Hans U. Simon
Michael Kallweit

Bochum, den 22.05.2009
Abgabe bis 29.05.2009 um 12:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
SS 2009

Blatt 6

Aufgabe 6.1

Betrachte $Rm||C_{\max}$ mit n Jobs. Es sei $p_{\max} = \max_{i,j} p_{i,j}$ und es bezeichne $C^*_{\max}$ die optimale Produktionsspanne. Zeige, dass die *swap*-Nachbarschaftsfunktion eine *performance ratio* von mindestens $\frac{p_{\max}}{C^*_{\max}}$ hat.

Aufgabe 6.2

Betrachte die Problemliste im Anhang. Zeige, dass folgenden Probleme in $\mathcal{NP}$ sind

a) CLIQUE

b) TSP

c) KNAPSACK

d) k-COLORABILITY

Aufgabe 6.3

Gegeben sei $k \in \mathbb{N}$, ein Graph $G = (V, E)$ und eine Prozedur C, die k-Colorability löst (also zu gegebenen Graphen entscheiden kann, ob dieser mit $\leq k$ Farben gefärbt werden kann).
Zeige, dass man in Polynomialzeit eine Knotenfärbung mit k oder weniger Farben (wenn sie existiert) konstruieren kann, wenn ein Aufruf von C nur konstant viel Zeit benötigt.

Problemliste

SAT: Satisfiability (Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik)

- **Eingabe:** Kollektion $C_1, \ldots, C_m$ von Booleschen Klauseln in n Booleschen Variablen $x_1, \ldots, x_n$. (Eine Boolesche Klausel ist eine Disjunktion von Booleschen Literalen. Ein Boolesches Literal ist eine negierte oder unnegierte Boolesche Variable.)
- **Frage:** Existiert eine Belegung von $x_1, \ldots, x_n$ mit 0 oder 1, die alle Klauseln erfüllt, d.h., die dazu führt, dass $C_1, \ldots, C_m$ zu 1 ausgewertet werden ?

3-SAT: Einschränkung von SAT auf Eingaben, deren Boolesche Klauseln aus jeweils 3 Booleschen Literalen bestehen.

CLIQUE: Cliquenproblem.

- **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Anzahl k.
- **Frage:** Existiert in G eine Clique der Größe k, d.h., eine Menge $C \subseteq V$ der Mächtigkeit k, deren Knoten paarweise in G benachbart sind ?

INDEPENDENT SET: Unabhängige Mengen.

- **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Anzahl k.
- **Frage:** Existiert in G eine unabhängige Menge der Größe k, d.h., eine Menge $U \subseteq V$ der Mächtigkeit k, deren Knoten paarweise in G nicht benachbart sind ?

VERTEX COVER: Überdeckung mit Knoten.

- **Eingabe:** Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Anzahl k.
- **Frage:** Existiert in G ein „Vertex Cover (Knotenüberdeckungsmenge)“ der Größe k, d.h., eine Menge $C \subseteq V$ der Mächtigkeit k, die von jeder Kante aus E mindestens einen Randknoten enthält ?

HITTING SET: Auffinden eines Repräsentantensystems.

- **Eingabe:** eine Kollektion $M_1, M_2, \ldots, M_m$ endlicher Mengen und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- **Frage:** Gibt es für diese Mengen ein Repräsentantensystem der Größe k, d.h., eine Menge R der Mächtigkeit k, die von jeder der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_m$ mindestens ein Element enthält ?

SET COVER: Mengenüberdeckung.

- **Eingabe:** eine Kollektion $M_1, M_2, \ldots, M_m$ endlicher Mengen und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
- **Frage:** Gibt es eine Auswahl von k dieser Mengen, deren Vereinigung mit der Vereinigung aller Mengen übereinstimmt, d.h., existiert eine k-elementige Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \bigcup_{i=1}^{m} M_i \ ?$$

SUBSET SUM: Erzielung einer vorgeschriebenen Teilsumme.

Eingabe: n Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ und eine „Teilsummenzahl“ $S \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Menge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = S$?

PARTITION: Zerlegung in zwei gleichgroße Teilsummen.

Eingabe: n Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$.

Frage: Kann man diese Zahlen in zwei gleichgroße Teilsummen zerlegen, d.h., existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \notin I} a_j$?

KNAPSACK: Rucksackproblem.

Eingabe: n Objekte mit Gewichten $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$ und Nutzen $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$, eine Gewichtsschranke W und eine Nutzenschranke P.

Frage: Kann man einen Rucksack R so packen, dass die Objekte in R einen Gesamtnutzen von mindestens P und ein Gesamtgewicht von höchstens W besitzen, d.h., existiert eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, so dass $\sum_{i \in I} p_i \geq P$ und $\sum_{i \in I} w_i \leq W$?

BP: Bin Packing (Behälterpackungsproblem).

Eingabe: n Objekte der Größen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, m Behälter (=bins) der „Bingröße“ b.

Frage: Kann man die n Objekte so in die m Behälter verpacken, dass in jedem Behälter die Größen der in ihm enthaltenen Objekte sich zu höchstens b addieren, d.h., existiert eine Zerlegung von $\{1, \dots, n\}$ in m disjunkte Teilmengen $I_1, \dots, I_m$, so dass $\sum_{i \in I_j} a_i \leq b$ für alle $1 \leq j \leq m$ erfüllt ist ?

HC: Hamiltonian Circuit (Hamiltonscher Kreis).

Eingabe: Ein ungerichter Graph $G = (V, E)$.

Frage: Gibt es in G einen Hamiltonschen Kreis, d.h., können wir mit Kanten aus E einen Kreis formen, der jeden Knoten aus V genau einmal durchläuft ?

DHC: Directed Hamiltonian Circuit (Gerichteter Hamiltonscher Kreis)

Dies ist das entsprechende Problem für gerichtete Graphen.

TSP: Travelling Salesman Problem (Problem des Handelsreisenden)

Eingabe: Eine Kostenschranke C, n Städte $C_1, \dots, C_n$ und eine Distanzmatrix $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, wobei $d_{i,j} \in \mathbb{N}$ die Distanz zwischen C_i und C_j angibt.

Frage: Existiert eine Rundreise durch $C_1, \dots, C_n$, deren Gesamtlänge C nicht überschreitet, d.h., existiert eine Permutation σ von $1, \dots, n$, so dass

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\sigma(i)\sigma(i+1)} + d_{\sigma(n)\sigma(1)} \leq C \ ?$$

COLORABILITY: Graph Colorability (Graphenfärbungsproblem)

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Kann man die Knoten von G mit k Farben legal färben, d.h. existiert eine Abbildung $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ s.d. für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ die Bedingung $f(u) \neq f(v)$ erfüllt ist (d.h. benachbarte Knoten haben verschiedene Farben)?

k**-COLORABILITY:** Graph k-Colorability (Graphenfärbungsproblem mit k Farben)

Einschränkung von COLORABILITY auf eine konstante Anzahl von k Farben.