**Aufgaben zur Vorlesung Statistik I**

Dr. Melanie Birke
Timo Gottschalk

Sommersemester 2007
Blatt 8

Abgabe: 12.6.2007 in der Vorlesung.

---

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Seien $T_{ni} : \mathcal{X} \to I\!R$ Schätzer für den Parameter $\gamma_i(\theta)$ für $1 \leq i \leq \ell$. Dann gilt: Der Schätzer
$$T_n(X) = (T_{n1}(X), \dots, T_{n\ell}(X))^T$$
ist genau dann konsistent für den Parameter $\gamma(\theta) = (\gamma_1(\theta), \dots, \gamma_\ell(\theta))^T$, falls jede Komponente $T_{ni}(X)$ konsistent für $\gamma_i(\theta)$ ist ($i = 1, \dots, \ell$).

(b) Es sei $T(X)$ ein konsistenter Schätzer für $\gamma(\theta)$ und $g : \Gamma \to \widetilde{\Gamma} \subset I\!R^m$ eine stetige Funktion mit $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dann ist auch $g(T_n(X))$ konsistenter Schätzer für $g(\gamma(\theta))$.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

(a) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen mit $E[|X_1|^{2k}] < \infty$ für ein $k \in I\!N$. $A_n$ und $B_n$ seien Folgen reeller Zufallsvariablen mit den stochastischen Konvergenzen $A_n \xrightarrow{P} 0$ und $B_n \xrightarrow{P} 1$. Zeigen Sie, dass
$$T_{n,1}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1} nX_i^k + A_n \quad \text{und} \quad T_{n,2}(X) = \frac{B_n}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$
konsistente Schätzer für $\mathrm{E}[X_1^k]$ sind.

(b) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig identisch $\mathcal{U}[0, \vartheta]$-verteilte Zufallsvariablen ($\vartheta > 0$). Zeigen Sie, dass
$$T_n(X) = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$$
ein konsistenter Schätzer für $\vartheta/e$ ist.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

Gegeben sei eine Stichprobe von $n \geq 2$ unabhängigen bivariat normalverteilten Zufallsvariablen $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$, wobei die Dichte von $(X_1, Y_1)$ gegeben sei durch
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\tau\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} - \frac{2\rho}{\sigma\tau}(x-\mu)(y-\nu) + \frac{(y-\nu)^2}{\tau^2}\right)\right\}.$$
Es gilt $\mathrm{E}[X_1] = \mu$, $\mathrm{E}[Y_1] = \nu$, $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2$, $\mathrm{Var}[Y_1] = \tau^2$ und $\mathrm{Cov}(X_1, Y_1) = \rho\sigma\tau$.

(a) Zeigen Sie, dass in diesem Modell die Statistik

$$T(X) = (\bar{X}, \bar{Y}, S_X, S_Y, S_{XY})$$

suffizient und vollständig für die Parameter $(\mu, \nu, \rho, \sigma^2, \tau^2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^2$ ist. Dabei gelten die folgenden Notationen:

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad S_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \\
\bar{Y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i, \quad S_Y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, \\
S_{XY} &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).
\end{aligned}$$

(b) Finden Sie einen UMVU-Schätzer für $\mathrm{Cov}(X_1, Y_1)$, und bestimmen Sie einen Schätzer $\hat{\rho}$ für $\mathrm{Corr}(X_1, Y_1)$. Weisen Sie die Konsistenz dieses Schätzers nach.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

(a) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig Poisson($\lambda$)-verteilt mit $\lambda > 0$. Ist $\bar{X}$ ein konsistenter Schätzer für $\lambda$?

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\mathcal{U}[0, \theta]$-verteilt mit $\theta > 0$. Sind $X_{(n)}$ und $2\bar{X}$ asymptotisch erwartungstreue und konsistente Schätzer für $\theta$?

(c) Betrachten Sie $n$ unabhängige $Exp(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen mit $\lambda > 0$. Weisen Sie nach, dass ein eindeutig bestimmter konsistenter Maximum-Likelihood-Schätzer für $\theta$ mit $\cos(\theta) = \lambda$ existiert. Was kann man über die Bestimmung dieses Schätzers sagen?