

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
SS 2009
Blatt 4

Aufgabe 4.1

Zeige, dass der Durchmesser des *node-insertion*-Nachbarschaftsgraphen für symmetrisches TSP (mit n Städten) kleiner ist als $n - 2$.

Aufgabe 4.2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Durchmesser D und maximalem Knotengrad Δ . Beweise:

$$|V| \leq \frac{\Delta(\Delta - 1)^D - 2}{\Delta - 2}$$

Hinweis: Zeige zunächst: $|V| \leq 1 + \sum_{i=0}^{D-1} \Delta(\Delta - 1)^i$

Aufgabe 4.3

Betrachte den booleschen Hyperwürfel $Q_n = (V, E)$, d.h.

$$V = \{0, 1\}^n \text{ und } E = \{ \{u, v\} \in V \times V \mid \# \{i \mid u_i \neq v_i\} = 1 \}$$

- Gib den Knotengrad und den Durchmesser von Q_n an.
- Wie viele lokale Optima kann es in einem Nachbarschaftsgraphen, der durch Q_n gegeben ist, höchstens geben? Mit Beweis.

Aufgabe 4.4

Betrachte das Sortierproblem für n Zahlen a_1, \dots, a_n , d.h. gesucht wird eine Permutation π von $\{1, \dots, n\}$ so dass die Kostenfunktion

$$f(\pi) := \sum_{i=1}^n i \cdot a_{\pi(i)}$$

minimiert wird. Wir definieren zwei neue Kostenfunktionen

$$g(\pi) := \sum_{i=2}^n s(a_{\pi(i)} - a_{\pi(i-1)})$$

und

$$h(\pi) := \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} s(a_{\pi(i)} - a_{\pi(j)})$$

$$\text{wobei } s(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Zeige, dass eine global optimale Permutation π bezüglich g bzw. h eine absteigende Sortierung der Zahlen liefert.
- b) Für welche der beiden Kostenfunktionen g bzw. h ist die *swap*-Nachbarschaftsfunktion exakt? Mit Beweis.