Aufgaben zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. Holger Dette — WS 2006/2007
Benjamin Hetzler — Blatt 1

Abgabe: Montag, 16. April 2007, bis 10:05 Uhr in die Zettelkästen auf NA 01.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Sei $f(x) := \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}(x+2)\ln(x+1)$.

(a) Skizziere die Funktion f und bestimme die Nullstellen sowie Maxima und Minima der Funktion (falls sie existieren).

Hinweis: Eigentlich benötigt man zur Lösung der Aufgabe nur die 1. Ableitung. Trotzdem ist die 2. Ableitung sehr nützlich, da man mit ihrer Hilfe auf $f'(x) \leq 0$ schließen kann! (Wozu braucht man das?)

(b) Bestimme die Gleichung der Tangente an die Umkehrfunktion im Punkt $y_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln 2$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Berechne zu jeder der folgenden Funktionen f das Taylorpolynom vom Grad 3 von f um den Entwicklungspunkt x_0.

(a) $f(x) = \log\left(1 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right), \quad x_0 = 0$

(b) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5x + 5, \quad x_0 = -1$

(c) $f(x) = x\sqrt{x+1}, \quad x_0 = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 1}, \quad x_0 = 0$

(e) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{1+x}\right), \quad x_0 = 1$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Untersuche die folgenden Funktionenfolgen bzw. die Funktionenreihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 2 - nx & \text{für } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0 & \text{für } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

(b) $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}, \quad x \in I\!R$ bzw. $x \in [1, \infty)$

(c) $f_n : I\!R \to I\!R,\ f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+nx^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad (x \in I\!R)$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

(a) Zeige, dass es eine Funktion $g \in C^\infty(I\!R)$ gibt mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \in (0,1) & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Zeige: Zu $h_0, h_1 \in C^\infty(I\!R)$ existiert eine Funktion $F \in C^\infty(I\!R)$ mit $F(x) = h_0(x)$ für alle $x \leq 0$ und $F(x) = h_1(x)$ für alle $x \geq 1$.

Hinweis: Benutze die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}) & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

die laut Vorlesung unendlich oft differenzierbar ist.

Hinweise zur Klausur

- Die Klausur findet am 9. Februar 2007 von 15.00 bis 18.00 Uhr in den folgenden Hörsälen statt: HZO 10, HZO 60 und HNC 10.
- Jeder Klausurteilnehmer wird nach Anmeldeschluss über VSPL über den Hörsaal informiert, dem er zugeteilt wurde.
- Um einen pünktlichen Beginn zu garantieren, bitten wir die Teilnehmer, gegen 14.45 Uhr einzutreffen.
- Vergessen Sie Ihr Schreibmaterial nicht !
- Die Klausur hat 8 Aufgaben mit je 10 Punkten.
- Bei Bedarf erhalten Sie Papiernachschub; eigenes Papier ist nicht erlaubt. Am Platz darf nur Schreibmaterial sowie eventuell Verpflegung sein. Also keine Jacken, Taschen, Taschenrechner, Handys, Aufzeichnungen, Bücher u.s.w.. Taschen und Jacken bitte möglichst draußen lassen oder am Rand des Hörsaals deponieren. Bitte stellen Sie Ihr Handy aus!!!
- Beim Verlassen des Hörsaals sind alle Blätter, inklusive Konzeptpapier, abzugeben.
- Temporäres Verlassen des Hörsaals ist nur einzeln gestattet.