Hans U. Simon
Christoph Ries

Bochum, den 2. Mai 2017
Abgabe bis zum 09.05.2017

Übungen zur Vorlesung

Theorie des maschinellen Lernens

Sommer 17

Übungsblatt 02

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)
Wir betrachten die Klasse aller achsenparallelen Rechtecke

$$\mathcal{H}^2_{rec} := \{h_{(a_1,b_1,a_2,b_2)} : a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2\}.$$

Eine Hypothese aus $\mathcal{H}^2_{rec}$ hat die Form

$$h_{(a_1,b_1,a_2,b_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a_1 \leq x_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq x_2 \leq b_2 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Wir betrachten im Folgenden den realisierbaren Fall.

a) Sei A ein Algorithmus. A bestimme das kleinste Rechteck, welches alle positiven Punkte der Trainingsmenge umschließt, und gebe die zugehörige Hypothese aus. Zeige, dass A ein ERM-Algorithmus ist.

b) Skizziere analog zu den Halbintervallen aus der Vorlesung einen Beweis, dass A bei Eingabe einer Trainingsmenge S mit

$$|S| \geq \frac{4\log(4/\delta)}{\varepsilon}$$

mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1-\delta$ eine Hypothese ausgibt deren Fehler höchstens ε ist.

c) Wieviele Beispiele braucht ein entsprechender Algorithmus für achsenparallele d-dimensionale Boxen (ein Rechteck ist eine zwei-dimensionale Box) in $\mathbb{R}^d$? Beweise deine Behauptung.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{H}$ eine Hypothesenklasse (ggf. unendlich), die die universelle Konvergenzbedingung bezüglich einer Verlustfunktion l erfüllt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ agnostisch PAC-lernbar bezüglich l ist und dass gilt

$$m_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta) \leq m^{UC}_{\mathcal{H}}(\varepsilon/3,\delta).$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Seien $D_1, ..., D_m$ Verteilungen über X. Sei $\mathcal{H}$ eine endliche Hypothesenklasse mit Hypothesen von X nach $\{0,1\}$. Sei $f \in \mathcal{H}$. Es wird eine Trainingsmenge $S = \{x_1, ..., x_m\}$ der Größe m unabhängig, aber nicht gleichverteilt gezogen, d.h. $\forall i$: $x_i \sim D_i$ und x_i wird mit f markiert. Des Weiteren sei

$$\bar{D} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} D_i.$$

Sei $\varepsilon \in (0,1)$ beliebig, aber fest. Zeige, dass

$$Pr[\exists h \in \mathcal{H}:\ L_{\bar{D},f}(h) > \varepsilon \wedge L_{(S,f)}(h) = 0] \leq |\mathcal{H}| \cdot e^{-\varepsilon m}.$$

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir eine Variante des PAC-Lernmodells. Bei dieser Variante gibt es zwei Orakel, die bzgl. einer Verteilung D über X Instanzen generieren. Eines dieser Orakel erzeugt nur positive Beispiele und das andere nur negative Beispiele. Das Modell sieht wie folgt aus:

Sei $f : X \to \{0,1\}$ die Zielfunktion. $\mathcal{D}_+$ sei eine Verteilung über $X^+ = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, die durch $D_+(A) = D(A)/D(X^+)$ für alle $A \subseteq X$ definiert wird. Analog sei $\mathcal{D}_-$ die durch D induzierte Verteilung über X^-.
Eine Hypothesenklasse $\mathcal{H}$ heißt *PAC-lernbar im Zwei-Orakel-Modell*, falls für alle $\varepsilon, \delta > 0$, alle Verteilungen D und alle Markierungsfunktionen $f \in \mathcal{H}$ Funktionen $m^+_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)$ und $m^-_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)$ existieren mit: Es gibt einen Lerner A, sodass

$$Pr_{S^+ \sim D_+^m, S^- \sim D_-^{m'}} \left[L_{(D_+,f)}(A(S^+,S^-)) \leq \varepsilon \wedge L_{(D_-,f)}(A(S^+,S^-)) \leq \varepsilon\right] > 1 - \delta$$

für alle $m \geq m^+_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)$ und $m' \geq m^-_{\mathcal{H}}(\varepsilon,\delta)$.

Zeigen Sie, dass aus der PAC-Lernbarkeit von $\mathcal{H}$ im Standardmodell die PAC-Lernbarkeit im Zwei-Orakel-Modell folgt.