Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

WS 2007/08

Numerische Mathematik für Umwelttechniker und Maschinenbauer Aufgabenblatt 5

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 17. Januar 2008

1. Wenden Sie das Romberg-Verfahren mit $K = N = 3$ auf das Integral
$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2}\,dx$$
an und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Wert.

2. Leiten Sie eine Quadraturformel für Integrale der Form
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$
her, indem Sie zunächst die Funktion f in den Knoten -1, 0, 1 interpolieren und dann das obige Integral für das erhaltene quadratische Interpolationspolynom exakt ausrechnen. Wenden Sie die ermittelte Quadraturformel auf die Funktion $f(x) = x^4$ an und vergleichen Sie den Näherungswert mit dem exakten Integralwert.
Hinweis Alle auftretenden Integrale können mittels partieller Integration und unter Ausnutzung von
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1.$$
berechnet werden.

3. Wendet man die zusammengesetzte Trapezregel oder die zusammengesetzte Simpsonregel auf das Integral
$$\int_{2}^{3} \frac{1}{x}\,dx$$
an, so kann man zeigen, dass der Fehler bei exakter Arithmetik kleiner oder gleich $h^2/8$ bzw. $h^4/32$ ist. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von h den Gesamtfehler für die beiden Quadraturformeln unter der Annahme, dass jede Funktionsauswertung einen Rundungsfehler von 10^{-8} verursacht und die sonstigen Operationen ohne Rundungsfehler ausgeführt werden können. Bestimmen Sie für beide Quadraturformeln die optimale Schrittweite h und den zugehörigen Gesamtfehler. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

4. Bestimmen Sie für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
eine Näherung für den betragsgrößten Eigenwert und für einen zugehörigen Eigenvektor, indem Sie zwei Schritte der Potenzmethode für den Startwert
$$x_0 = (1, 2, 1)^T$$
ausführen.