

Aufgabe 1.1

Beweise die Ungleichung von Jensen:

Sei $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für alle konvexen Kombinationen $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ mit $x_i \in C$, $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Aufgabe 1.2

Wir betrachten eine Folge von Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \dots \in \{0, 1\} =: \mathcal{Y}$, die alle unabhängig und identisch Bernoulli-verteilt sind: $Y_i \sim B(p)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$. Unser Entscheidungsraum ist $\mathcal{D} = [0, 1]$ und wir verwenden die Verlustfunktion $\ell(\hat{p}, y) = |\hat{p} - y|$.

- Entwerfe einen Forecaster \hat{p}_t für die obige Situation, wenn p unbekannt ist und berechne den zu erwartenden kumulativen Verlust $\mathbb{E}[\sum_{t=1}^n \ell(\hat{p}_t, Y_t)]$ in Abhängigkeit von p .
- Für welche Verteilungen ist es "schwer" gute Vorhersagen zu ermitteln?
- Vergleiche Deinen Forecaster \hat{p}_t mit dem besten der beiden konstanten "Experten" $f_{0,t} = 0$ und $f_{1,t} = 1$.
- Wie schneidet Dein Forecaster \hat{p}_t im Vergleich zum "exponentially weighted average forecaster" ab, der nicht auf der Annahme basiert, dass die Folge y_1, \dots, y_n durch unabhängig identisch verteilte Größen erzeugt wird.

Aufgabe 1.3

Sei $\mathcal{D} \neq \emptyset$ konvex. Für Verlustfunktionen $\ell : \mathcal{D} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$, die in der ersten Komponente konvex sind, haben wir für "weighted average forecaster" in der Vorlesung die folgenden beiden Schranken gezeigt:

$$R_n^* = \hat{L}_n - \min_{i=1, \dots, N} L_{i,n} \leq \begin{cases} \sqrt{ne(2 \ln N - 1)} & (\text{polynomial, } p = 2 \ln N) \\ \sqrt{2n \ln N} & (\text{exponentially, } \eta = \sqrt{2 \ln N/n}) \end{cases}$$

Zeige, dass diese Resultate sich nicht auf den Fall einer nicht-konvexen Verlustfunktion verallgemeinern lassen.

Alle wichtige Informationen zur Vorlesung und den Übungen

finden sich im Internet unter

http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi/lehre/al_ss07/ .