Die schnelle Fouriertransformation

```
Eingabe: $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ mit $n$ Zweierpotenz, komplexe Zahl $\omega$
Ausgabe: $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, so dass $\xi_j = p_{\vec{a}}(\omega^j)$

if $n = 1$ then
        $\xi_0 \leftarrow a_0$
else begin
        $\vec{a}_g \leftarrow (a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-2})$
        $\vec{a}_u \leftarrow (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{n-1})$

        $(\phi_0, \ldots, \phi_{\frac{n}{2}-1}) \leftarrow \mathrm{DFT}(\vec{a}_g, \omega^2)$
        $(\psi_0, \ldots, \psi_{\frac{n}{2}-1}) \leftarrow \mathrm{DFT}(\vec{a}_u, \omega^2)$

        for $j = 0$ to $\frac{n}{2} - 1$ do begin
                $\xi_j \leftarrow \phi_j + \omega^j \cdot \psi_j$
                $\xi_{\frac{n}{2}+j} \leftarrow \phi_j + \omega^{\frac{n}{2}+j} \cdot \psi_j$
        end
end
return $(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$
```

Wenn n keine Zweierpotenz ist, wird n vergrößert und $\vec{a}$ hinten mit Nullen aufgefüllt.

Schnelles Multiplizieren von zwei Polynomen

Wir wollen $p_{\vec{a}} = 2x^2 + 3x - 4$ und $p_{\vec{b}} = x - 1$ mit der schnellen Fouriertransformation multiplizieren.

1. n bestimmen, Vektoren aufstellen:

   Der Grad von $p_{\vec{a}}$ ist 2 und der von $p_{\vec{b}}$ ist 1. Das Produkt $p_{\vec{a}} \cdot p_{\vec{b}}$ hat also Grad 3.

   Das heißt wir brauchen 4 Koeffizienten um das Produkt zu bestimmen, also gilt $n = 4$. 4 ist sogar schon eine Zweierpotenz und muss nicht weiter vergrößert werden.

   Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestehen aus den Koeffizienten der beiden Polynome und müssen mit Nullen aufgefüllt werden, um die Größe 4 zu erreichen:

   $$\vec{a} = (-4, 3, 2, 0), \qquad \vec{b} = (-1, 1, 0, 0)$$

2. Primitive n-te Einheitswurzel bestimmen:

   $$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2) = 0 + i \cdot 1 = i$$

   (i ist hier die komplexe Einheit mit $i^2 = -1$)

3. Mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die diskrete Fouriertransformation berechnen:

   Wir rufen den Algorithmus `DFT` mit den Parametern $\vec{a}$ (Länge $n = 4$) und $\omega = i$ auf. Die ausführliche Rechnung steht auf der nächsten Seite. Das Ergebnis ist: $\mathrm{DFT}(\vec{a}, i) = (1,\ -6 + 3 \cdot i,\ -5,\ -6 - 3 \cdot i)$

   Genauso berechnen wir auch: $\mathrm{DFT}(\vec{b}, i) = (0,\ -1 + i,\ -2,\ -1 - i)$

4. Komponentenweise Multiplikation:

   $$\vec{\psi} = \big(1 \cdot 0,\ (-6 + 3 \cdot i) \cdot (-1 + i),\ (-5) \cdot (-2),\ (-6 - 3 \cdot i) \cdot (-1 - i)\big)$$
   $$= \big(0,\ 3 - i \cdot 9,\ 10,\ 3 + i \cdot 9\big)$$

5. Inverse Transformation berechnen:

   Wegen $\mathrm{IDFT}(\vec{\psi}, \omega) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{DFT}(\vec{\psi}, \omega^{-1})$, können wir wieder den Algorithmus benutzen. Dieses Mal verwenden wir jedoch ω^{-1} anstatt ω, also i^{-1} statt i. Das Inverse von i ist $-i$, wegen $i \cdot (-i) = -i^2 = 1$.

   $$\vec{c} = \mathrm{IDFT}(\vec{\psi}, i) = \frac{1}{4} \cdot \mathrm{DFT}(\vec{\psi}, -i) = \frac{1}{4} \cdot (16,\ -28,\ 4,\ 8) = (4,\ -7,\ 1,\ 2)$$

Die Lösung ist also: $p_{\vec{a}}(x) \cdot p_{\vec{b}}(x) = 4 - 7x + x^2 + 2x^3$

$n = 4$
$\omega = i$

$\vec{a} = (-4, 3, 2, 0)$
$\Rightarrow \vec{a}_g = (-4, 2),\ \vec{a}_u = (3, 0)$

gerade | ungerade

$n = \frac{4}{2} = 2$
$\omega = i^2 = -1$

$\vec{a} = (-4, 2)$
$\Rightarrow \vec{a}_g = (-4),\ \vec{a}_u = (2)$

gerade | ungerade

$\vec{a} = (3, 0)$
$\Rightarrow \vec{a}_g = (3),\ \vec{a}_u = (0)$

gerade | ungerade

$n = \frac{2}{2} = 1$
$\omega = (-1)^2 = 1$

$\vec{a} = (-4)$
$\Rightarrow \xi_0 = -4$

$\vec{a} = (2)$
$\Rightarrow \xi_0 = 2$

$\vec{a} = (3)$
$\Rightarrow \xi_0 = 3$

$\vec{a} = (0)$
$\Rightarrow \xi_0 = 0$

ϕ | ψ | ϕ | ψ

$n = 2$
$\omega = -1$

For-Schleife mit $j = 0$:
$\xi_0 = -4 + \omega^0 \cdot 2 = -2$
$\xi_1 = -4 + \omega^{2/2+0} \cdot 2 = -6$

For-Schleife mit $j = 0$:
$\xi_0 = 3 + \omega^0 \cdot 0 = 3$
$\xi_1 = 3 + \omega^{2/2+0} \cdot 0 = 3$

ϕ | ψ

$n = 4$
$\omega = i$

For-Schleife mit $j = 0$:
$\xi_0 = -2 + \omega^0 \cdot 3 = 1$
$\xi_{4/2+0} = \xi_2 = -2 + \omega^{4/2+0} \cdot 3$
$= -2 + i^2 \cdot 3 = -5$

For-Schleife mit $j = 1$:
$\xi_1 = -6 + \omega^1 \cdot 3 = -6 + 3 \cdot i$
$\xi_{4/2+1} = \xi_3 = -6 + \omega^{4/2+1} \cdot 3$
$= -6 + i^3 \cdot 3 = -6 - 3 \cdot i$