

Aufgaben zur Vorlesung Analysis II

Prof. Dr. Holger Dette
Benjamin Hetzler

SS 2007
Blatt 9

Abgabe: Montag, 18. Juni 2007, bis 10:05 Uhr in die Zettelkästen auf NA 01.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Zeige:

- (a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^2 .
- (b) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ ist eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $E := C([0, 1])$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Norm $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$ und

$$A := \{f \in C([0, 1]) \mid f \text{ ist Polynom vom Grad } \leq 1 \text{ oder } f = 0\}.$$

Zeige, dass A abgeschlossen ist.

Hinweis: Zeige, dass jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus A einen Grenzwert hat, der ebenfalls in A liegt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Für $j = 1, 2, 3$ seien die Funktionen $f_j : \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\text{a) } f_1(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{b) } f_2(x, y) := \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{c) } f_3(x, y) := \frac{x^2}{x^2 + y^4}.$$

Untersuche, ob $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_j(x, y)$ existiert. Falls ja, berechne man diesen Grenzwert.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Seien A und B nichtleere Teilmengen des normierten Banach-Raumes E . Der Abstand $d(A, B)$ wird definiert durch

$$d(A, B) := \inf\{\|a - b\| \mid a \in A, b \in B\}.$$

(Falls A und B Punkte gemeinsam haben, gilt $d(A, B) = 0$; dieser Fall ist nicht so interessant und wird daher im folgenden ausgeschlossen.)

Seien also im folgenden A und B disjunkt: $A \cap B = \emptyset$.

- (a) Zeige: Falls A kompakt und B abgeschlossen ist, dann gilt $d(A, B) > 0$.

- (b) Gib ein Beispiel dafür, dass der Fall $d(A, B) = 0$ eintreten kann, wenn sowohl von A als auch von B nur vorausgesetzt wird, dass sie *abgeschlossen* (aber disjunkt) sind.

Hinweis: Verwende Aufgabe 1 (a).

Hinweis zur Klausur:

Die Anmeldung zur Modulabschlussklausur muss bis spätestens 30. Juni 2007 über VSPL erfolgen.