Präsenzaufgabe 3.1

Wir wählen $\mathcal{D} = \mathcal{Y} = [0,1]$. Zeige, dass die quadratische Verlustfunktion $\ell(p,y) = (p-y)^2$ exponentiell konkav ist für alle $\eta \leq \frac{1}{2}$.

Präsenzaufgabe 3.2

Zeige: Sei $f(x)$ exponentiell konkav für ein $\eta > 0$, dann ist f konvex.

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)

Zeige: Sei $f(x)$ exponentiell konkav für ein $\eta > 0$, dann ist f exponentiell konkav für alle $\eta' \in (0, \eta)$.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{D} = \mathcal{Y}$ die Sphäre mit Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass die Verlustfunktion $\ell(p,x) = \|p-x\|^2$ exponentiell konkav ist für $\eta \leq \frac{1}{8r}$.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Wir betrachten eine abzählbar unendliche Klasse von Experten: $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \cong \mathbb{N}$ und wir verwenden den exponentiell gewichteten Forecaster mit (angepasstem) Potential

$$\Phi_\eta(\mathbf{u}) := \frac{1}{\eta} \ln \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} q_i e^{-\eta u_i} \right) ,$$

wobei q_i eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{N}$ ist mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} q_i = 1$.

Beweise: Ist ℓ exponentiell konkav für η, dann gilt

$$\Phi(\mathbf{R}_t) \leq \Phi(\mathbf{R}_{t-1}) .$$