Hans U. Simon
Michael Kallweit

Bochum, den 16.04.2009
Abgabe bis 23.04.2009 um 12:00 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

SS 2009

Blatt 1

Aufgabe 1.1

Sei $A = \{1, 3, 6, 9\}$. Wir definieren die Kosten einer Umordnung τ der Zahlen aus A durch

$$f(\tau) := \sum_{i=1}^{4} i \cdot \tau(i)$$

($\tau(i)$ ist die i-te Zahl in τ). Betrachte das Problem, eine Umordung mit minimalen Kosten zu bestimmen. Die *swap*-Nachbarschaftsfunktion ist definiert durch: *τ' ist swap-Nachbar von τ, wenn τ' aus τ genau durch Vertauschen zweier hintereinanderstehender Zahlen hervorgeht.*

a) Gib den Lösungsraum des Problems an.

b) Gib die Kosten für jede Lösung (d.h. Umordnung) an.

c) Gib den Transitionsgraphen bzgl. der *swap*-Nachbarschaftsfunktion an.

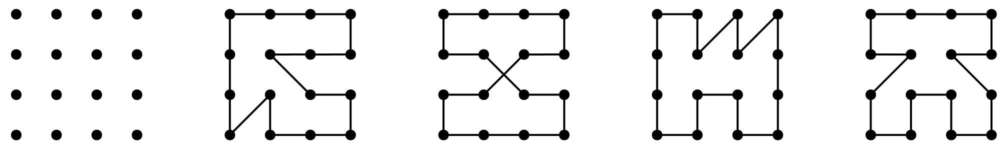
d) Ist die Nachbarschaftsfunktion exakt? Bestimme die Tiefe (depth) aller lokalen Optima.

Aufgabe 1.2

Man möchte das Problem aus Aufgabe 1.1 mit dem *iterative-improvement*-Algorithmus lösen. Eine initiale Lösung wird anfangs zufällig uniform gewählt. Vergleiche die beiden *Pivoting*-Regeln *first-improvement* und *best-improvement* für diesen speziellen Fall. Welche der beiden Strategien liefert die geringere erwartete Anzahl von Iterationen? Mit Beweis.

Aufgabe 1.3

Betrachte die Probleminstanz von TSP in Bild (a): 16 Städte, deren Distanz zueinander euklidisch gemessen wird (Skala: Zwei horizontal oder vertikal benachbarte Städte haben Distanz 1.)



(a) (b) (c) (d) (e)

Entscheiden sie (mit Begründung) für die Rundtouren (b)-(e), ob diese lokal optimal bzgl. der Nachbarschaftsfunktionen *2-change* und *node-insertion* sind.

Aufgabe 1.4

Betrachte das Problem

> **Knapsack Problem:** Gegeben sei eine Menge A mit Objekten, denen jeweils ein Wert $w_i \in \mathbb{N}^+$ und ein Gewicht $g_i \in \mathbb{N}^+$ zugeordnet sind, und eine Gewichtsschranke $B \in \mathbb{N}^+$. Eine Teilmenge $A' \subseteq A$ heißt *zulässige Lösung*, wenn $\sum_{i \in A'} g_i \leq B$ ist. Gesucht wird eine zulässige Lösung mit maximalen Wert $\sum_{i \in A'} w_i$.

und die zwei Nachbarschaftsfunktionen

> **swap:** Zwei zulässige Lösungen A' und A'' heißen *swap*-Nachbarn, wenn A'' aus A' durch Austausch eines Elementes (also Entfernen eines Elementes <u>und</u> Hinzufügen eines neuen) entsteht.
> **move:** Zwei zulässige Lösungen A' und A'' heißen *move*-Nachbarn, wenn A'' aus A' <u>entweder</u> durch Entfernen <u>oder</u> Hinzufügen eines Elements entsteht.

und die Probleminstanz

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = 3, \quad (g_1, g_2, g_3) = (2, 1, 2), \quad (w_1, w_2, w_3) = (1, 2, 3)$$

a) Gib einen großen Nachteil der *swap*-Nachbarschaftsfunktion an.

b) Gib den Transitionsgraph bezüglich der *move*-Nachbarschaftsfunktion an.

c) Gib den Durchmesser und das Potential des Transistionsgraphen aus b) an. Ist die *move*-Nachbarschaftsfunktion exakt? Bestimme die Tiefe (depth) aller lokalen Optima.

d) Man möchte die obige Probleminstanz mit dem *iterative-improvement*-Algorithmus, der *move*-Nachbarschaftsfunktion und der *best-improvement-Pivoting*-Regel lösen. Eine initiale Lösung wird anfangs zufällig uniform gewählt. Bestimme für jede zulässige Lösung die Wahrscheinlichkeit, dass sie als finale Lösung ausgegeben wird.

Informationen zu den Übungen

- Die Übung findet **donnerstags um 8:00 Uhr im Raum NA 2/24** statt. Die erste Übung ist am **23.04.2009**.
- Auf jedem Übungsblatt gibt es vier Aufgaben mit jeweils vier erreichbaren Punkten. Die Übungsblätter werden donnerstags auf der Internetseite

  `http://www.rub.de/lmi/lehre/kplx_ss09`

  zur Verfügung gestellt.
- Die bearbeiteten Aufgaben sind am darauffolgenden Donnerstag, in der dazugehörigen Übung oder spätestens bis 12 Uhr abzugeben.
- Einen Schein erhält, wer mindestens die Hälfte der Punkte erreicht, in den Übungen mehrere Male vorrechnet und regelmäßig an den Übungen teilnimmt.
- Die Sprechstunde von Michael Kallweit ist montags von 10 bis 11 Uhr im Raum NA 1/74.