Aufgaben zur Vorlesung Analysis I

Prof. Dr. Holger Dette
Regine Scheder

WS 2006/2007
Blatt 11

Abgabe: Montag, 22. Januar 2007, bis 10:05 Uhr in die Zettelkästen auf NA 01.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Die Funktion f sei definiert auf $M \subset \mathbb{R}$. Man sagt, dass f auf der Menge M einer LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung $\alpha > 0$ genügt, wenn eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\alpha}.$$

Es seien f und g Funktionen, die auf M einer LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung α genügen.

(a) Zeige, dass f auf M stetig ist.

(b) Zeige, dass $f + g$ auf M einer LIPSCHITZ-Bedingung der Ordnung α genügt.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelte. Zeige, dass dann eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis: Überlege zunächst, wie $f(x)$ für $x \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Q}$ aussieht.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Die Funktion f sei auf $\mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

(a) Zeige, dass die Funktion f auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist und bestimme den Wertebereich $W(f)$.

(b) Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion f auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x^{\alpha} & \text{falls } x > 0 \end{cases}.$$

An welchen Stellen ist f differenzierbar?