

Lösungen zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. Holger Dette
Mathias Vetter

SS 2007
Blatt 6

Aufgabe 1:

(5 Punkte)

Wir beweisen die Aussage per Induktion über n . Für $n = 0$ gilt:

$$R_0(x, x_0, f) = f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

nach Definition bzw. nach dem ersten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für den Induktionsschritt von $n - 1$ nach n benutzen wir die Induktionsvoraussetzung sowie partielle Integration. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} R_{n-1}(x, x_0, f) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{(n-1)} f^{(n)}(t) dt = - \int_{x_0}^x \left((x-t)^n \frac{1}{n!} \right)' f^{(n)}(t) dt \\ &= - (x-t)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t)^n \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

Beachte dabei, dass nach t integriert wurde. Somit folgt

$$f(x) - T_{n-1}(x, x_0, f) = R_{n-1}(x, x_0, f) = (x-x_0)^n \frac{1}{n!} f^{(n)}(t) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

und also nach Definition des n -ten Taylorpolynoms

$$f(x) - T_n(x, x_0, f) = R_n(x, x_0, f) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Aufgabe 2:

(5 Punkte)

(a) Wir substituieren zunächst $x = \log(z)$. Es ergibt sich

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{z - 1}{z + 1} \frac{1}{z} dz = \int \frac{z - 1}{z(z + 1)} dz.$$

Für die Partialbruchzerlegung lösen wir die Gleichungen

$$\frac{a}{z} + \frac{b}{z + 1} = \frac{z - 1}{z(z + 1)}$$

und erhalten

$$z - 1 = a(z + 1) + bz = (a + b)z + a \quad \Rightarrow \quad a = -1 \text{ und } b = 2.$$

Damit folgt (wegen $z = e^x$ sind z und $z + 1$ positive Zahlen!)

$$\int \frac{z - 1}{z(z + 1)} dz = \int \frac{-1}{z} dz + \int \frac{2}{z + 1} dz = -\log(z) + 2 \log(z + 1),$$

was nach Rücksubstitution

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = -x + 2 \log(e^x + 1)$$

ergibt.

(b) Die Substitution $t = \sin x$ liefert

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3(x) - 1} dx = \int \frac{1}{t^3 - 1} dt = \int \frac{1}{(t-1)(t^2 + t + 1)} dt,$$

so dass wir die Gleichung

$$\frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1} = \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

lösen müssen. Er ergibt sich $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ und $c = -\frac{2}{3}$ und damit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} dt &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2+t+1} dt \\ &= \frac{1}{3} \log(|t-1|) - \int \frac{\frac{1}{3}t + \frac{1}{6}}{t^2+t+1} dt - \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+t+1} dt. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term gilt

$$\int \frac{\frac{1}{3}t + \frac{1}{6}}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{6} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{6} \log(t^2+t+1).$$

Für den dritten Summanden erhalten wir mit 14.7. (iii)

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{t^2+t+1} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right),$$

so dass sich als Resultat

$$\int \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} dt = \frac{1}{3} \log(|t-1|) - \frac{1}{6} \log(t^2+t+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

ergibt. Nach Rücksubstitution erhalten wir zuletzt (beachte: $\sin(x) \leq 1$)

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin^3(x) - 1} dx &= \frac{1}{3} \log(1 - \sin(x)) \\ &\quad - \frac{1}{6} \log(\sin^2(x) + \sin(x) + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\sin(x) + 1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(5 Punkte)

(a) Eine Polynomdivision liefert

$$\int \frac{x^3}{x^2-4} dx = \int x dx + \int \frac{4x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2 \int \frac{2x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2}x^2 + 2 \log(x^2-4).$$

(b) Es gilt:

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx = \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2} dx - \int \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx.$$

Für das erste Integral liefert 14.7. (iii)

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

Der zweite Summand lässt sich gemäß 14.7. (v) wie folgt berechnen:

$$\int \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx = -\frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Also erhalten wir

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{8}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)}.$$

(c) Wir lösen die Gleichung

$$\frac{1}{x(x + 3)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 3} + \frac{c}{(x + 3)^2} \quad \Leftrightarrow (a + b)x^2 + (6a + 3b + c)x + 9a = 1$$

und erhalten $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{1}{9}$ und $c = -\frac{1}{3}$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{1}{x(x + 3)^2} dx = \frac{1}{9} \log(|x|) - \frac{1}{9} \log(|x + 3|) + \frac{1}{3(x + 3)}.$$

Aufgabe 4:

(5 Punkte)

- (a) Da f nicht die Nullfunktion ist, gibt es ein x_0 mit $f(x_0) > 0$. Nach Satz 9.17 existieren dann Zahlen $\alpha, \epsilon > 0$, so dass $f(x) \geq \alpha$ für alle $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset [a, b]$. Damit gilt:

$$f(x) \geq g(x) := \begin{cases} \alpha, & x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wegen

$$\int_a^b g(x) dx = 2\alpha \cdot \epsilon > 0$$

folgt aufgrund der Monotonie des Integrals (vgl. Satz 13.16) die Behauptung.

- (b) Die Aussage folgt mittels eines Beweises durch Widerspruch direkt aus Aufgabenteil (a). Falls Funktion f keine Nullstelle besitzt, so besitzt sie aufgrund der Stetigkeit entweder nur positive oder nur negative Werte. In beiden Fällen folgt aus (a), dass das Integral nicht 0 sein kann.