \forall s,t \in (\alpha(x), x) \text{ oder } s,t \in (x, \beta(x)).$$

Da I kompakt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}^*$ und $x_1, \ldots, x_n \in I$ mit

$$I \subset \bigcup_{1 \le i \le n} (\alpha(x_i), \beta(x_i)).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty \le \max_{1 \le i \le n} \max\Big\{ &\|f(x_i)\|_Y, \\ &1 + \|f(\frac{x_i + \alpha(x_i)}{2})\|_Y, \\ &1 + \|f(\frac{x_i + \beta(x_i)}{2})\|_Y \Big\} \end{aligned}$$

$$< \infty.$$

□

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Paragraphen.

Satz V.4.4. *Sei I kompakt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $f \in S(I, Y)$.
(2) $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I, Y) : \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2): Wie im Beweis von Bemerkung V.4.3 (3) folgt, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m \in I$ und Zahlen $\alpha(x_i) < x_i < \beta(x_i), 1 \le i \le m$, gibt mit

$$I \subset \bigcup_{1\le i\le m} (\alpha(x_i), \beta(x_i))$$

und

$$\|f(s) - f(t)\|_Y \le \frac{1}{n} \quad \forall s, t \in (\alpha(x_i), x_i) \text{ oder } s, t \in (x_i, \beta(x_i)), 1 \le i \le m.$$

Also gibt es eine Zerlegung $Z = (\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$ von I mit

$$\|f(s) - f(t)\|_Y \le \frac{1}{n} \quad \forall s, t \in (\gamma_{i-1}, \gamma_i), 1 \le i \le k.$$

Definiere $f_n \in T(I, Y)$ durch

$$f_n(x) = \begin{cases} f(\frac{\gamma_{i-1}+\gamma_i}{2}) & \gamma_{i-1} < x < \gamma_i, 1 \le i \le k \\ f(x) & x = \gamma_i, 1 \le i \le k. \end{cases}$$

Dann folgt

$$\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{n}.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I, Y)$ mit $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $x \in I$. Dann gibt es Zahlen $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ mit

$$f_{n_\varepsilon}(s) = f_{n_\varepsilon}(t) \quad \forall s, t \in (\alpha, x) \text{ oder } s, t \in (x, \beta).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|f(s) - f(t)\|_Y &\le \|f(s) - f_{n_\varepsilon}(s)\|_Y + \|f_{n_\varepsilon}(t) - f(t)\|_Y \\ &\le \varepsilon \qquad \forall s, t \in (\alpha, x) \text{ oder } s, t \in (x, \beta). \end{aligned}$$

Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $x_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x_k \in (\alpha, x)$ für alle $k \ge m$ und somit

$$\|f(x_k) - f(x_l)\|_Y \le \varepsilon \quad \forall k, l \ge m.$$

Also ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Cauchyfolge und damit konvergent. Setze $z = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ eine andere Folge mit $y_n < x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x = \lim_{n\to\infty} y_n$. Dann folgt wieder, dass $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ konvergiert. Sei $z' = \lim_{n\to\infty} f(y_k)$. Dann folgt

$$\|z - z'\|_Y \leq \varepsilon.$$

Also ist $z = z'$ und $f(x-0)$ existiert. Analog zeigt man die Existenz von $f(x+0)$. Also ist $f \in S(I,Y)$. □

BEMERKUNG V.4.5. Aus dem Beweis von Satz V.4.4 ergibt sich, dass man für $f \in S(I,\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(I,\mathbb{R})$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ und $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ finden kann.

DEFINITION V.4.6. Seien A, B Teilmengen eines normierten Vektorraumes $(X, \|\cdot\|_X)$ mit $A \subset B$. Dann heißt A DICHT in B, wenn gilt $B \subset \overline{A}$.

BEMERKUNG V.4.7. (1) Ist A dicht in B, so ist jeder Punkt von B Häufungspunkt von A, kann also beliebig gut durch Punkte aus A approximiert werden.
(2) Falls B abgeschlossen ist, gilt

$$A \text{ dicht in } B \iff \overline{A} = B.$$

(3) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sind dicht in $\mathbb{R}$.

Wir können Satz V.4.4 somit auch folgendermaßen formulieren:

SATZ V.4.8. *Sei I kompakt. Dann ist $S(I,Y)$ ein in der Norm von $B(I,Y)$ abgeschlossener Unterraum von $B(I,Y)$ und $T(I,Y)$ ist dicht in $S(I,Y)$.*

BEMERKUNG V.4.9. (1) $S(I,Y)$ ist ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Insbesondere sind gleichmäßige Grenzwerte sprungstetiger Funktionen wieder sprungstetig.
(2) $T(I,Y)$ ist ein Beispiel eines nicht vollständigen normierten Vektorraumes.
(3) Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist gleichmäßiger Grenzwert von Treppenfunktionen.

Zusammenfassung

I. Aufbau des Zahlsystems

1. Die natürlichen Zahlen
   Peano Axiome; Induktionsprinzip; Prinzip der rekursiven Definition; Fakultät und Binomialkoeffizienten; Binomischer Lehrsatz; geometrische Reihe; endliche, abzählbare, überabzählbare Mengen; Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar
2. Die ganzen Zahlen
   Definition und Eigenschaften; Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}$
3. Die rationalen Zahlen
   Definition und Eigenschaften; Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$
4. Die reellen Zahlen
   $\sqrt{2}$ nicht rational; Infimum und Supremum; Ordnungsvollständigkeit; $\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig; Dedekindscher Hauptsatz; Satz von Archimedes; $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$; Existenz n-ter Wurzeln; Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$; Betrag; Intervalle
5. Die komplexen Zahlen
   Definition und Rechenregeln; geometrische Interpretation; Real- und Imaginärteil, Betrag und konjugiert komplexe Zahl

II. Folgen und Reihen

1. Konvergenz von Folgen
   Folgen; Häufungspunkt; Grenzwert; konvergente, divergente und beschränkte Folgen; konvergent $\Rightarrow$ beschränkt; Grenzwert ist eindeutig; Teilfolgen; Charakterisierung von Grenzwert und Häufungspunkten durch Konvergenz von Teilfolgen; Nullfolgen; Rechenregeln für Limites
2. Vollständigkeit
   monotone Folgen; monoton und beschränkt $\Rightarrow$ konvergent; Satz von Bolzano-Weierstraß (beschränkt $\Rightarrow$ ex. Häufungspunkt); Cauchyfolge; konvergent $\Rightarrow$ Cauchyfolge $\Rightarrow$ beschränkt; Vollständigkeit; $\mathbb{K}$ vollständig; $\mathbb{Q}$ nicht vollständig
3. Uneigentliche Konvergenz
   Definition $\overline{\mathbb{R}}$; Konvergenz in $\overline{\mathbb{R}}$; Rechenregeln für Limites in $\overline{\mathbb{R}}$; Definition $\limsup$, $\liminf$; $\limsup =$ größter Häufungspunkt; $\liminf =$ kleinster Häufungspunkt; konvergent genau dann wenn $\limsup = \liminf$
4. Reihen
   Partialsummen; Reihen; Konvergenz und Grenzwerte von Reihen; harmonische und geometrische Reihe; $\sum x_n$ konvergent $\Rightarrow$ x_n Nullfolge; Cauchykriterium; Leibnizkriterium; alternierende harmonische Reihe

5. Absolute Konvergenz
   absolute und bedingte Konvergenz; Majoranten-, Wurzel- und Quotientenkriterium; Umordnung absolut konvergenter Reihen; Cauchyprodukt absolut konvergenter Reihen
6. Potenzreihen
   Definition; Konvergenzradius; Wurzel- und Quotientenkriterium für Konvergenzradius; Exponential- und geometrische Reihe; Rechenregeln für Potenzreihen

III. Stetige Funktionen

1. Normierte Vektorräume
   Vektorräume und Normen; Beispiele: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^n$, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_∞; Grenzwerte, Häufungspunkte und Cauchyfolgen in normierten Vektorräumen; äquivalente Normen; Äquivalenz der Normen auf $\mathbb{K}^n$; Banachräume
2. Topologische Grundbegriffe
   innere Punkte; offene Mengen; Rechnen mit offenen Mengen; abgeschlossene Mengen; Rechnen mit abgeschlossenen Mengen; Häufungs- und Berührungspunkte von Mengen; Zusammenhang mit Folgen; Abschluss, Inneres und Rand einer Menge; Hausdorffsches Trennungsaxiom; relativ offene und abgeschlossene Mengen
3. Stetigkeit
   Umgebungs-, ϵ–δ- und Folgendefinition der Stetigkeit; Rechenregeln für stetige Funktionen; Stetigkeit von Polynomen und rationalen Funktionen; $C(X, Y)$; Stetigkeit von Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^n$, links- und rechtsseitige Stetigkeit; gleichmäßige Stetigkeit; gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig
4. Kompaktheit
   Definition; kompakt $\Rightarrow$ beschränkt und abgeschlossen; in normierten Vektorräumen: kompakt = folgenkompakt; Satz von Heine-Borel (kompakt = beschränkt und abgeschlossen im $\mathbb{K}^n$); Heine-Borel gilt nicht in allgemeinen normierten Vektorräumen; stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind gleichmäßig stetig; stetige Bilder kompakter Mengen sind wieder kompakt; stetige, reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum und Minimum an; Fundamentalsatz der Algebra
5. Zusammenhang
   Definition; $M \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend $\Leftrightarrow$ M Intervall; stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind wieder zusammenhängend; Zwischenwertsatz; reelle Polynome ungeraden Grades besitzen mindestens eine reelle Nullstelle; Wege; Wegzusammenhang; konvexe Mengen; M offen: M wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ M zusammenhängend; Gebiete
6. Funktionen in $\mathbb{R}$
   monotone Funktionen; Sprungstellen; monotone Funktionen sind stetig bis auf abzählbar viele Sprungstellen; streng monotone stetige Funktionen sind bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung
7. Exponentialfunktion und Verwandte
   Definition von exp, sin, cos; Eigenschaften und Rechenregeln; Additionstheoreme für sin und cos; Wachstumsverhalten von exp; Definition von ln; Rechenregeln; Wachstumsverhalten von ln; Verhalten von exp für imaginäres Argument; Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen und Anwendung auf Multiplikation; Eulersche Darstellung von exp

IV. Differentialrechnung einer Veränderlichen

1. Differenzierbarkeit

Definitionen für Differenzierbarkeit in einem Punkt; differenzierbar $\Rightarrow$ stetig; Differenzierbarkeit von Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}^n$; Rechenregeln; Kettenregel; Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion; perfekte Mengen; Räume $C^n(M, \mathbb{K})$, $C^\infty(M, \mathbb{K})$; Leibnizregel; Ableitung von exp, sin, cos, ln, a^x, $x^2 \sin(1/x)$; links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit; Eigenschaften von $\exp(1/x)$

2. Mittelwertsätze

Satz von Rolle; Mittelwertsatz; Charakterisierung monotoner Funktionen; Umkehrfunktionen differenzierbarer, monotoner Funktionen sind wieder differenzierbar; arccos, arcsin; Charakterisierung und Eigenschaften konvexer und konkaver Funktionen; Youngsche und Höldersche Ungleichung; Regel von de l'Hôpital

3. Taylorformeln

Taylorpolynom und Taylorreihe; Abschätzung des Restgliedes; Darstellbarkeit einer Funktion durch ihre Taylorreihe; Taylorreihe von ln

4. Numerische Lösung von Gleichungen

Fixpunkt; Kontraktion; Banachscher Fixpunktsatz; Newtonverfahren; geometrische Interpretation; lokale, quadratische Konvergenz des Newtonvefahrens; globale Konvergenz des Newtonverfahrens bei strikt konvexen oder konkaven Funktionen; divisionsfreie Berechnung von $1/a$; Heronverfahren für $a^{1/n}$

V. Funktionenfolgen

1. Gleichmäßige Konvergenz

punktweise und gleichmäßige Konvergenz; gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ punktweise konvergent; Raum $B(M, Y)$; Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz; punktweise, absolute, gleichmäßige, normale Konvergenz von Funktionenreihen; Beziehungen zwischen den Konvergenzbegriffen; Anwendung auf Potenzreihen

2. Vertauschen von Grenzprozessen

Stetigkeit der Grenzfunktion; lokal gleichmäßige Konvergenz; Differenzierbarkeit der Grenzfunktion

3. Analytische Funktionen

Differentiation von Potenzreihen; $\mathbb{K}$-analytische Funktionen; konvergente Potenzreihen stellen analytische Funktionen dar; Stammfunktionen analytischer Funktionen; Binomialreihe; Reihendarstellung von arcsin; Identitätssatz für analytische Funktionen; Maximum- und Minimumprinzip; komplex-analytische Funktionen sind gebietstreu

4. Sprungstetige Funktionen

Treppenfunktionen $T(I, Y)$; sprungstetige Funktionen $S(I, Y)$; monotone Funktionen sind sprungstetig; Beziehungen zwischen Räumen $T(I, Y)$, $S(I, Y)$, $B(I, Y)$ und $C(I, Y)$; I kompakt $\Rightarrow T(I, Y)$ dicht in $S(I, Y)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

Index