

Aufgaben zur Vorlesung Statistik I

Dr. Melanie Birke
Timo Gottschalk

Sommersemester 2007
Blatt 5

Abgabe: 15.5.2007 in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ($1 \leq i \leq n$) und $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ ($1 \leq i \leq m$) für unbekannte Parameter μ_1, μ_2, σ^2 .

- (a) Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma^2)$.
(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in [0, 1]$

$$S_\alpha^2 := \alpha S_X^2 + (1 - \alpha) S_Y^2,$$

wobei S_X^2 und \bar{X} durch $S_X^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ und $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (S_Y^2, \bar{Y} entsprechend für m) definiert sind, ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

- (c) Berechnen Sie das Risiko von S_α^2 für $\alpha \in [0, 1]$.
(d) Zeigen Sie, dass der Schätzer $S^2 := S_{\alpha'}^2$ mit $\alpha' := \frac{n-1}{m+n-2}$ das kleinste Risiko von allen Schätzern in $\{S_\alpha^2 : \alpha \in [0, 1]\}$ hat.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_i \sim U(0, \theta)$ ($1 \leq i \leq n$) und unbekanntem Parameter $\theta > 0$. Betrachten Sie den Maximum Likelihoodschätzer

$$M(X_1, \dots, X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

und den UMVU-Schätzer (ohne Beweis)

$$T^*(X_1, \dots, X_n) = \frac{n+1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

für θ . Finden Sie einen Schätzer T mit

$$R(\theta, T) < \min\{R(\theta, M), R(\theta, T^*)\}$$

und kommentieren Sie kurz das asymptotische Verhalten der drei Schätzer M, T^* und T . (*Hinweis:* Verwenden Sie den Ansatz $T = \alpha M$, und wählen Sie α geschickt).

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ($1 \leq i \leq n$) mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$.

- (a) Zeigen Sie, dass $X_1 \cdot X_2$ ein erwartungstreuer Schätzer für λ^2 ist.

- (b) Verbessern Sie den obigen Schätzer durch Anwendung der Rao–Blackwell Prozedur auf die Statistik $S = \sum_{i=1}^n X_i$. (Zur Kontrolle: Man erhält den Schätzer $\frac{S(S-1)}{n^2}$.)

Hinweis: Bestimmen Sie die bedingte Verteilung von (X_1, \dots, X_n) bzgl. S .

Aufgabe 4:

(4 Punkte)

- (a) Sei $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit unbekanntem $\sigma^2 > 0$. Zeigen Sie, dass $T(x) = x$ keine vollständige Statistik für σ^2 ist.
- (b) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, \theta^2)$ und unbekanntem $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Statistik

$$T(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

suffizient aber nicht vollständig für den Parameter θ ist.