Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

WS 2007/08

# Numerische Mathematik für Umwelttechniker und Maschinenbauer Aufgabenblatt 6

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 31. Januar 2008

1. Bestimmen Sie eine Näherung für den am nächsten bei $\tilde{\mu} = 3$ gelegenen Eigenwert der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
und einen zugehörigen normierten Eigenvektor, indem Sie eine Iteration des Wielandt-Verfahren auf $A - \tilde{\mu} I$ mit dem Startvektor
$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
anwenden.

2. Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = 2ty^2, \qquad y(0) = 25.$$
Wenden Sie auf dieses AWP je zwei Schritte des expliziten Euler-Verfahrens, des impliziten Euler-Verfahrens und des Crank-Nicolson-Verfahrens mit der Schrittweite $h = 0.1$ an. Vergleichen Sie die erhaltenen Näherungen mit den exakten Werten $y(0.1)$ und $y(0.2)$. Was fällt Ihnen auf? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

3. Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = -20y + t + 2, \qquad y(0) = 1.$$
Wenden Sie auf dieses AWP zwei Schritte des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit der Schrittweite $h = 0.5$ an. Vergleichen Sie den berechneten Wert $\eta_2$ mit $y(1)$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

4. Zeigen Sie, dass für die Lösung $\boldsymbol{y}$ des Anfangswertproblem
$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$$
die Energie
$$E(t) = w^2 \big(y_1(t)\big)^2 + \big(y_2(t)\big)^2$$
konstant ist. Wenden Sie auf das AWP das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren mit fester Schrittweite $h$ an. Geben Sie jeweils die diskrete Energie
$$E_i := \omega^2 \eta_{i,1}^2 + \eta_{i,2}^2$$
in Abhängigkeit von $E_{i-1}$ an. Was schließen Sie daraus für das Verhalten der diskreten Energien bei $i \to \infty$?